Revista Electrónica AMIUTEM
Volumen I, Número 1. Fecha: Junio de 2013

¿QUÉ TECNOLOGÍA UTILIZAR EN EL AULA DE MATEMÁTICAS Y POR QUÉ?

Fernando Hitt Espinoza
ferhitt@yahoo.com
Université du Québec à Montréal

Resumen

El profesor de matemáticas que desea utilizar la tecnología en el aula de matemáticas en forma razonada, debe tomar en consideración una gran cantidad de variables que le permitan llegar a tener una visión amplia de los problemas de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en ambientes tecnológicos. Si tomamos la famosa frase de Euclides (siglo II antes de Cristo) formulada al rey Ptolomeo: “No hay camino real para aprender geometría”, lo podríamos aplicar aquí: “No hay camino real para saber cómo utilizar la tecnología en el aula de matemáticas”. La elección de qué tecnología utilizar en el aula de matemáticas y por qué, debe tomar en consideración diferentes variables para una elección razonada. Las variables en juego pueden ser de diferente tipo, cognitivas (para responder al por qué), económicas (uso de paquetes de cómputo de uso libre o comercial), sociales (promover aprendizaje individualizado y/o aprendizaje en colaboración) o institucionales (ligadas por ejemplo al curriculum). La tecnología está presente en nuestra vida diaria, por tanto, es importante reflexionar lo que podríamos realizar en el aula de matemáticas en apoyo a la enseñanza y al aprendizaje de las mismas en ambientes tecnológicos.

Palabras claves: Modelación, AVIMECA, GeoGebra, Variables.

Introducción

La tecnología es utilizada en nuestra sociedad de manera muy amplia; a los ciudadanos, en muchos casos, les parece normal su uso y les es difícil imaginarse una vida sin esos elementos tecnológicos. Es un hecho que la sociedad acepta los avances tecnológicos y utiliza diferentes artefactos que poco a poco llegan a ser utilizados de manera precisa en la actividad cotidiana. Por ejemplo una cámara fotográfica, un teléfono celular, un metro para medir que integre tecnología láser, etc. Este reconocimiento que la sociedad hace de la tecnología en la vida cotidiana no parece que lo sea en el aula de matemáticas. Por ejemplo, Artigue (2000) menciona sobre los problemas de instrumentación y sobre la integración de tecnologías informáticas en la enseñanza de las matemáticas que padece la comunidad desde hace 20 años (podemos en el 2012 añadirle otros 12 años). Artigue menciona (*Ibid.*, p. 98) cuatro factores a reflexionar:

1. La pobre legitimidad educativa de las tecnologías informáticas que se oponen a su legitimidad social y científica.
2. La subestimación de las cuestiones vinculadas a la informatización de los conocimientos matemáticos.
3. La oposición dominante entre los aspectos técnicos y conceptuales de la actividad matemática.
4. La subestimación de la complejidad de los procesos de instrumentación.

Dentro de la perspectiva del profesor de matemáticas que quiere hacer un uso razonado de la tecnología en el aula de matemáticas, analizar los diferentes puntos antes mencionados por sí solo es un trabajo enorme, por tanto, en apoyo al profesor, es importante discutir esos puntos de manera que la discusión pueda proporcionarle una mejor visión de la enseñanza de las matemáticas en ambientes tecnológicos. Los puntos señalados por Artigue son de naturaleza diferente, y nos proponemos discutirlo focalizando las variables que están en juego. En relación a los trabajos de Artigue (2000, 2002), distinguimos cuatro tipos de variables:

- Variable de corte cognitivo,
  - Ligadas a procesos de instrumentación e instrumentalización
  - Ligadas a procesos procedurales y construcciones conceptuales,
- Variables de corte económico,
  - En relación al uso de paquetes comerciales (Geometry Inventor, Cabri-Géomètre, Sketchpad, Excel,..) o paquetes de uso libre (Mathematics 4.0 o GeoGebra), o a actividades puntuales utilizando tecnología en Internet (applets),
- Variables de corte social,
  - Por qué la tecnología es aceptada en la sociedad y no en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas,
  - Aprendizaje individualizado y/o aprendizaje en colaboración,
- Variables de corte institucional,
  - Decisiones de las autoridades educativas (Ministerio de Educación),
  - Decisiones de los productores de libros de texto y de paquetes de cómputo,
  - Decisiones institucionales,
  - Decisiones personales sobre el uso de la tecnología.

Variables de corte cognitivo

Con respecto a las variables de corte cognitivo, el profesor de matemáticas tiene que considerar que la promoción de los procesos de instrumentación e instrumentalización en un ambiente tecnológico son más costosos que en otro ambiente. Pero qué entendemos por un proceso de instrumentación y de instrumentalización. Siguiendo la teoría de Rabardel (1995) y Guin et Trouche (1999), entendemos por procesos de instrumentación los procesos a los que se enfrenta uno o varios individuos a las restricciones que impone un artefacto que queremos utilizar. Por ejemplo, tomemos una calculadora TI-84 Plus Silver Edition, y supongamos que nos interesa la gráfica de la función $f(x) = x^2$, si $x<=0$, y $f(x) = x$, si $x>0$. La calculadora impone un uso estricto de la sintaxis (ver Figura 1).

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x & \text{si} \quad 0<x \end{cases}$$

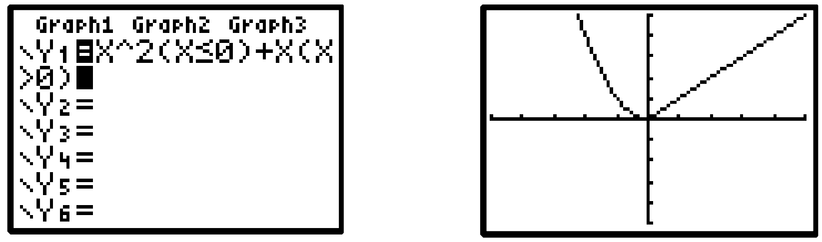


Figura 1. Escritura corriente y su trasformación en un medio tecnológico.

Y se complica todavía más si queremos graficar la misma función f(x), pero en un intervalo dado (ver Figura 2).

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad -2\le x\le 0 \\ x & \text{si} \quad 0<x\le 4 \end{cases}$$

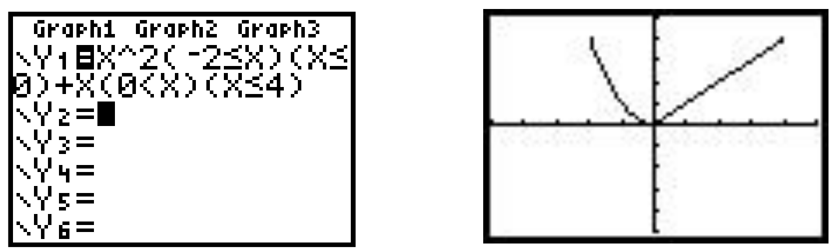


Figura 2. Escritura corriente y su trasformación en un medio tecnológico.

Los procesos cognitivos asociados al aprendizaje de esta manera de utilizar la tecnología es lo que se ha llamado procesos de instrumentación, en donde las restricciones que impone el artefacto son definitivas para su utilización.

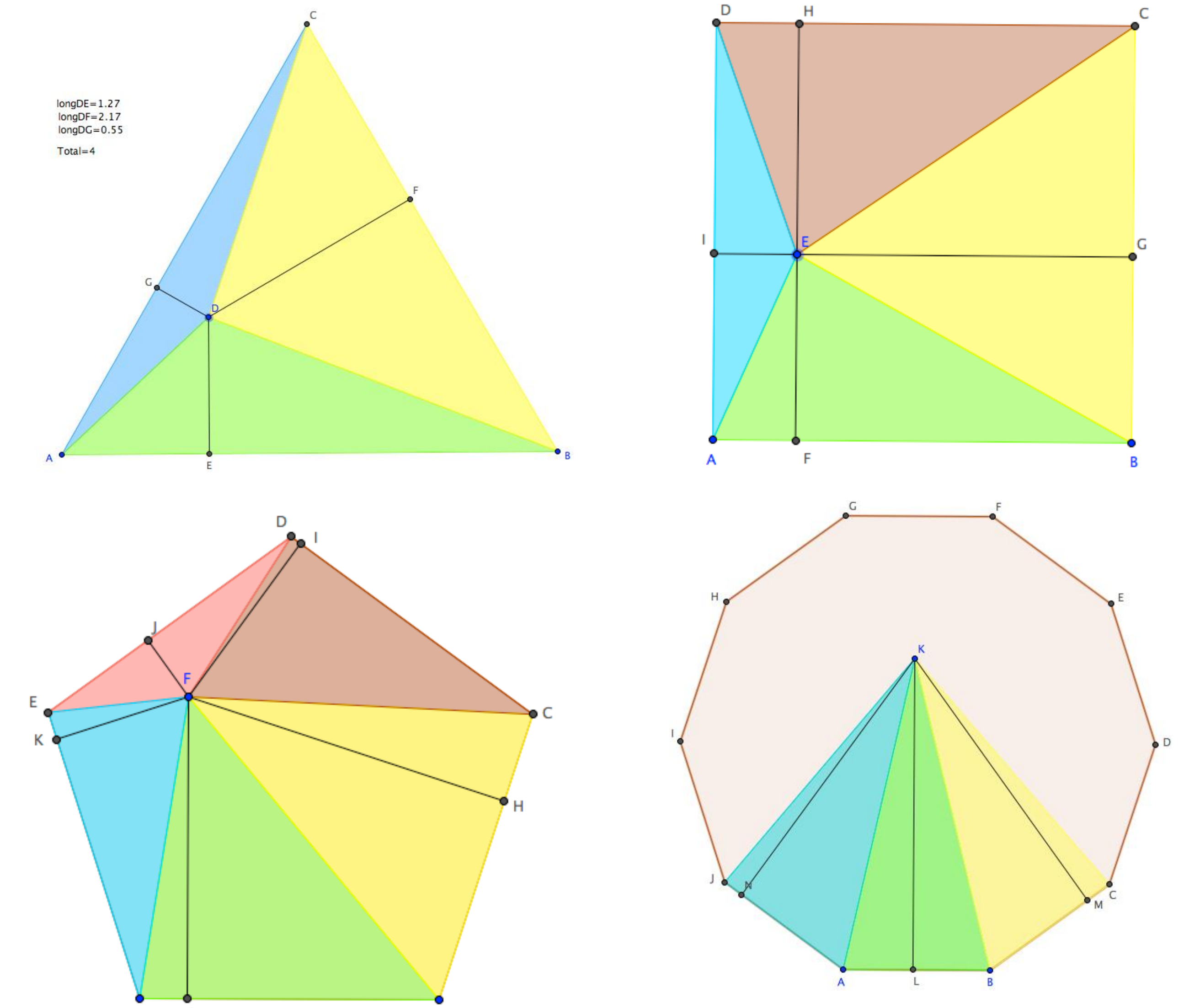
Los procesos de instrumentalización tienen que ver con la manera particular de utilización del usuario de la tecnología. Por ejemplo para descubrir relaciones y conjeturar un resultado, digamos, utilizando GeoGebra, dado un punto al interior de un triángulo equilátero, la suma de las medidas de los segmentos construidos sobre el pie de las alturas es constante, análogamente para el caso de un cuadrado, o de un pentágono regular o de un n-eágono…

Una vez realizado el descubrimiento con un paquete de geometría dinámica como el GeoGebra (ver Figura 3), podemos pasar a la demostración matemática.

Resumiendo, los procesos de instrumentación tienen que ver con las restricciones que impone el artefacto y que con el uso se van formando esquemas de acción que permite su utilización (Rabardel, 1995). Al mismo tiempo, el individuo actúa sobre el artefacto para, en nuestro caso, descubrir una relación o plantearse una conjetura, y pasar a su demostración. Las diferentes formas de utilizar el artefacto y la construcción de estrategias de utilización permiten al individuo generar procesos de instrumentalización (Guin & Trouche, 1999).

Veamos ahora un ejemplo sobre la construcción de conceptos. Por ejemplo, la construcción del concepto de función de variable real (piedra angular de las matemáticas en la enseñanza secundaria, media y superior), y nos hacemos la pregunta ¿Qué tipo de paquete de cómputo es el adecuado para la construcción del concepto de función?

Si tomamos el camino clásico, debemos introducir la definición de relación e inmediatamente después la definición de función y acompañar esta definición con ejemplos de funciones. Desde un punto de vista clásico, no parece que tengamos muchas restricciones para utilizar algún paquete con posibilidades gráficas de funciones. Pero, de acuerdo a las investigaciones en didáctica de las matemáticas en relación a este tema, los investigadores han demostrado que la construcción del concepto de función no es nada fácil (incluso algunos autores tienen clasificada la construcción como obstáculo epistemológico). Algunos investigadores han buscado caminos para enseñar el concepto de manera que el obstáculo sea sobrepasado, descubriendo la necesidad de promover primeramente la construcción del subconcepto de covariación entre variables y si es posible, esta construcción ligada a un proceso dinámico (Carlson, 2002; Hitt, 1998, 2009; Adjiage et Pluvinage, en prensa).



…

Figura 3. Proceso de descubrimiento y conjetura utilizando una herramienta tecnológica.

Entonces, desde un punto de vista cognitivo, la pregunta inicial puede cambiarse a: ¿Qué tipo de actividades son adecuadas en ambientes tecnológicos que promuevan la construcción del subconcepto de covariación entre variables como preludio al concepto de función?

La respuesta no es simple, debo analizar los paquetes que me puedan servir para esta tarea, y seleccionar el que sea más apropiado.

Desde un punto de vista cognitivo, el *Geometry Inventor* parece muy adecuado en términos de los procesos de instrumentación e instrumentalización (Arcavi & Hadas, 2002) ligado a la noción de covariación entre variables. En este paquete, relacionar variables se realiza de manera inmediata con un gesto con el ratón, ligando dos variables y con posibilidad de otro gesto para asociarlas a una representación gráfica. Entonces, si elijo un paquete como el *Geometry Inventor*, ello me llevaría a construir actividades en el aula de manera que se utilice ese paquete para los fines cognitivos establecidos. De acuerdo a la experimentación de Arcavi y Hadas (Ibid.) ellos promueven diferentes aspectos antes de centrarse en los procesos algebraicos (visualización matemática, descubrimiento, retroalimentación, sorpresa, necesidad de probar, etc.)

Ellos ejemplifican el uso del paquete proponiendo el análisis de un triángulo isósceles desde un punto dinámico (digamos de lados iguales a 5 cm). Proponen la observación de lo que varía en la situación al poner en movimiento el punto C (ver Figura 4).

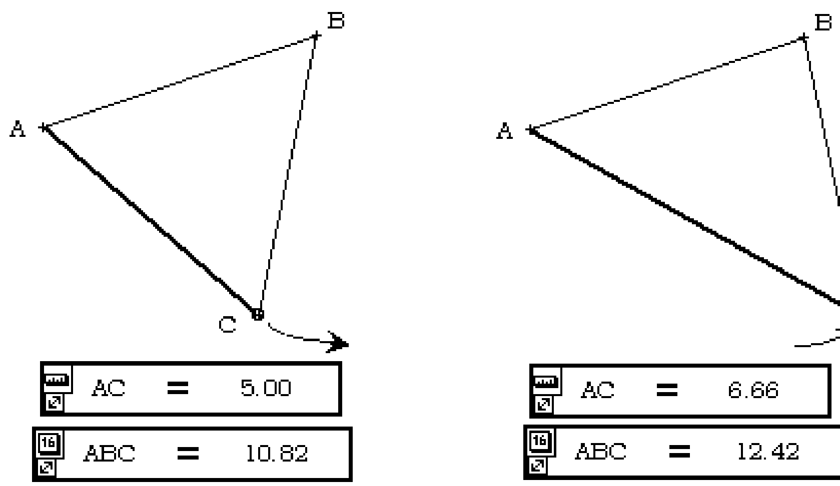


Figura 4. Triángulo dinámico con el Geometry Inventor.

El descubrimiento de variables como la medida del segmento AC, la altura del triángulo, la medida de los ángulos, el área del triángulo, etc., nos permite intentar construir relaciones funcionales y sus respectivas representaciones gráficas.

En la siguiente etapa, los autores (*Ibid*.) solicitan que se cambie el triángulo a uno no isósceles, y el análisis de las diferentes variables en juego y las posibles relaciones funcionales.

La gran sorpresa es que en algunos casos, por ejemplo con la altura y área del triángulo, se puede construir una relación pero no una relación funcional (¡sorpresa!, necesidad de probar…).

Desde un punto de vista cognitivo, este paquete se muestra interesante sobre todo para alumnos de secundaria. Sin embargo, este paquete tiene un gran "pero" para el profesor de matemáticas, no es un paquete de uso libre, la nueva versión no es fácil de conseguir, está en inglés. La misma actividad puede desarrollarse con otra tecnología, por ejemplo, con la Voyage200 (ver Figura 6).

Pero el uso de esta calculadora requiere de procesos de instrumentación y de instrumentalización más complejos que con el paquete *Geometry Inventor*. Entonces, el profesor tiene que tomar una decisión para elegir el paquete que más le acomode de acuerdo a aspectos cognitivos y económicos.

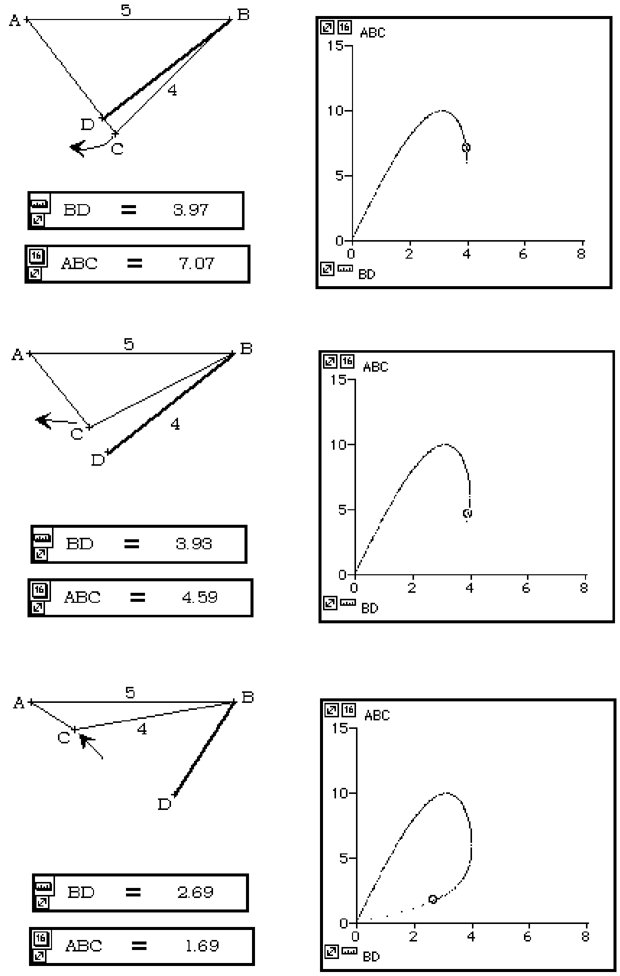


Figura 5. Una relación entre dos variables que no determina una relación funcional.

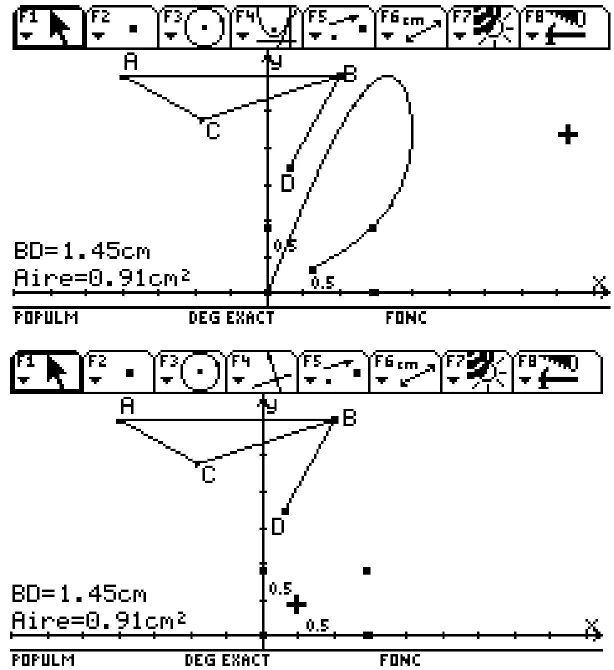


Figura 6. Relación no funcional en un ambiente de calculadora CAS (Voyage200).

Variables de corte económico

Si en una institución el profesor de matemáticas tiene acceso a la sala de cómputo, generalmente en las computadoras se ha cargado alguna versión de Excel. Este paquete podría ser utilizado por el profesor de matemáticas en sus cursos de álgebra, probabilidad y estadística, incluso en cursos de cálculo y de álgebra lineal (ver Boileau, página personal y Boileau et Garançon, 2009 para diferentes usos de la tecnología). En el caso de la geometría y en relación a la modelación matemática se podría utilizar el Cabri-Géomètre o el Sketchpad. Pero nuevamente, estos paquetes no son de uso libre.

Un paquete de cómputo que ya hemos mencionado y que viene surgiendo con una fuerza enorme es el paquete GeoGebra. Las críticas fueron muy fuertes al inicio de su construcción, señalándolo como un paquete que no tenía características propias y que su estructura se nutría de otros paquetes que ya habían sido experimentados. Sin embargo, en la época actual, es indudable el avance que ha tenido este paquete, y además se empieza a perfilar como el preferido por muchos profesores de enseñanza secundaria, media superior y superior.

Precisamente en este punto de un paquete de uso libre con un gran potencial, es importante señalar que un equipo de GeoGebra trabaja con una versión que integra la manipulación simbólica que se puede encontrar en calculadoras llamadas CAS y que posiblemente pronto salga esta nueva versión de GeoGebra. Otra particularidad es el de otro equipo que se dedica a la nueva versión de GeoGebra que integrará una geometría en tres dimensiones.

Consideración de variables sociales

Las personas en nuestra sociedad utilizan la tecnología casi todo el tiempo, como se mencionó al inicio de este documento, entonces surge de manera natural una pregunta en nuestro medio: ¿Por qué si la sociedad ha valorizado el uso de la tecnología en diferentes medios sociales (hogar, trabajo, servicios,…) no lo ha hecho en el aula de matemáticas?

Por un lado, tenemos observaciones como las siguientes:

- Los padres de familia se preguntan sobre qué utilidad puede proporcionar a sus hijos el uso de la calculadora en el aula,
- Los profesores de primaria se preguntan sobre la pérdida de habilidades aritméticas con el uso de la calculadora,
- Los profesores en la escuela secundaria se preguntan sobre la pérdida de habilidades algebraicas con el uso de calculadoras de manipulación simbólica,

Por otro lado, los investigadores mencionan que:

- Los padres de familia y los profesores de primaria se centran en habilidades menores con respecto a las operaciones aritméticas. Que algunos profesores de primaria en lugar de preguntarse cómo hacer un uso eficiente de la calculadora en el aula, se hace la pregunta si vale la pena o no de utilizarla…
- Los profesores de secundaria en lugar de buscar actividades interesantes para generar el descubrimiento, la conjetura, la prueba y demostración en matemáticas, se preguntan sobre la pérdida de habilidades algebraicas y por tal motivo rechazan la calculadora con manipulación simbólica,

¿Quién tiene razón? Desde un punto de vista global, ¡ambos lados tienen razón! Analicemos el problema de manera más precisa, haciendo referencia al mismo tiempo a un caso concreto.

Para tal efecto, tomemos un examen realizado en Francia en 1977 (examen BEPC equivalente a un examen de finales de secundaria). Ver Figura 7.

Soit les fonctions polynômes ***f*** et ***g***, définies dans ***R*** par :

$$f(x)=4(x-1)^2-(x+1)^2 \quad \text{et} \quad g(x)=(2x+5)(x-3)-(x-3)^2$$

1o. Développer, réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$ (3 Pts)

2o. Écrire $f(x)$, $g(x)$ et $11f(x)-8g(x)$ sous forme de produits de facteurs du premier degré. (Respectivement : 2 Pts, 2 Pts, 3 Pts)

3o. Soit la fonction rationnelle ***h***, définie dans ***R*** par :

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$; simplifier $h(x)$ (2 Pts)

4o. Déterminer l'ensemble des réels tels que :

a) $h(x)=0$ (2 Pts) ; b) $h(x)=\frac{8}{11}$ (4 Pts)

5o. Calculer $h\left(6\sqrt{2}\right)$ (2 Pts).

Figura 7. Examen BEPC (para estudiantes con edades de 15 años).

No hemos realizado la traducción ya que no parece necesario para entender las preguntas del examen. Este examen se puede fácilmente resolver utilizando por ejemplo Mathematics 4.0 (de uso libre), y en tal caso, los estudiantes no tendrían gran esfuerzo cognitivo por realizar:

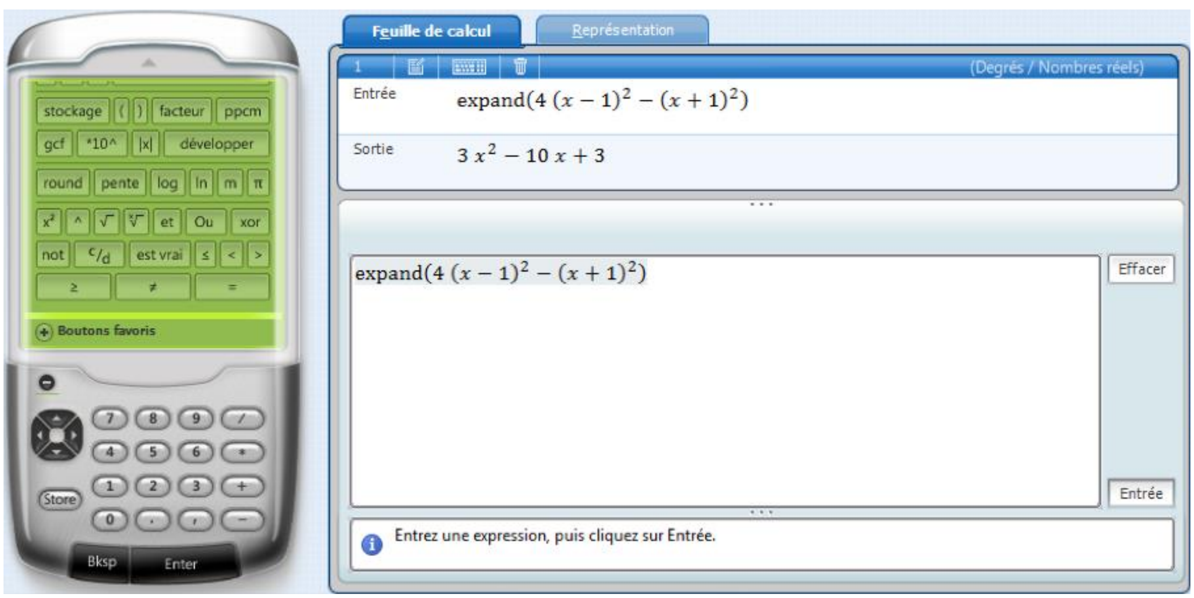


Figura 8. Uso de Mathematics 4.0 en la resolución del examen BEPC.

Y podemos realizar todo el examen utilizando la calculadora sin mayor esfuerzo. Entonces, desde ese punto de vista los profesores tienen razón. Sin embargo, hay que señalar que se trata de un ejemplo de un examen de los años 1977, que la situación en esta época ha cambiado (ver Lagrange, 1999, 2000, 2003).

Veamos un ejemplo de investigadores que proponen actividades para promover el desarrollo de habilidades algebraicas importantes en la escuela secundaria utilizando precisamente una calculadora

CAS. Un ejemplo concreto, la actividad tiene que ver con la factorización de $x^n - 1$. El enunciado matemático puesto de esa manera parece simple; pero la transformación del enunciado en una actividad rica para llevarla al aula de matemáticas, requiere de una trasformación para su presentación en varias etapas (hojas de trabajo) para generar en los estudiantes habilidades mayores ligadas al descubrimiento, la conjetura, la prueba y el contraejemplo (ver Hitt & Kieran, 2009).

Entonces, si existen producciones para realizar actividades en el aula de matemáticas en ambientes tecnológicos, por qué no se hacen uso de ellas. En relación a esta pregunta, debemos considerar dos puntos:

- Que las producciones de los investigadores no son muy conocidas (aprovechando este espacio, proponemos visitar http://www.math.uqam.ca/APTE/Taches.html en donde se encuentran nuestras actividades para calculadora CAS en versiones en Francés, Español e Inglés.
- Los investigadores en general proporcionan buenos ejemplos, sin embargo, el profesor necesita avanzar en todo un programa y necesitaría un libro de texto acompañado de actividades en ambientes tecnológicos que cumplan con las características de su programa de estudios.

La tarea es doble, por un lado, convencer al profesor de que el uso de tecnología puede generar conocimiento abstracto importante y proporcionar más ejemplos para que el profesor sienta la utilidad de los medios tecnológicos. Tarea que no se ve nada fácil…

Variables de corte institucional

Ejemplifiquemos con el caso de Québec para la escuela secundaria que es de 5 años. Las autoridades educativas están fuertemente a favor del uso de la tecnología en el aula de matemáticas. Incluso, se ha dotado a todas las escuelas secundarias de un tablero interactivo electrónico (TBI) para que todos los profesores, incluyendo a los de matemáticas, hagan uso de esta tecnología. El ministerio (MELS, 2007, p.2) especifica directamente el uso de la tecnología

> Cada secuencia [tres opciones de estudio en los últimos tres años de secundaria]: Cultura, Sociedad y Tecnología, Técnico - Ciencia y Ciencias Naturales, hace uso de situaciones de aprendizaje significativas y complejas ... El uso de la tecnología - que se ha convertido en algo indispensable en la vida cotidiana de todos los ciudadanos - se le considera valiosa en el tratamiento de diferentes situaciones. Permitiendo la exploración, la simulación y la representación de muchas situaciones, complejas y diversas, la tecnologías promueve la emergencia y la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos. Aumenta la eficacia del alumno en la realización de las tareas que se le proponen.

Sin embargo, aún y cuando las autoridades están totalmente a favor del uso de la tecnología, en los libros de texto sobre la nueva reforma en un acercamiento por competencias matemáticas, siguen un uso clásico de la tecnología. La parte que más se desarrolla en los libros de texto es la noción de parámetro en relación a los coeficientes de diferentes funciones, la función cuadrática, la función cúbica, la función valor absoluto, la función raíz cuadrada, etc. Con respecto a otros contenidos, las propuestas son menos interesantes.

Desde nuestro punto de vista, es importante que en los libros de texto propongan actividades con tecnología que intenten resolver algunos de los grandes problemas propuestos por la literatura en didáctica de las matemáticas, por ejemplo, uno de tantos es el de la transición de la aritmética al álgebra.

Nuestra proposición se centra sobre la construcción de los números poligonales. Primeramente consideraremos los resultados de investigación de Healy y Sutherland (1990) sobre el uso de Excel para iniciar a los estudiantes con el uso de la tecnología y la construcción de los números poligonales.

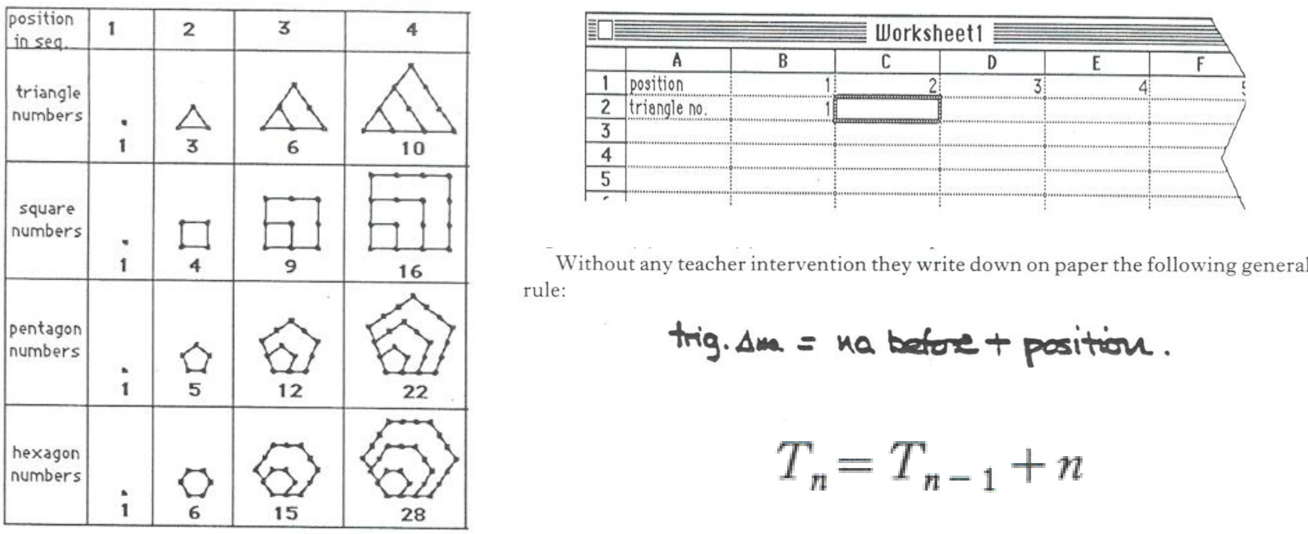


Figura 9. Actividad y resultados del estudio de Heally & Sutherland (1990)

De acuerdo a los resultados de investigación de Heally y Sutherland (Ibid.), podemos decir que dentro del ambiente tecnológico de Excel, los estudiantes al inicio de la escuela secundaria, son capaces de generar una expresión cercana a la expresión $T_n = T_{n-1} + n$. Es decir que los estudiantes logran generar los números triangulares desde un punto de vista recursivo.

Hitt (1994, 1996) presenta una propuesta diferente para generar los números poligonales considerando un acercamiento visual y numérico, y criticando en una primera instancia la propuesta de Heally & Sutherland con EXCEL, ya que este paquete no permite llegar a generar una expresión algebraica y en cierta manera atrapa al estudiante en este ambiente tecnológico, sin permitirle desligarse de él para realizar un trabajo con papel y lápiz una vez comprendido el proceso y poder así generar una fórmula general para calcular un número triangular cualquiera. Es decir, en el contexto de EXCEL, siempre es necesario construir el triangular anterior… En la época actual, consideramos que es interesante iniciar con la proposición de Heally & Sutherland y para romper con EXCEL, continuar con una propuesta similar a la presentada por Hitt (Ibid., ver Figura 10).

Considerando este nuevo acercamiento, Hitt, Cortés y Rinfret (en prensa) proponen a los estudiantes un trabajo individual con el uso de Excel en una primera etapa ; y un trabajo en equipo para implementarse en una segunda etapa (ver Figura 11). Para esta opción, se presenta un paquete que muestra numérica y geométrica los números poligonales permitiendo verificar conjeturas.

De hecho, nuestra proposición está diseñada para poder utilizarse con la metodología ACODESA (Hitt, 2007 ; Hitt & Morasse, 2009), que combina el trabajo individual y en equipo.

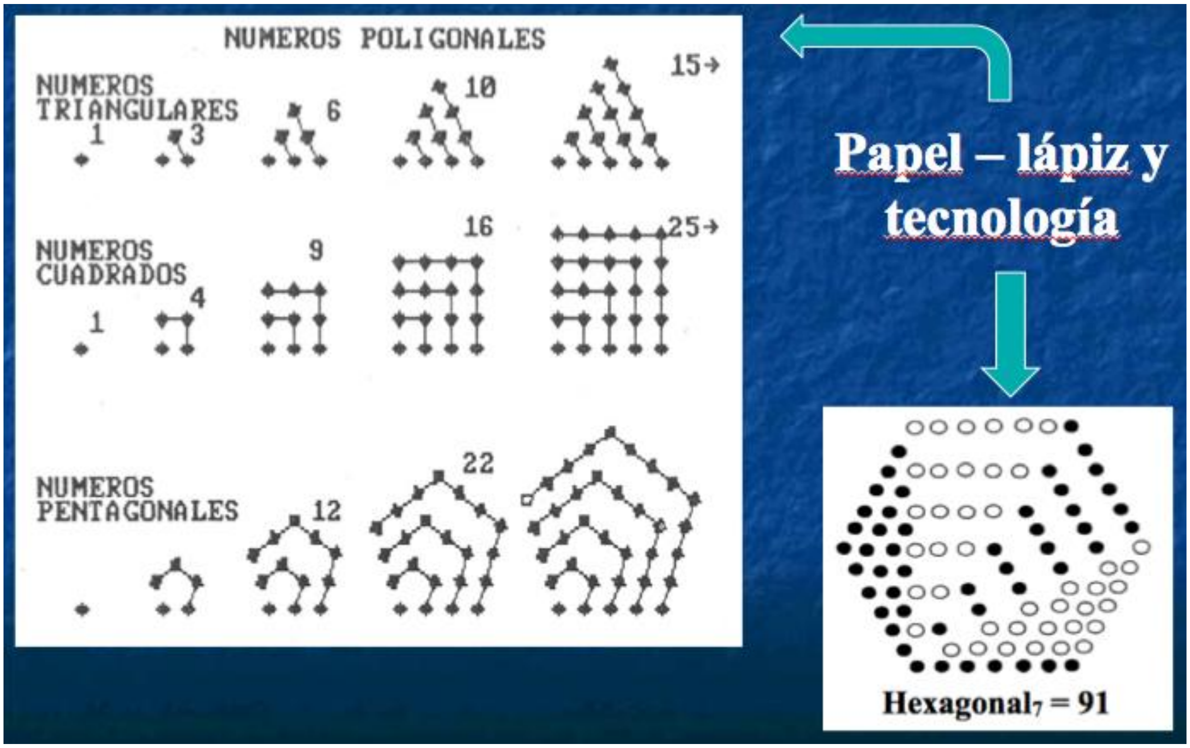
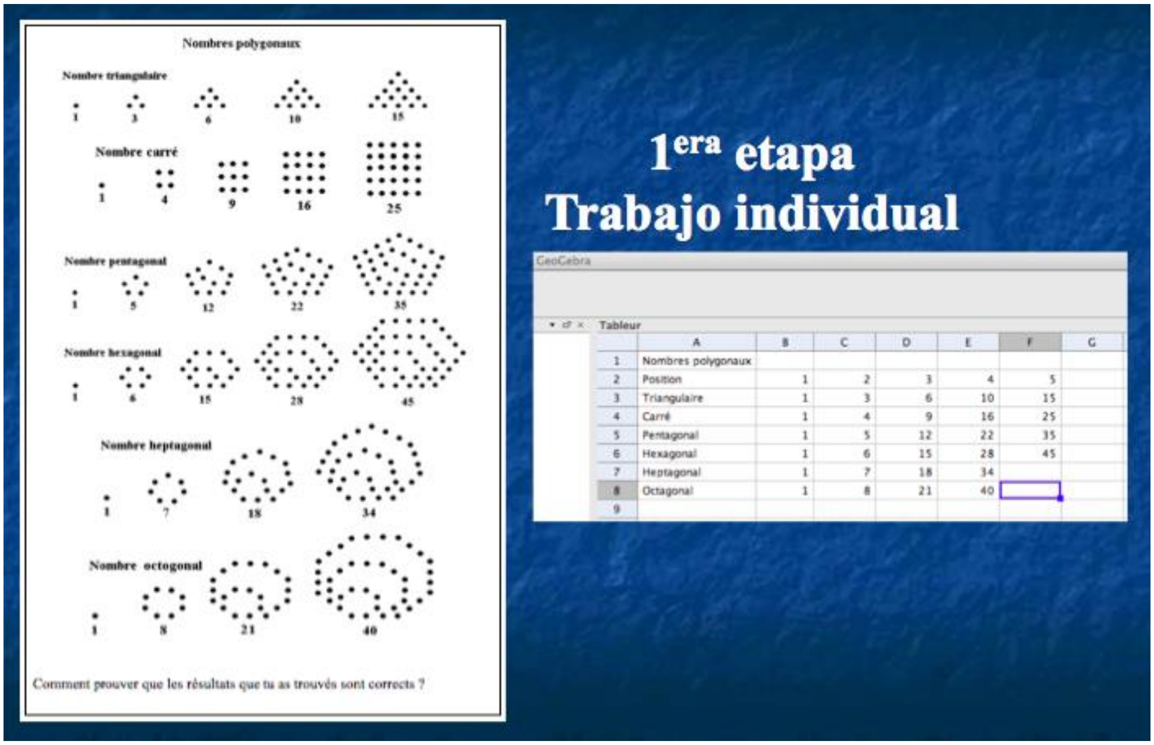


Figura 10. Los números poligonales en un ambiente LOGO (Hitt, 1994, 1996).

Modelación matemática y tecnología

La modelación matemática es uno de los aspectos más difíciles en el aprendizaje de las matemáticas ya que solicita la aplicación de diferentes conceptos en la búsqueda de la solución de un problema, solución a una situación matemática en juego o sobre la construcción de un concepto matemático (Lazli, 2011). En este enfoque, Hitt, Cortes y Rinfret (Ibid.) presentan una nueva proposición sobre el uso de la tecnología combinando video, y dos paquetes de uso libre, AVIMECA y GeoGebra.

Con una cámara fotográfica se puede filmar una situación y obtener un video AVI, que se puede procesar con el paquete de uso libre AVIMECA (de la Universidad de Rennes, Francia). Con AVIMECA se pueden medir distancias a diferentes tiempos (altura de un líquido, posición de una bicicleta, de una pelota, etc). Una vez procesado el video y la obtención de una tabla de valores, es posible guardar los datos en forma de tabla que se puede copiar en GeoGebra e intentar encontrar un modelo matemático. Veamos un ejemplo concreto. Hemos filmado el llenado de una tetera con un líquido. Con el paquete AVIMECA hemos obtenido una tabla de valores con el tiempo como variable independiente y la altura del líquido como variable dependiente. Pasamos los datos a GeoGebra y obtenemos una nube de puntos, que al solicitar a GeoGebra una regresión con un polinomio de tercer grado se obtiene el resultado mostrado en la Figura 12.



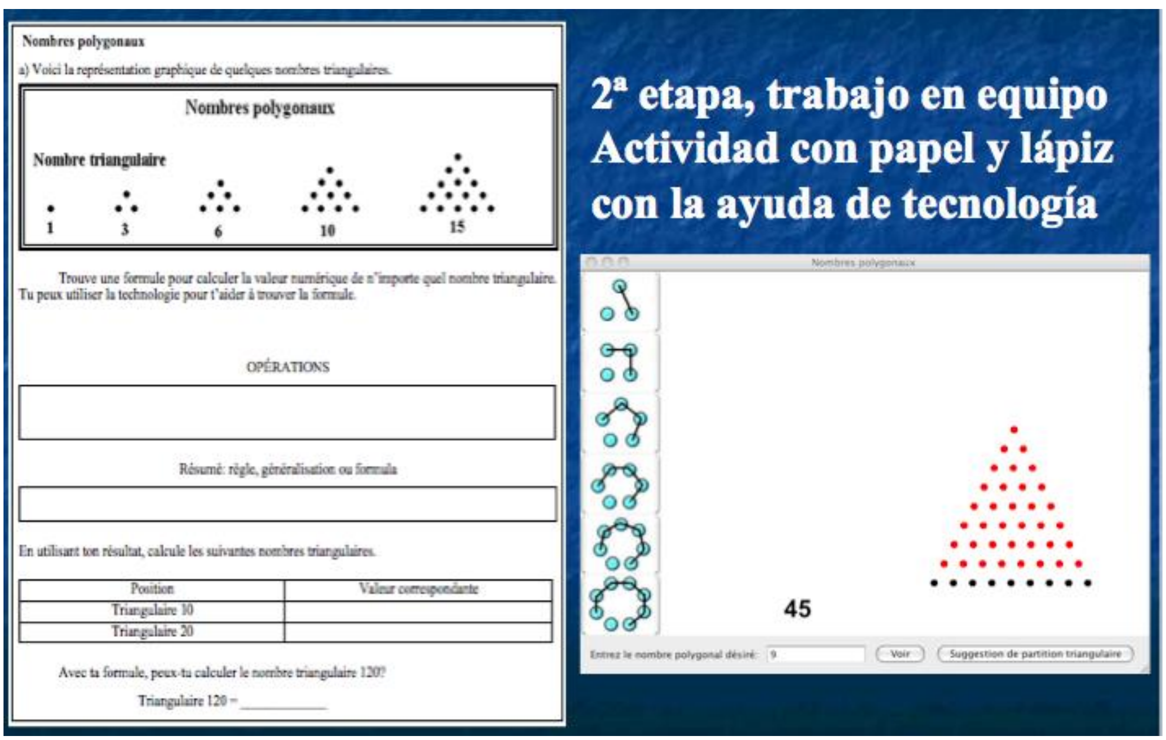
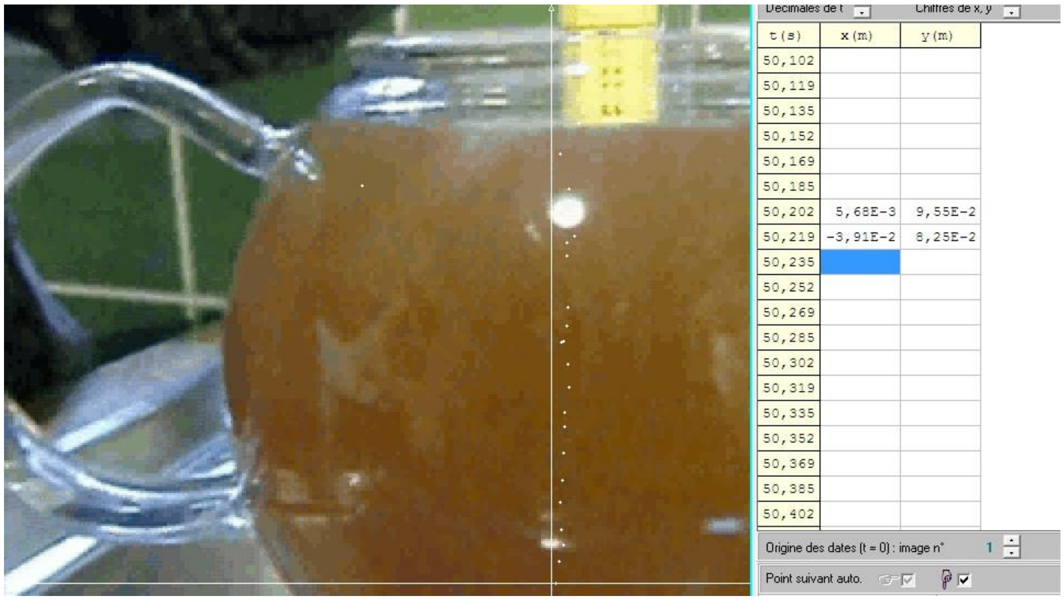
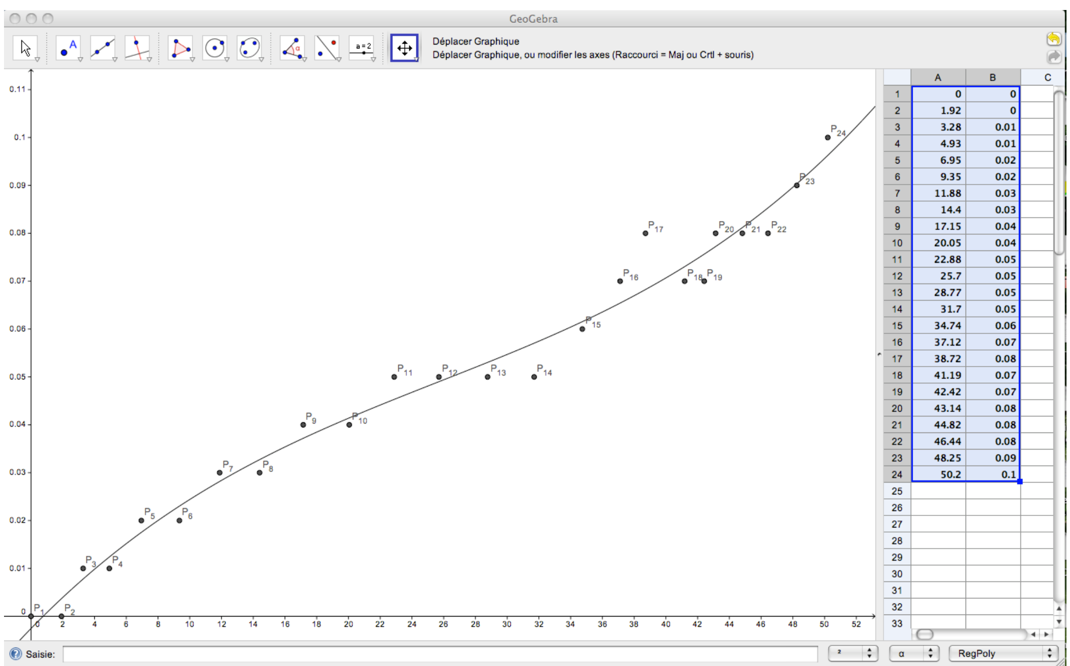


Figura 11. Proposición sobre los números poligonales en un ambiente ACODESA



Acercamiento experimental (video y uso de AVIMECA). Se a señalado la altura del líquido en diferentes tiempos.



Acercamiento tecnológico con GeoGebra (se ha copiado la tabla de valores de AVIMECA a un tablero de GeoGebra)

Figura 12. AVIMECA y GeoGebra combinados para realizar un proceso de modelación matemática.

El paso a un trabajo algebraico se puede realizar una vez que se han generado ideas intuitivas alrededor de las variables que están en juego. Por ejemplo, una vez que se ha comprendido la situación, uno podría ahora solicitar la representación algebraica del volumen de una esfera utilizando herramientas de cálculo integral cuando se conoce la altura del líquido:

Desde el punto de vista del cálculo integral, se puede calcular el volumen de una esfera cuando se va llenando. Transformando la situación en el contexto del cálculo integral, podemos imaginar que la altura la podemos representar de izquierda a derecha (ver Figura 13). De la ecuación de la circunferencia se puede calcular el valor de la ordenada que es el valor del radio de la circunferencia que representa la superficie del líquido, entonces, el área es π y^2.

$$(x-r)^2+(y-0)^2=r^2 \Rightarrow y^2=r^2-(x-r)^2=2xr-x^2$$

$$\text{Area}_{\text{disco}}=\pi\, y^2=\pi\left(2xr-x^2\right)$$

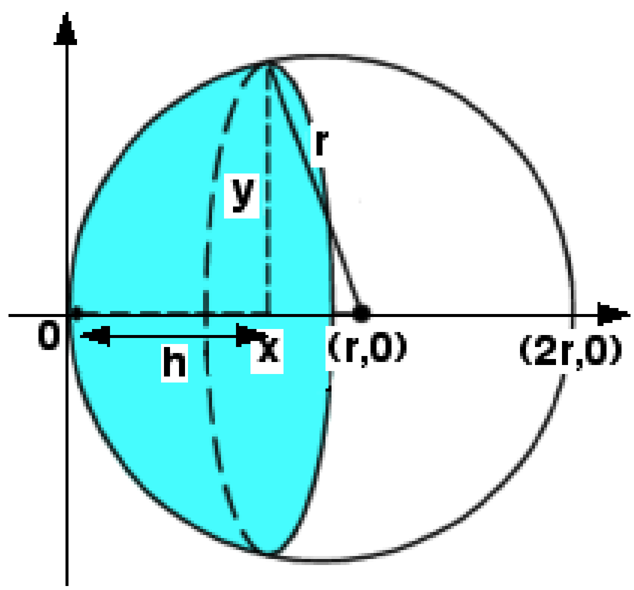


Figura 13. Llenado de la esfera de izquierda a derecha.

Entonces,

$$Volumen_{\text{tetera esférica}}=\int_0^h \pi\left(2rx-x^2\right)dx=\pi\, r\int_0^h 2x\,dx-\pi\int_0^h x^2\,dx=\pi\, r\, x^2\Big|_0^h-\pi\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h$$

$$Volumen_{\text{tetera esférica}}=\pi\, r\, h^2-\pi\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}\pi\, h^2\left(3r-h\right)$$

Si calculáramos el volumen de la parte superior (mirando el llenado de derecha a izquierda, ver Figura 14), se tendría la expresión algebraica siguiente:

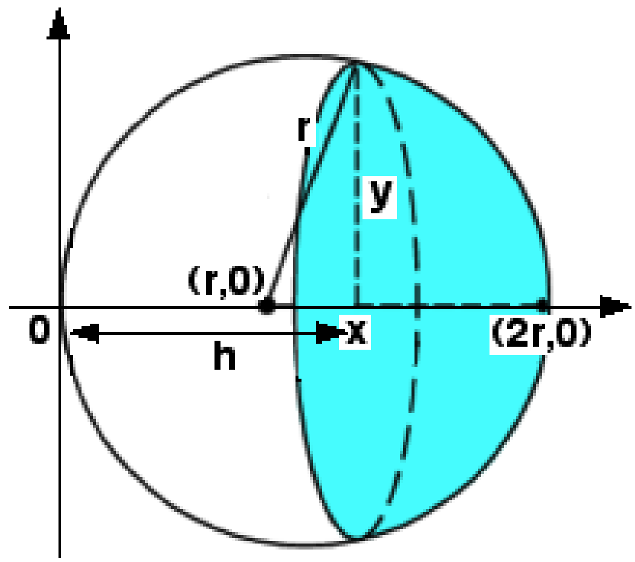


Figura 14. Llenado de la esfera de derecha a izquierda.

$$Volumen_{tetera\ esférica} = \int_h^{2r} \pi\left(2rx - x^2\right) dx = \pi\, r \int_h^{2r} 2x\, dx - \pi \int_h^{2r} x^2\, dx = \pi\, r\, x^2\Big|_h^{2r} - \pi \frac{x^3}{3}\Big|_h^{2r}$$

$$Volumen_{tetera\ esférica} = \pi\, r\left(2r\right)^2 - \pi\, r\, h^2 - \pi \frac{\left(2r\right)^3}{3} + \pi \frac{h^3}{3} = \frac{4}{3}\pi\, r^3 + \frac{1}{3}\pi\, h^2\left(h - 3r\right).$$

En este documento no discutiremos sobre las decisiones institucionales. Este punto es muy importante ya que determina en la mayoría de los casos lo que el profesor puede utilizar en el aula. Un ejemplo en nuestro caso en Québec, ha sido la decisión de las autoridades educativas al poner los tableros interactivos electrónicos (TBI) en las aulas. Ello implica un cierto tipo de uso de la tecnología, en este caso, para todos los profesores, incluyendo a los de matemáticas.

Conclusión

En nuestra presentación hemos querido poner de manifiesto que si bien en nuestra sociedad la tecnología es utilizada de manera cotidiana, no es así en el aula de matemáticas. Las dudas que manifiestan los padres de familia y profesores sobre los inconvenientes de utilizar tecnología en el aula se fundan en observaciones sobre habilidades menores. Los investigadores han tardado en profundizar sobre las explicaciones de los problemas que conlleva el uso de artefactos que necesitan de procesos cognitivos complejos para convertirlos en verdaderas herramientas computacionales (Artigue, 2000, 2002; Rabardel, 1995; Guin & Trouche, 1999; Hitt & Kieran 2009; Lagrange, 1999, 2000, 2003) y hasta el momento no se ha logrado convencer masivamente al profesor de matemáticas sobre las bondades del uso de la tecnología.

Los investigadores entienden las posiciones de los profesores sobre sus dudas con respecto a la pérdida de habilidades aritméticas o algebraicas, e intentan junto con la experiencia del profesor, construir actividades que permitan desarrollar esas habilidades, y con la ayuda de la tecnología, los estudiantes puedan construir esquemas más complejos que les permita acceder a una matemática más rica, más amplia, más profunda.

En este documento hemos observado que el uso de la tecnología por parte del profesor requiere de un trabajo importante de reflexión sobre el tipo de actividades a desarrollar en el aula y cómo integrar la tecnología existente. Hemos mostrado que para el profesor de matemáticas no es tarea fácil. Es importante un acercamiento entre profesores e investigadores para producir actividades tomando en cuenta la experiencia del profesor y las características teóricas que el investigador pueda proporcionar.

Hemos mostrado actividades que se pueden desarrollar en el aula de matemáticas tanto con paquetes comerciales como con paquetes de uso libre. Nuestra posición es que debemos ser conscientes que la tecnología está presente, y que es necesario proporcionar a los estudiantes actividades *ad hoc* que les permitan, tanto a los estudiantes como al profesor, avanzar hacia una matemática más rica, más interesante y se logre construir esquemas cognitivos más amplios sobre el conocimiento y sobre habilidades matemáticas más estables. La fragilidad del conocimiento que se pierde a través de los años (Karsenty, 2002), tendría mayor soporte para su estabilidad si se proporcionan a los estudiantes actividades bien pensadas en contextos tecnológicos.

Agradecimientos

La investigaciones presentadas en este documento han recibido la subvención de Fonds de la Recherche sur la Société et la Culture du Québec (No. 008-SE-118696), del Conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada (No. 410-2008-1836, CID 130252) y del Promep de México para la formación de una red: Uso de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Adjiage R. et Pluvinage F. (en presse). Strates de compétence en mathématiques. *Repères*. France.

Arcavi A. & Hadas N. (2002). Computer mediated learning: an example of an approach. In F. Hitt (Editor), *Representations and Mathematics Visualization*. International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. México.

http://www.er.uqam.ca/nobel/r21245/index.htm

Artigue, M. (2000). Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. In *Proceedings of the Annual Meeting of GDM* (pp. 7-17). Potsdam, Germany. http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245-274.

Aviméca. (2011). Aviméca v2.7. Logiciel libre, Université de Rennes, France.

http://www.ac-rennes.fr/pedagogie/scphys/outinfo/log/avimeca/am_h.htm

Boileau A. (2011). Site Web personnel, http://www.math.uqam.ca/~boileau/Progiciels.html

Boileau A. et Garançon M. (2009). Outils informatiques pour l'enseignement des mathématiques. Éditorial : Loze-Dion, Montréal, Québec, 248 p.

Carlson, Marilyn P. (2002). Physical enactment : a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships. In Hitt F., (ed.), *Representations and mathematics visualization*. (pp. 63-77). Special issue of PME-NA and Cinvestav-IPN.

http://www.er.uqam.ca/nobel/r21245/index.htm

GeoGebra. Version 4.0.27.0. http://www.geogebra.org/cms/

Guin D. & Trouche L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *The International Journal of Computers for Mathe-matical Learning*, 3(3), 195-227. Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Healy L. & Sutherland R. (1990). The use of spreadsheets within the mathematics classroom. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 21, No. 6, 847-862.

Hitt F. (1994). Visualization, anchorage, availability and natural image: polygonal numbers in computer environments. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 25, No. 3, 447-455.

Hitt F. (1996). Visualisation mathématique : nombres polygonaux. *Les Revues Pédagogiques*, No. 29, avril 1996, pp. 33-40.

Hitt F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 123-134.

Hitt F., Cortés C. et Rinfret M. (en prensa). Utilisation des technologies dans la classe de mathématique au secondaire : des outils sous-exploités. *Actes de l'Espace Mathématique Francophone 2012*. Genève, Suisse, Février-2012.

Hitt F. & Morasse C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes**.** Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009.*"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009*. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy).

http://math.unipa.it/~grim/cieaem/quaderno19_suppl_2.htm

Hitt F. & Kieran C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a Task-Technique-Theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, DOI number: 10.1007/s10758-009-9151-0. http://www.springerlink.com/content/657wt76n04x43rk8/.

Karsenty, R. (2003). What adults remember from their high school mathematics ? The case of linear functions. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 51, pp 117-144.

Lagrange J. B. (1999). Complex calculators in the classroom: theoretical and practical reflec-tions on teaching pre-calculus. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4, 51-81.

Lagrange, J.-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : Une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics, 43*, 1-30.

Lagrange, J.-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. In J. T. Fey (Ed.), *Computer algebra systems in school mathematics* (pp. 269-284). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lazli S. (2011). *Enseignement de la fonction sinus au deuxième cycle du secondaire par le biais de la modélisation et d'outils technologiques*. (Mémoire de maîtrise non-publié). Université du Québec à Montréal.

MELS, Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. (2007) Programme de formation, Deuxième cycle du secondaire. http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/dp /menusec.htm

Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies : une approche cognitive des instru-ments contemporains*. Paris : Armand Colin.