



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<http://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores
del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

Directorio:

Rafael Pantoja R.
Director

Eréndira Núñez P.
Lilia López V.

Sección: Selección de artículos

Elena Nesterova
Alicia López B.

Sección: Experiencias Docentes

Christian Morales O.
Sitio WEB

Esnel Pérez H.

Lourdes Guerrero M.
Sección: Geogebra

ISSN: 2395-955X

USO DEL CAS PARA EL APRENDIZAJE DE TEMAS DE ÁLGEBRA DEL BACHILLERATO

Esteban Alonzo Castillo, José Carlos Cortés Zavala

Escuela Preparatoria Felipe Carrillo Puerto (México), Universidad
Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México.

alonzo.tae@gmail.com, jcortes@umich.mx

chayogallardo@terra.com.mx, erepalenius@hotmail.com

Para citar este artículo:

Alonzo, E. y Cortés, J. C. (2016). Uso del CAS para el aprendizaje de temas de álgebra del bachillerato. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: <http://www.amiutem.edu.mx/revista>, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

USO DEL CAS PARA EL APRENDIZAJE DE TEMAS DE ÁLGEBRA DEL BACHILLERATO

¹Esteban Alonzo Castillo, ²José Carlos Cortés Zavala

¹Escuela Preparatoria Felipe Carrillo Puerto, México. ²Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México

alonzo.tae@gmail.com, jcortes@umich.mx

Palabras Clave: TAD, ambiente CAS, génesis instrumental, aproximación instrumental.

Introducción

Actualmente nos encontramos inmersos en un mundo donde los términos tecnología y educación están estrechamente vinculados, así lo han indicado organismos internacionales como la UNESCO. La *National Council Of Teachers Of Mathematics* (NTCM) argumenta que la tecnología es esencial en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, ya que este medio puede influir positivamente en la matemática que se enseña e incrementar el aprendizaje de los estudiantes, para desarrollar un aprendizaje más profundo de las matemáticas, siempre y cuando se haga un uso apropiado de la tecnología. Dentro de esta investigación se pusieron en práctica diferentes actividades de álgebra para estudiantes de bachillerato con el uso de la tecnología, en particular, el uso de calculadoras con *Sistema Algebraico Computacional* (CAS).

Marco teórico

En la última década, un grupo de investigadores franceses se ha encargado de trabajar e investigar, sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sobre un entorno con CAS, al cual ellos llaman “Ambientes CAS” estas investigaciones han reflejado cuestiones acerca de la “instrumentación” y la dialéctica entre los conceptos y las técnicas de trabajo.

Para que el alumno logre la visualización de los conceptos matemáticos para el aprendizaje de las matemáticas, el empleo de las nuevas tecnologías es una poderosa herramienta que nos puede ayudar a lograrlo.

El marco conceptual considerado en esta investigación es la aproximación instrumental; en particular la parte conocida como Tarea, Técnica, Teoría.

La **aproximación instrumental** (Artigue, 2002 y Lagrange, 2003,2005.) es un marco con elementos teóricos para analizar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas desde diferentes ambientes tecnológicos, por ejemplo, los CAS, aproximación instrumental reconocida dentro del medio de investigación.

Artigue (2002), hace mención que dentro de la aproximación instrumental para el uso de herramientas tecnológicas existen dos influencias a seguir: Una de éstas es la Ergonomía Cognitiva (Vérillon & Rabardel, 1995) y la otra, es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999).

Propuesta

Dentro de esta investigación trabajamos en un ambiente CAS, con las siguientes actividades:

- Actividad 1: Expresiones equivalentes.
- Actividad 2: Continuación de equivalencia de expresiones.
- Actividad 3: Transición de expresiones equivalentes.
- Actividad 4: Sistemas de ecuaciones.

Esto con el fin de promover el razonamiento algebraico de los estudiantes de bachillerato. En particular investigar sí el uso del CAS con la calculadora TI-nspire CAS Texas Instruments, ayuda a los estudiantes en su proceso de desarrollo de conocimiento algebraico respecto a expresiones equivalentes y a sistemas de ecuaciones.

Resultados

Análisis de Resultados: Expresiones equivalentes

El propósito de esta actividad es que los estudiantes de bachillerato tengan como base un enfoque numérico, para la discusión en la equivalencia de expresiones. A continuación se mostraran fragmentos de las actividades puestas en marcha dentro de esta investigación.

La parte IV de la actividad, consistió en tres preguntas en base a una ecuación formada por dos expresiones:

- (A) Introduce, directamente, en la línea de entrada de tu calculadora las ecuaciones formadas por las expresiones 3 y 5:

$$(3x-1)(x^2-x-2)(x+5) = \frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$$

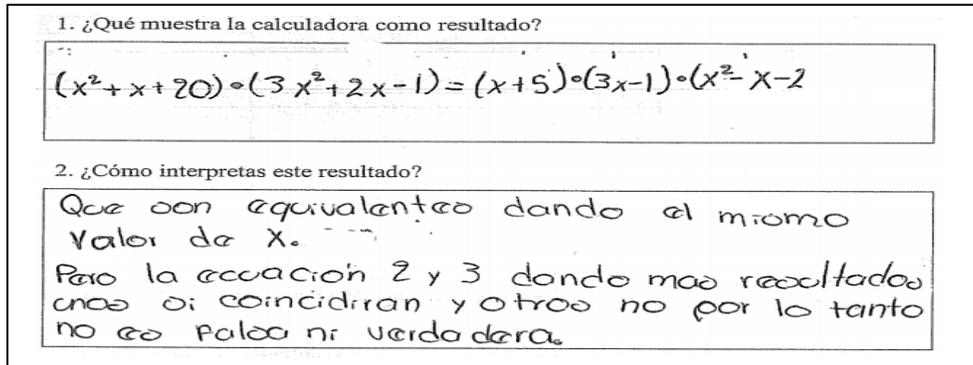
1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?
True (Verdadera)
2. ¿Cómo interpretas este resultado?
Es verdadera la ecuación
3. Usa el operador "tal que" () de tu calculadora, y reemplaza x por -2 en la ecuación precedente. Interpreta el resultado mostrado por la calculadora.
False (falsa)

Imagen 1.7: Resultados de Guadalupe

En esta parte de la actividad, lo que se quería lograr es que verificaran la equivalencia usando una prueba de igualdad, sin reescribir las expresiones dadas.

Analizando los resultados de Guadalupe, ella solamente tradujo los resultados de la calculadora, diciendo que es verdadera la ecuación para el primer caso, así como falsa una vez que introduces el valor de -2, pero no dio una explicación del porqué sucedió eso.

Para la parte IV B, nuevamente se dieron dos expresiones en forma de ecuación para verificar la equivalencia, dentro de ésta se hicieron dos preguntas las cuales consistían en lo siguiente:



(B) Introduce, directamente, en la línea de entrada de tu calculadora la ecuación formada por las expresiones dadas 2 y 3:

$$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1) = (3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$$

Podemos observar que Guadalupe reafirmó su teoría una vez terminado la discusión anterior, ya que ahora las dos preguntas las contestó adecuadamente.

Análisis de Resultados: Transición de Expresiones a Ecuaciones

El objetivo de esta actividad, consiste en usar la CAS para encontrar los valores de x que producen resultados iguales. Enseguida se mostrarán fragmentos de algunos estudiantes dentro de esta actividad.

Dentro de la parte III, se formuló una serie de preguntas las cuales se contestaron a papel y lápiz. Se muestran a continuación las respuestas de varias alumnas.

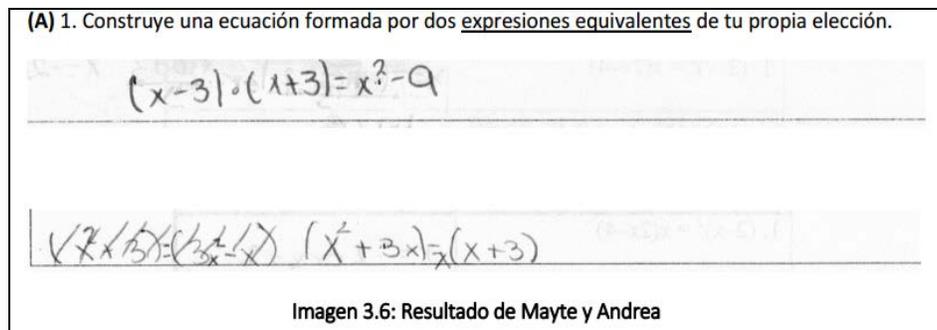


Imagen 3.6: Resultado de Mayte y Andrea

Como vemos las respuestas de Mayte y Andrea son correctas, similares a las que dieron los demás alumnos.

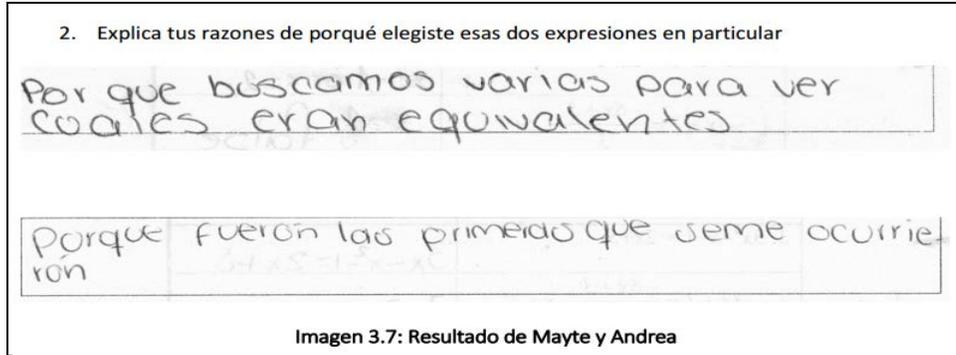


Imagen 3.7: Resultado de Mayte y Andrea

En general las respuestas a esta pregunta fueron similares a las de Mayte y Andrea; si observamos, la primera respuesta menciona que buscaron varias expresiones hasta llegar a un par, llegando a esto haciendo pasos algebraicos, pero no los muestran. Por otra parte Andrea no menciona ninguna razón algebraica.

La parte B de esta actividad, consistió nuevamente en 4 preguntas, las cuales se muestran a continuación:

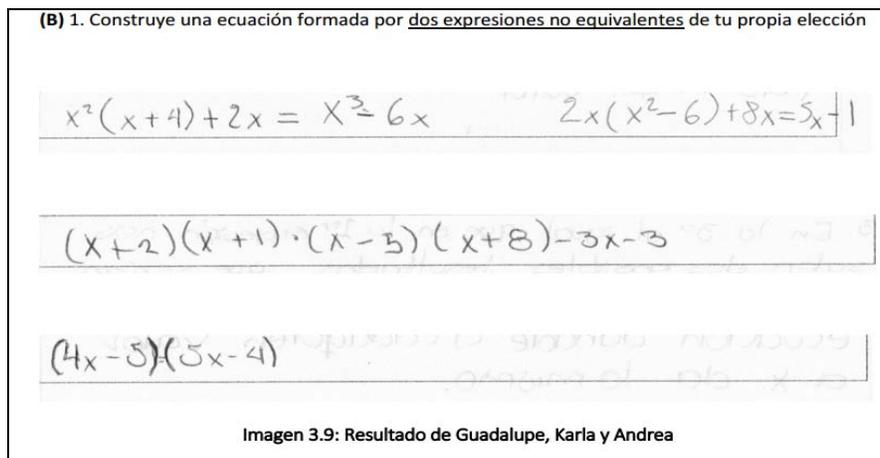


Imagen 3.9: Resultado de Guadalupe, Karla y Andrea

Mostramos los resultados de Guadalupe, Karla y Andrea como podemos observar las tres alumnas pudieron construir la ecuación requerida.

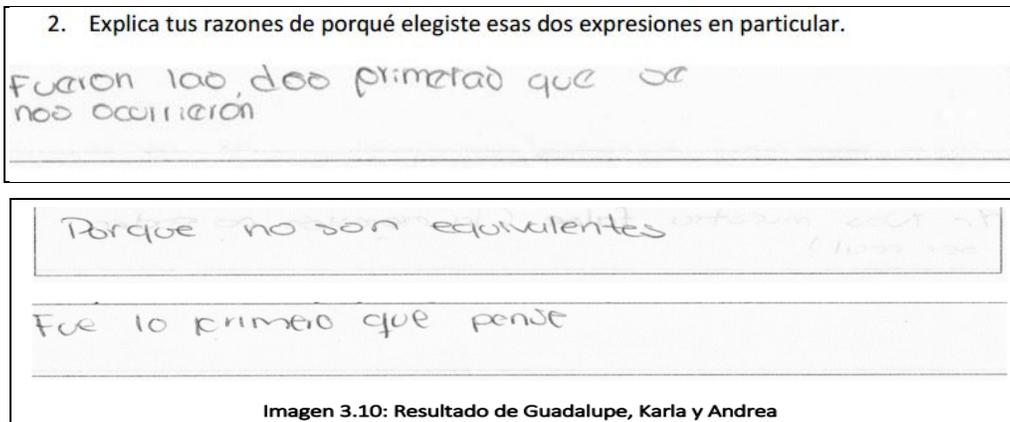
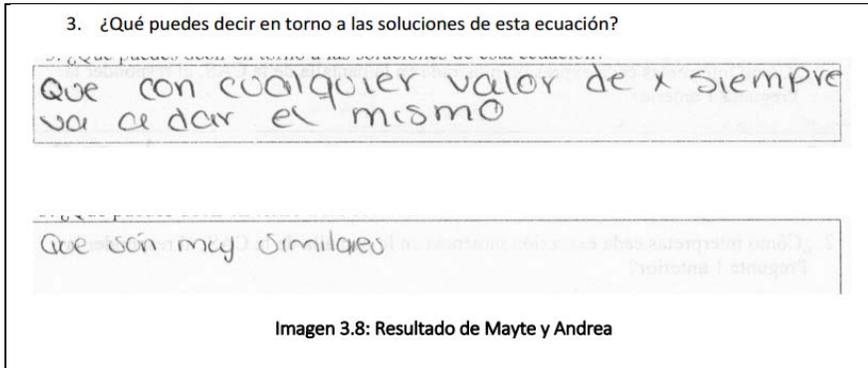
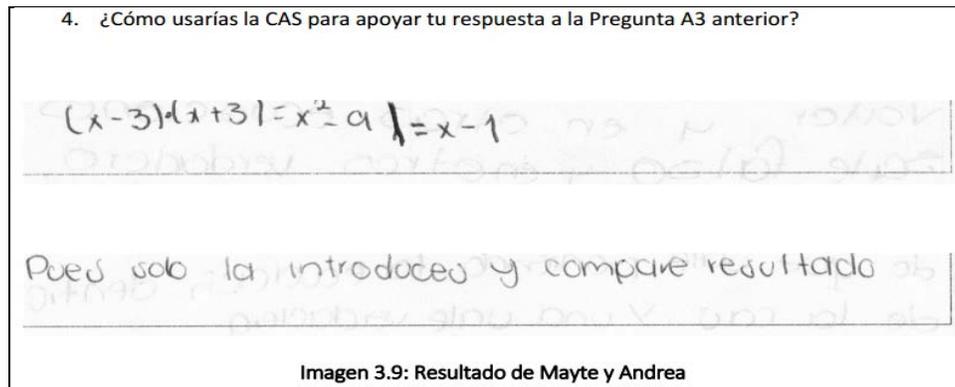


Imagen 3.10: Resultado de Guadalupe, Karla y Andrea

Para esta pregunta, todas las alumnas dieron razones muy superficiales, ninguna dio alguna razón algebraica.



De igual manera, para esta pregunta sus respuestas fueron muy superficiales, ya que de nuevo ninguna pudo demostrar que solo existen algunos valores o soluciones o ninguna solución.



En general como en las 4 preguntas anteriores, podemos observar que hubo una gran mejoría en cuanto a saber cómo formar una ecuación equivalente y no equivalente.

Pero aún existe la confusión de cómo encontrar o mostrar los valores de esas ecuaciones usando el comando SOLVE, o en su caso, poder especificar qué significado tiene la palabra TRUE o FALSE.

Para la parte IV y última de esta actividad constó de dos preguntas, en la primera se les pidió que llenaran una tabla de acuerdo a la siguiente información:

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, usando el comando SOLVE de la CAS.

Ecuación dada	Qué muestra la CAS
1. $(2-x)^2 = x(2x-4)$	$x = -2$ o $x = 2$
2. $(x-5)(3x+7) - 5 = 3x^2 - 8x - 40$	true
3. $3x^2 - x - 1 = 2x + 5$	$x = -1$ o $x = 2$
4. $-3x + 7 = \frac{-6x + 3}{3} - x + 7$	False

Imagen 3.13: Resultado de Liliana

Para esta parte prácticamente todas las alumnas supieron cómo utilizar el comando SOLVE, para encontrar las soluciones de las ecuaciones como lo muestra la tabla. En esta pregunta se mostrarán los resultados de Liliana, Guadalupe y Karla

- que en la 1 solo es equivalente con -2 y 2
 - y la dos es verdadera que es equivalente
 - solo puede ser equivalente con valores de -1 y 2
 - no esta correcta y no es equivalente

- ① Es equivalente solo para $x = -2$ o $x = 2$
- ② Es para algunos valores equivalentes para todos
- ③ Es equivalente solo para $x = -1$ o $x = 2$
- ④ En esta ecuación no es equivalente para ningún valor.

1. Pues en la primera expresión nos muestra dos posibles resultados ya sea -2 o +2.
2. En la segunda la CAS nos muestra que la expresión es real o verdadera, por ello sale TRUE.
3. En la 3ª al igual que en la 1ª expresión (nos) saben dos posibles resultados que serán $x = -1$ o $x = 2$.
4. Nos muestra false (la expresión no podría ser real).

No perdemos de vista que para el cierre de esta actividad, tanto Liliana como Guadalupe, expresan de manera correcta que es lo que significa cada resultado que muestra la CAS. Por otra parte, a Karla le faltó dar el verdadero significado de las expresiones, prácticamente fue la única que no definió bien el significado.

Análisis de Resultados: Sistemas de ecuaciones

El propósito de esta actividad es desarrollar en los estudiantes la comprensión de los métodos algebraicos de sustitución e igualación, utilizados para resolver sistemas de ecuaciones.

2. Ahora el trabajo con la calculadora (pero no resuelvas). Por favor, escribe, en la tabla de abajo, qué introduces en la calculadora, así como aquello que la calculadora muestra como resultado.

$$2x = 8 - 4y$$

$$17x - 31y = 3$$

Valores de la pareja x y y	Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS
$x=0$ y $y=2$	$0 = 8 - 4y$ $y=2$ $-31y = 31y = 2$	true False
$x=4$ y $y=3$	$8 = 8 - 4y$ $y=3$ $68 - 31y = 31y = 3$	False False
$x=2$ y $y=1$	$4 = 8 - 4y$ $y=1$ $34 - 31y = 31y = 1$	true true

3. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de este sistema de ecuaciones? Por favor, explica.

Puede que si dependiendo del metodo que ocupemos

Si porque nos salio True para dos valores.

O sin utilizar el falque. solo sustituyendo los valores indicados ahí.

Imagen 4.7: Resultado de Liliana, Karla y Guadalupe

Acabando con esta parte, solo Guadalupe tuvo problemas para mostrar cuales valores eran soluciones. Para la última pregunta, de manera repetida ninguna estudiante

pudo contestar de manera correcta, ya que ninguna puede mencionar que solo existe una sola solución para el sistema.

Como pudimos observar durante el trabajo con este tipo de ecuaciones, la mayoría de los alumnos pudieron sustituir los valores dados en cada una de las ecuaciones mostradas, pero, no están relacionados con el significado de estas, ya que en este último sistema todas mencionan que puede haber más soluciones.

Después de varias actividades similares y discusiones dentro de clase, obtuvimos los siguientes resultados:

(C) Distinción entre soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas

1. Es probable que te hayas dado cuenta de que, en la Parte II (A), la CAS mostró un valor numérico como solución para x . Por el contrario, en la Parte II (B), la calculadora mostró el resultado en forma de expresión algebraica. ¿Cómo explicas esta diferencia?

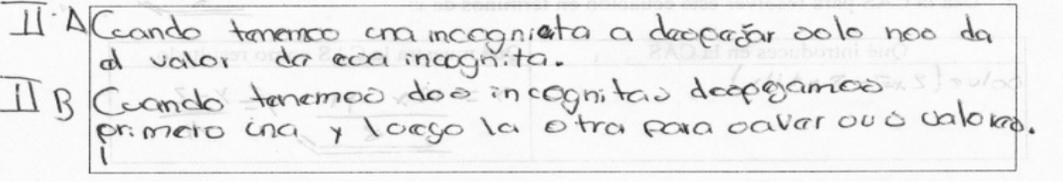
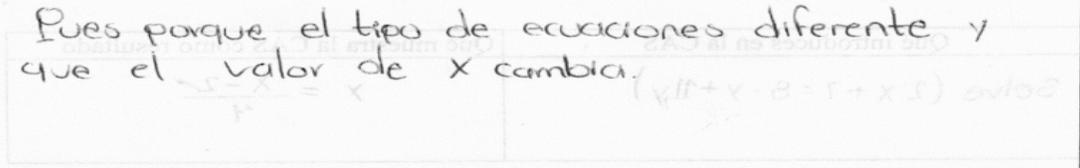



Imagen 4.17: Resultado de Guadalupe y Karla

La primera respuesta, la cual es de Guadalupe, notamos que ahora le ha quedado claro el procedimiento para resolver una ecuación de una y dos incógnitas, las respuestas de los demás alumnos fueron similares. Para la respuesta de Karla, vemos que fue la única que no fue más explícita en su respuesta.

Una vez que reafirmaron cual es la diferencia entre las dos ecuaciones, se les pidió lo siguiente:

La parte III B se continuó con el método de igualación, pero, ahora el trabajo de las alumnas fue a través de CAS, solamente se presentara el trabajo de Karla, las alumnas restantes presentaron un trabajo similar.

He aquí un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x - 8 &= 2y + 2 \\ 3x + 5y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

1. Con la CAS, usa el método de Igualación para resolver este sistema (registra todo aquello que introduces en la calculadora, mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que la calculadora muestra como resultado al usar sus comandos).

El método de Igualación consiste en:	Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS como resultado
1. Despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones y, de este modo, crear dos expresiones, las cuales tienen una sola variable;	Solve (y-8=2y+2,x) Solve (3x+5y+3=0,x)	$x = 2y + 10$ $x = \frac{-5y+3}{3}$
2 y 3. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, para construir una ecuación con una variable; resolver la ecuación que resulta;	Solve (2y+10 = $\frac{-5y+3}{3}$, y)	$y = -3$
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución.	$x = 2 \cdot -3 + 10$	$x = 4$

Imagen 4.24: Resultado de Karla

Incluimos el mismo cuadro que cuando se les presentó cómo funciona el método, solamente cambia que el paso 2 y ahora están juntos y no separados. El manejo de CAS dentro de este método está muy bien definido.

Las siguientes preguntas van en relación al método anterior:

1. ¿Cómo verificas con la CAS que tu solución es correcta?

utilizando el metodo de igualación y resolver sistemas de ecuaciones para que salga $x=4$ and $y=-3$

Imagen 4.25: Resultado de Karla

De igual manera todas las alumnas mostraron el mismo método para comprobar la solución de este sistema de ecuaciones, el cual es una manera fácil y rápida de comprobar esto.

De acuerdo a los resultados mostrados dentro de la presente investigación, podemos concluir que el buen manejo del CAS, dentro de las clases de algebra, permiten al alumno de bachillerato la mejor comprensión de los conceptos algebraicos, así como su manipulación, ya que como pudimos observar dentro de nuestros resultados, los alumnos fueron de menos a más dentro de las actividades de trabajo.

Cabe mencionar que la CAS dentro de las clases de acuerdo a lo observado permite que emerjan técnicas nuevas para la solución de las tareas planteadas.

En particular, podemos mencionar algunas técnicas que emergieron dentro de esta investigación:

- Identificar cuando dos expresiones son equivalentes y no equivalentes.
- Distinguir entre la factorización y multiplicación de términos.
- Manipulación de expresiones algebraicas.
- Obtención del rango de valores o restricciones que pueden tener ciertas expresiones.
- Poder diferenciar los tipos de ecuaciones.
- El CAS permitió también elevar las técnicas que tenía para la resolución de un sistema de ecuaciones.

Conclusiones

Una vez finalizado el análisis de nuestras hojas de trabajo, logramos destacar los siguientes puntos:

1. Notamos que se necesita una buena planeación para realizar las hojas de trabajo, esto con el fin de que los alumnos, a la hora de contestar las tareas diseñadas, no les surja duda dentro de la misma.
2. Al comienzo de un tema nuevo, notamos que la mayoría de los alumnos estaba prácticamente en ceros de acuerdo al tema.
3. Las técnicas utilizadas para resolver las tareas no eran buenas o correctas en la mayoría de los alumnos, esto se apreciaba de manera más clara dentro de las primeras actividades.
4. Dentro de los temas en las tres primeras actividades, los alumnos muestran un aspecto muy mecanizado a la hora de resolver problemas, es decir, no intentaban razonar sus soluciones, únicamente encontraban lo que se les pedía dentro del problema.
5. Sin dejar de mencionar el interés de los alumnos por el uso del CAS, lo cual se observaba de manera muy clara al momento de trabajar en forma combinada el uso del papel, lápiz y la CAS.
6. En la última actividad se notó una gran mejoría en las técnicas de los alumnos en general, así como también un avance en el aspecto de mecanización ya que al momento de reflexionar sobre sus respuestas lo hacían de manera más concreta.
7. Para lograr un avance significativo en el punto número 5, fue de gran ayuda los debates científicos, es decir, las discusiones dentro del salón de clases, porque éstos ayudaron a librar dudas que tenían los alumnos.
8. Con base en el análisis y los datos recabados en el capítulo anterior, podemos concluir y afirmar que un ambiente CAS y las tareas diseñadas para éste, influyen sobre el alumno de manera positiva para el desarrollo de su conocimiento algebraico.

Bibliografía

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7: 245-272, 2002. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 221-266.
- Hitt, F. (2010). Construction of mathematical knowledge using calculators (CAS) in the mathematics classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 2011.
- Lagrange, J. B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J. T. Fey (ed.), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (pp. 269-283). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lagrange, J. B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Ruthven, y L. Trouche (eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 113-135). New York: Springer.
- NTCM (2002). Principles and Standards for School Mathematics. *National Council Of Teachers Of Mathematics*. 2002.
- Socas. Martín M. (1996). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. *Universidad de La Laguna*.
- Vérillon, P. Y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77-101.
- UNESCO (2010). Engineering: issues, challenges and opportunities for development. *UNESCO report*. París.