



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología
en Educación Matemática.

Volumen XII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2024
ISSN: 2395-955X

| Directorio | Contenido | Pág. |
|--|--|-------|
| Rafael Pantoja R. Director | SECUENCIA DIDÁCTICA PARA ENSEÑAR SERIES DE FOURIER CON TECNOLOGÍA: ESTUDIO DE CASO DE ONDA CUADRADA | |
| Eréndira Núñez P. | Noelia Londoño Millán Francisco Hazael Camarillo Mendoza Alibeit Kakes Cruz | 1-25 |
| Lilia López V. | | |
| Sección: Selección de artículos de investigación | PRÁCTICAS DE MODELACIÓN CON TRACKER Y GEOGEBRA CON SITUACIONES COTIDIANAS, PARA EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS | |
| Elena Nesterova | Maritza Elizabeth López Alcalá Rafael Pantoja Rangel | 26-39 |
| Alicia López B. | | |
| Verónica Vargas Alejo | PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN EMR PARA APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN NIVEL SUPERIOR | |
| Sección: Experiencias Docentes | Paola Guadalupe Chávez Gutiérrez Liliya Yakhno Guadalupe Vera-Soria | 40-51 |
| Esnel Pérez H. | | |
| Armando López Zamudio | EN BÚSQUEDA DE ALTERNATIVAS: SOFTWARE LIBRE PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS | |
| Sección: GeoGebra | José Francisco Villalpando Becerra Rafael Pantoja Rangel | 52-64 |
| Edgardo Morales O. Sitio Web | | |

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año XII, No. 2, julio-diciembre 2024, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: rafael.prangel@academicos.udg.mx. Dirección electrónica: <http://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

COMITÉ DE EVALUACIÓN

Rodrigo Lugo Pérez
CBTIS 68. SEP

Eduardo Carrasco Henríquez
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile

Esnel Pérez Hernández
AMIUTEM

Mireille Zaboya, Fernando Hitt Espinoza
Universidad de Quebeq en Montreal

Graciela Eréndira Núñez Palenius, José Carlos Cortés Zavala
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Silvia Ibarra Olmos, José Luis Soto Munguía, Ana Guadalupe Del Castillo
Bojórquez
Universidad de Sonora

José Zambrano Ayala
Tecnológico Nacional de México. SEP
Lilia López Vera
Universidad Autónoma de Nuevo León

Alexander Yakhno, Elena Nesterova, Liliya Yakhno, José Francisco
Villalpando Becerra
CUCEI, Universidad de Guadalajara

Samantha Analuz Quiroz Rivera, Noelia Londoño Millán
Universidad Autónoma de Coahuila

Armando López Zamudio
CBTIS 94.SEP

Ulises Said Landín Juárez
ESTV16303. SEP



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores
del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen XII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2024
ISSN: 2395-955X

Directorio

Rafael Pantoja R.
Director

Eréndira Núñez P.
Lilia López V.

Sección: Artículos de
investigación

Elena Nesterova

Alicia López B.

Verónica Vargas Alejo

Sección: Experiencias

Docentes

Esnel Pérez H.

Armando López Z.

Sección: GeoGebra

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA ENSEÑAR SERIES DE FOURIER CON TECNOLOGÍA: ESTUDIO DE CASO DE ONDA CUADRADA

Noelia Londoño Millán, Francisco Hazael Camarillo Mendoza, Alibeit Kakes

Cruz

noelialondono@uadec.edu.mx, hazaelcamarillo@uadec.edu.mx,

alibetkakes@uadec.edu.mx

Universidad Autónoma de Coahuila

Para citar este artículo:

Londoño, N., Camarillo, F., Kakes, A. (2024). Secuencia didáctica para enseñar series de Fourier con tecnología: estudio de caso de onda cuadrada. Construyendo rectángulos. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, XII (2), 1-25.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año XII, No. 2, julio-diciembre de 2024, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: <http://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA ENSEÑAR SERIES DE FOURIER CON TECNOLOGÍA: ESTUDIO DE CASO DE ONDA CUADRADA

Noelia Londoño Millán, Francisco Hazael Camarillo Mendoza, Alibeit Kakes Cruz

noelialondono@uadec.edu.mx, hazaelcamarillo@uadec.edu.mx,

alibetkakes@uadec.edu.mx

Universidad Autónoma de Coahuila

Resumen

La reflexión sobre la enseñanza de las series de Fourier pone de relieve que el dominio de este tema requiere una sólida comprensión de sus fundamentos teóricos y explicaciones exhaustivas. Además, es fundamental que los estudiantes se involucren en procesos cognitivos que apoyen su comprensión e institucionalización del concepto. Por esta razón, proponemos desarrollar e implementar una secuencia didáctica para la enseñanza de las series de Fourier, incorporando herramientas tecnológicas que permitan a los estudiantes de ingeniería explorar diversos escenarios, ajustar variables y observar resultados inmediatos. Este enfoque fomenta el aprendizaje activo y una comprensión más profunda de los conceptos en estudio. En este trabajo, nos centramos específicamente en detallar las características de esta propuesta didáctica y su implementación, con especial énfasis en el estudio de una onda cuadrada.

Palabras clave: Series de Fourier, GeoGebra, enseñanza

Abstract

Reflecting on the teaching of the Fourier series highlights that mastering this topic requires a solid understanding of its theoretical foundations and thorough explanations. Moreover, it is essential for students to engage in cognitive processes that support their comprehension and institutionalization of the concept. For this reason, we propose developing and implementing a didactic sequence for teaching the Fourier series, incorporating technological tools that enable engineering students to explore various scenarios, adjust variables, and observe immediate outcomes. This approach fosters active learning and a deeper understanding of the concepts under study. In this paper, we specifically focus on detailing the characteristics of this didactic proposal and its implementation, with a particular emphasis on the study of a square wave.

Keywords: Fourier Series, GeoGebra, Teaching.

Introducción

Las Series de Fourier es un tema recurrente en los currículos de carreras tecnológicas e ingenierías, en asignaturas como modelos matemáticos, vibraciones mecánicas y ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo, los estudiantes suelen mostrar un bajo rendimiento en este tema según Romero y Farfán (2016), por un lado, desconocen los constructos previos que se requieren para abordarlos y por otro, se imparte de una manera muy teórica.

Una posible explicación para el bajo rendimiento de los alumnos podría ser la falta de conocimientos previos en áreas fundamentales como identidades trigonométricas, funciones, sucesiones y series, a esto se le puede sumar el enfoque pedagógico predominantemente teórico, que contribuye a la dificultad de los estudiantes para experimentar y comprender los

fenómenos relacionados, ya que no se les brinda suficiente espacio para explorar estos conceptos de manera práctica y contextualizada.

Las primeras ideas que referían a las series trigonométricas fueron consideradas por los babilonios y posteriormente por D'Alambert en 1747 y fue hasta 1821 que Fourier publicó su tratado "Teoría analítica del calor", donde amplió y formalizó los conceptos sobre la ecuación de conducción de calor.

En cuanto a la enseñanza de las Series de Fourier, Moreno (1999, citado en Romero y Farfán, 2016) señala una tendencia hacia un enfoque formal, donde los profesores se limitan a explicar ejemplos y asignar ejercicios. Esta observación se confirma en una revisión de tres textos clave para estudiantes de ingeniería (Hsu, 1973; Kreyszig, 2001; Zill, 1997) los cuales ofrecen solo conceptos y fórmulas para resolver series y transformadas de Fourier, sin incluir una parte experimental que refuerce los conceptos.

Reyes y Arellano (2014) indican que las dificultades en la enseñanza de física y ecuaciones diferenciales, así como en materias especializadas como dinámica y vibraciones mecánicas, se deben a la falta de visualización de los fenómenos modelados matemáticamente. Por ello, proponen un prototipo de mesa vibratoria para ilustrar conceptos matemáticos como las series de Fourier y los modelos dinámicos de sistemas mecánicos desbalanceados, con el objetivo de mejorar la comprensión física y matemática mediante la generación y análisis de señales de aceleración periódicas.

Los ejemplos y antecedentes bibliográficos revisados ofrecen una perspectiva sobre la enseñanza de las series de Fourier, lo que nos permite establecer el objetivo central de nuestra investigación: Crear una secuencia didáctica en la que se pueda vincular un fenómeno físico al tema matemático de la serie de Fourier en el cual nos permita visualizar y comprender las sumas parciales asociados al fenómeno físico, en particular al análisis de señales. Debido a limitaciones de espacio, en este artículo nos enfocaremos en describir las características y la implementación didáctica de la propuesta, particularmente en relación con una onda cuadrada.

Referente teórico

En esta sesión se describe brevemente lo que es una serie de Fourier, sus características y elementos clave para el desarrollo, así mismo se incluirá un apartado sobre herramientas tecnológicas a la enseñanza de las matemáticas, haciendo alusión particular a los usos en las series de Fourier. Según González (2003), Zill et al. (2018), Yáñez, (2015) y Rao, et al. (2012), las Series de Fourier consisten en la descomposición de cualquier función periódica en una suma infinita de funciones sinusoidales (senos y cosenos), cuyas frecuencias son múltiplos de la función original. Esta descomposición permite analizar las propiedades de la función y la composición de sus componentes o fenómenos.

La serie de Fourier de una función periódica integrable de f definida en el periodo $-p, p$ se define mediante la siguiente serie trigonométrica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \right], \text{ donde}$$

a_0 , a_n y b_n son los coeficientes de Fourier, que se obtienen de la siguiente manera:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-p}^p f(x) dx$$

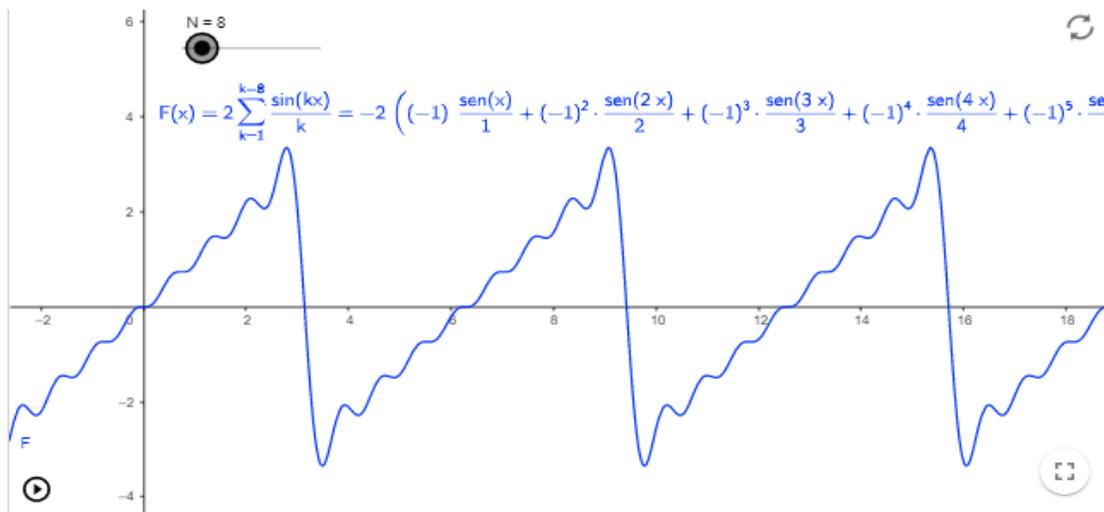
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{p} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p} x\right) dx$$

En la figura 1, se muestra una gráfica y su respectivo desarrollo algebraico en serie de Fourier, construida con el software GeoGebra, dicha función es periódica y cumple las condiciones que permite su transformación.

Figura 1

Representación gráfica y algebraica de la Serie de Fourier para una función periódica



Nota: Tomado de Hall (2022).

Elementos clave en las series de Fourier

Operaciones básicas. Son varias las operaciones básicas que los alumnos deben dominar para comprender las series de Fourier, de acuerdo con Gómez (s/f) se necesita entender la suma, la multiplicación, el desplazamiento y la reflexión de funciones que dependen del tiempo para la representación y procesamiento de funciones.

Tabla 1. Algunas operaciones básicas de funciones

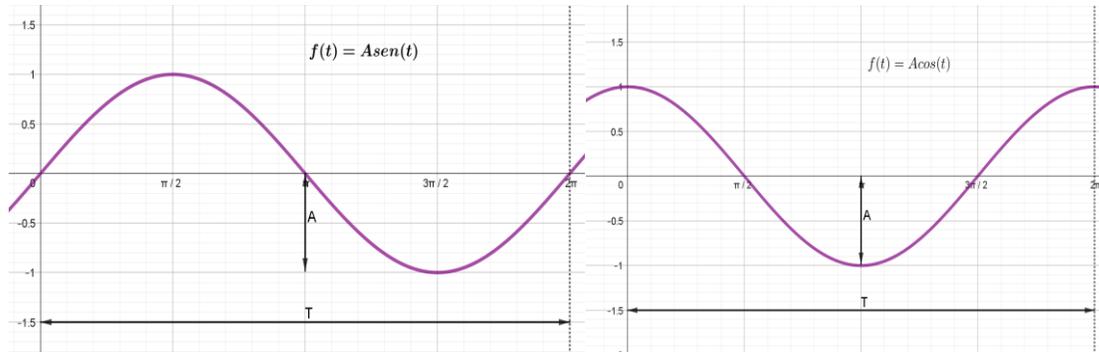
| Nombre de la operación | Definición |
|---|--------------------------|
| Suma de funciones | $g(t) = f_1(t) + f_2(t)$ |
| Multiplicación por una constante α | $g(t) = \alpha f(t).$ |
| Desplazamiento en el tiempo | $f(t - \tau)$ |
| Reflexión en el tiempo | $f(-t).$ |

Nota. Esta tabla muestra el nombre y definición de algunas funciones básicas.

Funciones periódicas. Otro elemento importante que deben conocer los alumnos al resolver series de Fourier es lo relacionado con la función periódica, este se define como: una función para la cual $f(t) = f(t + T)$, para todo valor de t , donde la constante T se denomina periodo de la función. El periodo también se puede definir como el tiempo transcurrido entre dos puntos equivalentes de una función. Las funciones periódicas más representativas son las funciones trigonométricas seno y coseno, (Figura 2), ambas con periodo $T = 2\pi$.

Figura 2

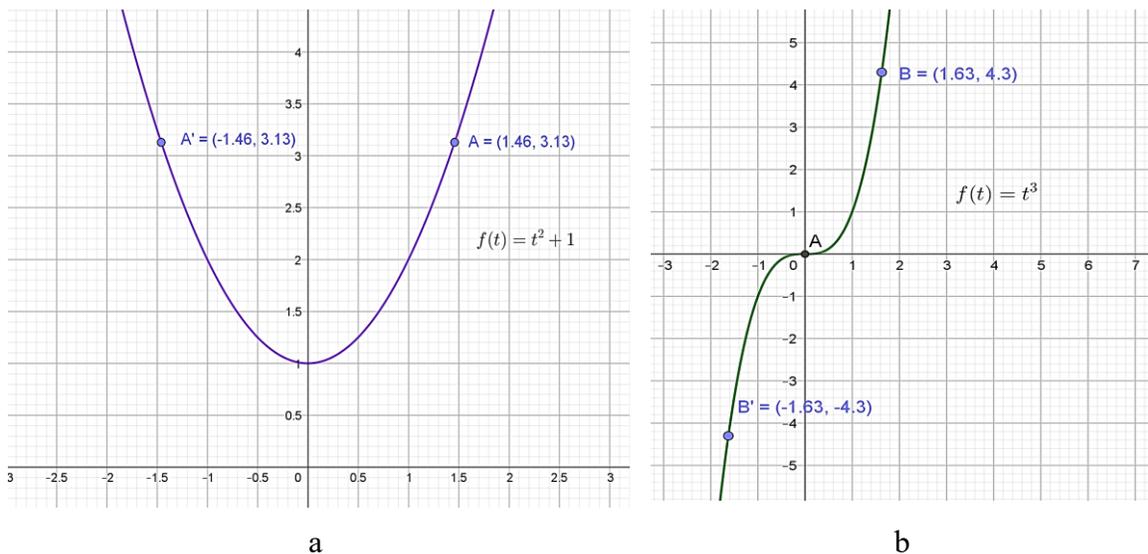
Funciones periódicas $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ con periodo $T = 2\pi$



Paridad de funciones. Un elemento que agiliza la búsqueda de los coeficientes de la serie de Fourier es identificar si las funciones son pares e impares, como no siempre es preciso tener su representación gráfica, conviene usar sus definiciones. Si se cumple que $f(t) = f(-t)$, lo cual indica que la señal tiene los mismos valores para el lado positivo y negativo de t . Por ejemplo, la función $f(t) = t^2 + 1$ es par (Figura 5a). Contrario a lo anterior si se cumple que $f(-t) = -f(t)$, significa que la función es impar, lo cual indica que su gráfica no se altera luego de una rotación de 180° alrededor del origen. Por ejemplo, la función $f(t) = t^3$ es impar (Figura 5b).

Figura 3

Gráficas de las funciones: $f(t) = t^2 + 1$ y $f(t) = t^3$, par e impar respectivamente



Herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas

Varios autores (Rodríguez, et al., 2023; Ruthven, 2009; Laborde, 2001; Drijvers & Trouche, 2014; Barba, et al., 2017) coinciden en que el uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas ha evolucionado y se han ampliado los métodos significativamente en las últimas décadas, creando espacios innovadores, transformando la manera en que los estudiantes interactúan con los conceptos matemáticos. Desde la introducción de calculadoras gráficas hasta el uso de software interactivo y herramientas en línea, la tecnología ha facilitado la visualización, la experimentación y la comprensión de conceptos abstractos y consideran que este enfoque no solo mejora el aprendizaje al hacer las matemáticas más accesibles y prácticas, sino que también fomenta el desarrollo de habilidades de resolución de problemas y el pensamiento crítico.

En el caso específico de la enseñanza de las series de Fourier, se ha demostrado que el uso de herramientas tecnológicas no solo facilita la comprensión teórica del tema, sino que también favorece la visualización de representaciones gráficas y algebraicas, lo cual contribuye a una mejor comprensión de conceptos abstractos, como la descomposición de señales periódicas en componentes sinusoidales (Romero & Farfán, 2016). Además, estas herramientas permiten la interacción directa con los parámetros de las series de Fourier, tales como amplitudes y frecuencias, lo que brinda a los estudiantes la oportunidad de explorar cómo las señales resultantes cambian al ajustar dichos parámetros (Muro et al., 2007).

Otro elemento clave que se tuvo en cuenta son las aplicaciones prácticas porque la visualización mediante herramientas tecnológicas es crucial en campos como la ingeniería, las telecomunicaciones, la física y otras disciplinas donde las series de Fourier tienen aplicaciones directas. Esto permite a profesionales y estudiantes comprender cómo se aplican estos conceptos en situaciones reales.

Diseño de la propuesta

La secuencia didáctica que se diseñó tuvo una componente teórica y varias sesiones prácticas para la cual se emplearon recursos tecnológicos, como lo son una actividad en GeoGebra, con su respectivo applet que muestra la forma de una onda cuadrada de una serie de Fourier y el alumno la visualiza con diferentes valores de n , también en la parte de modelación se propuso utilizar un circuito eléctrico, en donde, después de que los alumnos armaron el circuito se utilizó un osciloscopio como medio tecnológico para poder visualizar la onda cuadrada. Lo que se pretende es vincular la matemática, con aplicaciones de la vida real.

Según Díaz-Barriga, (2013), elaborar una secuencia didáctica para una clase, implica establecer situaciones de aprendizaje que se implementarán en el aula con los alumnos. Una secuencia didáctica trata y consiste en una cadena de acciones implementadas en un orden específico que se adecuan al objetivo que se quiere lograr. Son actividades diseñadas para crear situaciones que permitan al estudiante desarrollar un aprendizaje significativo.

Para el diseño de la secuencia didáctica y la introducción de un modelo físico, se ha considerado lo expuesto por Mederos y González (2005). Ellos definen la modelación como el proceso de construir modelos de los objetos que se desean estudiar en asignaturas del conocimiento humano. El propósito de este proceso es aplicar las leyes y resultados a la

información de los modelos, para luego transferirlos a los objetos reales y comprobar si los resultados son válidos.

En el proceso de modelación, es importante que el modelo:

- Sea simple para su estudio.
- Muestre una variedad de aspectos del objeto o de los objetos reales, de modo que constituya una “imagen” que contenga la mayor cantidad de información posible sobre dichos objetos. Esto asegura que la mayoría de los resultados obtenidos del modelo sean consistentes al transferirlos al objeto real.

La secuencia didáctica se aplicó a un grupo de ingenieros físicos de una universidad del norte de México, quienes estaban cursando entre el quinto y sexto semestre de la asignatura "Métodos Matemáticos para Ingenieros I". Esta asignatura incluye el tema de la Serie de Fourier, el cual también se aborda en otras materias del plan de estudios.

La secuencia didáctica estuvo conformada por inicio, desarrollo y cierre, usando varias sesiones, instrumentos y tareas como se especifica en la Tabla 2.

Tabla 2. Estructura general de la secuencia didáctica

| | | Sesiones | Tareas |
|--|--|---|--|
| Parte 1 | Explicación teórica | Sesión 1. Conocimientos básicos. | |
| | | Sesión 2. Serie de Fourier y sus sumas parciales. | |
| Parte 2 | Implementación actividad en GeoGebra | Sesión 1. diagnóstico. | 1-3. Conocimientos básicos. |
| | | Sesión 2. Encontrar los coeficientes de la serie de Fourier y graficar. | 4-6. desarrollar la serie de Fourier de una onda cuadrada y graficar con 5 términos. |
| | Construcción del dispositivo | Sesión 1. Explicación del diagrama eléctrico. | Tarea 7. Visualización y explicación del diagrama eléctrico y componentes principales. |
| | | Sesión 2. Armado del dispositivo generador de onda cuadrada. | Tarea 8. Armado y prueba del circuito. |
| | Exploración del circuito | Sesión 1. Visualización con el osciloscopio. | Tarea 9 y 11 . El alumno observa la onda cuadrada en el osciloscopio y contesta las preguntas en la actividad de GeoGebra. |
| Sesión 2. Variación de la resistencia. | | Tarea 12 a 15. El alumno varía la onda cuadrada en el osciloscopio al modificar la resistencia con el potenciómetro y contesta las preguntas en la actividad de GeoGebra. | |
| Exploración con applet | Sesión 1. Variación de los términos de n en un applet de GeoGebra. | Tarea 16. El alumno visualiza en un applet de GeoGebra como cambia la gráfica de la onda cuadrada al variar los parámetros de n. | |
| Parte 3 | Discusión grupal | Sesión 1. Formalización de conocimientos. | Aclaración de dudas y preguntas acerca del tema. |

Nota: En esta tabla se resume la secuencia didáctica que se aplicó.

Parte 1. Explicación teórica. Se dividió en 2 sesiones. La primera fue lo relacionado con los conocimientos previos que se requieren para la enseñanza de la Serie de Fourier, en lo referente a funciones periódicas, concepto de paridad, se muestran diferentes gráficas, se hacen varios ejemplos. También se explica que la mayoría de las funciones no son ni pares ni impares. Esta parte se explicó a través de la plataforma de Microsoft Teams.

Para complementar esta parte teórica se da a conocer una breve reseña histórica de las series de Fourier, destacando sus orígenes. También se explican algunas aplicaciones de las Series de Fourier, tales como vibraciones mecánicas, análisis de señales, barrido de imágenes, procesamiento de audio y predicción de eventos.

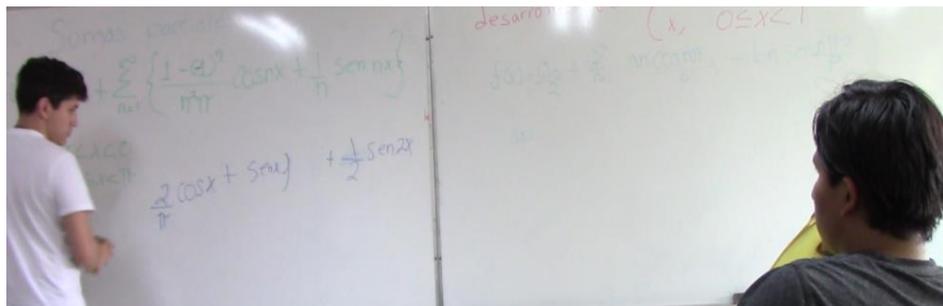
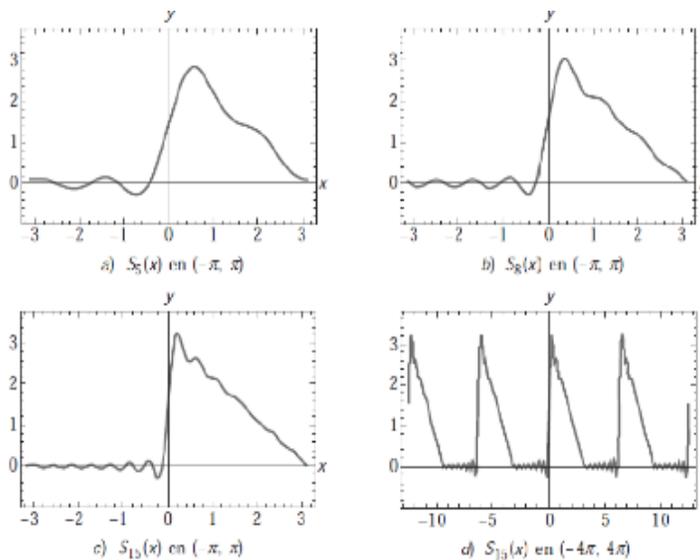
La segunda sesión de la explicación teórica empezó a través de Microsoft Teams, comenzando con la explicación formal de la Serie de Fourier y acabó en el aula de clases con el desarrollo de la Serie de Fourier, en el cual se explicó un ejemplo y entre todos los alumnos resolvieron las integrales para encontrar los coeficientes de la Serie de Fourier. Seguidamente se explicó que la secuencia de las sumas parciales $\{S_N(x)\}$ de una Serie de Fourier se aproxima a una función (Zill et al. 2018). Conocido esto, se da el siguiente ejemplo: expanda en una serie de Fourier.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Se explica a los alumnos y se pasa a tres estudiantes al pizarrón a desarrollar las sumas parciales. Ver Figura 4.

Figura 4

Sumas parciales de una serie de Fourier



Nota: Sumas parciales de una serie de Fourier (izquierda). Ejercicio resuelto por los alumnos de las sumas parciales de una serie de Fourier (derecha).

Parte 2. Implementación de una actividad con GeoGebra.

Así como la primera parte se compuso con elementos teóricos que, aunque sea un método tradicional son necesarios para la introducción del tema, se complementa con esta parte dos que se considera esencial en la propuesta metodológica, porque se diseñó y aplicó un diagnóstico que diera cuenta de los antecedentes de los estudiantes y también se permitió que ellos exploraran y visualizaran los coeficientes de Fourier y graficaran la serie correspondiente. La actividad comenzó con la Tarea 1 y se extiende hasta la Tarea 5. En esta fase, los alumnos aplican los conocimientos adquiridos en las clases anteriores, donde se abordó la teoría de las Series de Fourier ver Figura 5.

Figura 5

Actividad en GeoGebra, “Serie de Fourier, modelación de circuitos - Generador de onda cuadrada con timer”

geogebra.org/material/show/id/pden4ba4

Francisco Hazael Camarillo Mendoza

← Serie de Fourier, modelación de circuitos - Generador de onda cuadrada con timer

Editar - Hacer una copia

Serie de Fourier - modelación de circuitos generador de onda cuadrada

Ver Actividad

+ Agregar al Libro Descargar Configuración de acceso Compartir

Francisco Hazael Camarillo Mendoza — 17 de enero de 2024 - 22:33

Tipo de recurso: Actividad

Etiquetas: class functions sequences-and-series

Vistas: 35

Contacta al autor del recurso

Grupo destino (edad): 3 – 19+

Idioma: Spanish (Spain) / Español (España)

Licencia: CC-BY-SA GeoGebra Terms of Use

Basado en: Serie de Fourier - Generador de onda cuadrada con timer
Compartido por Francisco Hazael Camarillo Mendoza

Recursos derivados: Serie de Fourier, modelación de circuitos - Generador de onda cuadrada con timer
Compartido por Francisco Hazael Camarillo Mendoza

Nota: Elaborado por Camarillo (2024)

Uno de los principales objetivos de esta actividad fue que los estudiantes identificaran que la onda cuadrada es una función impar. Por lo tanto, la definición de la serie de Fourier para una función impar en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y se presenta de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Sen} \frac{n\pi}{p} x$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \text{Sen} \frac{n\pi}{p} x dx.$$

$a_0 = 0$, ya que la función es impar y no tiene término constante en su expansión (Kreyszig, 2011).

Las tareas 1, 2 y 3 estuvieron relacionadas con la revisión de conocimientos previos sobre series de Fourier y el concepto de paridad. Mientras que las tareas 4 y 5 consistieron en

determinar de los coeficientes de la serie de Fourier de una onda cuadrada y elaboración de la gráfica correspondiente utilizando los primeros 5 términos.

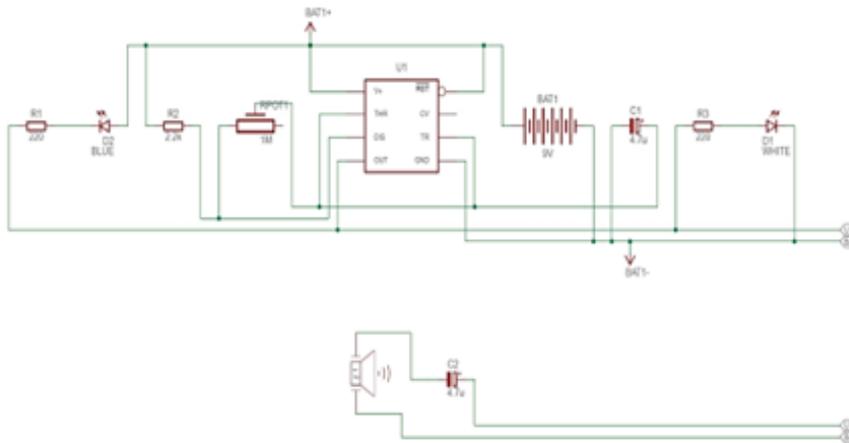
Construcción del dispositivo, generador de onda cuadrada

Esta parte estuvo conformada por dos sesiones, la primera fue la visualización y explicación del circuito eléctrico junto con los componentes de este, y la segunda fue la explicación y construcción del dispositivo eléctrico generador de onda cuadrada. En esta parte se proporcionó a los alumnos los materiales y un diagrama del circuito eléctrico a ensamblar.

Se explicó detalladamente el proceso de ensamblaje del circuito, comenzando con la instalación del temporizador y la conexión de sus pines, así como la disposición de los demás componentes. El circuito incluye dos diodos emisores de luz (LED) y una bocina como actuadores (ver Figura 6). Los LEDs parpadeaban y, cuando el LED de la derecha emitía un parpadeo, la bocina producía un sonido.

Figura 6

Diagrama eléctrico y dispositivo que genera la onda cuadrada.



Exploración del dispositivo, generador de onda cuadrada

Sesión 1. Visualización de la onda cuadrada en el osciloscopio

Una vez que los alumnos conectaron la pila de 9V al circuito, observaron que los LEDs comenzaban a oscilar, encendiéndose y apagándose alternativamente, mientras que la bocina emitía un sonido cuyo tono variaba según la velocidad del cambio. Se les pidió a los alumnos que conectaran el osciloscopio para observar el comportamiento de la señal.

El osciloscopio es un dispositivo que permite comprobar y visualizar las señales de tensión en forma de ondas, representando gráficamente la variación de la tensión en función del tiempo. En esta sesión, los estudiantes observaron la onda cuadrada en el osciloscopio y ajustaron la forma de la onda modificando el potenciómetro.

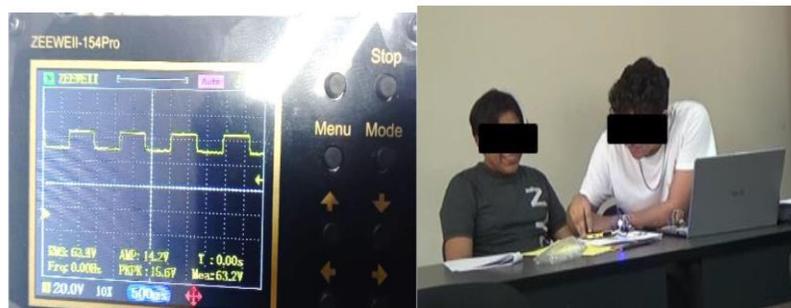
Sesión 2. Variación de la resistencia en el potenciómetro

Primero, se explicó a los alumnos que un potenciómetro es una resistencia variable cuyo valor cambia al girar su eje. A continuación, se planteó la siguiente pregunta: “¿En qué lugares ha visto que se aplique el principio de un potenciómetro?” Uno de los alumnos mencionó que se usa en radios antiguos para ajustar el volumen. Esto llevó a una nueva pregunta: “¿Solo para variar el volumen?” Ante la falta de respuesta, se les indicó que el potenciómetro (que en los radios es un componente físico) también se utiliza para sintonizar estaciones de radio y cambiar entre ellas. Se explicó que una de las muchas aplicaciones de la serie de Fourier es descomponer ondas en sumas de armónicos, lo que permite filtrar las frecuencias de interés para eliminar ruidos o aprovechar el espectro radioeléctrico en telecomunicaciones.

Esta práctica, se llevó a cabo manualmente utilizando un potenciómetro. Se plantearon preguntas sobre los valores de resistencia y su impacto en la gráfica. Los alumnos interactuaron con el potenciómetro para ajustar los valores de resistencia y emplearon un multímetro para verificar las mediciones. Este ejercicio les permitió analizar la variación de los términos en la serie de Fourier: una resistencia menor resultaba en un menor número de términos en la serie, mientras que una resistencia mayor aumentaba el número de términos. Así, los estudiantes pudieron observar cómo el número de términos seleccionados para graficar influye en la representación de la serie de Fourier (ver Figura 7).

Figura 7

Visualización de la onda cuadrada en osciloscopio



Nota: Onda con una variación de resistencia de 300 K Ω , (izquierda). Alumnos interactuando con el circuito. (derecha).

Se explicó a los alumnos que, aunque esta práctica se centró en una aplicación específica en acústica, las series de Fourier tienen numerosas aplicaciones en campos como la electricidad, óptica, procesamiento de señales, análisis de vibraciones, mecánica cuántica, econometría y cálculo de estructuras.

Exploración con Applet de GeoGebra

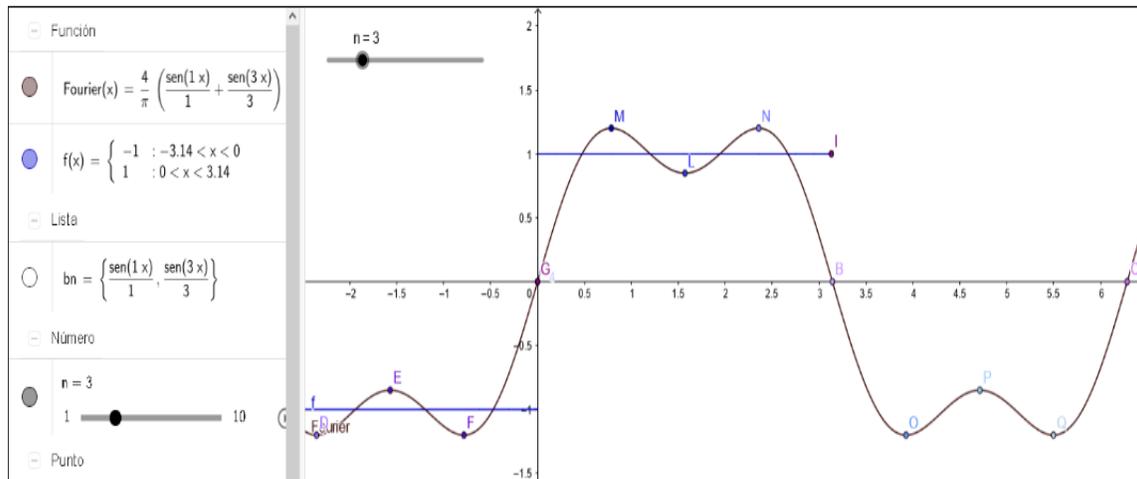
En esta sesión, se realizó un análisis utilizando un applet de GeoGebra que muestra la gráfica de una onda cuadrada con diferentes números de términos de la serie, desde 1 hasta 10. Los estudiantes interactuaron con el applet (ver Figura 8), que fue diseñado específicamente para explorar cómo la variación en el número de términos afecta la gráfica de la onda cuadrada.

Tarea 16: Analizar un applet de GeoGebra que muestra la gráfica de una onda cuadrada utilizando de 1 a 250 términos.

Figura 8

Applet de GeoGebra que muestra la forma de onda cuadrada

Analiza en el siguiente applet la forma de la onda cuadrada de 1 a 10 términos.



Nota: Gráfica de la función tomada del applet de GeoGebra construido para la actividad didáctica. Fuente: Elaboración propia.

Parte 3. Discusión Grupal

Al final de la actividad, se realizó una discusión grupal en la que se hicieron preguntas a los alumnos sobre el circuito. Los estudiantes expresaron que les resultó interesante visualizar los LEDs y escuchar el sonido de la bocina. Se discutió lo observado en el osciloscopio. Dos alumnos comentaron que el osciloscopio mostraba una onda casi rectangular con espacios, ya que tenían el potenciómetro ajustado a una resistencia alta. Se les explicó la razón de la apariencia de la onda cuadrada en esas condiciones.

Otro equipo ajustó la resistencia del potenciómetro hasta 0 Ohm, lo que provocó que los LEDs oscilaran a una velocidad tan alta que apenas se notaban los cambios, y que la bocina emitiera un sonido continuo y estridente. Un alumno comentó que el sonido resultaba molesto. Se les pidió que observaran el osciloscopio y describieran lo que veían, respondiendo que parecía una línea recta. Se les explicó que esto es comparable a las sumas

parciales de la serie de Fourier: a menor resistencia, hay menos términos en la serie, y a mayor resistencia, se incluyen más términos.

Resultados y discusión

El diseño de la actividad con GeoGebra (Camarillo, 2024), permitió recabar el trabajo realizado por los alumnos y analizar cada archivo para reportar los resultados obtenidos, tanto del diagnóstico como la parte exploratoria, asociada con el circuito. El objetivo principal de la actividad con GeoGebra fue evaluar la comprensión de los estudiantes sobre la representación matemática de la onda cuadrada mediante su descomposición en una serie infinita de senos y cosenos, así como su habilidad para relacionar estos conceptos con una aplicación práctica en la generación de señales periódicas.

A través de diversos ejercicios, los alumnos fueron expuestos tanto al análisis teórico de la serie de Fourier de una onda cuadrada como a la visualización de esta en un contexto real, utilizando un circuito generador y un osciloscopio. Los resultados obtenidos reflejan el nivel de comprensión de los estudiantes sobre la relación entre las sumas parciales de la serie y la aproximación de la onda cuadrada, así como su capacidad para conectar la teoría con el comportamiento físico observado en el osciloscopio.

Para garantizar una evaluación objetiva y consistente de las respuestas de los estudiantes, se diseñó una rúbrica detallada (ver tabla 3), que cubriera los aspectos clave requeridos en cada pregunta. Esta rúbrica se estructuró en cinco niveles de desempeño, donde el valor más alto (nivel 1) correspondía a aquellos alumnos que lograron abordar de manera completa todos los elementos esenciales de la actividad propuesta, demostrando una comprensión profunda de los conceptos involucrados. En contraste, el valor más bajo (nivel 0) se asignaba a aquellos estudiantes que no pudieron comprender ni abordar los elementos fundamentales de la tarea, indicando una falta de entendimiento en la temática tratada.

Tabla 3. Rúbrica de evaluación de la actividad con GeoGebra.

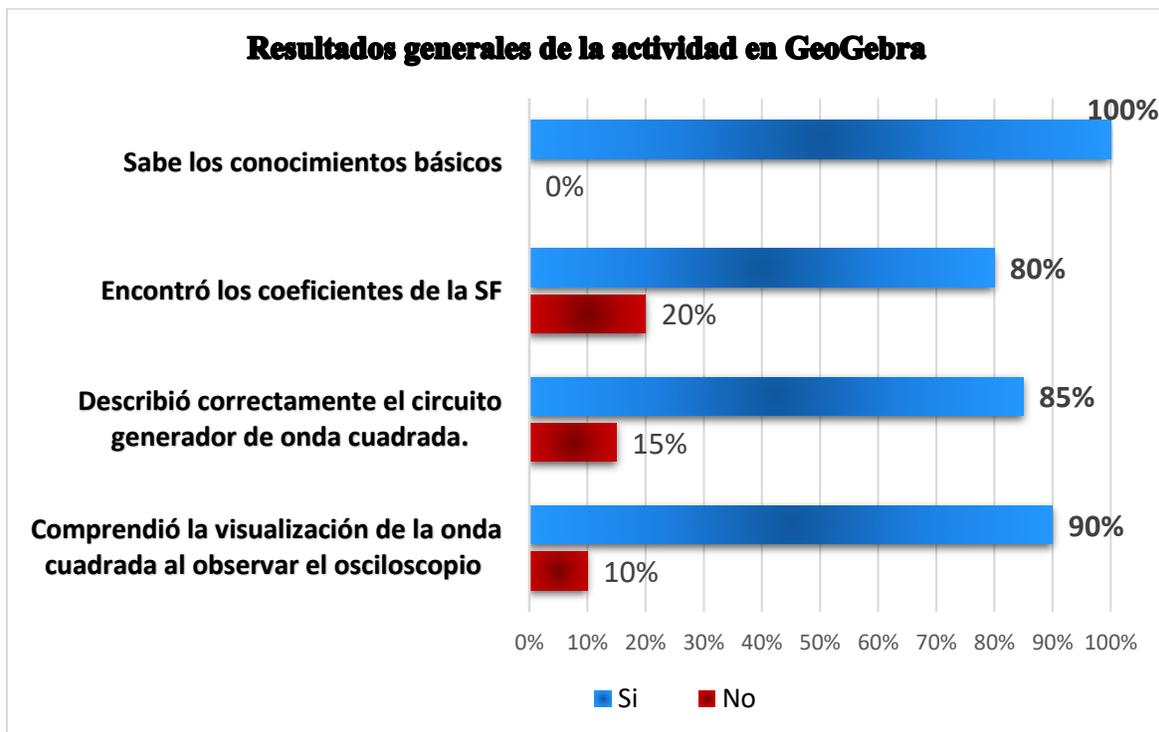
| Valor | Criterios |
|-------------|--|
| 1 | Se demuestra una comprensión total de la actividad, abarcando todos los elementos requeridos. |
| 0.75 | Se demuestra una buena comprensión de la actividad, incluyendo un alto porcentaje de los elementos necesarios para la actividad. |
| 0.5 | Se demuestra una comprensión parcial de la actividad, abarcando algunos de los elementos requeridos en la actividad. |
| 0.25 | Se demuestra una escasa comprensión de la actividad, sin incluir los elementos necesarios para la actividad. |
| 0 | No se logró comprender la actividad propuesta. |

Las 16 preguntas de la actividad fueron cuidadosamente agrupadas en 4 apartados temáticos, cada uno de los cuales abordaba una faceta específica del análisis de las series de Fourier y la onda cuadrada. Esta categorización permitió no solo evaluar el desempeño de los estudiantes en áreas específicas del conocimiento, sino también identificar con mayor

claridad los puntos fuertes y las áreas de oportunidad en su comprensión. De esta manera, la rúbrica no solo facilitó una evaluación más estructurada, sino que también proporcionó información valiosa sobre el progreso y las dificultades de los estudiantes en su aprendizaje de conceptos clave relacionados con el análisis de señales y la teoría de Fourier. Los resultados se resumen en la figura 9.

Figura 9

Resultados generales de la actividad con GeoGebra



Respecto a lo relacionado a la modelación y visualización matemáticas, la cual se realizó mediante el armado de un circuito y el apoyo de un osciloscopio, los alumnos visualizaron la serie de Fourier de una onda cuadrada y pudieron variar la onda con el osciloscopio, viendo en esta parte las sumas parciales de la serie de Fourier, concepto que los ayudó a elaborar la gráfica de la función. Se agregó un applet de GeoGebra el cual podían variar el valor de “ n ” de la sumatoria de la serie de Fourier para poder visualizar la gráfica y compararla con los resultados obtenidos con el osciloscopio.

Fue posible vincular los elementos de la serie de Fourier con una aplicación en un fenómeno real como es el caso del análisis de señales. Además, se logró que la clase se volviera más dinámica y que los alumnos pudieron visualizar de manera física cómo varía la onda cuadrada al cambiar la resistencia del circuito, así como la variación de la onda al modificar el valor de “ n ” en el applet de GeoGebra. Aunque el estudio se realizó únicamente en el área de ingeniería física, el desafío será aplicarlo en diferentes ingenierías.

De acuerdo con Avitabile et al. (2006), Muro et al. (2007), Parra (2013), Guerrero et al. (2010) y Romero y Farfán (2016), se ha identificado una problemática común al enseñar la serie de Fourier: la falta de vinculación con contextos aplicados. En esta investigación, se

abordó el concepto de las sumas parciales de la serie de Fourier y se vinculó con el barrido de señales mediante un circuito generador de onda cuadrada. Los alumnos mostraron interés al poder visualizar cómo cambia la gráfica de la serie de Fourier en un dispositivo electrónico, en lugar de solo representarla en papel o limitarse a escribir la teoría del tema.

Uno de los principales aspectos de esta investigación al compararla con otras investigaciones relacionadas a las series de Fourier y que utilizan la modelación matemática, es que, el alumno fue el principal protagonista, tanto en el armado del circuito como al variar la resistencia y ver el cambio de la onda cuadrada. El alumno fue libre de analizar la gráfica y se complementó con el software GeoGebra con la exploración del applet.

Algunas limitaciones del estudio fueron, la falta de conocimientos en electrónica, ya que, aunque están estudiando una ingeniería física, algunos alumnos mostraron deficiencias relacionadas con la electrónica básica y esto nos llevó a tomar más tiempo de lo programado. Otra limitación fue los pocos alumnos que tomaron la clase se sabe que un tamaño de muestra pequeño no implica necesariamente baja calidad o resultados menos confiables, pero si se muestran los siguientes errores: menor validez: las muestras muy pequeñas pueden socavar la validez interna y externa de un estudio, mayor imprecisión y probabilidad de falsos negativos, esto nos da una menor probabilidad de decir que sí hay diferencias significativas.

Al finalizar la implementación de la secuencia didáctica con el apoyo de la tecnología y tras revisar los datos obtenidos, se constató que se alcanzó el 85% de los objetivos establecidos. Los principales logros incluyeron la contextualización de la serie de Fourier en el aula mediante la modelación matemática y el análisis de las sumas parciales de Fourier utilizando un dispositivo electrónico y un applet de GeoGebra.

El propósito de esta secuencia fue mejorar la comprensión de los alumnos sobre las sumas parciales de la serie de Fourier y explorar una de sus aplicaciones, en este caso, el barrido de señales. Para próximas actividades se espera que se realicen otras representaciones de la serie de Fourier, como la onda triangular o la onda diente de sierra.

Reflexiones finales

La propuesta presentada resultó innovadora en varios sentidos, por un lado, se mantiene la explicación de los conceptos básicos y estos se complementan porque se integran simulaciones interactivas que muestran cómo las Series de Fourier descomponen señales periódicas en sus componentes armónicos. Así mismo se utiliza el software GeoGebra para mostrar gráficamente la variación de las sumas parciales al modificar los parámetros usando series de Fourier. Se implementa un circuito eléctrico que permite a los estudiantes manipular parámetros y ver cómo cambian las series de Fourier en tiempo real.

También mediante esta metodología se puede relacionar el aprendizaje de Series de Fourier con otras áreas como la física (ondas y vibraciones), la ingeniería (procesamiento de señales, vibraciones), o la informática (compresión de datos). Además, se promueve el aprendizaje colaborativo permitiendo que los estudiantes colaboren y compartan sus descubrimientos.

Consideramos que esta propuesta metodológica, con su estructura didáctica que integra teoría, práctica y tecnología, facilita un aprendizaje de las series de Fourier más accesible y atractivo para los estudiantes, en contraste con las tradicionales sesiones teóricas centradas exclusivamente en la resolución de ejercicios. Al combinar estos elementos, se promueve

una comprensión más profunda y una mayor motivación, permitiendo a los estudiantes experimentar de manera más interactiva y significativa los conceptos involucrados.

En este mismo sentido, la incorporación de tecnología en la enseñanza de las series de Fourier permite comparar las funciones cuando se tienen pocos y muchos términos, lo cual facilita la comprensión de los conceptos. Asimismo, se puede comparar visualmente la aproximación de una función periódica mediante una serie de Fourier con la función original, lo que ayuda a entender la idea de convergencia y la calidad de la aproximación, realizando cálculos de manera eficiente y con alta precisión.

Referencias bibliográficas

- Avitabile, P., Hodgkins, J., y Van Zandt, T. (2006, June). Innovative teaching of Fourier Series using LabView. In *2006 Annual Conference & Exposition* (pp. 11-771).
- Barba, R., Gascón, J., Serrano, L., & Badillo, E. (2017). Tecnología, matemáticas y aprendizaje significativo. *REXE: Revista De Estudios y Experiencias En Educación*, 16, 61-77. doi: 10.21703/rexe.16.16
- Camarillo, F. (2024) Serie de Fourier-Generador de onda cuadrada con timer. Actividad en GeoGebra.org. en: <https://www.geogebra.org/m/pden4ba4>
- Díaz-Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. UNAM, México. 10 (04), 1-15.
- Drijvers, P., & Trouche, L. (Eds.). (2014). *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Vol. 2, Cases and Perspectives*. Springer.
- Gómez, J. (s/f). *Series de Fourier*. En editorial. Universidad Tecnológica de Coahuila. México.
- González, C. & de Enxeñeiros Industriáis, E. T. S. (2003). *Fundamentos del análisis de Fourier*. GAMESAL.
- Guerrero, C., Camacho, M., y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 341-352.
- Hall, J. (2022). *Fourier wave saw tooth*. *Geogebra.org*. <https://www.geogebra.org/m/hGXKvCKc>
- Hsu, H. P. (1973). *Análisis de Fourier*. Fondo Educativo Interamericano. México.
- Kreyszig, E. (2001). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. <https://biblioteca.uazuay.edu.ec/buscar/item/62730>
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in mathematics education: Some critical reflections. *Computers & Education*, 36(3), 213-223. Doi: 10.1016/S0360-1315(00)00055-1
- Mederos, O. y González, B. (2005). *La modelación en la educación matemática*. Universidad Autónoma de Coahuila. México.
- Muro, A., Guerrero, L., & Parra, J. (2007). Tecnologías en la enseñanza de las series de Fourier: Herramientas para la visualización de señales. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 10(1), 33-47.

- Parra, H. (2013). Claves para la contextualización de la matemática en la acción docente. *Omnia*, 19(3), 74-85.
- Rao, S., García, D., Figueroa, R., y Muñoz, G. (2012). *Vibraciones mecánicas*. Pearson Educación.
- Reyes, D., y Arellano, H. (2014). *Prototipo didáctico de mesa vibratoria para el análisis y caracterización de señales de aceleración*. ITESM. México.
- Romero, E., & Farfán, L. (2016). *El papel de las herramientas tecnológicas en la enseñanza de las series de Fourier*. *Journal of Mathematical Pedagogy*, 48(2), 101-112.
- Rodríguez, D., Torres, M., Borjón, E. (2023). Indicadores del TPACK presentes en la enseñanza de las ecuaciones lineales con tecnología dinámica. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, XI (2), 17-30.
- Ruthven, K. (2009). Technology and the Transformation of Mathematics Education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Education* (pp. 23-56). Springer.
- Yáñez, D. (2015). *Series de Fourier y criterios de convergencia*. (Tesis de Licenciatura no publicada). Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo. México.
- Zill, D. G., Edwards Jr, C. H., & Penney, D. E. (2018). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Ed. Thomson Learning.



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores
del Uso de Tecnología en Educación Matemática
Volumen XII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2024
ISSN: 2395-955X

Directorio

Rafael Pantoja R.

Director

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Sección: Artículos de
investigación

Elena Nesterova

Alicia López B.

Verónica Vargas Alejo

Sección: Experiencias

Docentes

Ensel Pérez H.

Armando López Z.

Sección: GeoGebra

EN BÚSQUEDA DE ALTERNATIVAS: SOFTWARE LIBRE PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS

José Francisco Villalpando Becerra, Rafael Pantoja Rangel

francisco.villalpando@academicos.udg.mx, profe.rpantoja@hotmail.com

Universidad de Guadalajara

Para citar este artículo:

Villalpando, J. F., Pantoja, R. (2024). En búsqueda de alternativas: Software libre para enseñar matemáticas. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, XII (2), 52-64.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año XII, No. 2, julio-diciembre de 2024, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: <http://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

PRÁCTICAS DE MODELACIÓN CON TRACKER Y GEOGEBRA CON SITUACIONES COTIDIANAS, PARA EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Maritza Elizabeth López Alcalá
CBTIS 10. SEP. CUCEI, Universidad de Guadalajara
maritza.lalcala@academicos.udg.mx

Rafael Pantoja Rangel
CUCEI, Universidad de Guadalajara
rafael.prangel@academicos.udg.mx

Resumen

El artículo se centra en la aplicación de prácticas integradas en una secuencia didáctica, cuyo propósito es que los alumnos aprendan a modelar las ecuaciones paramétricas del movimiento de tres juguetes (tren, caballo y un gato chino) y comprender el concepto de parámetro. El marco teórico para el estudio fue la Teoría de las representaciones Semióticas de Duval y la metodología ACODESA, con el empleo del trabajo matemático individual, colaborativo y las Tecnologías de la Información y Comunicación. Los alumnos emplean el video, el Tracker y el GeoGebra para generar los registros visual numérico, gráfico, analítico, verbal y escrito. Con base a los datos recabados de las prácticas, la encuesta, la entrevista y la evidencia digital obtenida de la observación directa, se afirma que los alumnos logran obtener las ecuaciones paramétricas e identificaron al tiempo como parámetro, además de representar e interpretar el movimiento del objeto en las diversas formas exploradas: gráfica, numérica y analítica.

Palabras clave: Parámetro, Ecuaciones paramétricas, Video, Tracker, GeoGebra

Abstract

The article focuses on the application of practices integrated in a didactic sequence, whose purpose is for students to learn to model the parametric equations of the movement of three toys (train, horse and a chinese cat) and to understand the concept of parameter. The theoretical framework for the study was Duval's Theory of Semiotic Representations and the ACODESA methodology, with the use of individual and collaborative mathematical work and Information and Communication Technologies. Students use video, Tracker and GeoGebra to generate visual, numerical, graphic, analytical, verbal and written records. Based on the data collected from the practices, the survey, the interview and the digital evidence obtained from direct observation, it is stated that the students managed to obtain the parametric equations and identified time as a parameter, in addition to representing and interpreting the movement of the object in the various forms explored: graphic, numerical and analytical.

Keywords: Parameter, Parametric equations, Video, Tracker, GeoGebra

Introducción

Las ecuaciones paramétricas es un tema que se trata de una manera muy superficial en los libros de texto y por consiguiente en el aula, por ejemplo, en el libro de Geometría Analítica de Lehmann (1989) se describe la interpretación de las ecuaciones paramétricas para la

ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, con un par de ecuaciones expresada en función de la variable angular t a saber, $x(t) = \cos(t)$ y $y(t) = \sin(t)$, obtenidas con el triángulo rectángulo inscrito y el Teorema de Pitágoras. En el texto se señala que no existe un método para elegir el parámetro y para deducir las ecuaciones paramétricas, pero generalmente se toma la representación paramétrica más sencilla o aquella que sea más útil y conveniente para los propósitos de la investigación.

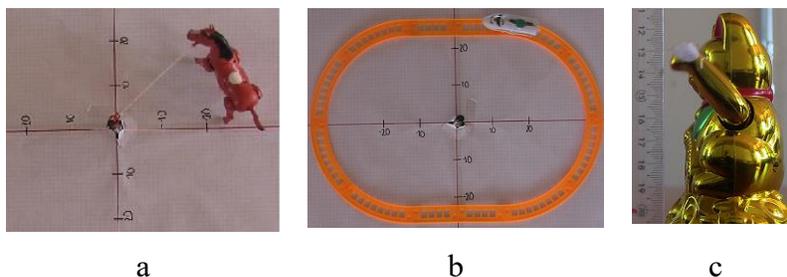
Así en general, si $F(x, y) = 0$ es la ecuación rectangular de la curva plana C , y cada una de las variables x y y , son función de una tercera variable t , $x = x(t)$ y $y = y(t)$ entonces, si para cualquier valor permisible de la variable independiente t , las ecuaciones determinan un par de valores reales de $x = x(t)$ y $y = y(t)$ se llaman ecuaciones paramétricas de la curva C . No es claro pues, cómo se determina el parámetro para representar la curva C como un par de ecuaciones paramétricas. Una de las representaciones paramétricas ancestrales es la que desarrolló Galileo (1638) y que denominó descomposición del movimiento de un objeto esférico rodando por un riel sin fricción y lanzado en caída libre al abandonar el riel, debido a la aceleración de la gravedad. Galileo describe que el movimiento del objeto tiene una componente horizontal $x(t) = a_1t + b_1$ y una componente vertical $y(t) = a_2t^2 + b_2t + c_2$, que son las ecuaciones paramétricas del tiro parabólico o caída libre.

Otro ejemplo ancestral de curvas parametrizadas es la cicloide, una curva cuya trayectoria se describe con el movimiento de un punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia, que se mueve cuando una rueda que gira sobre su eje sin resbalar, en la que se toma como parámetro el ángulo de giro de la circunferencia (Lehman, 1989, pp 272-274). Otros tipos de curvas a los que se recurre para ejemplificar la parametrización de curvas planas, son: la elipse, la parábola, la hipocicloide, la astroide y la involuta de la circunferencia, entre tantas otras.

Las actividades se realizaron en un taller en el que se emplearon situaciones problema (Hitt y González-Martín, 2015) de la vida cotidiana de objetos en movimiento, en este caso tres juguetes (tren, caballo y un gato chino) (Figura 1), que son grabadas en video digital (Jofrey, 2010; Ezquerro et al., 2011) y trabajados con los softwares Tracker (2024) y GeoGebra (2024). El propósito del taller fue que los alumnos, primero, se den cuenta de la relación que existe entre la modelación matemática de una situación problema y la matemática escolar (Arrieta y Díaz, 2015, Pantoja et al., 2016), y segundo, que determinen las ecuaciones paramétricas $f(t) = (x(t), y(t))$ de los tres juguetes y comprendan que el tiempo es el parámetro de referencia posicional.

Figura 1

Juguetes: Caballo, Tren y Gato chino

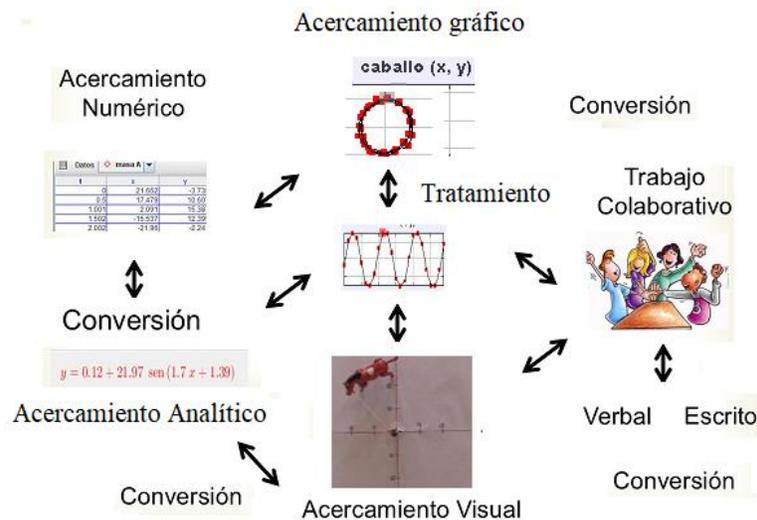


Referencia Teórica

La propuesta consideró la Teoría de los registros de representaciones semióticas de Raymond Duval (Duval, 2004) como sustento del estudio, porque de manera “*natural*”, a partir del análisis de video con el software Tracker, se presenta al alumno en pantalla, los registros semióticos verbal, pictórico, escrito, gráfico, numérico y analítico relacionados con la situación problema. De acuerdo a los resultados de la fase experimental, el alumno logró transitar entre un mismo registro (Tratamiento) y entre dos registros (conversión), con la finalidad de lograr un aprendizaje significativo al responder la secuencia didáctica planeada para el taller (Figura 2). Bajo esta perspectiva, la teoría de las representaciones semióticas proporciona una herramienta útil, para entender los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático de los alumnos y lograr la noesis a partir de la semiosis.

Figura 2

Representaciones semióticas del movimiento del tren de juguete



Metodología

- Se integran los equipos y a partir de un video, ya sea previamente grabado o que se filme en ese momento, alumnos y profesor manipulan el software Tracker y el GeoGebra.
- En esta parte, cada grupo colaborativo selecciona una situación problema, diseña el set de grabación, graba el video y lo procesa con el Tracker. Los alumnos relacionan la situación problema con lo mostrado en pantalla por el software Tracker, que consiste en una tabla de datos, tres gráficas (x vs. t, y vs. t, y vs. x) y en su caso, un ajuste a las funciones. Se aclara que la rutina de ajuste de funciones de Tracker es limitada y se sugiere exportar los datos a GeoGebra para lograr una mejor aproximación a la trayectoria.
- En la última fase cada uno de los equipos presenta y discute ante el grupo su reporte.

Resultados

En este apartado, en primer lugar, se presenta un resumen de la secuencia didáctica que se empleó en el taller y, en segundo lugar, se describen algunos de los resultados de mayor relevancia obtenidos por los alumnos.

Secuencia didáctica

1. Identificación de la secuencia didáctica.

- Nivel educativo: medio superior y superior.
- Tipo: Curso Taller.
- Palabras clave: Ecuación paramétrica, Situación problema, Tracker, Video, GeoGebra.
- Asignatura: Cálculo integral
- Tema: Ecuaciones Paramétricas
- Conocimientos previos: Funciones sinusoidales, Polinomios, Tiempo, Distancia, Velocidad.
- Duración: 4 horas

- 2. Problema significativo del contexto:** Encontrar las ecuaciones paramétricas del movimiento del caballo, video que se te ha proporcionado en el archivo caballo 1. mp4 y cuya imagen se muestra en la figura 3.

Figura 3

Situación problema: Caballo como motor de la molienda de agave



- Analizar el video con el software Tracker para obtener los datos y las gráficas relacionadas con la situación problema.
- Ajustar los datos obtenidos de la periferia del recipiente, con las rutinas de ajuste de funciones del Tracker o de GeoGebra.
- Elaborar un reporte de la actividad.

3. Objetivos

- Comprender el concepto de parámetro.
- Determinar la ecuación paramétrica de la situación problema.
- Motivar la enseñanza y aprendizaje de ecuaciones paramétricas a partir de situaciones problema de la vida diaria.

4. Metas

- Analizar la videograbación de objetos en movimiento para el ajuste de las ecuaciones paramétricas con el Tracker y GeoGebra.
- Elaborar el reporte de la actividad.

5. Saber conocer

- Identidades trigonométricas, propiedades de los ángulos para seno y coseno, trazar el bosquejo de gráficas de funciones, ajuste de funciones, gráficas de datos y manipulación de la hoja de cálculo.

6. Saber hacer

- Modelación de situaciones problema y relacionarlo con la matemática escolar.

7. Saber ser

- Trabajar en equipo colaborativo para propiciar el aprendizaje de las ecuaciones paramétricas: puntualidad, participación, honestidad, respeto, entre otros valores.
- Expone y elabora reportes por escrito de la actividad para presentarlo, discutirlo y defenderlo en la exposición grupal.

8. Recursos

- Hoja de trabajo, computadora, Tracker, GeoGebra, Videos digitales de las situaciones problema, objetos de la vida cotidiana (caballo, tren y gato chino).

9. Actividades con el docente

- Análisis de saberes previos, integración de los grupos colaborativos, selección de la situación problema y diseño de curso-taller.

10. Actividades para el aprendizaje autónomo

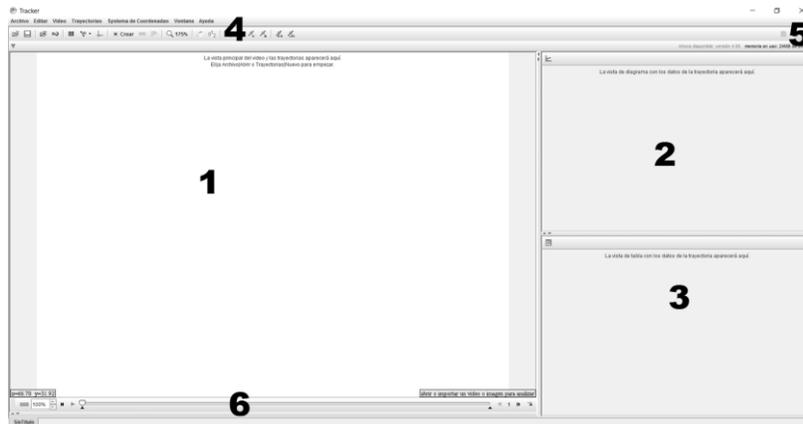
- Diseño del set de grabación de la situación problema seleccionada para grabar el video del objeto.
- Manipulación del video con Tracker para el análisis de las gráficas y datos arrojados por el Tracker.
- Exportación y manipulación de datos obtenidos de Tracker para su tratamiento con GeoGebra y obtener las funciones ajustadas.
- Discusión en grupo colaborativo de los resultados obtenidos del análisis del video de la situación problema.
- Elaboración del reporte escrito de la actividad.
- Presentación de los resultados ante el grupo para promocionar la discusión e interacción entre los participantes.

11. Instrucciones para determinar las coordenadas de la trayectoria del objeto con Tracker

- a. Ejecutar el software Tracker. Se muestra el menú principal del Tracker (Figura 4): vista principal de video (1), vista de gráficas (2), vista de datos (3), barra de menús (4), barra de herramientas (5), deslizador de tiempo (6).

Figura 4

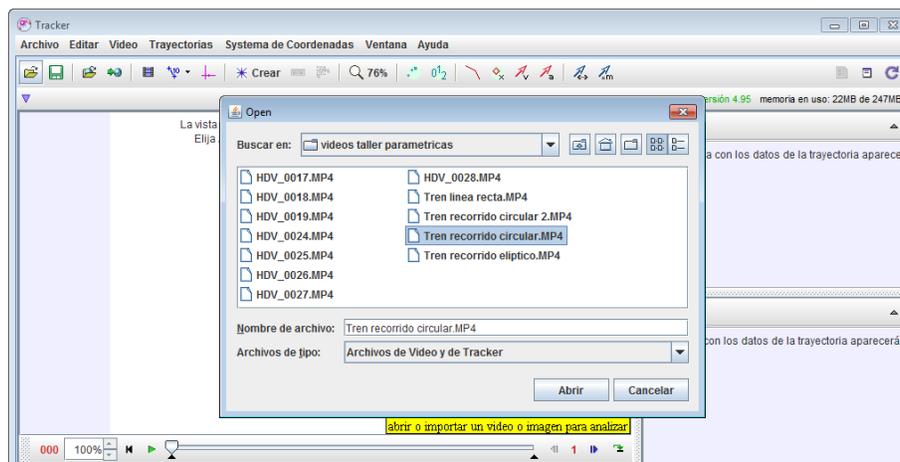
Menú principal de Tracker



- b. En la barra de menús, seleccionar *Archivo* y elige la opción *Abrir* (Figura 5). Aparecerá una ventana en la cual se muestran archivos. Buscar la ubicación del video que se desea analizar y una vez encontrado, seleccionarlo y dar Clic en el botón *Open* o bien, dar doble Clic sobre el archivo.

Figura 5

Seleccionar el archivo de video



- c. Introducir y ajusta el video al segmento seleccionado para trabajar (Figura 6). Al abrir el video seleccionado, vista principal de video, se procede a definir el intervalo del video que será analizado. En el deslizador de tiempo se encuentran dos marcas como de punta de flecha negra, una al inicio del deslizador y otra al final. Ajustar tales marcas de modo que con ellas se delimite la parte del video que será analizada.

Figura 6

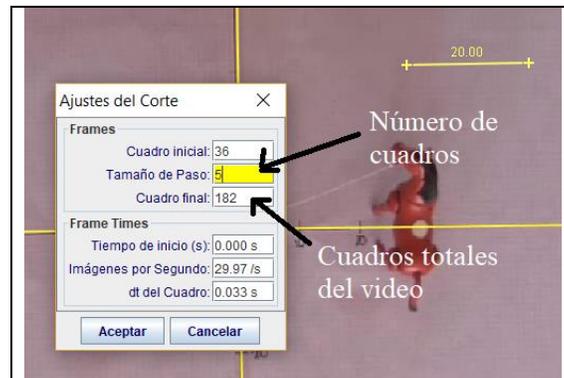
Herramienta del video y controles del video.



- d. Elige el tamaño de paso (Opción Ajuste del corte). Definir el **tamaño de paso** significa determinar el número de cuadros del video que se consideran para la señalización de la trayectoria. En la figura 7 el video consta de 182 cuadros y se tomará una coordenada de la trayectoria del caballito cada 5 cuadros, que el programa Tracker lo hace de manera automática.

Figura 7

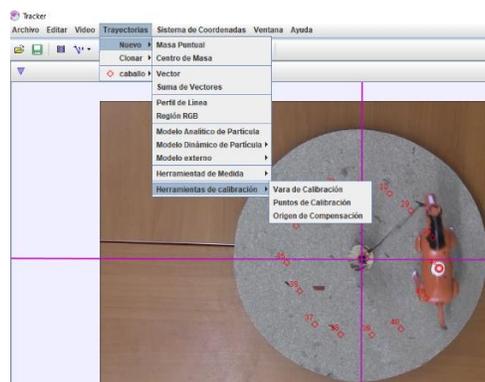
Selección del tamaño del paso

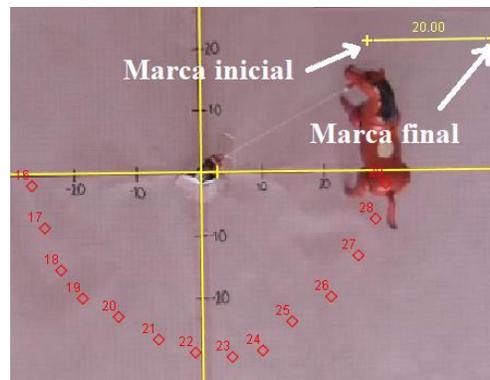


- e. En la opción *Trayectorias* → *Nuevo* → *Herramientas de calibración* → *Vara de Calibración*, se activa la vara de calibración que tendrá la unidad de medida indicada a la hora de grabar el video, que es la rutina de Tracker que se ajustará a la longitud de la marca ubicada sobre el video. Primero se señala un extremo de la marca con Shift+Clic y luego sobre el otro extremo con las mismas teclas Shift+Clic. Con un Clic sobre la vara de calibración se sustituye el valor de la marca interface entre la vida real y el Tracker.

Figura 8

Selección de la vara de calibración y tamaño del paso

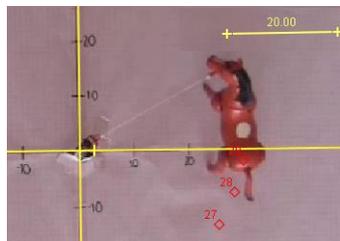




Ahora sobre el video selecciona un punto sobre el que colocarás el origen del sistema coordenado, de tal forma que se facilite la visualización de la trayectoria. Con un Clic sobre el ícono  se aparece sobre la pantalla el sistema coordenado (Figura 8), que el usuario puede ubicar en el lugar de su preferencia con el cursor sobre el origen.

Figura 8

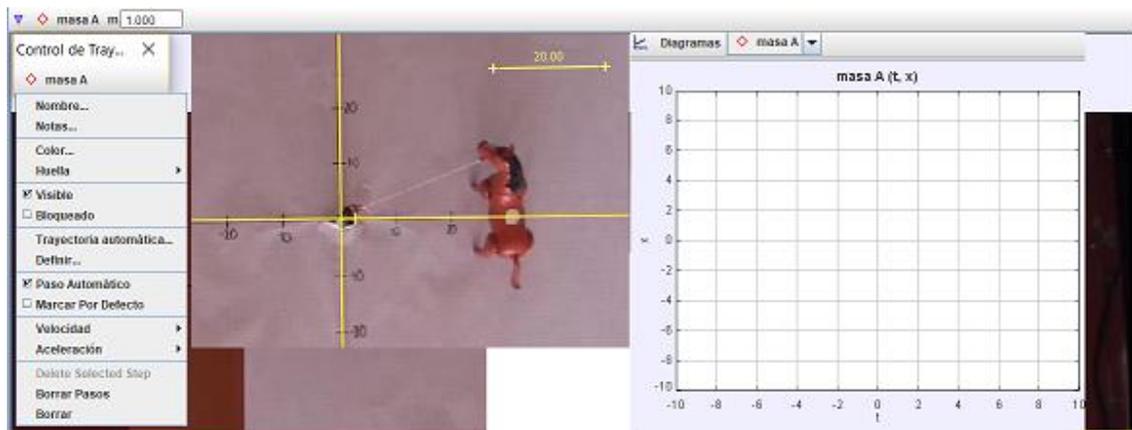
Colocación de los Ejes coordenados



- f. El caballito de juguete se identifica en Tracker como una **Masa Puntual** y se interpreta como el objeto en video a analizar. En la figura 9 se presentan los parámetros que integran la masa puntual: Nombre, Notas, Color, Huella, entre otros.

Figura 9

Herramienta de Masa Puntual.

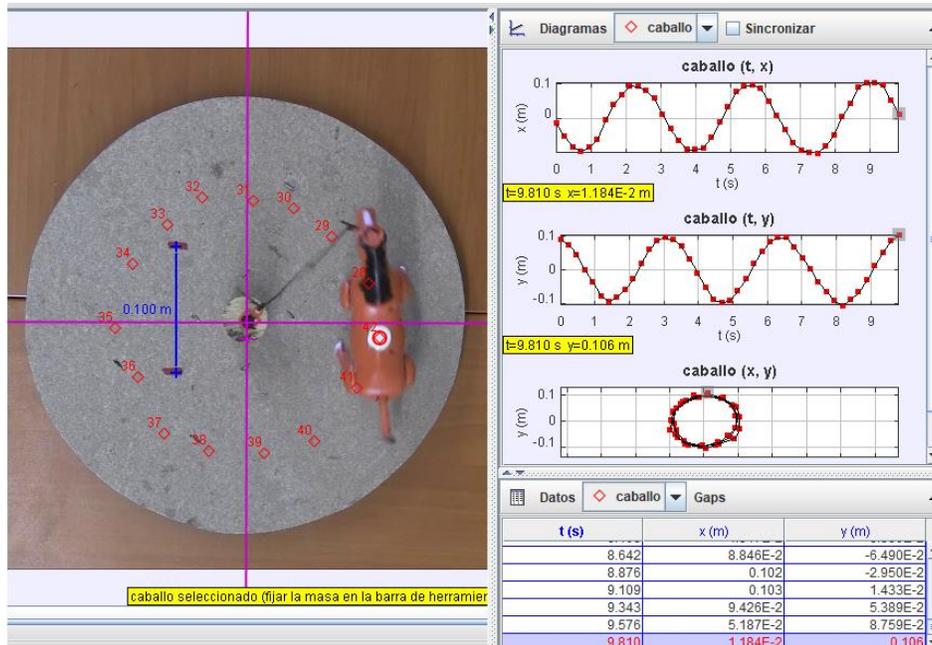


- g. Marcar la trayectoria del movimiento del caballito. Se sugiere que sobre el objeto en movimiento, se haga una marca visible que servirá de referencia para ubicar el cursor y

señalar los puntos que indicarán la trayectoria que el objeto, de acuerdo a lo indicado en el apartado *Tamaño del paso* (Figura 10). La instrucción para señalar los puntos en la trayectoria es ubicar sobre el caballito el cursor y teclear *Shift + Clic*, acción que se manifiesta como un cambio en el puntero del cursor. La marca de la trayectoria es la correcta si aparece un punto sobre la gráfica y las coordenadas correspondientes en la tabla de datos. Se repite *Shift + Clic* hasta que se recorra todo el video y se refleje en forma gráfica y numérica en la parte derecha del video.

Figura 10.

Representaciones semióticas del movimiento del caballito: gráfica y tabla de datos



12. Instrucciones para manipular los datos con el software GeoGebra.

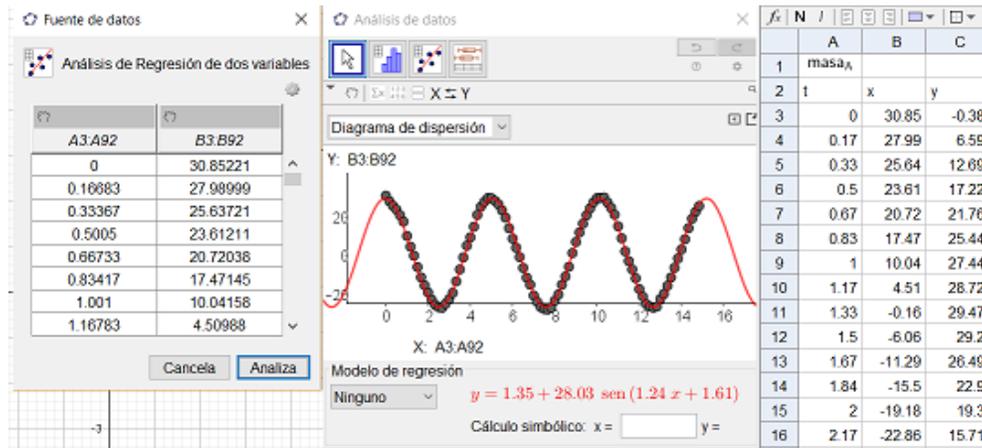
Los datos de la tabla calculados con el Tracker se exportan a GeoGebra para ello las instrucciones son las siguientes:

- Se copian los datos de la tabla en Tracker al GeoGebra.
- En el GeoGebra se activa la opción de hoja de cálculo y se pegan.

Una vez que se han exportado los datos a GeoGebra (Figura 11), se selecciona la opción *Análisis de Regresión de dos variables* → *Modelo de regresión* → *Polinomio* → *Grado* → *Copiar a Vista Gráfica*, y se ajusta a la función al recorrido.

Figura 11

Modelación de la trayectoria del caballo con GeoGebra



Al final de las actividades se les pide a los alumnos que entreguen el cuaderno de trabajo, un informe de las actividades realizadas y una presentación que será planteada a todo el grupo.

Resultados obtenidos por los alumnos

En la primera actividad descrita en la secuencia didáctica, se les solicita a los participantes que observen el video del caballito de juguete, para después resolver algunos cuestionamientos, con los cuales se pretende rescatar algunos de los conocimientos previos (Figura 12). Según los resultados obtenidos se observa que solo algunos de los participantes reconocieron que la trayectoria del caballo es casi circular y no la asociaron a ninguna forma.

Figura 12

Resultados obtenidos por los alumnos con relación a la trayectoria del caballito

1. Abrir el video Caballito.mp4
1. Describe el movimiento de la trayectoria del caballo de juguete:
Circular, solo gira en torno a su eje
2. Una vez que observaste el video del caballo ¿se te ocurre alguna forma gráfica que represente el recorrido de su movimiento? Si (X) No (). En el espacio siguiente traza el bosquejo de la forma gráfica e identifica las variables para cada eje:



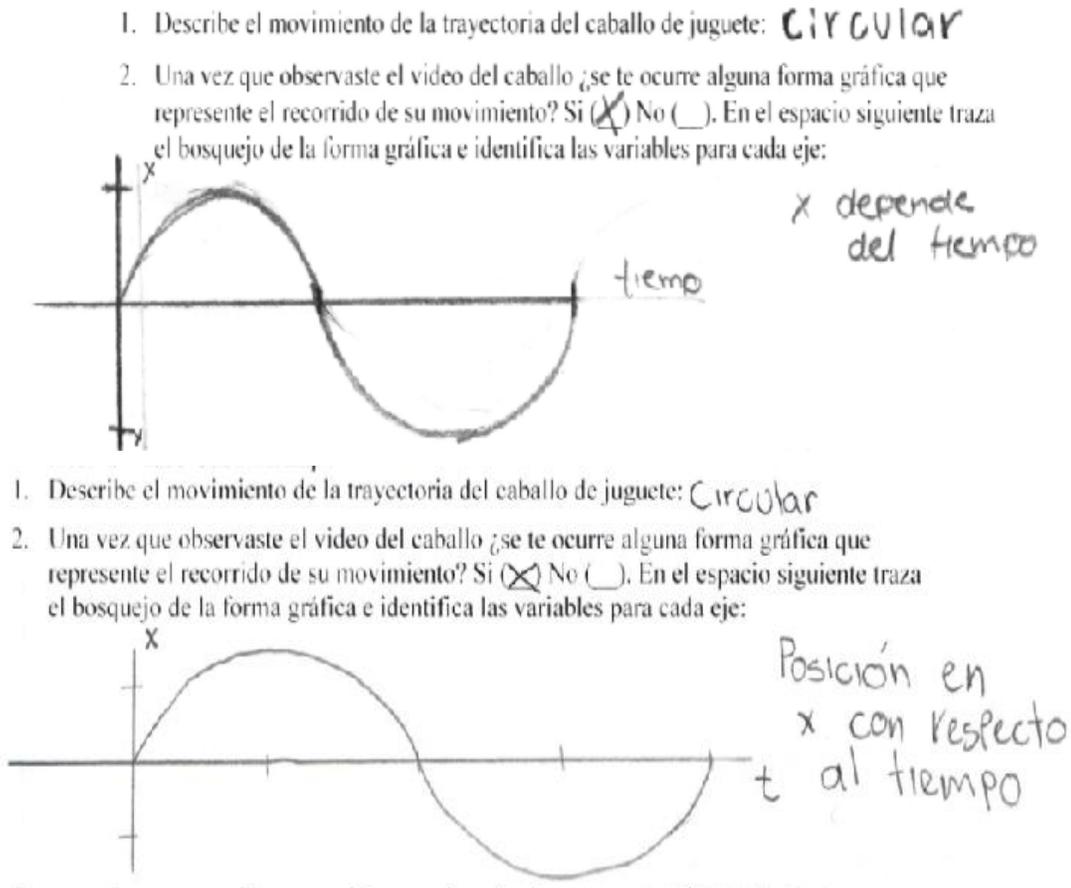
Conoces alguna expresión matemática que describa la trayectoria: Si () No (X).

Con el desarrollo de esta actividad y lo descrito por los alumnos en las hojas de trabajo se puede concluir que los participantes cuentan con conocimientos previos en relación al recorrido del caballito de juguete, se observa que solo algunos de los estudiantes reconocieron que la trayectoria del caballo es casi circular y no la asociaron a ninguna forma algebraica

Una vez que el alumno analiza el video con los softwares de Tracker y GeoGebra, observa las gráficas obtenidas por los mismos, seleccionando la que consideran representan el movimiento del caballito de juguete, en la figura 13 se presentan algunos de los resultados obtenidos.

Figura 13

Representación gráfica de la trayectoria del objeto.



Luego de trabajar el análisis del video con el software Tracker, los datos fueron exportados a GeoGebra, ya que cuenta con una rutina más completa para el análisis algebraico de los datos, así que después de una explicación al respecto copiaron los datos de la tabla y los exportaron a GeoGebra, obteniendo las ecuaciones paramétricas:

$$\text{Grafica 1: } 0.21 + 9.73 \text{ sen}(1.88t + 2.61)$$

$$\text{Grafica 2: } -4.19 + 9.89 \text{ sen}(1.88x + 0.41)$$

Estas ecuaciones difieren de los proporcionados en el cuaderno de trabajo $\{x(t) = R \cos(at + b), y(t) = R \text{ sen}(at + b)\}$, por lo tanto, tuvieron que realizar un trabajo algebraico para lograr llegar a la forma paramétrica, en este paso los alumnos presentaron algunas dificultades ya que su conocimiento de los temas de trigonometría y de geometría euclidiana no era suficiente.

Para realizar esta actividad el instructor intervino compartiendo y explicando las identidades trigonométricas que permitieron al alumno realizar la conversión de las ecuaciones, como resultado obtuvieron lo mostrado en la figura 14.

Figura 14

Ajuste de funciones y ecuaciones paramétricas

Nuestras ecuaciones

$$x = 0.21 + 9.73 \operatorname{Sen}(1.88t + 2.01)$$

$$x - 0.21 = 9.73 \operatorname{Sen}(1.88t + 2.01)$$

$$\operatorname{Sen}(1.88t + 2.01) = \operatorname{Sen}(1.88t) \operatorname{Cos}(2.01) + \operatorname{Sen}(2.01) \operatorname{Cos}(1.88t)$$

$$= \underbrace{-0.4252}_A \operatorname{Sen}(1.88t) + \underbrace{0.9050}_B \operatorname{Cos}(1.88t)$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{-0.9050}{-0.4252}\right) = -1.1315$$

$$= \sqrt{(-0.4252)^2 + (0.9050)^2} \operatorname{Sen}(1.88t - 1.1315)$$

$$= 0.9999 \operatorname{Sen}(1.88t - 1.1315)$$

$$= 0.9999 \operatorname{Cos}(1.88t - 1.1315 - 1.570)$$

$$= 0.9999 \operatorname{Cos}(1.88t - 2.7015)$$

Conclusiones

La aplicación de la secuencia didáctica para el aprendizaje de las ecuaciones paramétricas $f(t) = (x(t), y(t))$ a partir de situaciones problema de la vida cotidiana tiene un efecto positivo en el aprendizaje de los estudiantes, tratadas con las TIC, en particular con el empleo del video digital, Tracker y GeoGebra, medios que fueron precursores del aprendizaje de los estudiantes en el tema de ecuaciones paramétricas y el concepto de parámetro. Los alumnos se mostraron motivados a participar activamente en el desarrollo de las prácticas con el trabajo individual y colaborativo. Se promovieron valores como el compromiso, puntualidad, interés, honestidad y tolerancia, entre otros, detectados cuando desarrollaban las tareas encomendadas en un contexto más allá del escolar

Bibliografía

- Arrieta, J., Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 18, núm. 1, pp. 19-48. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33535428002> (May 18, 2018).
- Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.
- Ezquerro, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz*. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733 <http://hdl.handle.net/10498/14733>. <http://reuredc.uca.es>.

- Galileo, G. (1638). *Dialogues Concerning Two New Sciences* by Galileo Galilei. *Translated from the Italian and Latin into English by Henry Crew and Alfonso de Salvio. With an Introduction by Antonio Favaro (New York: Macmillan, 1914)*. Recuperado el 10 de Septiembre de 2014 de <http://oll.libertyfund.org/titles/753>.
- Geogebra (2024). [GeoGebra Clásico](#)
- Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational studies in mathematics*, 88(2), 201-219.
- Jofrey, J. A. (2010). Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases. *Physics Education*. DOI 10.1088/0031-9120/1/005.
- Lehmann, CH. (1989). *Geometría Analítica*, México: LIMUSA.
- Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016). Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development*, Vol. 5, No. 1, pp. 62-76. Published by American Research Institute. Recuperado el 23 de Mayo de 2016 de <http://jehdnet.com/>. Electronic Version. DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. ISSN: 2334-2978.
- Tracker (2024). [Tracker Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education](#)



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores
del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen XII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2024
ISSN: 2395-955X

Directorio

Rafael Pantoja R.

Director

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Sección: Artículos de
investigación

Elena Nesterova

Alicia López B.

Verónica Vargas Alejo

Sección: Experiencias

Docentes

Esnel Pérez H.

Armando López Z.

Sección: GeoGebra

PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN EMR PARA APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN NIVEL SUPERIOR

Paola Guadalupe Chávez Gutiérrez, Liliya Yakhno, María Guadalupe Vera Soria

paola.gcg97@gmail.com, liliya.y@academicos.udg.mx,

guadalupe.vera@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara, Jalisco, México.

Para citar este artículo:

Chávez, G. P., Yakhno, L., Vera, G. (2024). Propuesta didáctica basada en EMR para aprendizaje de la función cuadrática a nivel superior. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, XII (2), 40-51.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año XII, No. 2, julio-diciembre de 2024, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: <http://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN EMR PARA APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN NIVEL SUPERIOR

Paola Guadalupe Chávez Gutiérrez, Liliya Yakhno, María Guadalupe Vera Soria

paola.gcg97@gmail.com, liliya.y@academicos.udg.mx,
guadalupe.vera@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara, Jalisco, México.

Resumen

En este artículo se presentan los resultados de la implementación de una secuencia didáctica basada en Educación Matemática Realista para el aprendizaje de la función cuadrática. El experimento fue aplicado en febrero del 2024 con un grupo de estudiantes de Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. El tipo de estudio es cualitativo fenomenológico y tiene como objetivo describir el proceso de matematización que desarrollan estudiantes universitarios al modelar situaciones realistas en el marco de la función cuadrática. El uso de los niveles cognitivos propuestos por Freudenthal permitió analizar el proceso de matematización del grupo en estudio.

Palabras clave: Función cuadrática, Educación Matemática Realista, GeoGebra.

Abstract

This article presents the results of the implementation of a didactic sequence based on Realistic Mathematics Education for learning the quadratic function. The experiment was applied in February 2024 with a group of students from the Institute of Engineering and Technology of the Autonomous University of Ciudad Juárez. The type of study is qualitative phenomenological and aims to describe the mathematization process developed by university students when modeling realistic situations within the framework of the quadratic function. The use of the cognitive levels proposed by Hans Freudenthal allowed us to analyze the mathematization process of the group under study.

Keywords: Quadratic function, Realistic Mathematics Education, GeoGebra.

Introducción

Las funciones cuadráticas encuentran amplia aplicación para resolver problemas relacionados con diferentes áreas de la ingeniería. Por ejemplo, en el caso de la Ingeniería Civil, los cálculos para la construcción de puentes colgantes o canales de agua comienzan con las parábolas que los representan. Es evidente que tener bases sólidas en matemáticas, aportará a los ingenieros las herramientas necesarias para su futuro trabajo profesional. Sin embargo, los alumnos de estas carreras presentan dificultades en el aprendizaje de algunos temas matemáticos.

En un estudio realizado por Lozano et al. (2015) con 109 estudiantes de nuevo ingreso a carreras de ingeniería encontraron que 51.4% de ellos tienen problemas para articular registros gráficos y algebraicos de la función cuadrática. Por su parte, Villada (2013) comenta que el alumnado cuenta con deficiencias para interpretar el lenguaje matemático de esta noción, aunado con las “dificultades y errores respecto a la conceptualización, la simbología algebraica, la representación gráfica y las situaciones problemas” (Tovar et al., 2020, p. 130).

Endara (2021) y Villada (2013) mencionan que los alumnos no vinculan la parábola en sus diferentes formas de notación: canónica, estándar y factorizada. Además, que para construir la gráfica de la función cuadrática solamente usan tablas de valores, y no toman en consideración los parámetros de ésta.

En un caso con alumnos de Ingeniería Civil, Giraldo y Rodríguez (2009) propusieron introducir la parábola mediante problemas relacionados con su futuro trabajo, debido a que esto motiva su aprendizaje. Por esa razón es que en esta investigación se han diseñado actividades que están contextualizadas dentro de situaciones de la ingeniería, con el objetivo describir el proceso de matematización que desarrollan estudiantes de licenciatura al modelar situaciones realistas en el marco de la función cuadrática.

La meta establecida de este trabajo fue analizar la efectividad que tiene la implementación de la clase que se diseña con base en la EMR y con apoyo del software libre GeoGebra. Además, determinar el nivel cognitivo que alcanzan los estudiantes en su aprendizaje de la función cuadrática a partir de los problemas propuestos. Así como la forma en que influye el uso de las situaciones realistas para la motivación del estudiante en cuanto a su aprendizaje.

Referente Teórico

La teoría de Freudenthal llamada Educación Matemática Realista (EMR) es reconocida como una teoría global. Una de las principales ideas de la EMR es la matematización, la cual implica “traducir los problemas desde el mundo real al matemático. Matematizar es un ejercicio de generar nexos con la realidad, y es a través de esos procesos como el enfoque realista considera que ha emergido la matemática” (Gómez-Chacón & Maestre, 2008, p. 107).

Gómez-Chacón y Maestre (2008) mencionan que el proceso de matematización puede ser de dos tipos: horizontal y vertical. En la matematización horizontal se traduce el problema del mundo real a un modelo matemático y se conectan los lenguajes natural, simbólico y formal. Y en la matematización vertical el aprendizaje del alumno se traslada a lo largo del mundo simbólico.

Otra idea importante de la EMR, según Bressan et al. (2005) es que el desarrollo del aprendizaje matemático pasa por cuatro niveles de comprensión: situacional, referencial, general y formal. “La evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente” (Bressan et al., 2016, p. 7). En la teoría de Freudenthal los niveles se determinan de la siguiente forma:

- En el **nivel situacional** se utiliza la intuición a partir de la experiencia previa y el conocimiento formado es informal.
- En el **nivel referencial** se utilizan descripciones, materiales y modelos gráficos para explicar situaciones particulares.
- En el **nivel general** se extienden los conocimientos recibidos en el nivel anterior. En el aprendizaje de los alumnos aparecen conceptos generalizados, y los mismos estudiantes ya pueden concluir que estas competencias pueden ser aplicadas en los problemas homólogos.
- Y en el **nivel formal** se logra un conocimiento formal en procedimientos y notaciones.

Además, la elaboración de actividades didácticas basadas en teoría EMR involucra seis principios: actividad, realidad, reinención, niveles, interacción e interconexión.

Metodología

Participantes.

La investigación se realizó con los 30 alumnos del Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez en la clase de Cálculo I. El programa de las carreras de ingeniería incluye el tema de la función cuadrática en la primera unidad temática de la materia. El grupo en estudio fue formado con estudiantes de las carreras de ingeniería industrial, civil, sistemas digitales y computacionales, eléctrica, aeronáutica, mecatrónica y mecánica. Los participantes fueron divididos en siete equipos de cuatro a cinco integrantes cada uno.

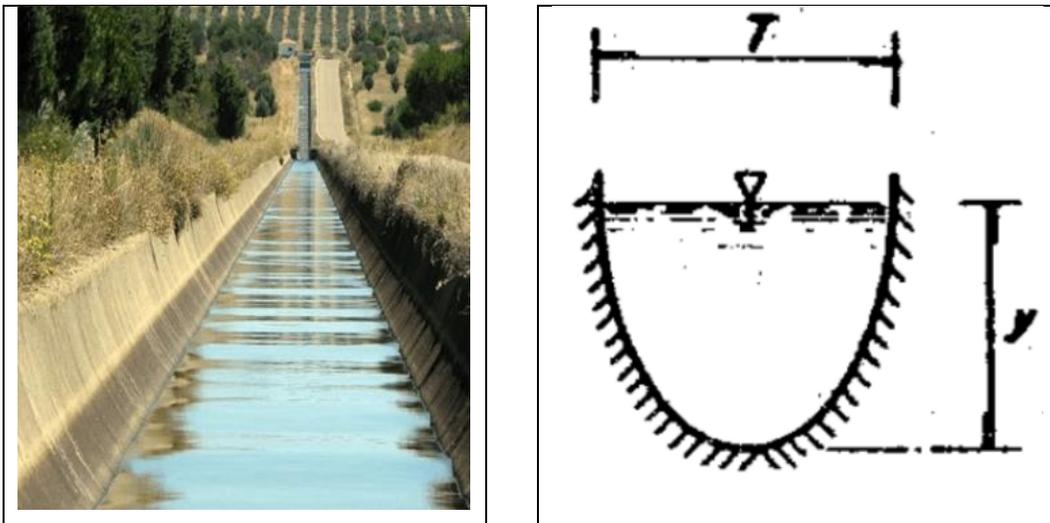
Técnica e Instrumentos.

Para realizar la investigación, se analizaron los antecedentes del tema y se elaboraron tres actividades: las dos primeras se desarrollaron en equipo en el salón de clases y la tercera fue individual y de tarea para trabajar en casa.

La primera actividad está relacionada con un canal hidráulico abierto con una sección transversal de forma parabólica (Figura 1). Esta actividad está enfocada en el aprendizaje de la influencia de los parámetros de la función cuadrática en la apertura de parábola, su concavidad y el desplazamiento vertical de la gráfica.

Figura 1

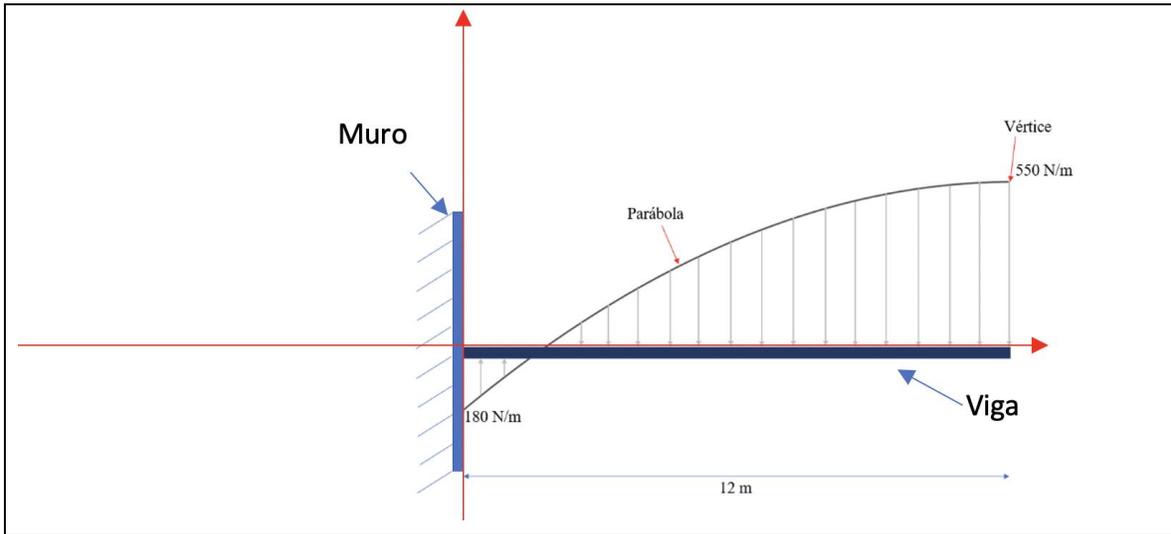
Canal hidráulico con sección transversal parabólica



En la segunda actividad se aborda una situación relacionada con una carga parabólica que recibe una viga en voladizo o cantiléver (Figura 2). En la ingeniería civil, el ejemplo más sencillo de esta aplicación es un balcón. Esta actividad está enfocada en el efecto de parámetros de la parábola para los desplazamientos horizontales y verticales.

Figura 2

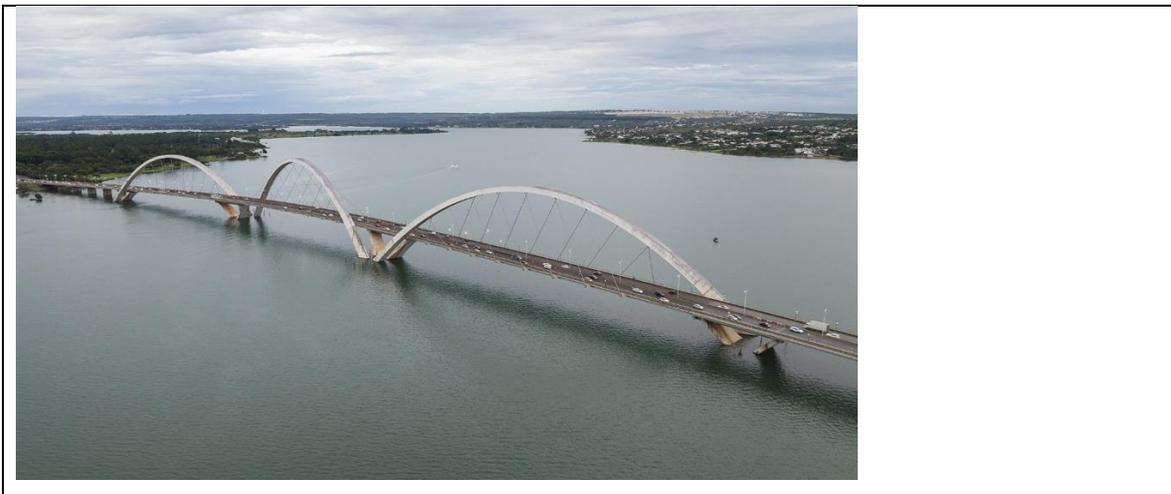
Viga en voladizo con una carga parabólica



Y la tercera actividad está relacionada con el puente colgante Juscelino Kubitschek, en Brasilia (Figura 3). A partir de las características dadas, el estudiante debe proponer la función que describa a cada uno de estos arcos, escribiendo las funciones en sus formas canónica y estándar.

Figura 3

Puente Juscelino Kubitschek en Brasilia



En esta investigación de corte cualitativo y fenomenológico, se recolectaron los datos a través de hojas de trabajo, la grabación de video y anotaciones del investigador durante la clase.

Las preguntas abiertas en hojas de trabajo guiaron la reflexión de los estudiantes y sus respuestas a dichas preguntas permitieron conocer el nivel de comprensión logrado al modelar situaciones realistas en el marco de la función cuadrática.

Procedimiento.

En la primera actividad el proceso de modelización empieza con una situación realista, la cual se interpreta con un modelo matemático (parábola) y, haciendo análisis de este modelo, el alumno genera las conclusiones matemáticas las cuales se interpretan en predicciones que se trasladan nuevamente al mundo real, pero en nivel más alto que el inicial.

De acuerdo con el principio de reinención de la EMR, durante esta actividad los alumnos debían utilizar la intuición para relacionar el canal hidráulico con su modelo matemático representado por una parábola. En los primeros ejercicios, la función cuadrática se introdujo en la forma incompleta $f(x) = ax^2$. Con ayuda del software GeoGebra los alumnos construyeron las gráficas para diferentes valores del parámetro a , y comparando éstas entre sí buscaron las regularidades, discutieron y analizaron las modificaciones que el parámetro generaba en la parábola. Los resultados de las discusiones grupales y en equipo se anotaron en las hojas de trabajo, y en las respuestas a las preguntas abiertas fue posible observar el desarrollo del proceso de matematización de los estudiantes. Después, la actividad pide proponer tres valores positivos y tres valores negativos del parámetro a para diferentes aperturas de las parábolas; y al final generalizar las predicciones e indicar los intervalos de valores de este parámetro para los cuales las gráficas se contraen o se expanden. Además, para diferentes valores del coeficiente a los alumnos comparan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las parábolas, su tipo de concavidad y las coordenadas del vértice. Es decir, de acuerdo con el principio de reinención de teoría de la EMR, las preguntas abiertas guían a los alumnos para reinventar las matemáticas.

Análogamente se agrega el parámetro k de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + k$ para que los estudiantes exploren la influencia de este parámetro en las gráficas de las funciones propuestas, hagan sus predicciones y propongan las reglas para obtener los desplazamientos verticales de la parábola. Finalmente, la actividad concluye pidiendo a los alumnos que establezcan cuál es la función que satisface las características del canal hidráulico de la situación problemática en estudio.

El objetivo de la actividad dos es que los alumnos identifiquen los desplazamientos horizontales y verticales de la gráfica de la función $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Para esta actividad los estudiantes comienzan revisando cómo el parámetro h afecta gráfica de la función y haciendo deducciones sobre su efecto en la parábola. Así mismo establecen los intervalos de valores de h para los cuales el desplazamiento de la gráfica es a la derecha o a la izquierda del origen. De forma semejante a los ejercicios de la actividad uno, los estudiantes analizan la influencia del parámetro k de la función sobre los desplazamientos verticales de su gráfica. Y para concretar la actividad se solicita a los alumnos que determinen la función relacionada con una carga parabólica que recibe una viga en voladizo, para la cual el eje de las abscisas se ubica en la viga, mientras que el eje de las ordenadas se ubica sobre el muro, de acuerdo con un objeto de construcción en la ingeniería civil.

La tercera actividad está enfocada en la aplicación práctica de los conocimientos construidos por los alumnos al resolver las actividades 1 y 2. En el problema se explica que los cables del puente colgante propuesto se soportan por tres arcos de forma parabólica. Se plantea que las dimensiones de los arcos son iguales entre sí, además que cada arco tiene altura de 60 metros y separación de sus vértices es 240 metros. Se solicita a los estudiantes escribir las formas canónicas y estándar que corresponden a las funciones cuadráticas que describen a

cada uno de los arcos cuando la posición del eje de abscisas coincide con el nivel de agua y el vértice del segundo arco está en eje de ordenadas. Luego se pide realizar una síntesis de los parámetros de estas funciones, dibujarlas y describir las similitudes y diferencias entre sus parábolas. Además, es necesario indicar las coordenadas de sus vértices, intervalos de crecimiento y decrecimiento y concavidad.

Por otra parte, para analizar el proceso de matematización de los estudiantes se utilizan siguientes criterios de clasificación de los niveles de comprensión:

- 1) **Nivel situacional.** Los alumnos utilizan la intuición para identificar una parábola en los objetos de la vida cotidiana.
- 2) **Nivel referencial.** Los alumnos grafican, comparan y analizan las parábolas de las funciones cuadráticas con diferentes coeficientes propuestos por el docente.
- 3) **Nivel general.** Los alumnos indican cuáles son los coeficientes correspondientes a las funciones cuyas gráficas satisfacen las características propuestas en la actividad.
- 4) **Nivel formal.** Los alumnos proponen las funciones cuadráticas que definen las parábolas, a partir de información obtenida de situaciones realistas.

Resultados

El análisis de la implementación de la secuencia didáctica permitió describir el proceso de matematización de los estudiantes de ingeniería al transitar por los niveles cognitivos hasta llegar a la formalización de su conocimiento y su aplicación posterior en la resolución de problemas realistas. A continuación, se presentan los resultados de los distintos niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes durante el desarrollo de las actividades de la secuencia.

En la Figura 4 se presenta una de las respuestas codificada como nivel situacional, debido a que los alumnos utilizaron el sentido común y experiencia de la vida cotidiana para dar respuesta a las preguntas que se plantearon en la actividad 1.

Figura 4

Respuesta de nivel situacional en la Actividad 1

| |
|--|
| <p>c) ¿En qué coordenadas se encuentra el vértice de la parábola? ¿El vértice es un máximo o un mínimo?</p> <p><u>(0,0) Es un mínimo</u></p> |
| <p>d) ¿Cómo es la concavidad de la parábola: hacia arriba o hacia abajo?</p> <p><u>Hacia arriba</u></p> |

En cuanto a las respuestas de los estudiantes registradas en un nivel referencial, las Figuras 5 y 6 muestran que los alumnos graficaron las funciones $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 3x^2$, $f_3(x) = \frac{1}{3}x^2$, $f_{13}(x) = -(x+2)^2 + 1$ y $f_{14}(x) = (x+2)^2 - 3$, compararon y analizaron sus parámetros, buscaron las regularidades, discutieron y establecieron las modificaciones que éstos generaban.

Figura 5

Respuesta de nivel referencial en la Actividad 1

2.- Compara la forma de las gráficas de las funciones f_1, f_2 y f_3 , ¿qué diferencias observas entre la gráfica f_2 con respecto a f_1 ? y, ¿entre la gráfica de f_3 con respecto a f_1 ? La forma es la misma (parábola), entre f_1 y f_2 es que f_2 su parábola se contrae o diferencia de f_1 , y f_3 su parábola es más "extensa" que f_1 .

Figura 6

Respuesta de nivel referencial en la Actividad 2

4.- Observa las gráficas de las funciones f_{13} y f_{14} , compáralas con la función f_1 , ¿cómo se desplazan las gráficas de f_{13} y f_{14} en comparación con la gráfica de f_1 ? La f_{13} se desplaza dos unidades hacia la izquierda y 1 hacia arriba respecto a f_1 . f_{14} se desplaza 2 hacia la izquierda y 3 hacia abajo respecto a f_1 .

En cuanto a las respuestas clasificadas en el nivel general, las Figuras 7 y 8 muestran que los estudiantes propusieron los coeficientes de las funciones cuyas gráficas satisfacen características de las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2$ o $f(x) = a(x - h)^2 + k$ propuestas, por lo que generalizaron sus conocimientos e hicieron predicciones sobre influencia de los parámetros a y k de la función en sus conclusiones.

Figura 7.

Respuesta de nivel general en la Actividad 1

8.- Indica los intervalos de valores (positivos y negativos) de "a" para la función $f(x) = ax^2$ para los cuales la gráfica se expande. $(-1, 0) \cup (0, 1)$
 9.- Indica los intervalos de valores (positivos y negativos) de "a" para la función $f(x) = ax^2$ para los cuales la gráfica se contrae. $(-2, -1) \cup (1, 2)$

Figura 8

Respuesta de nivel general en la Actividad 2

10.- Para la función $g(x) = a(x - h)^2 + k$, menciona cinco valores de h para los cuales la parábola (observa que en la función $g(x)$, h tiene signo negativo):

| | | | | | |
|------------------------------------|----|----|----|----|----|
| Se desplazaría hacia la izquierda: | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 |
| Se desplazaría hacia la derecha: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

11.- Para la función $g(x) = a(x - h)^2 + k$ indica el intervalo de valores de "h" para los cuales la gráfica se desplaza (recuerda que el valor de h en la función $g(x)$ es negativo):

- Hacia la izquierda. $(-2, 0)$
- Hacia la derecha. $(0, 2)$

Y finalmente, en las respuestas clasificadas como nivel formal de comprensión los alumnos propusieron las funciones cuadráticas que definen las parábolas, a partir de información obtenida de situaciones realistas, además de utilizar notaciones formales, como se presenta en las evidencias que se muestran en las figuras 9, 10 y 11.

Figura 9

Respuesta de nivel formal en la Actividad 1

Partiendo de las conclusiones anteriores, se propone el siguiente problema relacionado con un canal hidráulico. Léelo y responde las preguntas propuestas.

a) Si un canal hidráulico tiene 4 metros de profundidad y tiene una forma parabólica, ¿cuáles deben ser los coeficientes de la función cuadrática si el eje de las abscisas coincide con el nivel del agua y el eje de las ordenadas coincide con la línea de simetría del canal? Escribe la nueva función que satisface estas características, considera la unidad de medida en metros.

$$n(x) = x^2 - 4$$

b) ¿En qué coordenada se encuentra el punto más bajo del canal? $(0, -4)$

c) Supongamos que se quiere expandir el canal haciéndolo el espejo de agua más ancho con el propósito aumentar su capacidad de agua, ¿cómo podría ser la nueva función que describe al canal?

$$o(x) = 44x^2 - 44$$

d) ¿En qué coordenada se encuentra el punto más bajo del canal? $(0, -44)$

e) Comparar coordenadas de los vértices de las funciones $n(x)$ y $o(x)$ ¿Tuvieron algún cambio? ¿Por qué?

NO, porque es la misma profundidad.

f) Si se quisiera disminuir el ancho del espejo de agua del canal con el propósito disminuir su capacidad de agua, ¿cómo podría ser la nueva función que describe al canal?

$$p(x) = 3x^2 - 4$$

Respondiendo a preguntas auxiliares en la actividad 2, los alumnos escribieron la función cuadrática que describe una carga parabólica que recibe una viga en voladizo o cantiléver y vincularon la parábola en sus formas canónica y estándar (Figura 10).

Figura 10

Respuesta de nivel formal en la Actividad 2

14.- Completa la siguiente tabla a partir de la función $m(x)$ en su forma canónica:

| $m(x)$ | Coefficiente a | Parámetro h | Parámetro k | Coordenadas de vértice |
|---|-------------------|---------------|---------------|------------------------|
| $f(x) = \frac{-365}{72} (x-12)^2 + 550$ | $\frac{-365}{72}$ | 12 | 550 | (12, 550) |

15.- ¿Observas alguna similitud de la coordenada del vértice con respecto a los parámetros h y k de la función $m(x)$?

Son los valores que definen el vértice.

Cuando se desarrolla el binomio al cuadrado y se simplifica los términos semejantes, la función queda de la forma $g(x) = ax^2 + bx + c$ denominada como *forma estándar*.

16.- Escribe la función $m(x)$ en su forma estándar y completa la tabla mostrada a continuación.

| $F(x) = ax^2 + bx + c$ | Coefficiente a | Coefficiente b | Coefficiente c |
|---|-------------------|------------------|------------------|
| $-\frac{365}{72}x^2 + \frac{365}{3}x - 180$ | $-\frac{365}{72}$ | $\frac{365}{3}$ | -180 |

$$-\frac{365}{72} (x-12)(x-12) + 550$$

$$x^2 - 12x - 12x + 144$$

$$-\frac{365}{72} (x^2 - 24x + 144) + 550$$

$$-\frac{365}{72}x^2 + \frac{365}{3}x - 730 + 550$$

$$-\frac{365}{72}x^2 + \frac{365}{3}x - 180$$

Para la actividad 3, los alumnos también relacionaron las parábolas que describen los arcos en las formas canónica y estándar por medio de un razonamiento formal debido a que utilizaron sus conocimientos para contestar las actividades con información obtenida de la situación realista, además de usar lenguaje matemático en sus respuestas (Figura 11).

Figura 11

Respuesta de nivel formal en la Actividad 3

| | Forma canónica | Forma estándar |
|------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| Arco 1: $f_1(x)$ | $-\frac{x^2}{240} + 60$ | $-\frac{x^2}{240} + 60$ |
| Arco 2: $f_2(x)$ | $-\frac{(x+9.23)^2}{240} + 60$ | $-\frac{x^2}{240} - 2x - 180$ |
| Arco 3: $f_3(x)$ | $-\frac{(x-24)^2}{240} + 60$ | $-\frac{x^2}{240} + 2x - 180$ |

3.- En síntesis, a partir de la función $f(x) = -\frac{x^2}{240}$, describe cómo cambia la gráfica de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ al modificar los valores de los parámetros en la forma canónica, sabiendo que los tres arcos tienen las mismas dimensiones.

El vertice se mueve a la izquierda o a la derecha

4.- Dibujas las tres parábolas de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ en el siguiente espacio y contesta las preguntas que se plantean a continuación.

Figura 14

Ajuste de funciones y ecuaciones paramétricas

(Nuestras ecuaciones)

$$x = 0.21 + 9.73 \operatorname{Sen}(1.88t + 2.01)$$

$$x - 0.21 = 9.73 \operatorname{Sen}(1.88t + 2.01)$$

$$\operatorname{Sen}(1.88t + 2.01) = \operatorname{Sen}(1.88t) \operatorname{Cos}(2.01) + \operatorname{Sen}(2.01) \operatorname{Cos}(1.88t)$$

$$= \underset{A}{-0.4252} \operatorname{Sen}(1.88t) + \underset{B}{0.9050} \operatorname{Cos}(1.88t)$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{0.9050}{-0.4252}\right) = -1.1315$$

$$= \sqrt{(-0.4252)^2 + (0.9050)^2} \operatorname{Sen}(1.88t - 1.1315)$$

$$= 0.9999 \operatorname{Sen}(1.88t - 1.1315)$$

$$= 0.9999 \operatorname{Cos}(1.88t - 1.1315 - 1.570)$$

$$= 0.9999 \operatorname{Cos}(1.88t - 2.7015)$$

Conclusiones

El objetivo del estudio fue describir el proceso de matematización que estudiantes de licenciatura desarrollan al modelar situaciones realistas en el marco de la función cuadrática. Al respecto, en este trabajo se presentaron resultados y evidencias de cómo se realizó dicho proceso.

77% de los estudiantes que participaron en la investigación alcanzaron un nivel formal de aprendizaje y el 23% llegó al nivel general.

Mediante la implementación de la secuencia didáctica desarrollada, los estudiantes construyeron las parábolas de las funciones cuadráticas propuestas en las actividades, analizaron los valores de sus parámetros y su efecto en las modificaciones de las gráficas, buscaron regularidades y comprendieron el comportamiento de la parábola producido por los coeficientes de la misma. Después, aplicaron las reglas elaboradas anteriormente y fueron capaces de proponer algunos valores de parámetros de tal manera que las gráficas satisficieran las características definidas en el problema. Y organizando matemáticamente sus conocimientos, los estudiantes completaron intervalos para cada uno de los parámetros de tal manera que se cumplieran las características de las gráficas indicadas.

La implementación de las actividades ofreció a los alumnos la oportunidad de reinventar matemáticas de acuerdo con enfoque de EMR. Las preguntas auxiliares ayudaron a los alumnos a desarrollar la matematización vertical y, a su vez, el nuevo conocimiento les permitió generar predicciones y trasladarlas a una situación realista promoviendo la matematización horizontal, la cual se pudo verificar a partir de los resultados presentados en el apartado anterior. El uso del enfoque de EMR en el diseño de las actividades permitió un razonamiento profundo y un aprendizaje formal en los estudiantes en tema de función cuadrática.

Este modelo de la EMR benefició al aprendizaje de los alumnos al hacerlo más atractivo por medio de situaciones imaginables para ellos, motivándolos a construir su aprendizaje por medio de la creación de modelos matemáticos a través de sus propias ideas desarrolladas durante las actividades. Así mismo, el trabajo en equipo ayudó al desarrollo del proceso de matematización a través del diálogo, la discusión y la argumentación de las soluciones de problemas.

Finalmente, el uso de Applets de GeoGebra facilitó el proceso de construcción de parábolas debido a que este software cuenta con diversas herramientas que permiten la interactuar con las funciones. Con esta Applet, los alumnos pudieron analizar y comparar los desplazamientos y comportamientos que tienen las parábolas al modificar el valor de los coeficientes de las funciones que se propusieron en las actividades. Además, facilitó la identificación de los elementos de la función como el vértice de la parábola. Por lo tanto, este tipo de herramientas favorecen al aprendizaje de los alumnos al hacer más sencillo el análisis al poder manipular el programa de acuerdo a la conveniencia de cada alumno.

Referencias bibliográficas

- Bressan, A., Zolkower, B., y Gallego, M. F. (2005). Los principios de la educación matemática realista. En O. Kulesz, (Ed.), *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (1ª ed., pp. 69-98) Libros del Zorzal.

- Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). Educación matemática realista bases teóricas. *Educación*, 63, 1-11.
- Endara, E. F. (2021). *Las estrategias metodológicas y funciones cuadráticas*. [Tesis de maestría, Universidad Técnica de Ambato].
<https://repositorio.uta.edu.ec/jspui/handle/123456789/32862>
- Giraldo, S., & Rodríguez, F. (2009). Propuesta didáctica para la enseñanza de la parábola en Ingeniería Civil. *Inventum*, 4(7), 30-37.
<https://doi.org/10.26620/uniminuto.inventum.4.7.2009.30-37>
- Gómez-Chacón, I., & Maestre, N. (2008). Matemáticas y Modelización. Ejemplificación para la enseñanza obligatoria. *Experiencias de aula y experiencias didácticas*, 17(1), 107-121.
- Lozano, M. E. D., Haye, E. E., Montenegro, F., y Córdoba, L. M. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11(41), 20-38.
- Tovar, T., Pitalua, L.F., & Sarmiento, M. (2020) Khan Academy como recurso didáctico para enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Miradas y perspectivas de la educación matemática: desde la formación, la inclusión y la tecnología* (pp. 128-145). Sello Editorial Coruniamericana.
https://www.researchgate.net/publication/363207965_ALGUNAS_REFLEXIONES_SOBRE_EDUCACION_MATEMATICA_INCLUSIVA#page=128
- Villada, A. P. (2013). *Diseño e implementación de curso virtual como herramienta didáctica para la enseñanza de las funciones cuadráticas para el grado noveno en la institución educativa Gabriel García Márquez utilizando Moodle* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UNAL.



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores
del Uso de Tecnología en Educación Matemática
Volumen XII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2024
ISSN: 2395-955X

Directorio

Rafael Pantoja R.

Director

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Sección: Artículos de
investigación

Elena Nesterova

Alicia López B.

Verónica Vargas Alejo

Sección: Experiencias

Docentes

Esnel Pérez H.

Armando López Z.

Sección: GeoGebra

EN BÚSQUEDA DE ALTERNATIVAS: SOFTWARE LIBRE PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS

José Francisco Villalpando Becerra, Rafael Pantoja Rangel

francisco.villalpando@academicos.udg.mx, proferpantoja@gmail.com

Universidad de Guadalajara

Para citar este artículo:

Villalpando, J. y Pantoja, R. (2024). En búsqueda de alternativas: Software libre para enseñar matemáticas. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, XII (4), 52-64.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año XII, No. 2, julio-diciembre de 2024, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: <http://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

EN BÚSQUEDA DE ALTERNATIVAS: SOFTWARE LIBRE PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS

Resumen

En años recientes ha ocurrido una transformación en la manera de enseñar matemáticas. La disponibilidad de computadoras cada vez más poderosas tanto en los hogares como en las escuelas, combinada con una amplia gama de software libre diseñado específicamente para las matemáticas, ha generado cambios metodológicos significativos y positivos en la enseñanza de esta disciplina. Las computadoras ofrecen un valioso laboratorio matemático que permite experimentar, desarrollar la intuición, hacer conjeturas, comprobar y demostrar, entre otras cosas. Por lo tanto, el software libre se ha transformado en una herramienta didáctica invaluable. Además, en el ámbito de la investigación matemática, también existen programas específicos que se han convertido en recursos poderosos proporcionados por la tecnología. Estos permiten que las computadoras sean aliadas invaluable para los docentes e investigadores. En este sentido, la presente investigación presenta una selección de programas que pueden ser utilizados tanto para la enseñanza como para la investigación en matemáticas. Se destacarán algunas de las principales ventajas de utilizarlos, con el propósito de dar a conocer diversas alternativas de software libre disponible.

Palabras clave: Código abierto, enseñanza de las matemáticas, software libre.

Abstract

In recent years, there has been a transformation in the way mathematics is taught. The availability of increasingly powerful computers in both homes and schools, combined with a wide range of open-source software specifically designed for mathematics, is bringing about significant and positive methodological changes in the teaching of this discipline. Computers provide a valuable mathematical lab that allows for experimentation, intuition development, conjecturing, verification, and demonstration, among other activities. Therefore, open-source software has become an invaluable educational tool. Moreover, in the field of mathematical research, there are also specific programs that have become powerful resources provided by technology. These programs enable computers to serve as invaluable allies for teachers and researchers. In this regard, a selection of such programs will be presented, which can be used both for teaching and research in mathematics. Some of the main advantages of using them will be highlighted, with the aim of introducing various open-source software alternatives.

Keywords: open source, mathematics teaching, free software.

Introducción

Durante más de tres décadas, es costumbre que los proveedores de software, incluyendo el matemático, dicten las condiciones de uso, incluso llegando a prohibir compartirlo con otras personas (González et al., 2003). Este tipo de software a menudo no se ajusta completamente a las necesidades requeridas y carece de la posibilidad de corregir errores por cuenta propia, dependiendo en su lugar a las correcciones realizadas por el fabricante. Sin embargo, esta situación no es inevitable, siendo el software libre quien otorga la libertad que los programas de tipo comercial no proporcionan.

La noción de software libre se centra en la idea de libertad. En su inicio, se establecieron los principios fundamentales que otorgan al usuario un conjunto de libertades y derechos (Valenzuela, et al., 2018). Ascheri, et al. (2014, p. 5) mencionan que los software libres son “aquellos programas que permiten al usuario ejecutar, estudiar, redistribuir y mejorar el software”. González et al. (2003) y Salazar (2009) abundan en el tema y señalan que, en particular, hay cuatro libertades sobre este tipo de programas:

- Libertad de ejecutarlos en cualquier lugar, con cualquier propósito y de forma permanente.
- Libertad de estudiarlos y adaptarlos según las necesidades particulares. En esta libertad se requiere tener acceso al programa fuente.
- Libertad de redistribuirlos, permitiendo la colaboración con otros y compartirlos con amigos.
- La libertad de mejorarlos y publicar esas mejoras realizadas. También en esta libertad se exige el programa fuente.

Dichas libertades requieren que el programa proporcione el código fuente. Para asegurar el cumplimiento de estas libertades dentro del marco legal, se utiliza una licencia que establece tanto las libertades como las restricciones compatibles con ellas. Por ejemplo, puede requerir que se reconozca y dé crédito a los autores originales al redistribuir el programa. Incluso puede establecer la obligación de que las mejoras realizadas en programas de otros también sean de código libre, fomentando de esta manera la producción de software libre de mejor calidad.

En resumen, se puede afirmar que el software libre:

- No debe confundirse con software gratuito.
- No se basa en el precio sino en la libertad.
- No se trata de tecnología, sino de derechos.
- La licencia bajo la cual se distribuye un programa es lo que determina si es considerado como software libre o no.

Referente teórico

De acuerdo con González et al. (2003) existen diversos conceptos relacionados con el software libre, entre los principales se pueden destacar:

a) Open source software

Es un concepto equivalente a software libre, este fue impulsado por la Open Source Initiative. Aunque existen diferencias filosóficas entre ellos, ya que el enfoque del código abierto se centra en la accesibilidad del código fuente no en sus libertades. Entre la amplia variedad de programas pertenecientes a este tipo de software se pueden mencionar a LibreOffice: software ofimático; GIMP: editor de imágenes; Apache NetBeans: entorno de desarrollo; Mozilla Firefox: navegador web; WordPress: plataforma de administración de contenido web; Bootstrap: ambiente de desarrollo; PDFCreator: convertidor de PDF; OpenShot Video Editor: editor de vídeo; Brave: navegador web, entre otros.

b) Freeware

Por lo general, este tipo de programas son entregados en forma de código binario y permite distribuirlo nuevamente. No obstante, en ocasiones solo está disponible en un sitio oficial, siendo utilizado principalmente como una estrategia para difundir otros servicios o programas. Entre el software de este tipo se pueden mencionar a Kaspersky Free Antivirus: antivirus; VLC Media Player: reproductor multimedia; 7-zip: compactador-descompactador; Audacity: editor de audio; Tweaker: personalizador de Windows; CCleaner: limpieza y optimización; BitDefender Anti-Ransomware: antivirus; etc.

c) Shareware

Este concepto, es diferente de *freeware*, ya que los programas no son completamente gratuitos en todo momento, sino más bien se trata de una forma de distribución. Generalmente no se proporciona el código fuente, pero pueden ser copiados, mas no utilizado de manera continua sin pagar por ellos. El requerimiento de pago puede estar motivado por funciones limitadas, mensajes publicitarios o apelando a la moral del usuario. Su distribución permite probar el software antes de adquirirlo. Ejemplos de este tipo de software son Winrar: compactador-descompactador; EASEUS Partition Master: particiona en el disco duro; Malwarebytes: antivirus; Paint shop Pro: editor de imágenes; etc.

d) Charityware

También conocido como *goodware*, *helpware* o *careware*. En general, es una combinación entre *freeware* y *shareware*, con la particularidad de que se solicita una donación no obligatoria para un organismo benéfico patrocinado. Este tipo de programas suelen estar disponibles sin el código fuente, pero se permite su copiado libremente. Un ejemplo de este tipo de software es Vim, que solicita una aportación caritativa voluntaria para los niños de Uganda. Otros ejemplos son: MJ's CD Archiver: grabador de CD; DateBj: gestión de agenda; Screenpeace: protector de pantalla; Careware CKEditor 4: editor HTML; Flat UI Free: desarrollo de sitios Web; etc.

e) Dominio público

Se utiliza para referirse a la situación en la cual el autor de un trabajo renuncia por completo a sus derechos sobre el programa y los transfiere en beneficio de la sociedad. Esta renuncia debe estar explícitamente establecida en el programa. Además, también hace referencia a aquellos programas cuyos derechos de propiedad intelectual han expirado, generalmente 50 años después del deceso del autor (Vargas, 2021). Algunos ejemplos de software de dominio público son: SQLite: manejador de bases de datos; I2P: proyecto de red; SHA-3: estándar de seguridad; entre otros.

f) Adware

Se refiere a programas que son completamente gratuitos, pero incluyen publicidad en forma de banners o pop-ups. Estos programas suelen ser distribuidos sin los archivos fuente y se pueden copiar libremente. Muchos videojuegos gratuitos son de este tipo. Un ejemplo notable es la red social Facebook, la cual presenta anuncios publicitarios como parte de su funcionamiento. Otro ejemplo es el videojuego Catapult Quest, el cual también presenta publicidad al terminar cada nivel.

g) Abandonware

Este concepto es poco utilizado, se refiere a programas que están fuera de catálogo o son complicados de conseguir debido a su antigüedad, desaparición o cambios en la compañía que desarrollo el programa, declaración de quiebra u otras razones que generan un estado legal incierto. En estos casos, se entiende que el software ya no será distribuido y su descarga sin fines de lucro, que difiere de su distribución gratuita, no causará ningún perjuicio monetario. Generalmente, este tipo de programas se pueden localizar libremente en la Web, ya que ha dejado de poseer derechos de autor. Un ejemplo común de esto son los compiladores como Cobol, QBASIC, Algol, ADA, Modula, entre otros.

h) Copyleft

Se trata de una forma específica de software libre en la que la licencia impone la condición de que las modificaciones realizadas sean distribuidas también de forma libre. Un caso destacado es el de este tipo de programas es el conocido compilador GCC (GNU Compiler Collection) utilizado por el lenguaje de programación C++.

Es crucial destacar que, si el software libre se hubiera limitado únicamente al dominio público, eventualmente habría caído bajo el control de alguna empresa comercial.

Metodología

Después de realizar diferentes investigaciones y búsquedas en Internet, se pudo identificar la existencia de diversos programas que cumple con los requisitos deseados, es decir, software libre específicamente diseñado tanto para la docencia como para la investigación en matemáticas.

Una vez identificados dichos programas, se procedió a su descarga, posteriormente se procedió a analizar su origen y verificar la validez de su licencia. Se establecieron criterios mínimos sugeridos para considerar que estos programas fueran viables, los cuales se mencionan a continuación:

- Ser un software libre específicamente diseñado ya sea para la enseñanza o la investigación en matemáticas.
- Contar con manuales de usuario y documentación que facilite su instalación. En caso de no contar con ellos, se requiere que haya información disponible sobre cómo llevar a cabo la instalación.
- Disponer de un asistente de instalación, o en su defecto, que la instalación sea sencilla y fácil de realizar.
- Ser compatible con diferentes sistemas operativos, de modo que pueda ser instalado en una variedad de plataformas.

Resultados

A continuación, se proporcionará la relación de diversos programas identificados para la enseñanza o la investigación en matemáticas que son software libre. El objetivo es demostrar que hay una gran diversidad programas libres que son una alternativa a otros programas comerciales que pudieran ser más conocidos. Se han organizado y clasificado según su

campo de competencia en las diferentes ramas de las matemáticas. Cabe destacar que esta clasificación no se fundamenta en el tipo de licencia de uso del software libre.

Es importante destacar que hay programas que comparten más de un área de la matemática, sin embargo, se mencionará la principal en cada caso. Además, debido a limitaciones de espacio, no se proporcionarán descripciones detalladas de las características específicas de cada programa.

La mayoría de estos programas pueden ser utilizados en una computadora personal convencional, y algunos también son compatibles con Macintosh. Además, la mayoría de ellos están diseñados para funcionar en sistemas operativos Windows, aunque varios de ellos son multiplataforma y pueden ser ejecutados en otros sistemas operativos.

A continuación, se muestran algunas de las principales áreas de la matemática junto con una breve descripción de su ámbito de competencia, además de una tabla que incluye, para cada área, las alternativas libres más utilizadas. Para cada una se muestra su nombre, logotipo, enlace oficial de descarga, tamaño en Mega bytes (Mb), tipo de computadora para su ejecución y el sistema operativo compatible. Esto se presenta con el fin de que cada persona pueda seleccionar la que considere mejor para sus requerimientos y necesidades (Da Rosa, et al., 2007).

a) Sistemas de álgebra computacional: alternativas libres

Los sistemas de álgebra computacional, también conocidos como programas de álgebra computacional, son aplicaciones que permiten ejecutar operaciones simbólicas en matemáticas tales como simplificación de expresiones algebraicas, solución de sistemas de ecuaciones lineales, multiplicación y factorización de polinomios, integración, diferenciación, manipulación de vectores y matrices, entre otros (De Nápoli, 2009).

Los principales programas comerciales de esta categoría son Mathematica® y Maple®, cuyos precios oscilan alrededor 3,230 y 2,990 dólares respectivamente. Estas herramientas son ampliamente utilizadas por matemáticos, investigadores, ingenieros y otros científicos.

No obstante, existen numerosas alternativas de software libre en esta categoría, como Maxima, Sage, PariGP, Mathomatic, Yacas, Xcas, Axiom, Reduce, entre otros (Tabla 1). Estos programas de propósito general cubren campos de la matemática tales como álgebra, cálculo, geometría analítica.

Tabla 1. Sistemas de álgebra computacional: alternativas libres

| Programa | Página oficial | Tamaño (Mb) | Computador | S. O. |
|------------|---|-----------------|------------|---------|
| Maxima | maxima.sourceforge.io | 142 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Sage | sagemath.org | 455 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| PariGP | pari.math.u-bordeaux.fr | 98 | 1 | 1, 3 |
| Mathomatic | github.com/mfillpot/mathomatic | 16 (fuentes) | 1, 2 | 1, 2, 3 |

| | | | | |
|--------|--------------------------------------|-----------------|------|---------|
| Yacas | yacas.org | 37 (fuentes) | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Xcas | www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse | 163 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Axiom | axiom-developer.org | 159 | 1, 2 | 2, 3 |
| Reduce | reduce-algebra.com | 50 | 1, 2 | 1, 2, 3 |

Nota: Tipo de Computador: 1 PC, 2 Macintosh; Sistema Operativo (S. O.): 1 Windows, 2 Mac OS, 3 Linux

b) Cálculo Numérico: alternativas libres

Otra área de las matemáticas es el cálculo numérico, este se ocupa de describir, analizar y desarrollar algoritmos de tipo numérico para solucionar problemas que involucran cálculos numéricos con cierta precisión, cabe mencionar que los límites de esta área no son completamente precisos.

En el ámbito comercial, Matlab[®] (abreviatura de Matrix Laboratory) es el programa más destacado para el cálculo numérico, reconocido por su potencia pero también por su elevado costo, que supera los 7,500 dólares.

Sin embargo, existen numerosas alternativas libres en esta categoría que son igualmente potentes y funcionales, e incluso superan a Matlab en ciertos aspectos (Willging, et al., 2008). Entre las opciones más populares se encuentran SciLab, GNU Octave, Wiris, FreeMat, Euler Math Toolbox, Numpy y Scipy (son bibliotecas para el lenguaje de programación Phyton), GNU Scientific Library, Euler, entre otros (Tabla 2). Estos programas ofrecen herramientas robustas y eficientes para llevar a cabo cálculos numéricos con gran precisión y versatilidad.

Tabla 2. Cálculo Numérico: alternativas libres

| Programa | Página oficial | Tamaño (Mb) | Computador | S. O. |
|------------------------|--|-------------|------------|---------|
| SciLab | scilab.org | 171 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| GNU Octave | octave.org | 380 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Wiris | wiris.net/educa.madrid.org/wiris/es | On-line | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| FreeMat | freemat.sourceforge.net | 54 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Euler Math Toolbox | eumat.sourceforge.net | 106 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Numpy | numpy.org | 12.8 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Scipy | scipy.org | 25 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| GNU Scientific Library | gnu.org/software/gsl | 7.4 | 1 | 3 |
| Euler | euler.sourceforge.net | 1.5 | 1, 2 | 1, 2, 3 |

Nota: Tipo de Computador: 1 PC, 2 Macintosh; Sistema Operativo (S. O.): 1 Windows, 2 Mac OS, 3 Linux

c) Representación gráfica de funciones: alternativas libres

La representación gráfica de funciones es una tarea que se aprende a partir de la educación secundaria, donde trazamos gráficas de funciones constantes, lineales, cuadráticas, entre otras. A medida que avanzamos en niveles educativos, también debemos determinar el dominio y codominio de las funciones, así como identificar si son crecientes o decrecientes, entre otros aspectos.

Los programas dedicados a esta tarea son, sin duda, los más numerosos y fueron precursores en el ámbito de las alternativas libres para matemáticas. Actualmente, hay una amplia gama de software libre disponible en Internet para la representación gráfica de funciones, siendo estos cada vez más potentes y versátiles.

Aunque todos los programas de tipo comercial para matemáticas, tales como Matlab[®], Mathematica[®], Maple[®], MathCad[®], entre otros, contienen diversas aplicaciones para la representación gráfica de funciones, tienen la desventaja de su elevado costo.

En esta categoría, hay numerosas alternativas libres, tales como Graph, GrafEq, Deriva, GraphSight Junior, Winplot, FooPlot, Labplot, Desmos, GnuPlot, Zhu3D, entre muchas otras (Tabla 3). Estos programas ofrecen una amplia variedad de funciones y características para explorar y visualizar de manera efectiva las funciones matemáticas.

Tabla 3. Representación gráfica de funciones: alternativas libres

| Programa | Página oficial | Tamaño (Mb) | Computador | S. O. |
|-------------------|--|-------------|------------|---------|
| Graph | padowan.dk | 9.6 | 1, 2 | 1, 2 |
| GrafEq | peda.com/grafeq | 2.4 | 1, 2 | 1, 2 |
| Deriva | xtec.es/~jlagares/matemati.htm | 0.4 | 1 | 1 |
| GraphSight Junior | graphsight-junior-v-1-0.software.informer.com | 0.41 | 1 | 1 |
| Winplot | math.exeter.edu/rparris/winplot.html | 0.81 | 1 | 1 |
| FooPlot | pfortuny.net/fooplot.com | On-line | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Labplot | labplot.sourceforge.net | 164 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Desmos | desmos.com | On-line | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| GnuPlot | sourceforge.net/projects/gnuplot/files/gnuplot/ | 67 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Zhu3D | www.kde-apps.org | 7.2 | 1 | 1 |

Nota: Tipo de Computador: 1 PC, 2 Macintosh; Sistema Operativo (S. O.): 1 Windows, 2 Mac OS, 3 Linux

d) Procesadores geométricos: alternativas libres

Los procesadores geométricos (o programas de geometría dinámica) son programas diseñados específicamente para trabajar con construcciones y representaciones geométricas. Estas herramientas permiten a los usuarios explorar y visualizar de forma interactiva conceptos y propiedades geométricas en un entorno digital (Villalpando et al., 2010).

A través de los programas de geometría, los estudiantes pueden realizar construcciones geométricas, trazar líneas, ángulos, polígonos y otras formas, y experimentar con sus propiedades y transformaciones. Estas aplicaciones ofrecen una forma dinámica de aprender y comprender los principios de la geometría, ya que permiten realizar cambios y observar cómo afecta a las figuras y relaciones geométricas.

Estos programas pueden ser utilizados tanto en entornos educativos como en entornos profesionales, ya que brindan herramientas para resolver problemas geométricos y realizar investigaciones en este campo. Además, muchos de estos programas también ofrecen funcionalidades avanzadas, como cálculos de áreas y volúmenes, trazado de gráficos y representaciones en tres dimensiones.

Ya sea que se utilicen de forma local en una computadora o a través de plataformas en línea, los procesadores geométricos proporcionan una forma interactiva y visualmente atractiva de explorar la geometría y fortalecer la comprensión de sus conceptos. Los procesadores geométricos comerciales, como Cabri-Géometre®, Geometer's Sketchpad® y la versión más reciente de Cinderella® (2.0), tienen un costo que oscila entre 1,800 y 2,500 pesos.

En cuanto a las opciones libres en esta categoría, Geogebra es considerada la mejor opción alternativa (Fonseca, et al., 2017). Existen otras opciones tales como Regla y Compás, CaRMetal 2, Cinderella (versiones antes de la 2), Sketchometry, Geonext, Kig, Dr. Geo, etc. (Tabla 4). Estos programas ofrecen diversas funcionalidades para realizar construcciones geométricas y explorar conceptos de forma interactiva, sin necesidad de incurrir en costos.

Tabla 4. Procesadores geométricos: alternativas libres

| Programa | Página oficial | Tamaño (Mb) | Computador | S. O. |
|--------------------------|--|-------------|------------|---------|
| Geogebra | geogebra.org | 95 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Regla y Compás | sourceforge.net/projects/zirkel/files | 5.5 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| CaRMetal 2 | carmetal2.free.fr/site/index.php | 3.23 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Cinderella (antes de V2) | cinderella.de | 22.5 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Sketchometry | start.sketchometry.org | On-line | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Geonext | Geonext.uni-bayreuth.de | 29 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Kig | apps.kde.org/es/kig | 217 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Dr. Geo | gnu.org/software/dr-geo/ | 21.2 | 1 | 1, 3 |

Nota: Tipo de Computador: 1 PC, 2 Macintosh; Sistema Operativo (S. O.): 1 Windows, 2 Mac OS, 3 Linux

e) Probabilidad y estadística: alternativas libres

La probabilidad es una disciplina matemática que se centra en la cuantificación de la frecuencia de ocurrencia de ciertos resultados en un experimento, siempre que las situaciones sean estables además de estar claramente definidas. Por otro lado, la estadística se ocupa de la recopilación, estudio y análisis de los datos conseguidos en una investigación o estudio.

Es una disciplina matemática que se utiliza para extraer información significativa de los datos y realizar deducciones sobre una población más amplia.

En el ámbito académico y científico, los programas comerciales más populares para trabajar en estas áreas incluyen el SPSS® y el Statgraphics®. Sin embargo, estos programas comerciales suelen tener un costo significativo, con precios que rondan los 1,069 y 1,190 dólares, respectivamente.

Actualmente, existen alternativas libres que han ganado reconocimiento en este campo, siendo GNU R, o simplemente R, la opción más destacada. Es un entorno de programación de código abierto que proporciona herramientas estadísticas poderosas y flexibles. Además, se ha desarrollado un programa libre llamado GNU PSPP, que emula las funcionalidades del SPSS, además se puede utilizar en diversos sistemas operativos tales como Windows, MAC y Linux.

Otras alternativas libres, como Jamovi, JASP, SalStat y Macanova, etc. (Tabla 5), pueden resultar útiles para esta categoría, brindando opciones adicionales a los usuarios que buscan herramientas estadísticas de calidad sin incurrir en costos elevados.

Tabla 5. Probabilidad y estadística: alternativas libres

| Programa | Página oficial | Tamaño (Mb) | Computador | S. O. |
|----------|--|-------------|------------|---------|
| GNU R | r-project.org | 90 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| GNU PSPP | gnu.org/software/pspp | 27.4 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Jamovi | jamovi.org | 259 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| JASP | jasp-stats.org | 699 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| SalStat | salstat.com | 6.2 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Macanova | stat.umn.edu/macanova | 9.6 | 1, 2 | 1, 2 |
| DataPlot | www.nist.gov/itl/sed/dataplot | 20.3 | 1, 2 | 1, 2, 3 |

Nota: Tipo de Computador: 1 PC, 2 Macintosh; Sistema Operativo (S. O.): 1 Windows, 2 Mac OS, 3 Linux

f) Procesadores de texto matemáticos: alternativas libres

La redacción de un texto matemático o científico en un computador es un tema muy importante en el ámbito de la enseñanza e investigación en matemáticas. Sin embargo, no todo es tan sencillo, ya que, aunque los procesadores de texto son ampliamente utilizados en la actualidad, pocos ofrecen una edición sencilla cuando se trata de utilizar tipografía matemática.

El software comercial más conocido para editar de este tipo de textos es Scientific WorkPlace®. También se encuentran opciones como Scientific Word®, que tiene un precio de 864 dólares así como Scientific Notebook®. Además, existen otras herramientas como MathType® y el mismo Microsoft Word® que tiene integrado un editor de ecuaciones. Estos programas son de tipo WYSIWYG, acrónimo del inglés What You See Is What You Get (cuyo significado es: Lo que se ve es lo que se obtiene), el cual se utiliza para describir un enfoque en el cual la representación visual en la pantalla coincide directamente con el resultado final que se obtendrá al imprimir o visualizar el documento.

Cuando se trata de redactar textos con tipografía matemática, LaTeX es el referente. En 1978 surgió este programa, entonces denominado TeX, fue desarrollado por Don Knuth, con el tiempo ha evolucionado y se ha enriquecido con complementos y LaTeX es uno de ellos. Su función principal es ejecutar de forma automática macro comandos de TeX y hacer su uso más simple. Presenta algunos desafíos para los novatos en su uso, pero son más sus ventajas: es de dominio público, genera textos de alta calidad, los archivos fuente son muy compactos y el intercambio de archivos es sencillo. Sin embargo, a cambio de estas ventajas, ofrece una interfaz limitada ya que no se puede ver lo que se está escribiendo en tiempo real (no es un procesador de texto WYSIWYG), siendo necesario compilar el documento antes de mostrar el texto final.

En cuanto a las opciones de software libre en esta categoría, existen numerosos programas destacados. Entre ellos se encuentra MikTeX como editor y TexStudio como compilador para LaTeX, que juntos permiten producir textos de excelente calidad. También están disponibles opciones como MacTeX, TeX Live, GNU TeXmacs, Overleaf, LyX, Kile, Bib2x, entre otros (Tabla 6).

Tabla 6. Procesadores matemáticos: alternativas libres

| Programa | Página oficial | Tamaño (Mb) | Computador | S. O. |
|-------------|--|-------------------|------------|---------|
| MiKTeX | miktex.org | 134 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| TexStudio | texstudio.org | 135 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| MacTeX | tug.org/mactex | 5,348 | 2 | 2 |
| Texlive | tug.org/texlive | 25 | 1 | 3 |
| GNU TeXmacs | texmacs.org | 120 | 1 | 1 |
| Overleaf | es.overleaf.com | On-line | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Lyx | lyx.org | 57 | 1, 2 | 1, 2, 3 |
| Kile | kile.sourceforge.net | 107 | 1 | 3 |
| Bib2x | xandi.eu/bib2x | 0.12 (fuentes) | 1, 2 | 1, 2, 3 |

Nota: Tipo de Computador: 1 PC, 2 Macintosh; Sistema Operativo (S. O.): 1 Windows, 2 Mac OS, 3 Linux

g) Programas de propósito específico: alternativas libres

En el ámbito de las matemáticas, también existen programas de software libre diseñados específicamente para áreas particulares, especialmente enfocados en la investigación. Estos programas ofrecen herramientas especializadas que facilitan el estudio y el análisis en campos específicos. Algunos ejemplos destacados incluyen:

- GAP: programa dedicado en el álgebra computacional discreta.
- Macaulay2: utilizado en algebra conmutativa y geometría algebraica.
- Singular: programa para algebra conmutativa
- Alberta FEM y FreeFEM: programas utilizados en el campo del elemento finito.
- PariGP: programa versátil que se aplica en la teoría de números.
- Yorick: herramienta orientada a simulaciones científicas.

- Cactus, Iode y Auto: herramientas diseñadas para ecuaciones diferenciales ordinarias.
- GNU Getrl: programa destinado a la regresión y el análisis de series de tiempo.
- GLPK: programa especializado en programación lineal.
- Cvxopt: utilizado para la optimización convexa.

Estas alternativas de software libre brindan a los investigadores y profesionales de las matemáticas una amplia gama de opciones para abordar y resolver problemas específicos en sus respectivas áreas de estudio (Tabla 7).

Tabla 7. Programas de propósito específico: alternativas libres

| Programa | Página oficial | Tamaño (Mb) | Computador | S. O. |
|-------------|--|------------------|------------|---------|
| GAP | gap-system.org | 578 | 1,2 | 1, 3 |
| Macaulay2 | faculty.math.illinois.edu/Macaulay2 | 169 | 1,2 | 1, 2, 3 |
| Singular | singular.uni-kl.de | 143 | 1,2 | 1, 2, 3 |
| Alberta Fem | alberta-fem.de | 2.4 | 1 | 3 |
| FreeFEM | freefem.org | 260 | 1,2 | 1, 2, 3 |
| PariGP | pari.math.u-bordeaux.fr | 98 | 1 | 1, 3 |
| Cactus | cactuscode.org | 0.6 (fuentes) | 1 | 3 |
| Iode | conf.math.illinois.edu/iode | 0.14 (rutina) | 1,2 | 1, 2, 3 |
| Auto | indy.cs.concordia.ca/auto | 4.8 | 1,2 | 1, 2, 3 |
| Yorick | yorick.sourceforge.net | 2.5 | 1 | 3 |
| GNU Getrl | gretl.sourceforge.net | 6.7 | 1 | 3 |
| GLPK | winglpk.sourceforge.net | 20.1 | 1 | 1 |
| Cvxopt | cvxopt.org | 3.9 | 1,2 | 1, 2, 3 |

Nota: Tipo de Computador: 1 PC, 2 Macintosh; Sistema Operativo (S. O.): 1 Windows, 2 Mac OS, 3 Linux

Conclusiones

El mundo del software libre ofrece una amplia variedad de alternativas. Por lo general, no hay un solo programa para cada tarea, sino múltiples opciones entre las cuales optar. Además no solo se puede ver como un enfoque educativo y pedagógico, sino también como una opción económica. Su uso conlleva ahorros significativos, lo que permite que estudiantes, profesores e investigadores posean acceso a la alternativa que más se acomode a sus necesidades.

Al no existir gastos asociados ni necesidad de renovar licencias, no existen limitaciones en cuanto a la cantidad de usuarios que pueden utilizar el software. Esto garantiza una mayor disponibilidad y equidad en el acceso a las herramientas tecnológicas necesarias para la

docencia y la investigación. Su uso en la enseñanza de las matemáticas, ofrece la ventaja de facilitar la distribución legal de copias del programa a los estudiantes. Lo que hace posible la utilización del software en sus propios hogares. Los términos de la licencia del software otorga la autorización para llevar a cabo esta distribución.

Sin embargo, tal vez la principal ventaja de utilizarlo en la enseñanza e investigación de matemáticas radica en el acceso al conocimiento subyacente al software. Al utilizar software libre, tanto estudiantes como investigadores tienen la posibilidad de examinar y comprender el algoritmo utilizado por el programa para resolver un cálculo específico. Inclusive, se puede acceder al programa fuente y modificarlo para adaptarlo a requisitos específicos o realizar tareas distintas. Esta capacidad de acceso y modificación del código fuente brinda un nivel de transparencia y flexibilidad que fomenta el aprendizaje profundo y el desarrollo de habilidades técnicas en el campo de las matemáticas.

Bibliografía

- Ascheri, E., Pizarro, R., Astudillo, G., García, P. y Culla M. E. (2014). Software educativo en línea para la enseñanza y el aprendizaje de temas de Cálculo Numérico. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 14(2), pp. 1-28. Cartago, Costa Rica.
- Da Rosa, F. y Heinz, F. (2007). *Guía práctica de software libre. Su selección y aplicación local en América Latina y el Caribe*. UNESCO. Montevideo, Uruguay.
- De Nápoli P. (2009). *Software Libre para enseñar o aprender Matemática porqué y cómo*. Recuperado el 10 de junio de 2023 de <https://mate.dm.uba.ar/~pdenapo/charla-sl-matematica/charla-sl-matematica-lugunq.pdf>.
- Fonseca, E. da S., y Fonseca, M. de O. (2017). The use of GeoGebra in a virtual learning environment. *Research, Society and Development* 7(1), pp. 1-13. São Paulo, Brasil.
- González, J., Saone, P. y Robles, G. (2003). *Introducción al software libre*. Free Software Foundation. Madrid, España.
- Salazar, L. J. (2009). *TIC'S, Software Libre y Educación Matemática*. Recuperado el 12 de junio de 2023 de <http://funes.uniandes.edu.co/17243/1/Salazar2009TIC%C2%B4S.pdf>.
- Valenzuela, C., Reyes, D. y Oliveros, S. (2018). *Introducción: Software libre y código abierto: experiencias innovadoras en bibliotecas y centros de información*. Recuperado el 10 de junio de 2023 de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=350556354006>.
- Vargas, R. A. (2021). *¿Qué es el dominio público?* Recuperado el 1 de abril de 2023 de <https://bibliosabana.wordpress.com/2014/11/10/que-es-el-dominio-publico>.
- Villalpando Becerra, J. F. y Nesterova E. (2011). *Uso de procesadores geométricos en la enseñanza de la Geometría Euclidiana*. CVEM 2011 Congreso Internacional Virtual de la Enseñanza de las Matemáticas. Guadalajara, México.
- Willging, P. y Astudillo, G. (2008). *Software libre para matemática*. II Reunión Pampeana de Educación Matemática (REPEM). La Pampa, Argentina.