REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen XII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2024

ISSN: 2395-955X

Contenido Pág.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año XII, No. 2, julio-diciembre 2024, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: rafael.prangel@academicos.udg.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

.

COMITÉ DE EVALUACIÓN

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen XII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2024

ISSN: 2395-955X

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA ENSEÑAR SERIES DE FOURIER CON TECNOLOGÍA: ESTUDIO DE CASO DE ONDA CUADRADA

Noelia Londoño Millán, Francisco Hazael Camarillo Mendoza, Alibeit Kakes Cruz

noelialondono@uadec.edu.mx, hazaelcamarillo@uadec.edu.mx, alibetkakes@uadec.edu.mx

Universidad Autónoma de Coahuila

Para citar este artículo:

Londoño, N., Camarillo, F., Kakes, A. (2024). Secuencia didáctica para enseñar series de Fourier con tecnología: estudio de caso de onda cuadrada**.** Construyendo rectángulos. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, XII (2), 1-25.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año XII, No. 2, julio-diciembre de 2024, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA ENSEÑAR SERIES DE FOURIER CON TECNOLOGÍA: ESTUDIO DE CASO DE ONDA CUADRADA

Noelia Londoño Millán, Francisco Hazael Camarillo Mendoza, Alibeit Kakes Cruz
noelialondono@uadec.edu.mx, hazaelcamarillo@uadec.edu.mx,
alibetkakes@uadec.edu.mx
Universidad Autónoma de Coahuila

Resumen

La reflexión sobre la enseñanza de las series de Fourier pone de relieve que el dominio de este tema requiere una sólida comprensión de sus fundamentos teóricos y explicaciones exhaustivas. Además, es fundamental que los estudiantes se involucren en procesos cognitivos que apoyen su comprensión e institucionalización del concepto. Por esta razón, proponemos desarrollar e implementar una secuencia didáctica para la enseñanza de las series de Fourier, incorporando herramientas tecnológicas que permitan a los estudiantes de ingeniería explorar diversos escenarios, ajustar variables y observar resultados inmediatos. Este enfoque fomenta el aprendizaje activo y una comprensión más profunda de los conceptos en estudio. En este trabajo, nos centramos específicamente en detallar las características de esta propuesta didáctica y su implementación, con especial énfasis en el estudio de una onda cuadrada.

Palabras clave: Series de Fourier, GeoGebra, enseñanza

Abstract

Reflecting on the teaching of the Fourier series highlights that mastering this topic requires a solid understanding of its theoretical foundations and thorough explanations. Moreover, it is essential for students to engage in cognitive processes that support their comprehension and institutionalization of the concept. For this reason, we propose developing and implementing a didactic sequence for teaching the Fourier series, incorporating technological tools that enable engineering students to explore various scenarios, adjust variables, and observe immediate outcomes. This approach fosters active learning and a deeper understanding of the concepts under study. In this paper, we specifically focus on detailing the characteristics of this didactic proposal and its implementation, with a particular emphasis on the study of a square wave.

Keywords: Fourier Series, GeoGebra, Teaching.

Introducción

Las Series de Fourier es un tema recurrente en los currículos de carreras tecnológicas e ingenierías, en asignaturas como modelos matemáticos, vibraciones mecánicas y ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo, los estudiantes suelen mostrar un bajo rendimiento en este tema según Romero y Farfán (2016), por un lado, desconocen los constructos previos que se requieren para abordarlos y por otro, se imparte de una manera muy teórica.

Una posible explicación para el bajo rendimiento de los alumnos podría ser la falta de conocimientos previos en áreas fundamentales como identidades trigonométricas, funciones, sucesiones y series, a esto se le puede sumar el enfoque pedagógico predominantemente teórico, que contribuye a la dificultad de los estudiantes para experimentar y comprender los fenómenos relacionados, ya que no se les brinda suficiente espacio para explorar estos conceptos de manera práctica y contextualizada.

Las primeras ideas que referían a las series trigonométricas fueron consideradas por los babilonios y posteriormente por D'Alambert en 1747 y fue hasta 1821 que Fourier publicó su tratado "Teoría analítica del calor", donde amplió y formalizó los conceptos sobre la ecuación de conducción de calor.

En cuanto a la enseñanza de las Series de Fourier, Moreno (1999, citado en Romero y Farfán, 2016) señala una tendencia hacia un enfoque formal, donde los profesores se limitan a explicar ejemplos y asignar ejercicios. Esta observación se confirma en una revisión de tres textos clave para estudiantes de ingeniería (Hsu, 1973; Kreyszig, 2001; Zill, 1997) los cuales ofrecen solo conceptos y fórmulas para resolver series y transformadas de Fourier, sin incluir una parte experimental que refuerce los conceptos.

Reyes y Arellano (2014) indican que las dificultades en la enseñanza de física y ecuaciones diferenciales, así como en materias especializadas como dinámica y vibraciones mecánicas, se deben a la falta de visualización de los fenómenos modelados matemáticamente. Por ello, proponen un prototipo de mesa vibratoria para ilustrar conceptos matemáticos como las series de Fourier y los modelos dinámicos de sistemas mecánicos desbalanceados, con el objetivo de mejorar la comprensión física y matemática mediante la generación y análisis de señales de aceleración periódicas.

Los ejemplos y antecedentes bibliográficos revisados ofrecen una perspectiva sobre la enseñanza de las series de Fourier, lo que nos permite establecer el objetivo central de nuestra investigación: Crear una secuencia didáctica en la que se pueda vincular un fenómeno físico al tema matemático de la serie de Fourier en el cual nos permita visualizar y comprender las sumas parciales asociados al fenómeno físico, en particular al análisis de señales. Debido a limitaciones de espacio, en este artículo nos enfocaremos en describir las características y la implementación didáctica de la propuesta, particularmente en relación con una onda cuadrada.

Referente teórico

En esta sesión se describe brevemente lo que es una serie de Fourier, sus características y elementos clave para el desarrollo, así mismo se incluirá un apartado sobre herramientas tecnológicas a la enseñanza de las matemáticas, haciendo alusión particular a los usos en las series de Fourier**.** Según González (2003), Zill et al. (2018), Yáñez, (2015) y Rao, et al. (2012), las Series de Fourier consisten en la descomposición de cualquier función periódica en una suma infinita de funciones sinusoidales (senos y cosenos), cuyas frecuencias son múltiplos de la función original. Esta descomposición permite analizar las propiedades de la función y la composición de sus componentes o fenómenos.

La serie de Fourier de una función periódica integrable de f definida en el periodo -p, p se define mediante la siguiente serie trigonométrica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \right], donde$$

a_0, a_n y b_n son los coeficientes de Fourier, que se obtienen de la siguiente manera:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-p}^{p} f(x)dx$$

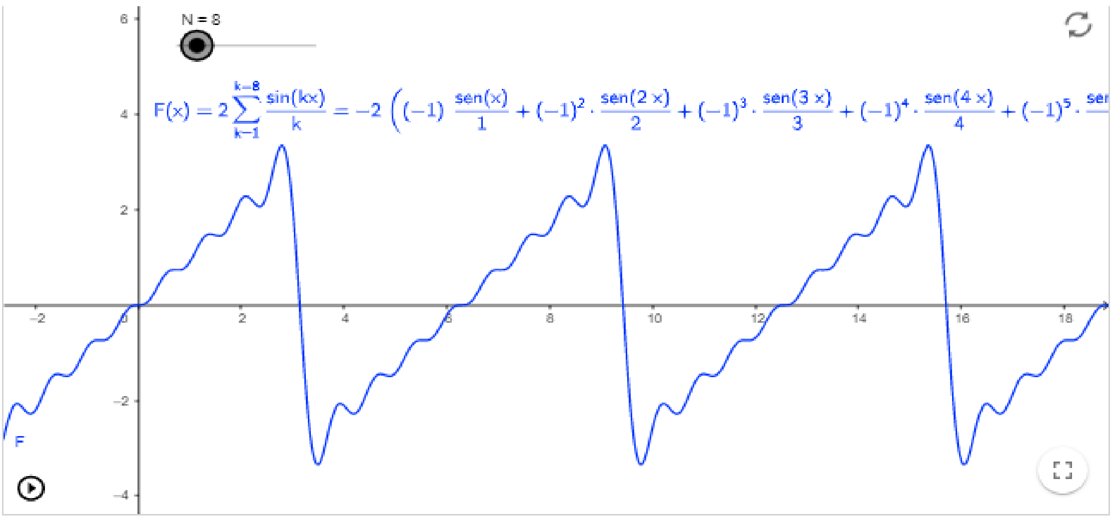
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-p}^{p} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$

En la figura 1, se muestra una gráfica y su respectivo desarrollo algebraico en serie de Fourier, construida con el software GeoGebra, dicha función es periódica y cumple las condiciones que permite su transformación.

Figura 1

Representación gráfica y algebraica de la Serie de Fourier para una función periódica



Nota: Tomado de Hall (2022).

Elementos clave en las series de Fourier

*Operaciones básicas***.** Son varias las operaciones básicas que los alumnos deben dominar para comprender las series de Fourier, de acuerdo con Gómez (s/f) se necesita entender la suma, la multiplicación, el desplazamiento y la reflexión de funciones que dependen del tiempo para la representación y procesamiento de funciones.

Tabla 1. Algunas operaciones básicas de funciones

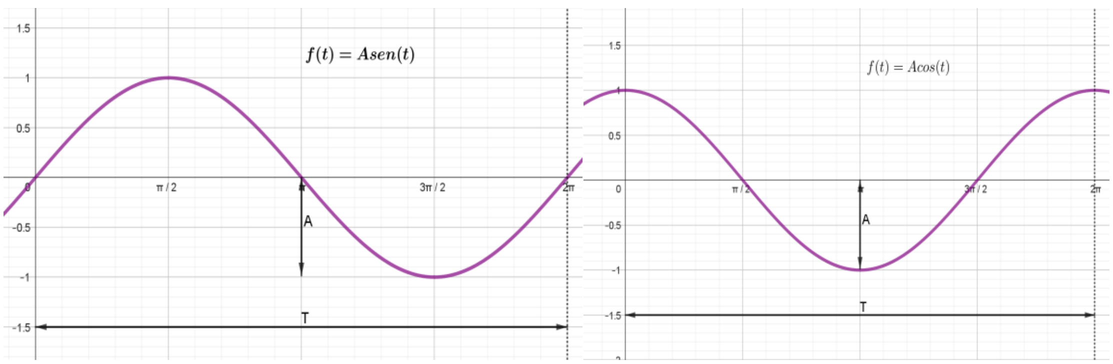
Nombre de la operación	Definición
Suma de funciones	$g(t) = f_1(t) + f_2(t)$
Multiplicación por una constante α	$g(t) = \alpha f(t)$.
Desplazamiento en el tiempo	$f(t - \tau)$
Reflexión en el tiempo	$f(-t)$.

Nota. Esta tabla muestra el nombre y definición de algunas funciones básicas.

Funciones periódicas. Otro elemento importante que deben conocer los alumnos al resolver series de Fourier es lo relacionado con la función periódica, este se define como: una función para la cual $f(t) = f(t + T)$, para todo valor de ***t***, donde la constante T se denomina periodo de la función. El periodo también se puede definir como el tiempo transcurrido entre dos puntos equivalentes de una función. Las funciones periódicas más representativas son las funciones trigonométricas seno y coseno, (Figura 2), ambas con periodo $T = 2\pi$.

Figura 2

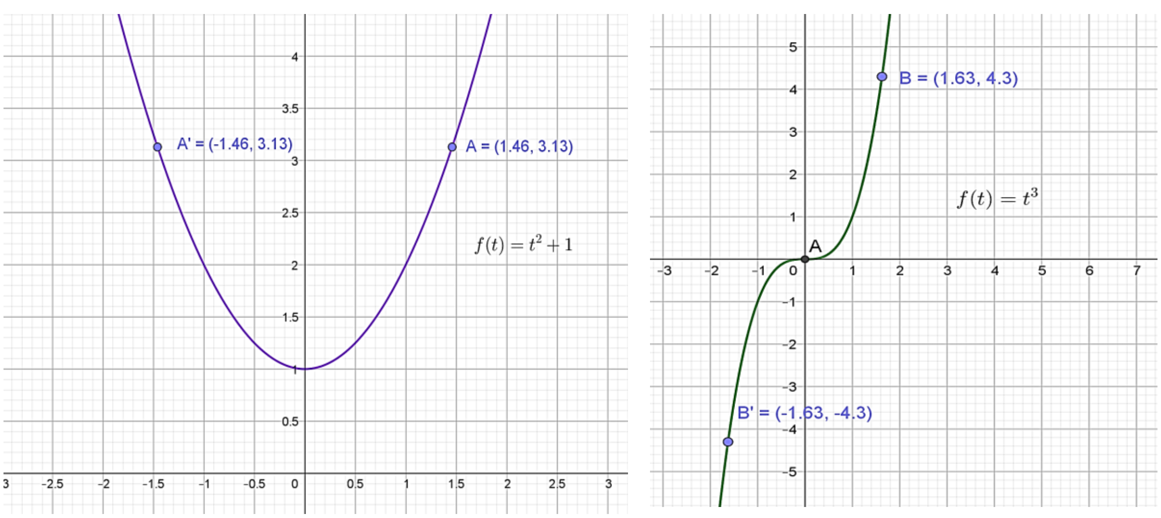
Funciones periódicas $sen(t)$ *y* $cos(t)$ *con periodo* $T = 2\pi$



Paridad de funciones. Un elemento que agiliza la búsqueda de los coeficientes de la serie de Fourier es identificar si las funciones son pares e impares, como no siempre es preciso tener su representación gráfica, conviene usar sus definiciones. Si se cumple que $f(t) = f(-t)$, lo cual indica que la señal tiene los mismos valores para el lado positivo y negativo de t. Por ejemplo, la función $f(t) = t^2 + 1$ es par (Figura 5a). Contrario a lo anterior si se cumple que $f(-t) = -f(t)$, significa que la función es impar, lo cual indica que su gráfica no se altera luego de una rotación de 180º alrededor del origen. Por ejemplo, la función $f(t) = t^3$ es impar (Figura 5b).

Figura 3

Gráficas de las funciones: $f(t) = t^2 + 1$ *y* $f(t) = t^3$*, par e impar respectivamente*



a b

Herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas

Varios autores (Rodríguez, et al., 2023; Ruthven, 2009; Laborde, 2001; Drijvers & Trouche, 2014; Barba, et al., 2017) coinciden en que el uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas ha evolucionado y se han ampliado los métodos significativamente en las últimas décadas, creando espacios innovadores, transformando la manera en que los estudiantes interactúan con los conceptos matemáticos. Desde la introducción de calculadoras gráficas hasta el uso de software interactivo y herramientas en línea, la tecnología ha facilitado la visualización, la experimentación y la comprensión de conceptos abstractos y consideran que este enfoque no solo mejora el aprendizaje al hacer las matemáticas más accesibles y prácticas, sino que también fomenta el desarrollo de habilidades de resolución de problemas y el pensamiento crítico.

En el caso específico de la enseñanza de las series de Fourier, se ha demostrado que el uso de herramientas tecnológicas no solo facilita la comprensión teórica del tema, sino que también favorece la visualización de representaciones gráficas y algebraicas, lo cual contribuye a una mejor comprensión de conceptos abstractos, como la descomposición de señales periódicas en componentes sinusoidales (Romero & Farfán, 2016). Además, estas herramientas permiten la interacción directa con los parámetros de las series de Fourier, tales como amplitudes y frecuencias, lo que brinda a los estudiantes la oportunidad de explorar cómo las señales resultantes cambian al ajustar dichos parámetros (Muro et al., 2007).

Otro elemento clave que se tuvo en cuenta son las aplicaciones prácticas porque la visualización mediante herramientas tecnológicas es crucial en campos como la ingeniería, las telecomunicaciones, la física y otras disciplinas donde las series de Fourier tienen aplicaciones directas. Esto permite a profesionales y estudiantes comprender cómo se aplican estos conceptos en situaciones reales.

Diseño de la propuesta

La secuencia didáctica que se diseñó tuvo una componente teórica y varias sesiones prácticas para la cual se emplearon recursos tecnológicos, como lo son una actividad en GeoGebra, con su respectivo applet que muestra la forma de una onda cuadrada de una serie de Fourier y el alumno la visualiza con diferentes valores de n, también en la parte de modelación se propuso utilizar un circuito eléctrico, en donde, después de que los alumnos armaron el circuito se utilizó un osciloscopio como medio tecnológico para poder visualizar la onda cuadrada. Lo que se pretende es vincular la matemática, con aplicaciones de la vida real.

Según Díaz-Barriga, (2013), elaborar una secuencia didáctica para una clase, implica establecer situaciones de aprendizaje que se implementarán en el aula con los alumnos. Una secuencia didáctica trata y consiste en una cadena de acciones implementadas en un orden especifico que se adecuan al objetivo que se quiere lograr. Son actividades diseñadas para crear situaciones que permitan al estudiante desarrollar un aprendizaje significativo.

Para el diseño de la secuencia didáctica y la introducción de un modelo físico, se ha considerado lo expuesto por Mederos y González (2005). Ellos definen la modelación como el proceso de construir modelos de los objetos que se desean estudiar en asignaturas del conocimiento humano. El propósito de este proceso es aplicar las leyes y resultados a la información de los modelos, para luego transferirlos a los objetos reales y comprobar si los resultados son válidos.

En el proceso de modelación, es importante que el modelo:

- Sea simple para su estudio.
- Muestre una variedad de aspectos del objeto o de los objetos reales, de modo que constituya una “imagen” que contenga la mayor cantidad de información posible sobre dichos objetos. Esto asegura que la mayoría de los resultados obtenidos del modelo sean consistentes al transferirlos al objeto real.

La secuencia didáctica se aplicó a un grupo de ingenieros físicos de una universidad del norte de México, quienes estaban cursando entre el quinto y sexto semestre de la asignatura "Métodos Matemáticos para Ingenieros I". Esta asignatura incluye el tema de la Serie de Fourier, el cual también se aborda en otras materias del plan de estudios.

La secuencia didáctica estuvo conformada por inicio, desarrollo y cierre, usando varias sesiones, instrumentos y tareas como se especifica en la Tabla 2.

Tabla 2. Estructura general de la secuencia didáctica

		Sesiones	Tareas
Parte 1	Explicación teórica	Sesión 1. Conocimientos básicos.	
		Sesión 2. Serie de Fourier y sus sumas parciales.	
Parte 2	Implementación actividad en GeoGebra	Sesión 1. diagnóstico.	1-3. Conocimientos básicos.
		Sesión 2. Encontrar los coeficientes de la serie de Fourier y graficar.	4-6. desarrollar la serie de Fourier de una onda cuadrada y graficar con 5 términos.
	Construcción del dispositivo	Sesión 1. Explicación del diagrama eléctrico.	Tarea 7. Visualización y explicación del diagrama eléctrico y componentes principales.
		Sesión 2. Armado del dispositivo generador de onda cuadrada.	Tarea 8. Armado y prueba del circuito.
	Exploración del circuito	Sesión 1. Visualización con el osciloscopio.	Tarea 9 y 11 . El alumno observa la onda cuadrada en el osciloscopio y contesta las preguntas en la actividad de GeoGebra.
		Sesión 2. Variación de la resistencia.	Tarea 12 a 15. El alumno varía la onda cuadrada en el osciloscopio al modificar la resistencia con el potenciometro y contesta las preguntas en la actividad de GeoGebra.
	Exploración con applet	Sesión 1. Variación de los términos de n en un applet de GeoGebra.	Tarea 16. El alumno visualiza en un applet de GeoGebra como cambia la gráfica de la onda cuadrada al variar los parámetros de n.
Parte 3	Discusión grupal	Sesión 1. Formalización de conocimientos.	Aclaración de dudas y preguntas acerca del tema.

Nota: En esta tabla se resume la secuencia didáctica que se aplicó.

Parte 1. Explicación teórica. Se dividió en 2 sesiones. La primera fue lo relacionado con los conocimientos previos que se requieren para la enseñanza de la Serie de Fourier, en lo referente a funciones periódicas, concepto de paridad, se muestran diferentes gráficas, se hacen varios ejemplos. También se explica que la mayoría de las funciones no son ni pares ni impares. Esta parte se explicó a través de la plataforma de Microsoft Teams.

Para complementar esta parte teórica se da a conocer una breve reseña histórica de las series de Fourier, destacando sus orígenes. También se explican algunas aplicaciones de las Series de Fourier, tales como vibraciones mecánicas, análisis de señales, barrido de imágenes, procesamiento de audio y predicción de eventos.

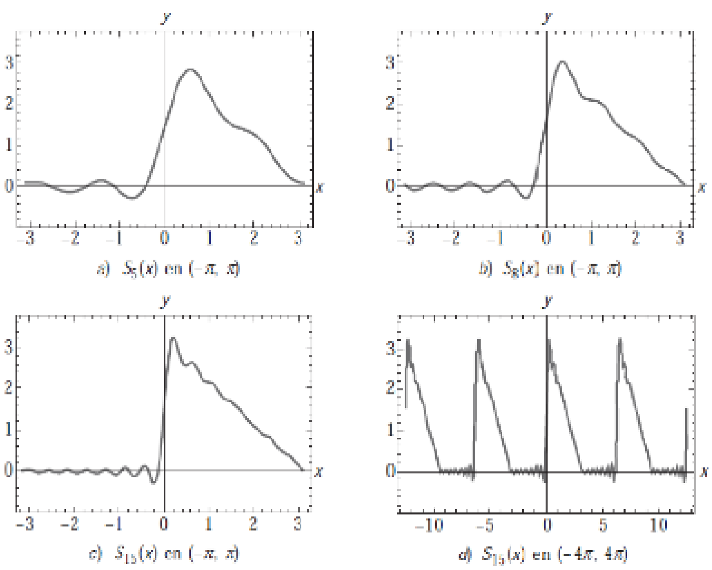
La segunda sesión de la explicación teórica empezó a través de Microsoft Teams, comenzando con la explicación formal de la Serie de Fourier y acabó en el aula de clases con el desarrollo de la Serie de Fourier, en el cual se explicó un ejemplo y entre todos los alumnos resolvieron las integrales para encontrar los coeficientes de la Serie de Fourier. Seguidamente se explicó que la secuencia de las sumas parciales $\{S_N(x)\}$ de una Serie de Fourier se aproxima a una función (Zill el al. 2018). Conocido esto, se da el siguiente ejemplo: expanda en una serie de Fourier.

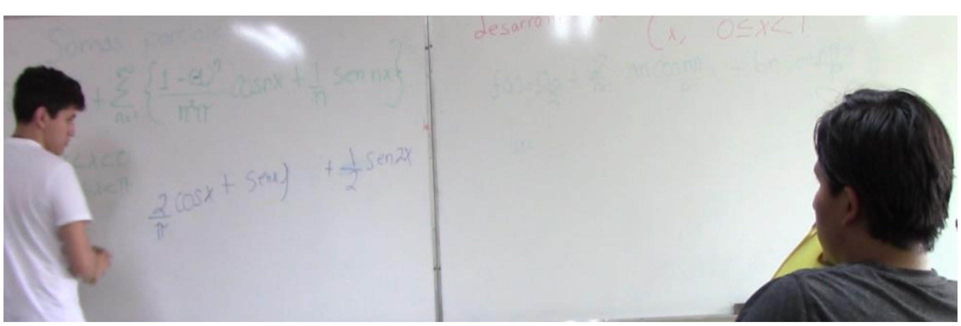
$$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0 \\ \pi - x, 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Se explica a los alumnos y se pasa a tres estudiantes al pizarrón a desarrollar las sumas parciales. Ver Figura 4.

Figura 4

Sumas parciales de una serie de Fourier





Nota: Sumas parciales de una serie de Fourier (izquierda). Ejercicio resuelto por los alumnos de las sumas parciales de una serie de Fourier (derecha).

Parte 2. Implementación de una actividad con GeoGebra.

Así como la primera parte se compuso con elementos teóricos que, aunque sea un método tradicional son necesarios para la introducción del tema, se complementa con esta parte dos que se considera esencial en la propuesta metodológica, porque se diseñó y aplicó un diagnóstico que diera cuenta de los antecedentes de los estudiantes y también se permitió que ellos exploraran y visualizaran los coeficientes de Fourier y graficaran la serie correspondiente. La actividad comenzó con la Tarea 1 y se extiende hasta la Tarea 5. En esta fase, los alumnos aplican los conocimientos adquiridos en las clases anteriores, donde se abordó la teoría de las Series de Fourier ver Figura 5.

Figura 5

Actividad en GeoGebra, "Serie de Fourier, modelación de circuitos - Generador de onda cuadrada con timer"

Nota: Elaborado por Camarillo (2024)

Uno de los principales objetivos de esta actividad fue que los estudiantes identificaran que la onda cuadrada es una función impar. Por lo tanto, la definición de la serie de Fourier para una función impar en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y se presenta de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sen \frac{n\pi}{p} x$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) Sen \frac{n\pi}{p} x dx.$$

$a_0 = 0$, ya que la función es impar y no tiene término constante en su expansión (Kreyszig, 2011).

Las tareas 1, 2 y 3 estuvieron relacionadas con la revisión de conocimientos previos sobre series de Fourier y el concepto de paridad. Mientras que las tareas 4 y 5 consistieron en determinar de los coeficientes de la serie de Fourier de una onda cuadrada y elaboración de la gráfica correspondiente utilizando los primeros 5 términos.

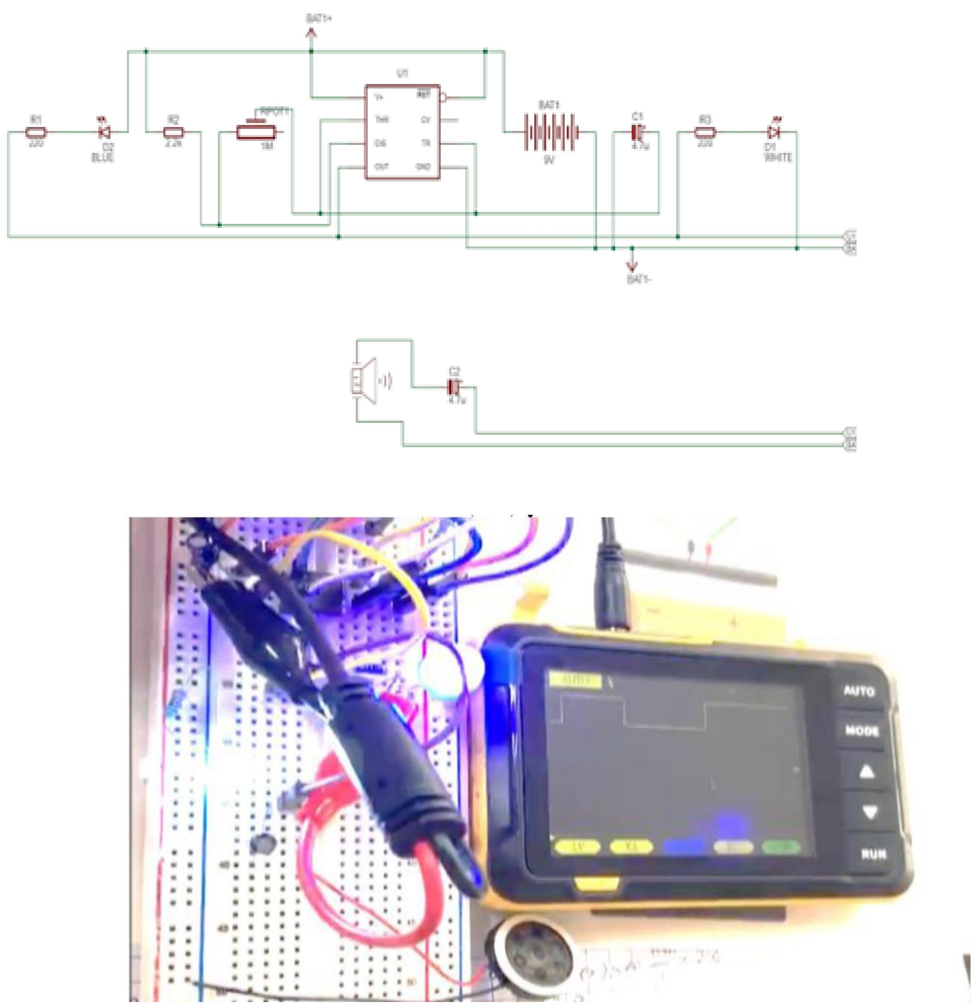
Construcción del dispositivo, generador de onda cuadrada

Esta parte estuvo conformada por dos sesiones, la primera fue la visualización y explicación del circuito eléctrico junto con los componentes de este, y la segunda fue la explicación y construcción del dispositivo eléctrico generador de onda cuadrada. En esta parte se proporcionó a los alumnos los materiales y un diagrama del circuito eléctrico a ensamblar.

Se explicó detalladamente el proceso de ensamblaje del circuito, comenzando con la instalación del temporizador y la conexión de sus pines, así como la disposición de los demás componentes. El circuito incluye dos diodos emisores de luz (LED) y una bocina como actuadores (ver Figura 6). Los LEDs parpadeaban y, cuando el LED de la derecha emitía un parpadeo, la bocina producía un sonido.

Figura 6

Diagrama eléctrico y dispositivo que genera la onda cuadrada.



Exploración del dispositivo, generador de onda cuadrada

Sesión 1. Visualización de la onda cuadrada en el osciloscopio

Una vez que los alumnos conectaron la pila de $9V$ al circuito, observaron que los LEDs comenzaban a oscilar, encendiéndose y apagándose alternativamente, mientras que la bocina emitía un sonido cuyo tono variaba según la velocidad del cambio. Se les pidió a los alumnos que conectaran el osciloscopio para observar el comportamiento de la señal.

El osciloscopio es un dispositivo que permite comprobar y visualizar las señales de tensión en forma de ondas, representando gráficamente la variación de la tensión en función del tiempo. En esta sesión, los estudiantes observaron la onda cuadrada en el osciloscopio y ajustaron la forma de la onda modificando el potenciómetro.

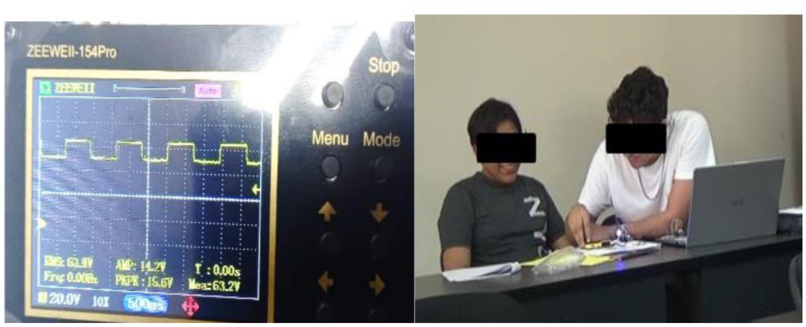
Sesión 2. Variación de la resistencia en el potenciómetro

Primero, se explicó a los alumnos que un potenciómetro es una resistencia variable cuyo valor cambia al girar su eje. A continuación, se planteó la siguiente pregunta: "¿En qué lugares ha visto que se aplique el principio de un potenciómetro?" Uno de los alumnos mencionó que se usa en radios antiguos para ajustar el volumen. Esto llevó a una nueva pregunta: "¿Solo para variar el volumen?" Ante la falta de respuesta, se les indicó que el potenciómetro (que en los radios es un componente físico) también se utiliza para sintonizar estaciones de radio y cambiar entre ellas. Se explicó que una de las muchas aplicaciones de la serie de Fourier es descomponer ondas en sumas de armónicos, lo que permite filtrar las frecuencias de interés para eliminar ruidos o aprovechar el espectro radioeléctrico en telecomunicaciones.

Esta práctica, se llevó a cabo manualmente utilizando un potenciómetro. Se plantearon preguntas sobre los valores de resistencia y su impacto en la gráfica. Los alumnos interactuaron con el potenciómetro para ajustar los valores de resistencia y emplearon un multímetro para verificar las mediciones. Este ejercicio les permitió analizar la variación de los términos en la serie de Fourier: una resistencia menor resultaba en un menor número de términos en la serie, mientras que una resistencia mayor aumentaba el número de términos. Así, los estudiantes pudieron observar cómo el número de términos seleccionados para graficar influye en la representación de la serie de Fourier (ver Figura 7).

Figura 7

Visualización de la onda cuadrada en osciloscopio



Nota: Onda con una variación de resistencia de 300 KΩ, (izquierda). Alumnos interactuando con el circuito. (derecha).

Se explicó a los alumnos que, aunque esta práctica se centró en una aplicación específica en acústica, las series de Fourier tienen numerosas aplicaciones en campos como la electricidad, óptica, procesamiento de señales, análisis de vibraciones, mecánica cuántica, econometría y cálculo de estructuras.

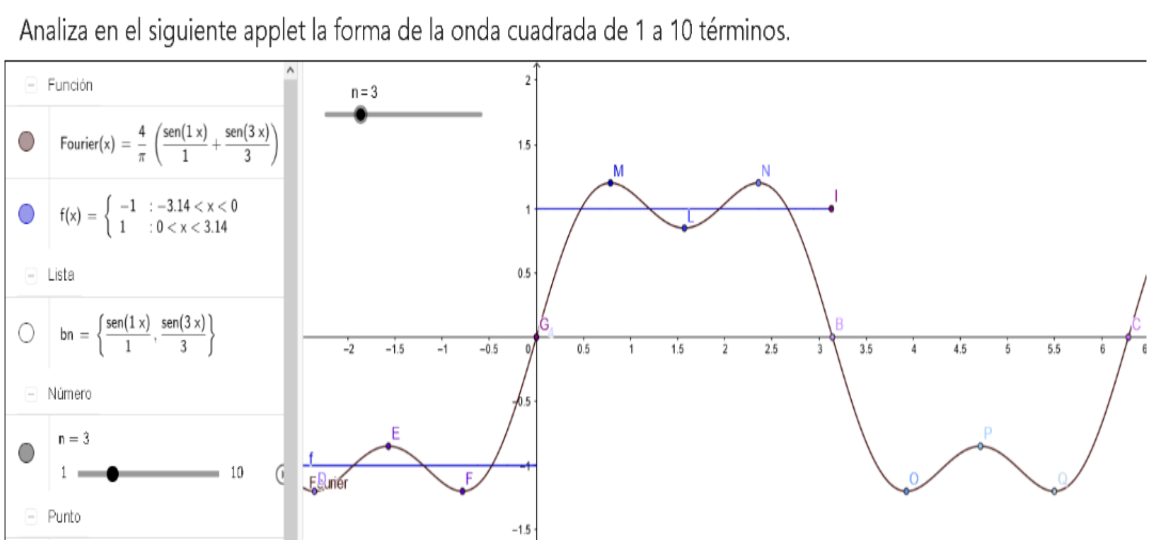
Exploración con Applet de GeoGebra

En esta sesión, se realizó un análisis utilizando un applet de GeoGebra que muestra la gráfica de una onda cuadrada con diferentes números de términos de la serie, desde 1 hasta 10. Los estudiantes interactuaron con el applet (ver Figura 8), que fue diseñado específicamente para explorar cómo la variación en el número de términos afecta la gráfica de la onda cuadrada.

Tarea 16: Analizar un applet de GeoGebra que muestra la gráfica de una onda cuadrada utilizando de 1 a 250 términos.

Figura 8

Applet de GeoGebra que muestra la forma de onda cuadrada



Nota: Gráfica de la función tomada del applet de GeoGebra construido para la actividad didáctica. Fuente: Elaboración propia.

Parte 3. Discusión Grupal

Al final de la actividad, se realizó una discusión grupal en la que se hicieron preguntas a los alumnos sobre el circuito. Los estudiantes expresaron que les resultó interesante visualizar los LEDs y escuchar el sonido de la bocina. Se discutió lo observado en el osciloscopio. Dos alumnos comentaron que el osciloscopio mostraba una onda casi rectangular con espacios, ya que tenían el potenciómetro ajustado a una resistencia alta. Se les explicó la razón de la apariencia de la onda cuadrada en esas condiciones.

Otro equipo ajustó la resistencia del potenciómetro hasta 0 Ohm, lo que provocó que los LEDs oscilaran a una velocidad tan alta que apenas se notaban los cambios, y que la bocina emitiera un sonido continuo y estridente. Un alumno comentó que el sonido resultaba molesto. Se les pidió que observaran el osciloscopio y describieran lo que veían, respondiendo que parecía una línea recta. Se les explicó que esto es comparable a las sumas parciales de la serie de Fourier: a menor resistencia, hay menos términos en la serie, y a mayor resistencia, se incluyen más términos.

Resultados y discusión

El diseño de la actividad con GeoGebra (Camarillo, 2024), permitió recabar el trabajo realizado por los alumnos y analizar cada archivo para reportar los resultados obtenidos, tanto del diagnóstico como la parte exploratoria, asociada con el circuito. El objetivo principal de la actividad con GeoGebra fue evaluar la comprensión de los estudiantes sobre la representación matemática de la onda cuadrada mediante su descomposición en una serie infinita de senos y cosenos, así como su habilidad para relacionar estos conceptos con una aplicación práctica en la generación de señales periódicas.

A través de diversos ejercicios, los alumnos fueron expuestos tanto al análisis teórico de la serie de Fourier de una onda cuadrada como a la visualización de esta en un contexto real, utilizando un circuito generador y un osciloscopio. Los resultados obtenidos reflejan el nivel de comprensión de los estudiantes sobre la relación entre las sumas parciales de la serie y la aproximación de la onda cuadrada, así como su capacidad para conectar la teoría con el comportamiento físico observado en el osciloscopio.

Para garantizar una evaluación objetiva y consistente de las respuestas de los estudiantes, se diseñó una rúbrica detallada (ver tabla 3), que cubriera los aspectos clave requeridos en cada pregunta. Esta rúbrica se estructuró en cinco niveles de desempeño, donde el valor más alto (nivel 1) correspondía a aquellos alumnos que lograron abordar de manera completa todos los elementos esenciales de la actividad propuesta, demostrando una comprensión profunda de los conceptos involucrados. En contraste, el valor más bajo (nivel 0) se asignaba a aquellos estudiantes que no pudieron comprender ni abordar los elementos fundamentales de la tarea, indicando una falta de entendimiento en la temática tratada.

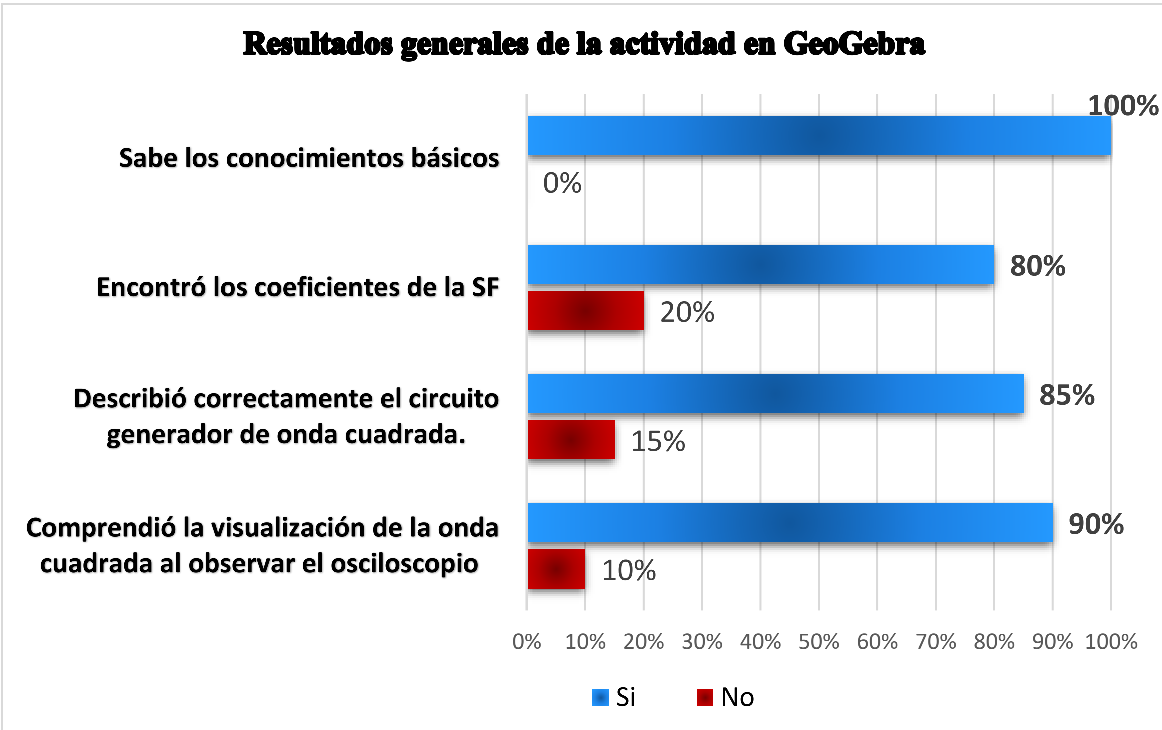
Tabla 3. Rúbrica de evaluación de la actividad con GeoGebra.

Valor	Criterios
1	Se demuestra una comprensión total de la actividad, abarcando todos los elementos requeridos.
0.75	Se demuestra una buena comprensión de la actividad, incluyendo un alto porcentaje de los elementos necesarios para la actividad.
0.5	Se demuestra una comprensión parcial de la actividad, abarcando algunos de los elementos requeridos en la actividad.
0.25	Se demuestra una escasa comprensión de la actividad, sin incluir los elementos necesarios para la actividad.
0	No se logró comprender la actividad propuesta.

Las 16 preguntas de la actividad fueron cuidadosamente agrupadas en 4 apartados temáticos, cada uno de los cuales abordaba una faceta específica del análisis de las series de Fourier y la onda cuadrada. Esta categorización permitió no solo evaluar el desempeño de los estudiantes en áreas específicas del conocimiento, sino también identificar con mayor claridad los puntos fuertes y las áreas de oportunidad en su comprensión. De esta manera, la rúbrica no solo facilitó una evaluación más estructurada, sino que también proporcionó información valiosa sobre el progreso y las dificultades de los estudiantes en su aprendizaje de conceptos clave relacionados con el análisis de señales y la teoría de Fourier. Los resultados se resumen en la figura 9.

Figura 9

Resultados generales de la actividad con GeoGebra



Respecto a lo relacionado a la modelación y visualización matemáticas, la cual se realizó mediante el armado de un circuito y el apoyo de un osciloscopio, los alumnos visualizaron la serie de Fourier de una onda cuadrada y pudieron variar la onda con el osciloscopio, viendo en esta parte las sumas parciales de la serie de Fourier, concepto que los ayudó a elaborar la gráfica de la función. Se agregó un applet de GeoGebra el cual podían variar el valor de "*n*" de la sumatoria de la serie de Fourier para poder visualizar la gráfica y compararla con los resultados obtenidos con el osciloscopio.

Fue posible vincular los elementos de la serie de Fourier con una aplicación en un fenómeno real como es el caso del análisis de señales. Además, se logró que la clase se volviera más dinámica y que los alumnos pudieron visualizar de manera física cómo varía la onda cuadrada al cambiar la resistencia del circuito, así como la variación de la onda al modificar el valor de "*n*" en el applet de GeoGebra. Aunque el estudio se realizó únicamente en el área de ingeniería física, el desafío será aplicarlo en diferentes ingenierías.

De acuerdo con Avitabile et al. (2006), Muro et al. (2007), Parra (2013), Guerrero et al. (2010) y Romero y Farfán (2016), se ha identificado una problemática común al enseñar la serie de Fourier: la falta de vinculación con contextos aplicados. En esta investigación, se abordó el concepto de las sumas parciales de la serie de Fourier y se vinculó con el barrido de señales mediante un circuito generador de onda cuadrada. Los alumnos mostraron interés al poder visualizar cómo cambia la gráfica de la serie de Fourier en un dispositivo electrónico, en lugar de solo representarla en papel o limitarse a escribir la teoría del tema.

Uno de los principales aspectos de esta investigación al compararla con otras investigaciones relacionadas a las series de Fourier y que utilizan la modelación matemática, es que, el alumno fue el principal protagonista, tanto en el armado del circuito como al variar la resistencia y ver el cambio de la onda cuadrada. El alumno fue libre de analizar la gráfica y se complementó con el software GeoGebra con la exploración del applet.

Algunas limitaciones del estudio fueron, la falta de conocimientos en electrónica, ya que, aunque están estudiando una ingeniería física, algunos alumnos mostraron deficiencias relacionadas con la electrónica básica y esto nos llevó a tomar más tiempo de lo programado. Otra limitación fue los pocos alumnos que tomaron la clase se sabe que un tamaño de muestra pequeño no implica necesariamente baja calidad o resultados menos confiables, pero si se muestran los siguientes errores: menor validez: las muestras muy pequeñas pueden socavar la validez interna y externa de un estudio, mayor imprecisión y probabilidad de falsos negativos, esto nos da una menor probabilidad de decir que sí hay diferencias significativas.

Al finalizar la implementación de la secuencia didáctica con el apoyo de la tecnología y tras revisar los datos obtenidos, se constató que se alcanzó el 85% de los objetivos establecidos. Los principales logros incluyeron la contextualización de la serie de Fourier en el aula mediante la modelación matemática y el análisis de las sumas parciales de Fourier utilizando un dispositivo electrónico y un applet de GeoGebra.

El propósito de esta secuencia fue mejorar la comprensión de los alumnos sobre las sumas parciales de la serie de Fourier y explorar una de sus aplicaciones, en este caso, el barrido de señales. Para próximas actividades se espera que se realicen otras representaciones de la serie de Fourier, como la onda triangular o la onda diente de sierra.

Reflexiones finales

La propuesta presentada resultó innovadora en varios sentidos, por un lado, se mantiene la explicación de los conceptos básicos y estos se complementan porque se integran simulaciones interactivas que muestran cómo las Series de Fourier descomponen señales periódicas en sus componentes armónicos. Así mismo se utiliza el software GeoGebra para mostrar gráficamente la variación de las sumas parciales al modificar los parámetros usando series de Fourier. Se implementa un circuito eléctrico que permite a los estudiantes manipular parámetros y ver cómo cambian las series de Fourier en tiempo real.

También mediante esta metodología se puede relacionar el aprendizaje de Series de Fourier con otras áreas como la física (ondas y vibraciones), la ingeniería (procesamiento de señales, vibraciones), o la informática (compresión de datos). Además, se promueve el aprendizaje colaborativo permitiendo que los estudiantes colaboren y compartan sus descubrimientos.

Consideramos que esta propuesta metodológica, con su estructura didáctica que integra teoría, práctica y tecnología, facilita un aprendizaje de las series de Fourier más accesible y atractivo para los estudiantes, en contraste con las tradicionales sesiones teóricas centradas exclusivamente en la resolución de ejercicios. Al combinar estos elementos, se promueve una comprensión más profunda y una mayor motivación, permitiendo a los estudiantes experimentar de manera más interactiva y significativa los conceptos involucrados.

En este mismo sentido, la incorporación de tecnología en la enseñanza de las series de Fourier permite comparar las funciones cuando se tienen pocos y muchos términos, lo cual facilita la comprensión de los conceptos. Asimismo, se puede comparar visualmente la aproximación de una función periódica mediante una serie de Fourier con la función original, lo que ayuda a entender la idea de convergencia y la calidad de la aproximación, realizando cálculos de manera eficiente y con alta precisión.

Referencias bibliográficas

Avitabile, P., Hodgkins, J., y Van Zandt, T. (2006, June). Innovative teaching of Fourier Series using LabView. In 2006 *Annual Conference & Exposition* (pp. 11-771).

Barba, R., Gascón, J., Serrano, L., & Badillo, E. (2017). Tecnología, matemáticas y aprendizaje significativo. REXE: *Revista De Estudios y Experiencias En Educación*, 16, 61-77. doi: 10.21703/rexe.16.16

Camarillo, F. (2024) Serie de Fourier-Generador de onda cuadrada con timer. Actividad en GeoGebra.org. en: https://www.geogebra.org/m/pden4ba4

Díaz-Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. UNAM, México. 10 (04), 1-15.

Drijvers, P., & Trouche, L. (Eds.). (2014). *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*: Vol. 2, Cases and Perspectives. Springer.

Gómez, J. (s/f). *Series de Fourier.* En editorial. Universidad Tecnológica de Coahuila. México.

González, C. & de Enxeñeiros Industriáis, E. T. S. (2003). *Fundamentos del análisis de Fourier*. GAMESAL.

Guerrero, C., Camacho, M., y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 341-352.

Hall, J. (2022). *Fourier wave saw tooth. Geogebra.org*. https://www.geogebra.org/m/hGXKvCKc

Hsu, H. P. (1973). *Análisis de Fourier*. Fondo Educativo Interamericano. México.

Kreyszig, E. (2001). *Matemáticas avanzadas para ingeniería.* https://biblioteca.uazuay.edu.ec/buscar/item/62730

Laborde, C. (2001). Integration of technology in mathematics education: Some critical reflections. *Computers & Education*, 36(3), 213-223. Doi: 10.1016/S0360-1315(00)00055-1

Mederos, O. y González, B, (2005). *La modelación en la educación matemática*. Universidad Autónoma de Coahuila. México.

Muro, A., Guerrero, L., & Parra, J. (2007). Tecnologías en la enseñanza de las series de Fourier: Herramientas para la visualización de señales. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 10(1), 33-47.

Parra, H. (2013). Claves para la contextualización de la matemática en la acción docente. Omnia, 19(3), 74-85.

Rao, S., García, D., Figueroa, R., y Muñoz, G. (2012). *Vibraciones mecánicas*. Pearson Educación.

Reyes, D., y Arellano, H. (2014). *Prototipo didáctico de mesa vibratoria para el análisis y caracterización de señales de aceleración.* ITESM. México.

Romero, E., & Farfán, L. (2016). *El papel de las herramientas tecnológicas en la enseñanza de las series de Fourier*. Journal of Mathematical Pedagogy, 48(2), 101-112.

Rodríguez, D., Torres, M., Borjón, E. (2023). Indicadores del TPACK presentes en la enseñanza de las ecuaciones lineales con tecnología dinámica. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, XI (2), 17-30.

Ruthven, K. (2009). Technology and the Transformation of Mathematics Education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Education* (pp. 23-56). Springer.

Yáñez, D. (2015). *Series de Fourier y criterios de convergencia*. (Tesis de Licenciatura no publicada). Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo. México.

Zill, D. G., Edwards Jr, C. H., & Penney, D. E. (2018). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Ed. Thomson Learning.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen XII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2024

ISSN: 2395-955X

PRÁCTICAS DE MODELACIÓN CON TRACKER Y GEOGEBRA CON SITUACIONES COTIDIANAS, PARA EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES PARAMETRICAS

Maritza Elizabeth López Alcalá

CBTIS 10. SEP. CUCEI, Universidad de Guadalajara

maritza.lalcala@academicos.udg.mx

Rafael Pantoja Rangel

CUCEI, Universidad de Guadalajara

rafael.prangel@academicos.udg.mx

Para citar este artículo:

Alcalá, M. E., Pantoja, R. (2024). Prácticas de modelación con Tracker y GeoGebra con situaciones cotidianas, para el estudio de las ecuaciones paramétricas. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, XII (2), 1-25.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año XII, No. 2, julio-diciembre de 2024, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

PRÁCTICAS DE MODELACIÓN CON TRACKER Y GEOGEBRA CON SITUACIONES COTIDIANAS, PARA EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES PARAMETRICAS

Maritza Elizabeth López Alcalá
CBTIS 10. SEP. CUCEI, Universidad de Guadalajara
maritza.lalcala@academicos.udg.mx

Rafael Pantoja Rangel
CUCEI, Universidad de Guadalajara
rafael.prangel@academicos.udg.mx

Resumen

El artículo se centra en la aplicación de prácticas integradas en una secuencia didáctica, cuyo propósito es que los alumnos aprendan a modelar las ecuaciones paramétricas del movimiento de tres juguetes (tren, caballo y un gato chino) y comprender el concepto de parámetro. El marco teórico para el estudio fue la Teoría de las representaciones Semióticas de Duval y la metodología ACODESA, con el empleo del trabajo matemático individual, colaborativo y las Tecnologías de la Información y Comunicación. Los alumnos emplean el video, el Tracker y el GeoGebra para generar los registros visual numérico, gráfico, analítico, verbal y escrito. Con base a los datos recabados de las prácticas, la encuesta, la entrevista y la evidencia digital obtenida de la observación directa, se afirma que los alumnos logran obtener las ecuaciones paramétricas e identificaron al tiempo como parámetro, además de representar e interpretar el movimiento del objeto en las diversas formas exploradas: gráfica, numérica y analítica.

Palabras clave: Parámetro, Ecuaciones paramétricas, Video, Tracker, GeoGebra

Abstract

The article focuses on the application of practices integrated in a didactic sequence, whose purpose is for students to learn to model the parametric equations of the movement of three toys (train, horse and a chinese cat) and to understand the concept of parameter. The theoretical framework for the study was Duval's Theory of Semiotic Representations and the ACODESA methodology, with the use of individual and collaborative mathematical work and Information and Communication Technologies. Students use video, Tracker and GeoGebra to generate visual, numerical, graphic, analytical, verbal and written records. Based on the data collected from the practices, the survey, the interview and the digital evidence obtained from direct observation, it is stated that the students managed to obtain the parametric equations and identified time as a parameter, in addition to representing and interpreting the movement of the object in the various forms explored: graphic, numerical and analytical.

Keywords: Parameter, Parametric equations, Video, Tracker, GeoGebra

Introducción

Las ecuaciones paramétricas es un tema que se trata de una manera muy superficial en los libros de texto y por consiguiente en el aula, por ejemplo, en el libro de Geometría Analítica de Lehmann (1989) se describe la interpretación de las ecuaciones paramétricas para la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, con un par de ecuaciones expresada en función de la variable angular t a saber, $x(t) = cos(t)$ y $y(t) = sen(t)$, obtenidas con el triángulo rectángulo inscrito y el Teorema de Pitágoras. En el texto se señala que no existe un método para elegir el parámetro y para deducir las ecuaciones paramétricas, pero generalmente se toma la representación paramétrica más sencilla o aquella que sea más útil y conveniente para los propósitos de la investigación.

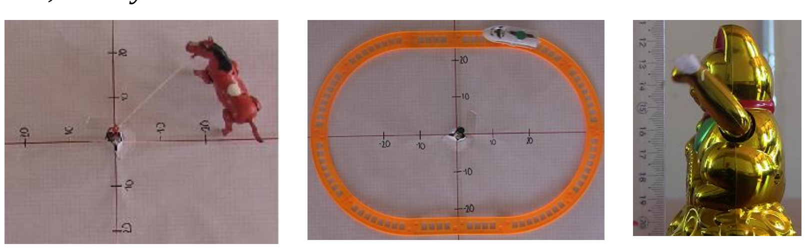
Así en general, si $F(x, y) = 0$ es la ecuación rectangular de la curva plana C, y cada una de las variables x y y, son función de una tercera variable t, $x = x(t)$ y $y = y(t)$ entonces, si para cualquier valor permisible de la variable independiente t, las ecuaciones determinan un par de valores reales de $x = x(t)$ y $y = y(t)$ se llaman ecuaciones paramétricas de la curva C. No es claro pues, cómo se determina el parámetro para representar la curva C como un par de ecuaciones paramétricas. Una de las representaciones paramétricas ancestrales es la que desarrolló Galileo (1638) y que denominó descomposición del movimiento de un objeto esférico rodando por un riel sin fricción y lanzado en caída libre al abandonar el riel, debido a la aceleración de la gravedad. Galileo describe que el movimiento del objeto tiene una componente horizontal $x(t) = a_1 t + b_1$ y una componente vertical $y(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2$, que son las ecuaciones paramétricas del tiro parabólico o caída libre.

Otro ejemplo ancestral de curvas parametrizadas es la cicloide, una curva cuya trayectoria se describe con el movimiento de un punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia, que se mueve cuando una rueda que gira sobre su eje sin resbalar, en la que se toma como parámetro el ángulo de giro de la circunferencia (Lehmman, 1989, pp 272-274). Otros tipos de curvas a los que se recurre para ejemplificar la parametrización de curvas planas, son: la elipse, la parábola, la hipocicloide, la astroide y la involuta de la circunferencia, entre tantas otras.

Las actividades se realizaron en un taller en el que se emplearon situaciones problema (Hitt y González-Martín, 2015) de la vida cotidiana de objetos en movimiento, en este caso tres juguetes (tren, caballo y un gato chino) (Figura 1), que son grabadas en video digital (Jofrey, 2010; Ezquerra et al., 2011) y trabajados con los softwares Tracker (2024) y GeoGebra (2024). El propósito del taller fue que los alumnos, primero, se den cuenta de la relación que existe entre la modelación matemática de una situación problema y la matemática escolar (Arrieta y Díaz, 2015, Pantoja et al., 2016), y segundo, que determinen las ecuaciones paramétricas ***f(t)= (x(t), y(t))*** de los tres juguetes y comprendan que el tiempo es el parámetro de referencia posicional.

Figura 1

Juguetes: Caballo, Tren y Gato chino



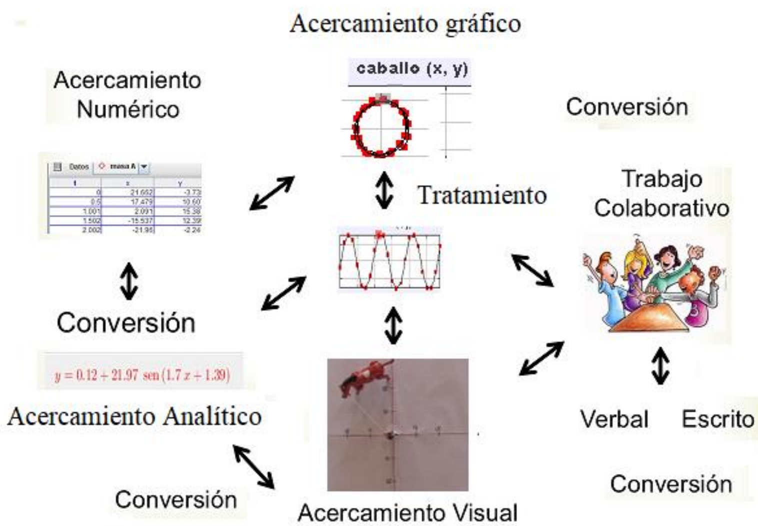
a b c

Referencia Teórica

La propuesta consideró la Teoría de los registros de representaciones semióticas de Raymond Duval (Duval, 2004) como sustento del estudio, porque de manera *"natural"*, a partir del análisis de video con el software Tracker, se presenta al alumno en pantalla, los registros semióticos verbal, pictórico, escrito, gráfico, numérico y analítico relacionados con la situación problema. De acuerdo a los resultados de la fase experimental, el alumno logró transitar entre un mismo registro (Tratamiento) y entre dos registros (conversión), con la finalidad de lograr un aprendizaje significativo al responder la secuencia didáctica planeada para el taller (Figura 2). Bajo esta perspectiva, la teoría de las representaciones semióticas proporciona una herramienta útil, para entender los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático de los alumnos y lograr la noesis a partir de la semiosis.

Figura 2

Representaciones semióticas del movimiento del tren de juguete



Metodología

a. Se integran los equipos y a partir de un video, ya sea previamente grabado o que se filme en ese momento, alumnos y profesor manipulan el software Tracker y el GeoGebra.

b. En esta parte, cada grupo colaborativo selecciona una situación problema, diseña el set de grabación, graba el video y lo procesa con el Tracker. Los alumnos relacionan la situación problema con lo mostrado en pantalla por el software Tracker, que consiste en una tabla de datos, tres gráficas (x vs. t, y vs. t, y vs. x) y en su caso, un ajuste a las funciones. Se aclara que la rutina de ajuste de funciones de Tracker es limitada y se sugiere exportar los datos a GeoGebra para lograr una mejor aproximación a la trayectoria.

c. En la última fase cada uno de los equipos presenta y discute ante el grupo su reporte.

Resultados

En este apartado, en primer lugar, se presenta un resumen de la secuencia didáctica que se empleó en el taller y, en segundo lugar, se describen algunos de los resultados de mayor relevancia obtenidos por los alumnos.

Secuencia didáctica

1. **Identificación de la secuencia didáctica.**
   - Nivel educativo: medio superior y superior.
   - Tipo: Curso Taller.
   - Palabras clave: Ecuación paramétrica, Situación problema, Tracker, Video, GeoGebra.
   - Asignatura: Cálculo integral
   - Tema: Ecuaciones Paramétricas
   - Conocimientos previos: Funciones sinusoidales, Polinomios, Tiempo, Distancia, Velocidad.
   - Duración: 4 horas
2. **Problema significativo del contexto:** Encontrar las ecuaciones paramétricas del movimiento del caballo, video que se te ha proporcionado en el archivo caballo 1. mp4 y cuya imagen se muestra en la figura 3.

Figura 3

Situación problema: Caballo como motor de la molienda de agave

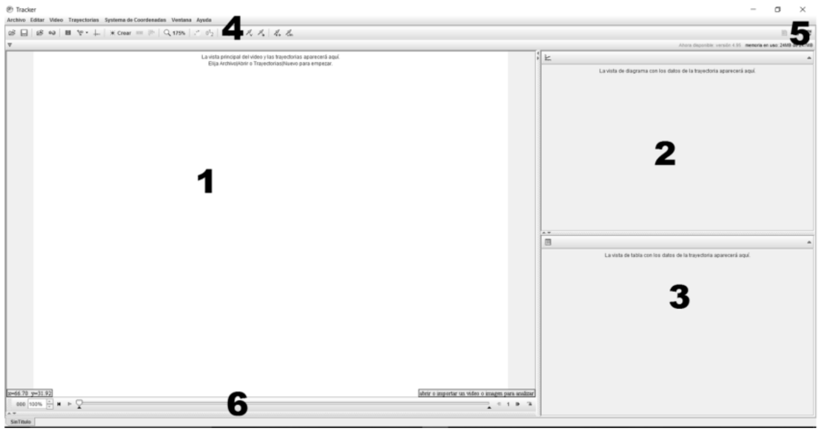
   - Analizar el video con el software Tracker para obtener los datos y las gráficas relacionadas con la situación problema.
   - Ajustar los datos obtenidos de la periferia del recipiente, con las rutinas de ajuste de funciones del Tracker o de GeoGebra.
   - Elaborar un reporte de la actividad.
3. **Objetivos**
   - Comprender el concepto de parámetro.
   - Determinar la ecuación paramétrica de la situación problema.
   - Motivar la enseñanza y aprendizaje de ecuaciones paramétricas a partir de situaciones problema de la vida diaria.

4. **Metas**
   - Analizar la videograbación de objetos en movimiento para el ajuste de las ecuaciones paramétricas con el Tracker y GeoGebra.
   - Elaborar el reporte de la actividad.
5. **Saber conocer**
   - Identidades trigonométricas, propiedades de los ángulos para seno y coseno, trazar el bosquejo de gráficas de funciones, ajuste de funciones, gráficas de datos y manipulación de la hoja de cálculo.
6. **Saber hacer**
   - Modelación de situaciones problema y relacionarlo con la matemática escolar.
7. **Saber ser**
   - Trabajar en equipo colaborativo para propiciar el aprendizaje de las ecuaciones paramétricas: puntualidad, participación, honestidad, respeto, entre otros valores.
   - Expone y elabora reportes por escrito de la actividad para presentarlo, discutirlo y defenderlo en la exposición grupal.
8. **Recursos**
   - Hoja de trabajo, computadora, Tracker, GeoGebra, Videos digitales de las situaciones problema, objetos de la vida cotidiana (caballo, tren y gato chino).
9. **Actividades con el docente**
   - Análisis de saberes previos, integración de los grupos colaborativos, selección de la situación problema y diseño de curso-taller.
10. **Actividades para el aprendizaje autónomo**
    - Diseño del set de grabación de la situación problema seleccionada para grabar el video del objeto.
    - Manipulación del video con Tracker para el análisis de las gráficas y datos arrojados por el Tracker.
    - Exportación y manipulación de datos obtenidos de Tracker para su tratamiento con GeoGebra y obtener las funciones ajustadas.
    - Discusión en grupo colaborativo de los resultados obtenidos del análisis del video de la situación problema.
    - Elaboración del reporte escrito de la actividad.
    - Presentación de los resultados ante el grupo para promocionar la discusión e interacción entre los participantes.
11. **Instrucciones para determinar las coordenadas de la trayectoria del objeto con Tracker**

a. Ejecutar el software Tracker. Se muestra el menú principal del Tracker (Figura 4): vista principal de video (1), vista de gráficas (2), vista de datos (3), barra de menús (4), barra de herramientas (5), deslizador de tiempo.

Figura 4

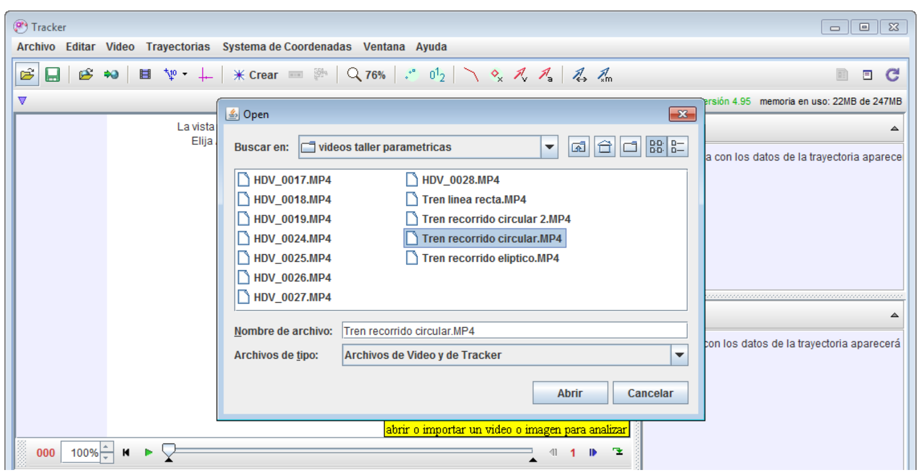
Menú principal de Tracker



b. En la barra de menús, seleccionar *Archivo* y elije la opción *Abrir* (Figura 5). Aparecerá una ventana en la cual se muestran archivos. Buscar la ubicación del video que se desea analizar y una vez encontrado, seleccionarlo y dar Clic en el botón *Open* o bien, dar doble Clic sobre el archivo.

Figura 5

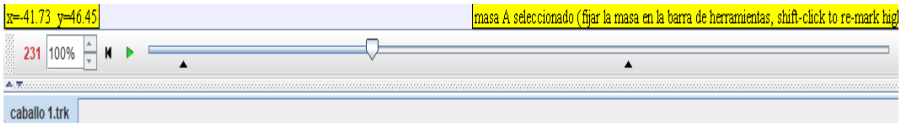
Seleccionar el archivo de video



c. Introducir y ajusta el video al segmento seleccionado para trabajar (Figura 6). Al abrir el video seleccionado, vista principal de video, se procede a definir el intervalo del video que será analizado. En el deslizador de tiempo se encuentran dos marcas como de punta de flecha negra, una al inicio del deslizador y otra al final. Ajustar tales marcas de modo que con ellas se delimite la parte del video que será analizada.

Figura 6

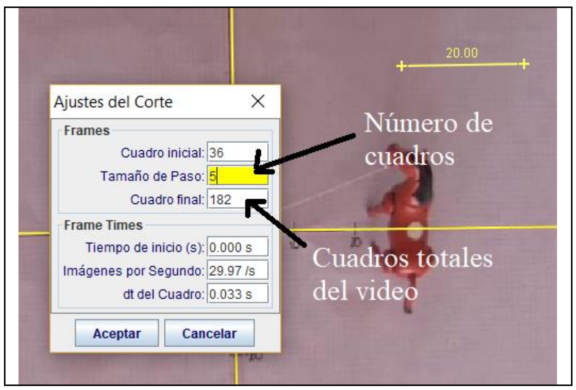
Herramienta del video y controles del video.



d. Elige el tamaño de paso (Opción Ajuste del corte). Definir el ***tamaño de paso*** significa determinar el número de cuadros del video que se consideran para la señalización de la trayectoria. En la figura 7 el video consta de 182 cuadros y se tomará una coordenada de la trayectoria del caballito cada 5 cuadros, que el programa Tracker lo hace de manera automática.

Figura 7

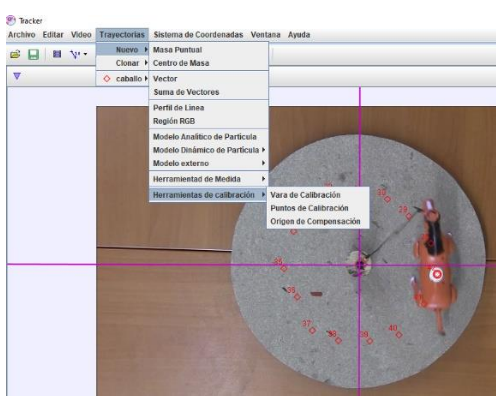
Selección del tamaño del paso

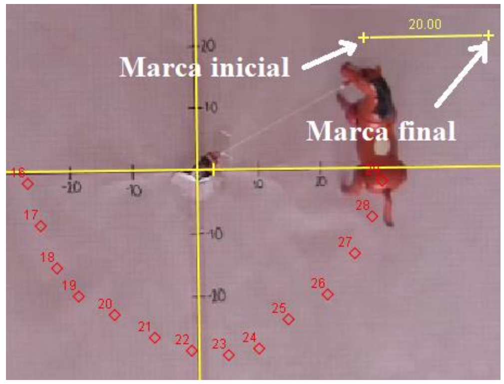


e. En la opción *Trayectorias* ➔ *Nuevo* ➔ *Herramientas de calibración*➔ *Vara de Calibración*, se activa la vara de calibración que tendrá la unidad de medida indicada a la hora de grabar el video, que es la rutina de Tracker que se ajustará a la longitud de la marca ubicada sobre el video. Primero se señala un extremo de la marca son Shift+Clic y luego sobre el otro extremo con las mismas teclas Shift+Clic. Con un Clic sobre la vara de calibración se sustituye el valor de la marca interface entre la vida real y el Tracker.

Figura 8

Selección de la vara de calibración y tamaño del paso

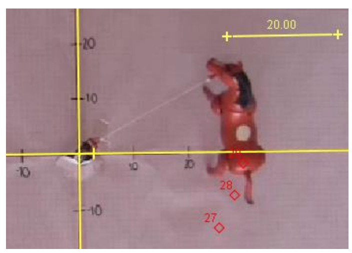




Ahora sobre el video selecciona un punto sobre el que colocarás el origen del sistema coordenado, de tal forma que se facilite la visualización de la trayectoria. Con un Clic sobre el ícono se aparece sobre la pantalla el sistema coordenado (Figura 8), que el usuario puede ubicar en el lugar de su preferencia con el cursor sobre el origen.

Figura 8

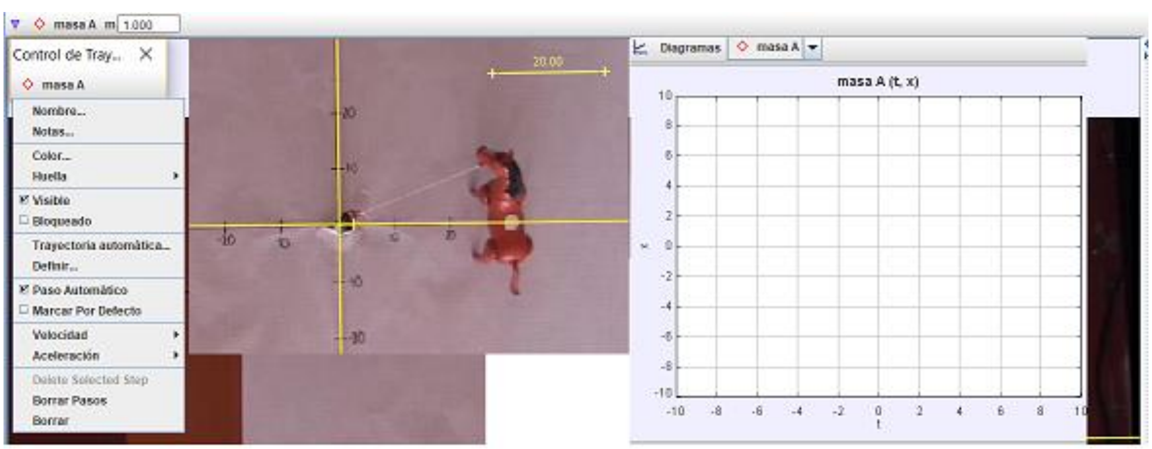
Colocación de los Ejes coordenados



f. El caballito de juguete se identifica en Tracker como una ***Masa Puntual*** y se interpreta como el objeto en video a analizar. En la figura 9 se presentan las parámetros que integran la masa puntual: Nombre, Notas, Color, Huella, entre otros.

Figura 9

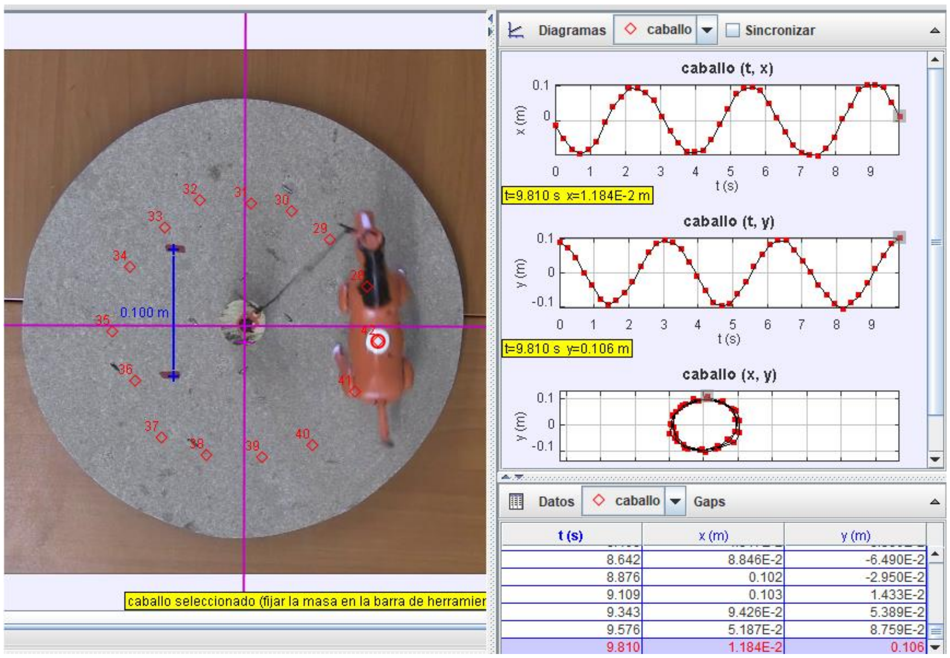
Herramienta de Masa Puntual.



g. Marcar la trayectoria del movimiento del caballito. Se sugiere que sobre el objeto en movimiento, se haga una marca visible que servirá de referencia para ubicar el cursor y señalar los puntos que indicarán la trayectoria que el objeto, de acuerdo a lo indicado en el apartado *Tamaño del paso* (Figura 10). La instrucción para señalar los puntos en la trayectoria es ubicar sobre el caballito el cursor y teclear *Shift + Clic*, acción que se manifiesta como un cambio en el puntero del cursor. La marca de la trayectoria es la correcta si aparece un punto sobre la gráfica y las coordenadas correspondientes en la tabla de datos. Se repite *Shift + Clic* hasta que se recorra todo el video y se refleje en forma gráfica y numérica en la parte derecha del video.

Figura 10.

Representaciones semióticas del movimiento del caballito: gráfica y tabla de datos



12. Instrucciones para manipular los datos con el software GeoGebra.

Los datos de la tabla calculados con el Tracker se exportan a GeoGebra para ello las instrucciones son las siguientes:

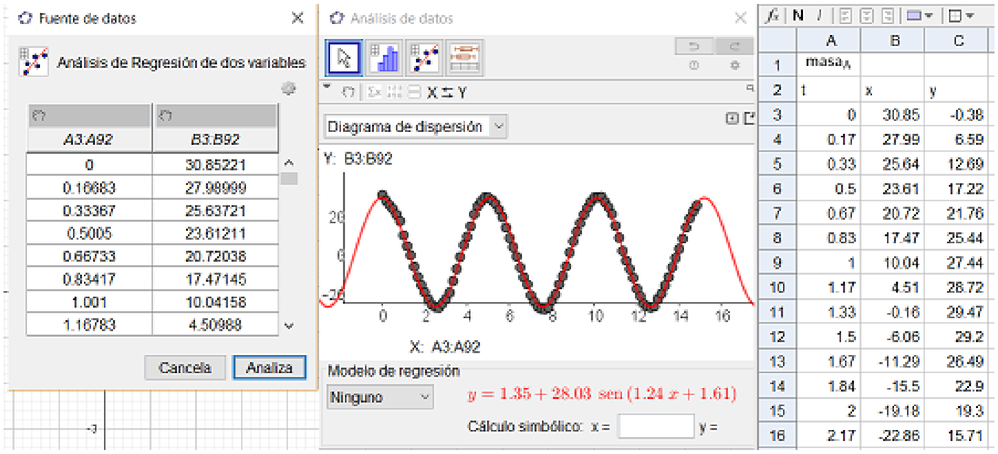
a. Se copian los datos de la tabla en Tracker al GeoGebra.

b. En el GeoGebra se activa la opción de hoja de cálculo y se pegan.

Una vez que se han exportado los datos a GeoGebra (Figura 11), se selecciona la opción *Análisis de Regresión de dos variables* ➔ *Modelo de regresión* ➔ *Polinomio* ➔ *Grado* ➔ *Copiar a Vista Gráfica*, y se ajusta a la función al recorrido.

Figura 11

Modelación de la trayectoria del caballo con GeoGebra



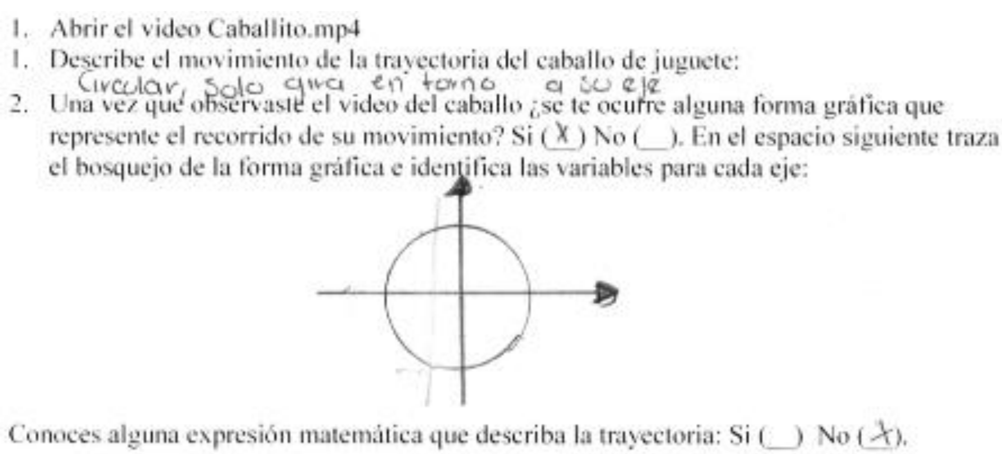
Al final de las actividades se les pide a los alumnos que entreguen el cuaderno de trabajo, un informe de las actividades realizadas y una presentación que será planteada a todo el grupo.

Resultados obtenidos por los alumnos

En la primera actividad descrita en la secuencia didáctica, se les solicita a los participantes que observen el video del caballito de juguete, para después resolver algunos cuestionamientos, con los cuales se pretende rescatar algunos de los conocimientos previos (Figura 12). Según los resultados obtenidos se observa que solo algunos de los participantes reconocieron que la trayectoria del caballo es casi circular y no la asociaron a ninguna forma.

Figura 12

Resultados obtenidos por los alumnos con relación a la trayectoria del caballito



1. Abrir el video Caballito.mp4
1. Describe el movimiento de la trayectoria del caballo de juguete:
Circular, Solo gira en torno a su eje
2. Una vez que observaste el video del caballo ¿se te ocurre alguna forma gráfica que represente el recorrido de su movimiento? Si (X) No (__). En el espacio siguiente traza el bosquejo de la forma gráfica e identifica las variables para cada eje:

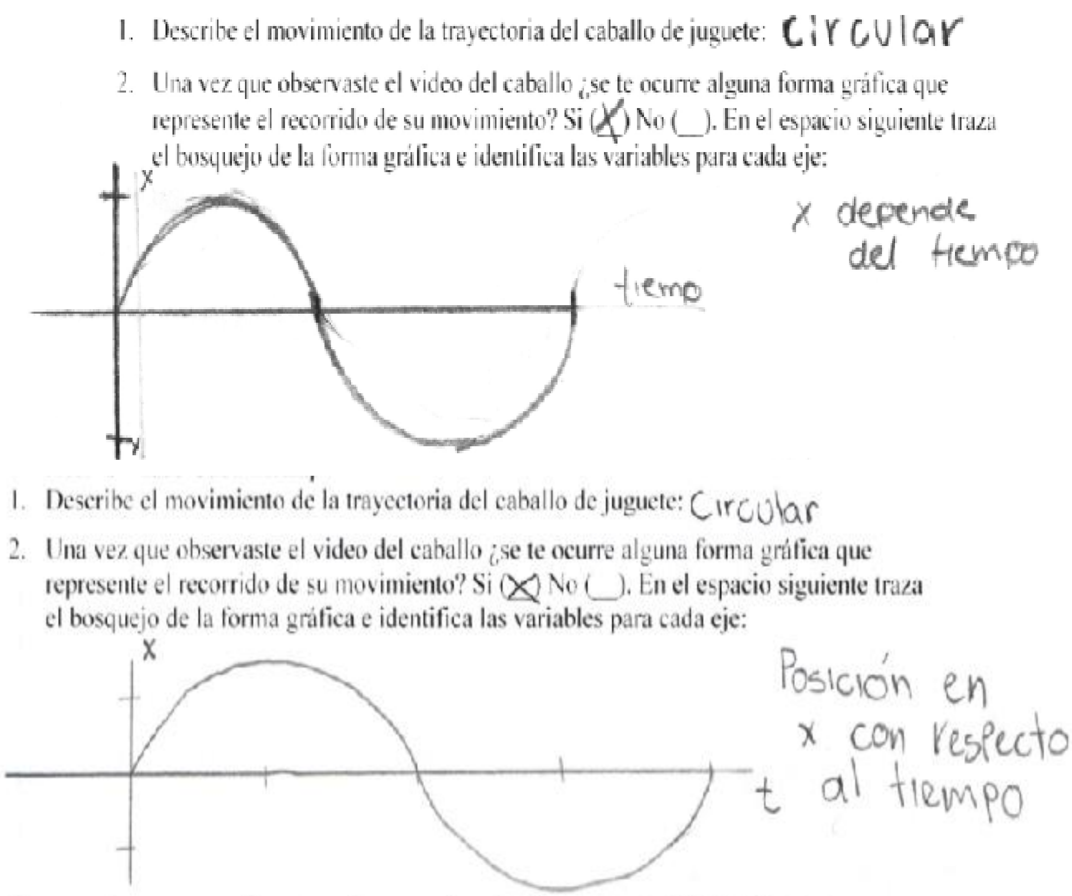
Conoces alguna expresión matemática que describa la trayectoria: Si (__) No (X).

Con el desarrolla de esta actividad y lo descrito por los alumnos en las hojas de trabajo se puede concluir que los participantes cuentan con conocimientos previos en relación al recorrido del caballito de juguete, se observa que solo algunos de los estudiantes reconocieron que la trayectoria del caballo es casi circular y no la asociaron a ninguna forma algebraica

Una vez que el alumno analiza el video con los softwares de Tracker y GeoGebra, observa las gráficas obtenidas por los mismos, seleccionando la que consideran representan el movimiento del caballito de juguete, en la figura 13 se presentan algunos de los resultados obtenidos.

Figura 13

Representación gráfica de la trayectoria del objeto.



Luego de trabajar el análisis del video con el software Tracker, los datos fueron exportados a GeoGebra, ya que cuenta con una rutina más completa para el análisis algebraico de los datos, así que después de una explicación al respecto copiaron los datos de la tabla y los exportaron a GeoGebra, obteniendo las ecuaciones paramétricas:

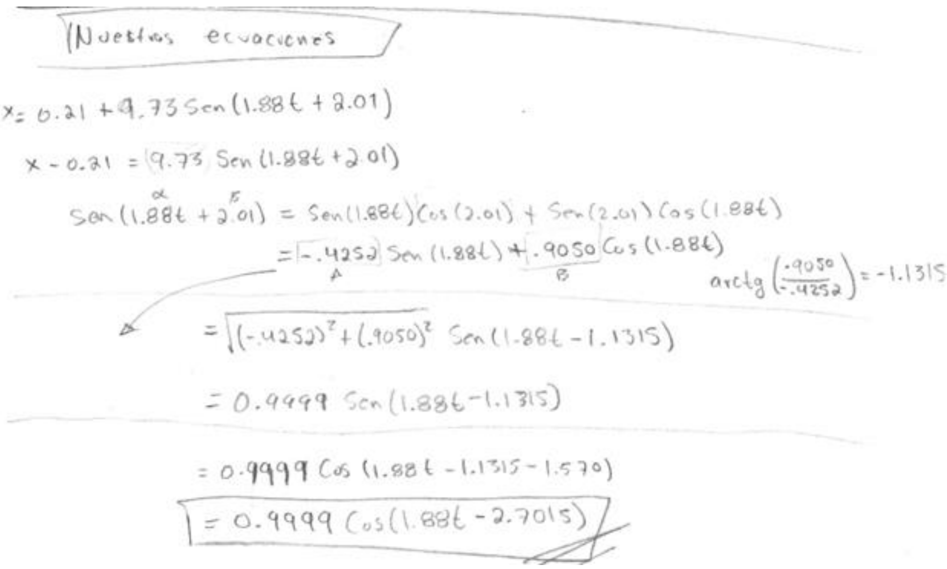
Grafica 1: $0.21 + 9.73\ sen(1.88t + 2.61)$
Grafica 2: $4.19 + 9.89\ sen(1.88x + 0.41)$

Estas ecuaciones difieren de los proporcionados en el cuaderno de trabajo $\{x(t) = R\cos(at + b), y(t) = R\ sen(at + b)\}$, por lo tanto, tuvieron que realizar un trabajo algebraico para lograr llegar a la forma paramétrica, en este paso los alumnos presentaron algunas dificultades ya que su conocimiento de los temas de trigonometría y de geometría euclidiana no era suficiente.

Para realizar esta actividad el instructor intervino compartiendo y explicando las identidades trigonométricas que permitieron al alumno realizar la conversión de las ecuaciones, como resultado obtuvieron lo mostrado en la figura 14.

Figura 14

Ajuste de funciones y ecuaciones paramétricas



Conclusiones

La aplicación de la secuencia didáctica para el aprendizaje de las ecuaciones paramétricas $f(t) = (x(t), y(t))$ a partir de situaciones problema de la vida cotidiana tiene un efecto positivo en el aprendizaje de los estudiantes, tratadas con las TIC, en particular con el empleo del video digital, Tracker y GeoGebra, medios que fueron precursores del aprendizaje de los estudiantes en el tema de ecuaciones paramétricas y el concepto de parámetro. Los alumnos se mostraron motivados a participar activamente en el desarrollo de las prácticas con el trabajo individual y colaborativo. Se promovieron valores como el compromiso, puntualidad, interés, honestidad y tolerancia, entre otros, detectados cuando desarrollaban las tareas encomendadas en un contexto más allá del escolar

Bibliografía

Arrieta, J., Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 18, núm. 1, pp. 19-48. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33535428002 (May 18, 2018).

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.

Ezquerra, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz*. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733 http://hdl.handle.net/10498/14733. http://reuredc.uca.es.

Galileo, G. (1638). Dialogues Concerning Two New Sciences by Galileo Galilei. *Translated from the Italian and Latin into English by Henry Crew and Alfonso de Salvio. With an Introduction by Antonio Favaro (New York: Macmillan, 1914)*. Recuperado el 10 de Septiembre de 2014 de http://oll.libertyfund.org/titles/753.

Geogebra (2024). GeoGebra Clásico

Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational studies in mathematics*, *88*(2), 201-219.

Jofrey, J. A. (2010). Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases. *Physics Education*. DOI 10.1088/0031-9120/1/005.

Lehmann, CH. (1989). *Geometría Analítica*, México: LIMUSA.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016*).* Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development*, Vol. 5, No. 1, pp. 62-76. Published by American Research Institute. Recuperado el 23 de Mayo de 2016 de http://jehdnet.com/. Electronic Version. DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. IS**SN**: 2334-2978.

Tracker (2024). Tracker Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education