



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores
del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen XII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2024
ISSN: 2395-955X

Directorio

Rafael Pantoja R.

Director

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Sección: Artículos de

investigación

Elena Nesterova

Alicia López B.

Verónica Vargas Alejo

Sección: Experiencias

Docentes

Esnel Pérez H.

Armando López Z.

Sección: GeoGebra

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA ENSEÑAR SERIES DE FOURIER CON TECNOLOGÍA: ESTUDIO DE CASO DE ONDA CUADRADA

Noelia Londoño Millán, Francisco Hazael Camarillo Mendoza, Alibeit Kakes

Cruz

noelialondono@uadec.edu.mx, hazaelcamarillo@uadec.edu.mx,

alibetkakes@uadec.edu.mx

Universidad Autónoma de Coahuila

Para citar este artículo:

Londoño, N., Camarillo, F., Kakes, A. (2024). Secuencia didáctica para enseñar series de Fourier con tecnología: estudio de caso de onda cuadrada. Construyendo rectángulos. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, XII (2), 1-25.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año XII, No. 2, julio-diciembre de 2024, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: <http://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA ENSEÑAR SERIES DE FOURIER CON TECNOLOGÍA: ESTUDIO DE CASO DE ONDA CUADRADA

Noelia Londoño Millán, Francisco Hazael Camarillo Mendoza, Alibet Kakes Cruz
noelialondono@uadec.edu.mx, hazaelcamarillo@uadec.edu.mx,
alibetkakes@uadec.edu.mx

Universidad Autónoma de Coahuila

Resumen

La reflexión sobre la enseñanza de las series de Fourier pone de relieve que el dominio de este tema requiere una sólida comprensión de sus fundamentos teóricos y explicaciones exhaustivas. Además, es fundamental que los estudiantes se involucren en procesos cognitivos que apoyen su comprensión e institucionalización del concepto. Por esta razón, proponemos desarrollar e implementar una secuencia didáctica para la enseñanza de las series de Fourier, incorporando herramientas tecnológicas que permitan a los estudiantes de ingeniería explorar diversos escenarios, ajustar variables y observar resultados inmediatos. Este enfoque fomenta el aprendizaje activo y una comprensión más profunda de los conceptos en estudio. En este trabajo, nos centramos específicamente en detallar las características de esta propuesta didáctica y su implementación, con especial énfasis en el estudio de una onda cuadrada.

Palabras clave: Series de Fourier, GeoGebra, enseñanza

Abstract

Reflecting on the teaching of the Fourier series highlights that mastering this topic requires a solid understanding of its theoretical foundations and thorough explanations. Moreover, it is essential for students to engage in cognitive processes that support their comprehension and institutionalization of the concept. For this reason, we propose developing and implementing a didactic sequence for teaching the Fourier series, incorporating technological tools that enable engineering students to explore various scenarios, adjust variables, and observe immediate outcomes. This approach fosters active learning and a deeper understanding of the concepts under study. In this paper, we specifically focus on detailing the characteristics of this didactic proposal and its implementation, with a particular emphasis on the study of a square wave.

Keywords: Fourier Series, GeoGebra, Teaching.

Introducción

Las Series de Fourier es un tema recurrente en los currículos de carreras tecnológicas e ingenierías, en asignaturas como modelos matemáticos, vibraciones mecánicas y ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo, los estudiantes suelen mostrar un bajo rendimiento en este tema según Romero y Farfán (2016), por un lado, desconocen los constructos previos que se requieren para abordarlos y por otro, se imparte de una manera muy teórica.

Una posible explicación para el bajo rendimiento de los alumnos podría ser la falta de conocimientos previos en áreas fundamentales como identidades trigonométricas, funciones, sucesiones y series, a esto se le puede sumar el enfoque pedagógico predominantemente teórico, que contribuye a la dificultad de los estudiantes para experimentar y comprender los

fenómenos relacionados, ya que no se les brinda suficiente espacio para explorar estos conceptos de manera práctica y contextualizada.

Las primeras ideas que referían a las series trigonométricas fueron consideradas por los babilonios y posteriormente por D'Alambert en 1747 y fue hasta 1821 que Fourier publicó su tratado "Teoría analítica del calor", donde amplió y formalizó los conceptos sobre la ecuación de conducción de calor.

En cuanto a la enseñanza de las Series de Fourier, Moreno (1999, citado en Romero y Farfán, 2016) señala una tendencia hacia un enfoque formal, donde los profesores se limitan a explicar ejemplos y asignar ejercicios. Esta observación se confirma en una revisión de tres textos clave para estudiantes de ingeniería (Hsu, 1973; Kreyszig, 2001; Zill, 1997) los cuales ofrecen solo conceptos y fórmulas para resolver series y transformadas de Fourier, sin incluir una parte experimental que refuerce los conceptos.

Reyes y Arellano (2014) indican que las dificultades en la enseñanza de física y ecuaciones diferenciales, así como en materias especializadas como dinámica y vibraciones mecánicas, se deben a la falta de visualización de los fenómenos modelados matemáticamente. Por ello, proponen un prototipo de mesa vibratoria para ilustrar conceptos matemáticos como las series de Fourier y los modelos dinámicos de sistemas mecánicos desbalanceados, con el objetivo de mejorar la comprensión física y matemática mediante la generación y análisis de señales de aceleración periódicas.

Los ejemplos y antecedentes bibliográficos revisados ofrecen una perspectiva sobre la enseñanza de las series de Fourier, lo que nos permite establecer el objetivo central de nuestra investigación: Crear una secuencia didáctica en la que se pueda vincular un fenómeno físico al tema matemático de la serie de Fourier en el cual nos permita visualizar y comprender las sumas parciales asociados al fenómeno físico, en particular al análisis de señales. Debido a limitaciones de espacio, en este artículo nos enfocaremos en describir las características y la implementación didáctica de la propuesta, particularmente en relación con una onda cuadrada.

Referente teórico

En esta sesión se describe brevemente lo que es una serie de Fourier, sus características y elementos clave para el desarrollo, así mismo se incluirá un apartado sobre herramientas tecnológicas a la enseñanza de las matemáticas, haciendo alusión particular a los usos en las series de Fourier. Según González (2003), Zill et al. (2018), Yáñez, (2015) y Rao, et al. (2012), las Series de Fourier consisten en la descomposición de cualquier función periódica en una suma infinita de funciones sinusoidales (senos y cosenos), cuyas frecuencias son múltiplos de la función original. Esta descomposición permite analizar las propiedades de la función y la composición de sus componentes o fenómenos.

La serie de Fourier de una función periódica integrable de f definida en el periodo $-p, p$ se define mediante la siguiente serie trigonométrica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \right], \text{ donde}$$

a_0 , a_n y b_n son los coeficientes de Fourier, que se obtienen de la siguiente manera:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-p}^p f(x) dx$$

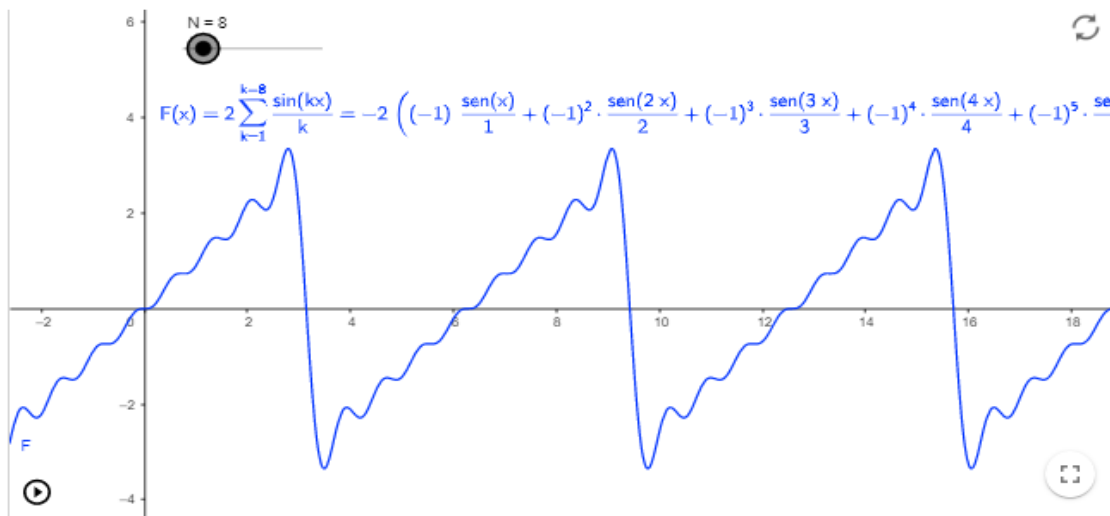
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{p} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p} x\right) dx$$

En la figura 1, se muestra una gráfica y su respectivo desarrollo algebraico en serie de Fourier, construida con el software GeoGebra, dicha función es periódica y cumple las condiciones que permite su transformación.

Figura 1

Representación gráfica y algebraica de la Serie de Fourier para una función periódica



Nota: Tomado de Hall (2022).

Elementos clave en las series de Fourier

Operaciones básicas. Son varias las operaciones básicas que los alumnos deben dominar para comprender las series de Fourier, de acuerdo con Gómez (s/f) se necesita entender la suma, la multiplicación, el desplazamiento y la reflexión de funciones que dependen del tiempo para la representación y procesamiento de funciones.

Tabla 1. Algunas operaciones básicas de funciones

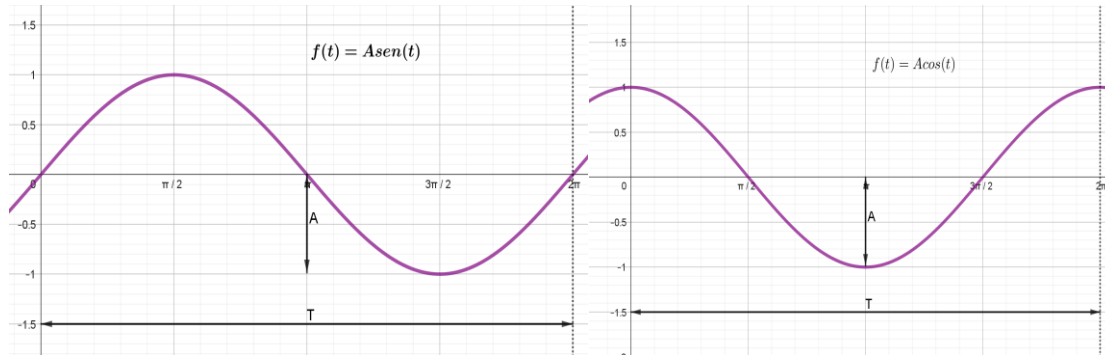
Nombre de la operación	Definición
Suma de funciones	$g(t) = f_1(t) + f_2(t)$
Multiplicación por una constante α	$g(t) = \alpha f(t).$
Desplazamiento en el tiempo	$f(t - \tau)$
Reflexión en el tiempo	$f(-t).$

Nota. Esta tabla muestra el nombre y definición de algunas funciones básicas.

Funciones periódicas. Otro elemento importante que deben conocer los alumnos al resolver series de Fourier es lo relacionado con la función periódica, este se define como: una función para la cual $f(t) = f(t + T)$, para todo valor de t , donde la constante T se denomina periodo de la función. El periodo también se puede definir como el tiempo transcurrido entre dos puntos equivalentes de una función. Las funciones periódicas más representativas son las funciones trigonométricas seno y coseno, (Figura 2), ambas con periodo $T = 2\pi$.

Figura 2

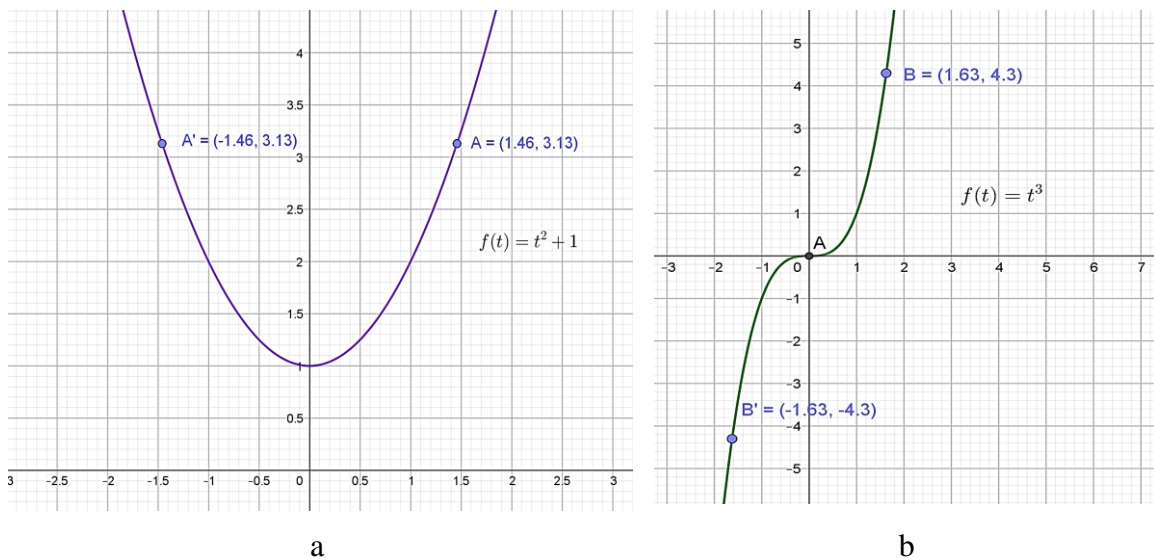
Funciones periódicas $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ con periodo $T = 2\pi$



Paridad de funciones. Un elemento que agiliza la búsqueda de los coeficientes de la serie de Fourier es identificar si las funciones son pares e impares, como no siempre es preciso tener su representación gráfica, conviene usar sus definiciones. Si se cumple que $f(t) = f(-t)$, lo cual indica que la señal tiene los mismos valores para el lado positivo y negativo de t . Por ejemplo, la función $f(t) = t^2 + 1$ es par (Figura 5a). Contrario a lo anterior si se cumple que $f(-t) = -f(t)$, significa que la función es impar, lo cual indica que su gráfica no se altera luego de una rotación de 180° alrededor del origen. Por ejemplo, la función $f(t) = t^3$ es impar (Figura 5b).

Figura 3

Gráficas de las funciones: $f(t) = t^2 + 1$ y $f(t) = t^3$, par e impar respectivamente



Herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas

Varios autores (Rodríguez, et al., 2023; Ruthven, 2009; Laborde, 2001; Drijvers & Trouche, 2014; Barba, et al., 2017) coinciden en que el uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas ha evolucionado y se han ampliado los métodos significativamente en las últimas décadas, creando espacios innovadores, transformando la manera en que los estudiantes interactúan con los conceptos matemáticos. Desde la introducción de calculadoras gráficas hasta el uso de software interactivo y herramientas en línea, la tecnología ha facilitado la visualización, la experimentación y la comprensión de conceptos abstractos y consideran que este enfoque no solo mejora el aprendizaje al hacer las matemáticas más accesibles y prácticas, sino que también fomenta el desarrollo de habilidades de resolución de problemas y el pensamiento crítico.

En el caso específico de la enseñanza de las series de Fourier, se ha demostrado que el uso de herramientas tecnológicas no solo facilita la comprensión teórica del tema, sino que también favorece la visualización de representaciones gráficas y algebraicas, lo cual contribuye a una mejor comprensión de conceptos abstractos, como la descomposición de señales periódicas en componentes sinusoidales (Romero & Farfán, 2016). Además, estas herramientas permiten la interacción directa con los parámetros de las series de Fourier, tales como amplitudes y frecuencias, lo que brinda a los estudiantes la oportunidad de explorar cómo las señales resultantes cambian al ajustar dichos parámetros (Muro et al., 2007).

Otro elemento clave que se tuvo en cuenta son las aplicaciones prácticas porque la visualización mediante herramientas tecnológicas es crucial en campos como la ingeniería, las telecomunicaciones, la física y otras disciplinas donde las series de Fourier tienen aplicaciones directas. Esto permite a profesionales y estudiantes comprender cómo se aplican estos conceptos en situaciones reales.

Diseño de la propuesta

La secuencia didáctica que se diseñó tuvo una componente teórica y varias sesiones prácticas para la cual se emplearon recursos tecnológicos, como lo son una actividad en GeoGebra, con su respectivo applet que muestra la forma de una onda cuadrada de una serie de Fourier y el alumno la visualiza con diferentes valores de n , también en la parte de modelación se propuso utilizar un circuito eléctrico, en donde, después de que los alumnos armaron el circuito se utilizó un osciloscopio como medio tecnológico para poder visualizar la onda cuadrada. Lo que se pretende es vincular la matemática, con aplicaciones de la vida real.

Según Díaz-Barriga, (2013), elaborar una secuencia didáctica para una clase, implica establecer situaciones de aprendizaje que se implementarán en el aula con los alumnos. Una secuencia didáctica trata y consiste en una cadena de acciones implementadas en un orden específico que se adecuan al objetivo que se quiere lograr. Son actividades diseñadas para crear situaciones que permitan al estudiante desarrollar un aprendizaje significativo.

Para el diseño de la secuencia didáctica y la introducción de un modelo físico, se ha considerado lo expuesto por Mederos y González (2005). Ellos definen la modelación como el proceso de construir modelos de los objetos que se desean estudiar en asignaturas del conocimiento humano. El propósito de este proceso es aplicar las leyes y resultados a la

información de los modelos, para luego transferirlos a los objetos reales y comprobar si los resultados son válidos.

En el proceso de modelación, es importante que el modelo:

- Sea simple para su estudio.
- Muestre una variedad de aspectos del objeto o de los objetos reales, de modo que constituya una “imagen” que contenga la mayor cantidad de información posible sobre dichos objetos. Esto asegura que la mayoría de los resultados obtenidos del modelo sean consistentes al transferirlos al objeto real.

La secuencia didáctica se aplicó a un grupo de ingenieros físicos de una universidad del norte de México, quienes estaban cursando entre el quinto y sexto semestre de la asignatura "Métodos Matemáticos para Ingenieros I". Esta asignatura incluye el tema de la Serie de Fourier, el cual también se aborda en otras materias del plan de estudios.

La secuencia didáctica estuvo conformada por inicio, desarrollo y cierre, usando varias sesiones, instrumentos y tareas como se especifica en la Tabla 2.

Tabla 2. Estructura general de la secuencia didáctica

		Sesiones	Tareas
Parte 1	Explicación teórica	Sesión 1. Conocimientos básicos.	
		Sesión 2. Serie de Fourier y sus sumas parciales.	
Parte 2	Implementación actividad en GeoGebra	Sesión 1. diagnóstico.	1-3. Conocimientos básicos.
		Sesión 2. Encontrar los coeficientes de la serie de Fourier y graficar.	4-6. desarrollar la serie de Fourier de una onda cuadrada y graficar con 5 términos.
	Construcción del dispositivo	Sesión 1. Explicación del diagrama eléctrico.	Tarea 7. Visualización y explicación del diagrama eléctrico y componentes principales.
		Sesión 2. Armado del dispositivo generador de onda cuadrada.	Tarea 8. Armado y prueba del circuito.
	Exploración del circuito	Sesión 1. Visualización con el osciloscopio.	Tarea 9 y 11 . El alumno observa la onda cuadrada en el osciloscopio y contesta las preguntas en la actividad de GeoGebra.
Sesión 2. Variación de la resistencia.		Tarea 12 a 15. El alumno varía la onda cuadrada en el osciloscopio al modificar la resistencia con el potenciómetro y contesta las preguntas en la actividad de GeoGebra.	
Exploración con applet	Sesión 1. Variación de los términos de n en un applet de GeoGebra.	Tarea 16. El alumno visualiza en un applet de GeoGebra como cambia la gráfica de la onda cuadrada al variar los parámetros de n.	
Parte 3	Discusión grupal	Sesión 1. Formalización de conocimientos.	Aclaración de dudas y preguntas acerca del tema.

Nota: En esta tabla se resume la secuencia didáctica que se aplicó.

Parte 1. Explicación teórica. Se dividió en 2 sesiones. La primera fue lo relacionado con los conocimientos previos que se requieren para la enseñanza de la Serie de Fourier, en lo referente a funciones periódicas, concepto de paridad, se muestran diferentes gráficas, se hacen varios ejemplos. También se explica que la mayoría de las funciones no son ni pares ni impares. Esta parte se explicó a través de la plataforma de Microsoft Teams.

Para complementar esta parte teórica se da a conocer una breve reseña histórica de las series de Fourier, destacando sus orígenes. También se explican algunas aplicaciones de las Series de Fourier, tales como vibraciones mecánicas, análisis de señales, barrido de imágenes, procesamiento de audio y predicción de eventos.

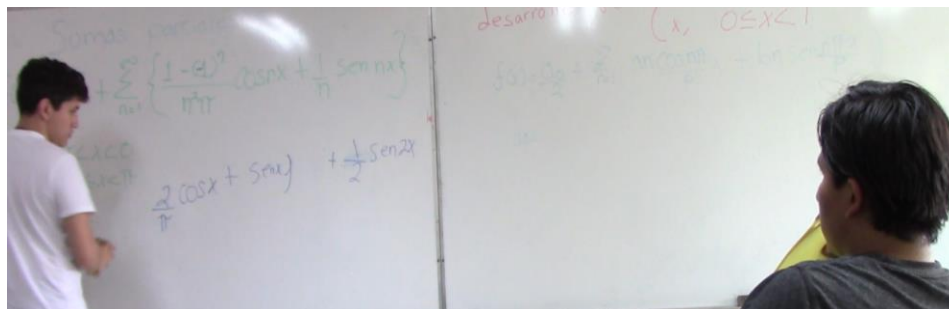
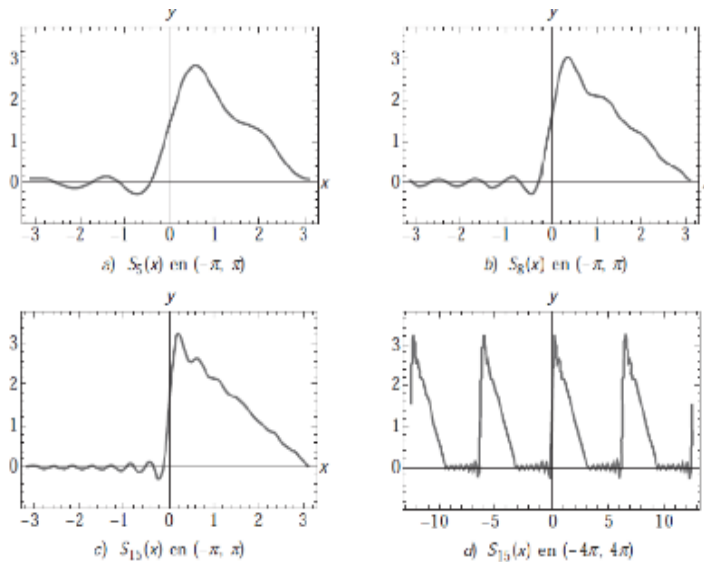
La segunda sesión de la explicación teórica empezó a través de Microsoft Teams, comenzando con la explicación formal de la Serie de Fourier y acabó en el aula de clases con el desarrollo de la Serie de Fourier, en el cual se explicó un ejemplo y entre todos los alumnos resolvieron las integrales para encontrar los coeficientes de la Serie de Fourier. Seguidamente se explicó que la secuencia de las sumas parciales $\{S_N(x)\}$ de una Serie de Fourier se aproxima a una función (Zill et al. 2018). Conocido esto, se da el siguiente ejemplo: expanda en una serie de Fourier.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Se explica a los alumnos y se pasa a tres estudiantes al pizarrón a desarrollar las sumas parciales. Ver Figura 4.

Figura 4

Sumas parciales de una serie de Fourier



Nota: Sumas parciales de una serie de Fourier (izquierda). Ejercicio resuelto por los alumnos de las sumas parciales de una serie de Fourier (derecha).

Parte 2. Implementación de una actividad con GeoGebra.

Así como la primera parte se compuso con elementos teóricos que, aunque sea un método tradicional son necesarios para la introducción del tema, se complementa con esta parte dos que se considera esencial en la propuesta metodológica, porque se diseñó y aplicó un diagnóstico que diera cuenta de los antecedentes de los estudiantes y también se permitió que ellos exploraran y visualizaran los coeficientes de Fourier y graficaran la serie correspondiente. La actividad comenzó con la Tarea 1 y se extiende hasta la Tarea 5. En esta fase, los alumnos aplican los conocimientos adquiridos en las clases anteriores, donde se abordó la teoría de las Series de Fourier ver Figura 5.

Figura 5

Actividad en GeoGebra, “Serie de Fourier, modelación de circuitos - Generador de onda cuadrada con timer”

The screenshot shows the GeoGebra interface for an activity. At the top, the URL is geogebra.org/material/show/id/pden4ba4. The page title is "Serie de Fourier, modelación de circuitos - Generador de onda cuadrada con timer". Below the title, there is a graph of a square wave function $f(t)$ and a button labeled "Ver Actividad". At the bottom of the page, there are buttons for "+ Agregar al Libro", "Descargar", "Configuración de acceso", and "Compartir". The page also includes metadata such as "Francisco Hazael Camarillo Mendoza" and "17 de enero de 2024".

Nota: Elaborado por Camarillo (2024)

Uno de los principales objetivos de esta actividad fue que los estudiantes identificaran que la onda cuadrada es una función impar. Por lo tanto, la definición de la serie de Fourier para una función impar en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y se presenta de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Sen} \frac{n\pi}{p} x$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \text{Sen} \frac{n\pi}{p} x dx.$$

$a_0 = 0$, ya que la función es impar y no tiene término constante en su expansión (Kreyszig, 2011).

Las tareas 1, 2 y 3 estuvieron relacionadas con la revisión de conocimientos previos sobre series de Fourier y el concepto de paridad. Mientras que las tareas 4 y 5 consistieron en

determinar de los coeficientes de la serie de Fourier de una onda cuadrada y elaboración de la gráfica correspondiente utilizando los primeros 5 términos.

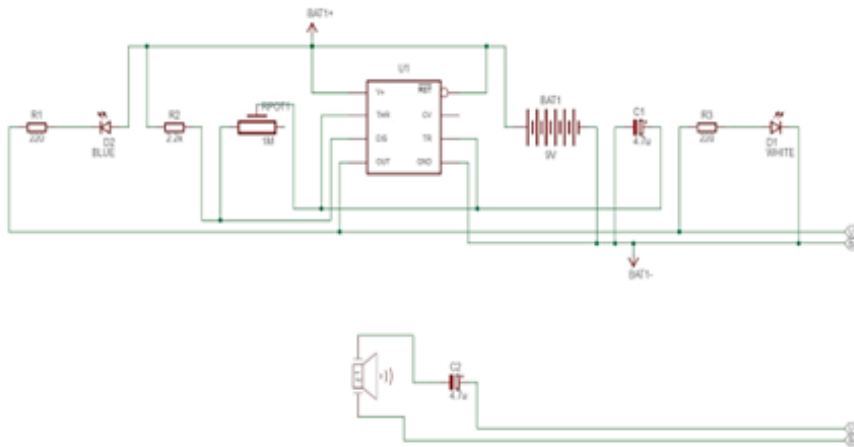
Construcción del dispositivo, generador de onda cuadrada

Esta parte estuvo conformada por dos sesiones, la primera fue la visualización y explicación del circuito eléctrico junto con los componentes de este, y la segunda fue la explicación y construcción del dispositivo eléctrico generador de onda cuadrada. En esta parte se proporcionó a los alumnos los materiales y un diagrama del circuito eléctrico a ensamblar.

Se explicó detalladamente el proceso de ensamblaje del circuito, comenzando con la instalación del temporizador y la conexión de sus pines, así como la disposición de los demás componentes. El circuito incluye dos diodos emisores de luz (LED) y una bocina como actuadores (ver Figura 6). Los LEDs parpadeaban y, cuando el LED de la derecha emitía un parpadeo, la bocina producía un sonido.

Figura 6

Diagrama eléctrico y dispositivo que genera la onda cuadrada.



Exploración del dispositivo, generador de onda cuadrada

Sesión 1. Visualización de la onda cuadrada en el osciloscopio

Una vez que los alumnos conectaron la pila de 9V al circuito, observaron que los LEDs comenzaban a oscilar, encendiéndose y apagándose alternativamente, mientras que la bocina emitía un sonido cuyo tono variaba según la velocidad del cambio. Se les pidió a los alumnos que conectaran el osciloscopio para observar el comportamiento de la señal.

El osciloscopio es un dispositivo que permite comprobar y visualizar las señales de tensión en forma de ondas, representando gráficamente la variación de la tensión en función del tiempo. En esta sesión, los estudiantes observaron la onda cuadrada en el osciloscopio y ajustaron la forma de la onda modificando el potenciómetro.

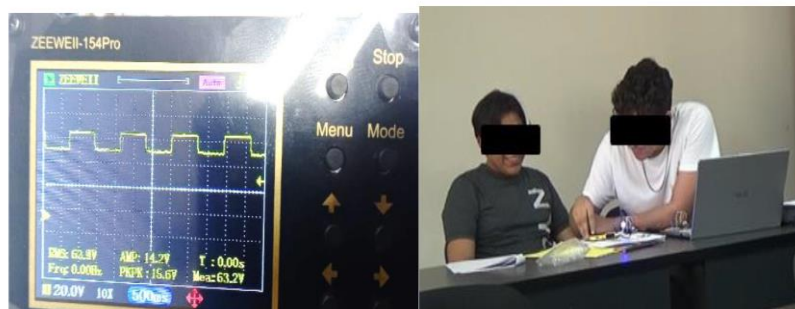
Sesión 2. Variación de la resistencia en el potenciómetro

Primero, se explicó a los alumnos que un potenciómetro es una resistencia variable cuyo valor cambia al girar su eje. A continuación, se planteó la siguiente pregunta: “¿En qué lugares ha visto que se aplique el principio de un potenciómetro?” Uno de los alumnos mencionó que se usa en radios antiguos para ajustar el volumen. Esto llevó a una nueva pregunta: “¿Solo para variar el volumen?” Ante la falta de respuesta, se les indicó que el potenciómetro (que en los radios es un componente físico) también se utiliza para sintonizar estaciones de radio y cambiar entre ellas. Se explicó que una de las muchas aplicaciones de la serie de Fourier es descomponer ondas en sumas de armónicos, lo que permite filtrar las frecuencias de interés para eliminar ruidos o aprovechar el espectro radioeléctrico en telecomunicaciones.

Esta práctica, se llevó a cabo manualmente utilizando un potenciómetro. Se plantearon preguntas sobre los valores de resistencia y su impacto en la gráfica. Los alumnos interactuaron con el potenciómetro para ajustar los valores de resistencia y emplearon un multímetro para verificar las mediciones. Este ejercicio les permitió analizar la variación de los términos en la serie de Fourier: una resistencia menor resultaba en un menor número de términos en la serie, mientras que una resistencia mayor aumentaba el número de términos. Así, los estudiantes pudieron observar cómo el número de términos seleccionados para graficar influye en la representación de la serie de Fourier (ver Figura 7).

Figura 7

Visualización de la onda cuadrada en osciloscopio



Nota: Onda con una variación de resistencia de 300 K Ω , (izquierda). Alumnos interactuando con el circuito. (derecha).

Se explicó a los alumnos que, aunque esta práctica se centró en una aplicación específica en acústica, las series de Fourier tienen numerosas aplicaciones en campos como la electricidad, óptica, procesamiento de señales, análisis de vibraciones, mecánica cuántica, econometría y cálculo de estructuras.

Exploración con Applet de GeoGebra

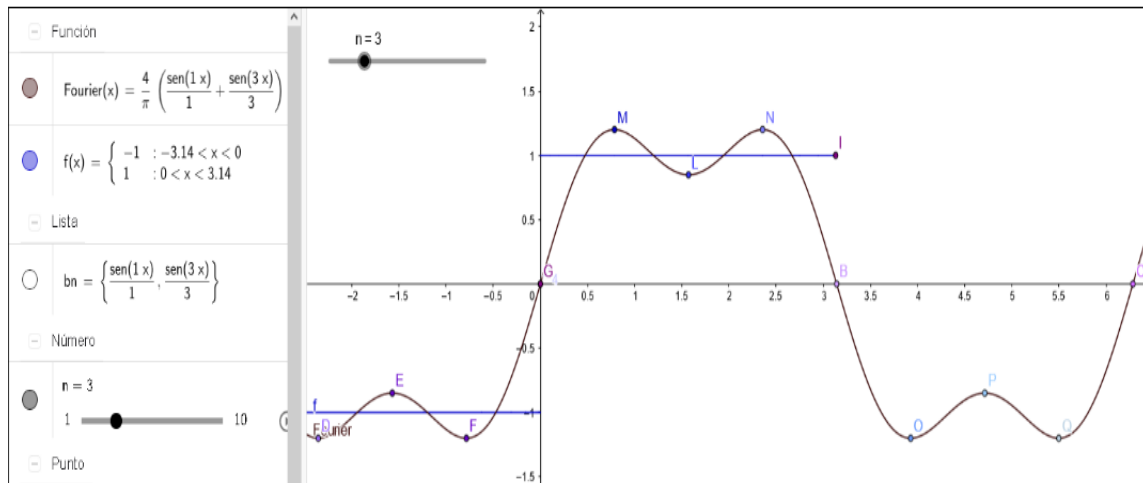
En esta sesión, se realizó un análisis utilizando un applet de GeoGebra que muestra la gráfica de una onda cuadrada con diferentes números de términos de la serie, desde 1 hasta 10. Los estudiantes interactuaron con el applet (ver Figura 8), que fue diseñado específicamente para explorar cómo la variación en el número de términos afecta la gráfica de la onda cuadrada.

Tarea 16: Analizar un applet de GeoGebra que muestra la gráfica de una onda cuadrada utilizando de 1 a 250 términos.

Figura 8

Applet de GeoGebra que muestra la forma de onda cuadrada

Analiza en el siguiente applet la forma de la onda cuadrada de 1 a 10 términos.



Nota: Gráfica de la función tomada del applet de GeoGebra construido para la actividad didáctica. Fuente: Elaboración propia.

Parte 3. Discusión Grupal

Al final de la actividad, se realizó una discusión grupal en la que se hicieron preguntas a los alumnos sobre el circuito. Los estudiantes expresaron que les resultó interesante visualizar los LEDs y escuchar el sonido de la bocina. Se discutió lo observado en el osciloscopio. Dos alumnos comentaron que el osciloscopio mostraba una onda casi rectangular con espacios, ya que tenían el potenciómetro ajustado a una resistencia alta. Se les explicó la razón de la apariencia de la onda cuadrada en esas condiciones.

Otro equipo ajustó la resistencia del potenciómetro hasta 0 Ohm, lo que provocó que los LEDs oscilaran a una velocidad tan alta que apenas se notaban los cambios, y que la bocina emitiera un sonido continuo y estridente. Un alumno comentó que el sonido resultaba molesto. Se les pidió que observaran el osciloscopio y describieran lo que veían, respondiendo que parecía una línea recta. Se les explicó que esto es comparable a las sumas

parciales de la serie de Fourier: a menor resistencia, hay menos términos en la serie, y a mayor resistencia, se incluyen más términos.

Resultados y discusión

El diseño de la actividad con GeoGebra (Camarillo, 2024), permitió recabar el trabajo realizado por los alumnos y analizar cada archivo para reportar los resultados obtenidos, tanto del diagnóstico como la parte exploratoria, asociada con el circuito. El objetivo principal de la actividad con GeoGebra fue evaluar la comprensión de los estudiantes sobre la representación matemática de la onda cuadrada mediante su descomposición en una serie infinita de senos y cosenos, así como su habilidad para relacionar estos conceptos con una aplicación práctica en la generación de señales periódicas.

A través de diversos ejercicios, los alumnos fueron expuestos tanto al análisis teórico de la serie de Fourier de una onda cuadrada como a la visualización de esta en un contexto real, utilizando un circuito generador y un osciloscopio. Los resultados obtenidos reflejan el nivel de comprensión de los estudiantes sobre la relación entre las sumas parciales de la serie y la aproximación de la onda cuadrada, así como su capacidad para conectar la teoría con el comportamiento físico observado en el osciloscopio.

Para garantizar una evaluación objetiva y consistente de las respuestas de los estudiantes, se diseñó una rúbrica detallada (ver tabla 3), que cubriera los aspectos clave requeridos en cada pregunta. Esta rúbrica se estructuró en cinco niveles de desempeño, donde el valor más alto (nivel 1) correspondía a aquellos alumnos que lograron abordar de manera completa todos los elementos esenciales de la actividad propuesta, demostrando una comprensión profunda de los conceptos involucrados. En contraste, el valor más bajo (nivel 0) se asignaba a aquellos estudiantes que no pudieron comprender ni abordar los elementos fundamentales de la tarea, indicando una falta de entendimiento en la temática tratada.

Tabla 3. Rúbrica de evaluación de la actividad con GeoGebra.

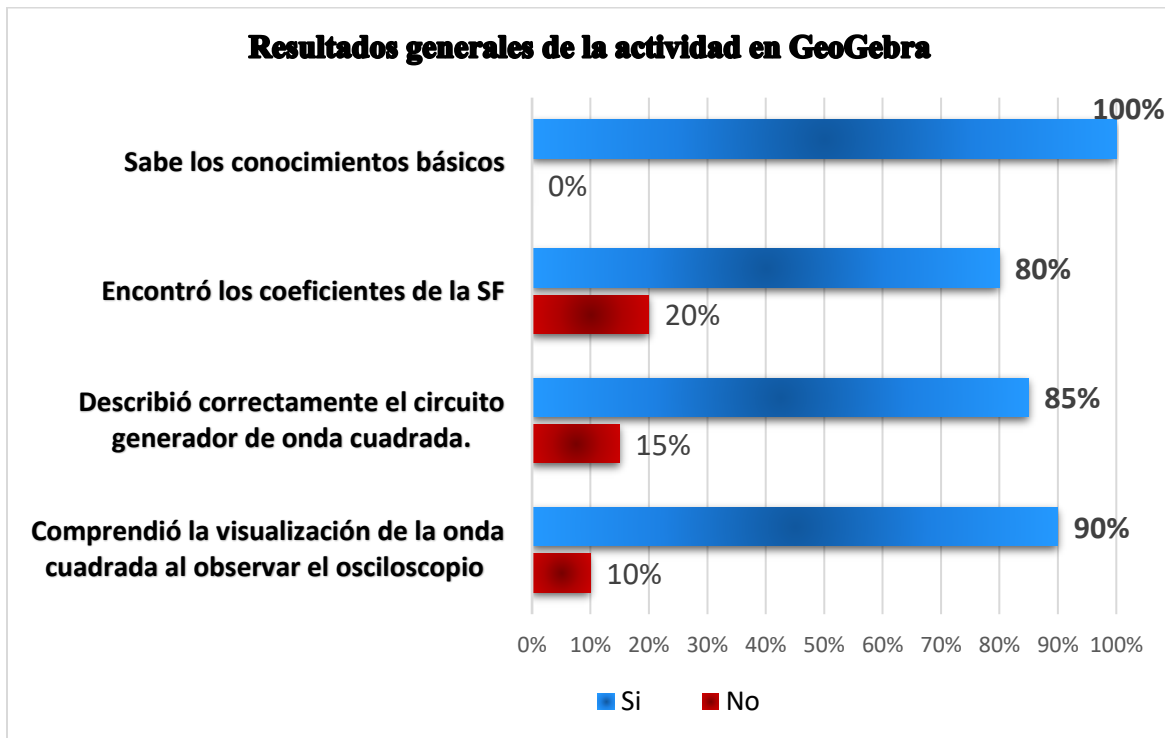
Valor	Criterios
1	Se demuestra una comprensión total de la actividad, abarcando todos los elementos requeridos.
0.75	Se demuestra una buena comprensión de la actividad, incluyendo un alto porcentaje de los elementos necesarios para la actividad.
0.5	Se demuestra una comprensión parcial de la actividad, abarcando algunos de los elementos requeridos en la actividad.
0.25	Se demuestra una escasa comprensión de la actividad, sin incluir los elementos necesarios para la actividad.
0	No se logró comprender la actividad propuesta.

Las 16 preguntas de la actividad fueron cuidadosamente agrupadas en 4 apartados temáticos, cada uno de los cuales abordaba una faceta específica del análisis de las series de Fourier y la onda cuadrada. Esta categorización permitió no solo evaluar el desempeño de los estudiantes en áreas específicas del conocimiento, sino también identificar con mayor

claridad los puntos fuertes y las áreas de oportunidad en su comprensión. De esta manera, la rúbrica no solo facilitó una evaluación más estructurada, sino que también proporcionó información valiosa sobre el progreso y las dificultades de los estudiantes en su aprendizaje de conceptos clave relacionados con el análisis de señales y la teoría de Fourier. Los resultados se resumen en la figura 9.

Figura 9

Resultados generales de la actividad con GeoGebra



Respecto a lo relacionado a la modelación y visualización matemáticas, la cual se realizó mediante el armado de un circuito y el apoyo de un osciloscopio, los alumnos visualizaron la serie de Fourier de una onda cuadrada y pudieron variar la onda con el osciloscopio, viendo en esta parte las sumas parciales de la serie de Fourier, concepto que los ayudó a elaborar la gráfica de la función. Se agregó un applet de GeoGebra el cual podían variar el valor de “ n ” de la sumatoria de la serie de Fourier para poder visualizar la gráfica y compararla con los resultados obtenidos con el osciloscopio.

Fue posible vincular los elementos de la serie de Fourier con una aplicación en un fenómeno real como es el caso del análisis de señales. Además, se logró que la clase se volviera más dinámica y que los alumnos pudieron visualizar de manera física cómo varía la onda cuadrada al cambiar la resistencia del circuito, así como la variación de la onda al modificar el valor de “ n ” en el applet de GeoGebra. Aunque el estudio se realizó únicamente en el área de ingeniería física, el desafío será aplicarlo en diferentes ingenierías.

De acuerdo con Avitabile et al. (2006), Muro et al. (2007), Parra (2013), Guerrero et al. (2010) y Romero y Farfán (2016), se ha identificado una problemática común al enseñar la serie de Fourier: la falta de vinculación con contextos aplicados. En esta investigación, se

abordó el concepto de las sumas parciales de la serie de Fourier y se vinculó con el barrido de señales mediante un circuito generador de onda cuadrada. Los alumnos mostraron interés al poder visualizar cómo cambia la gráfica de la serie de Fourier en un dispositivo electrónico, en lugar de solo representarla en papel o limitarse a escribir la teoría del tema.

Uno de los principales aspectos de esta investigación al compararla con otras investigaciones relacionadas a las series de Fourier y que utilizan la modelación matemática, es que, el alumno fue el principal protagonista, tanto en el armado del circuito como al variar la resistencia y ver el cambio de la onda cuadrada. El alumno fue libre de analizar la gráfica y se complementó con el software GeoGebra con la exploración del applet.

Algunas limitaciones del estudio fueron, la falta de conocimientos en electrónica, ya que, aunque están estudiando una ingeniería física, algunos alumnos mostraron deficiencias relacionadas con la electrónica básica y esto nos llevó a tomar más tiempo de lo programado. Otra limitación fue los pocos alumnos que tomaron la clase se sabe que un tamaño de muestra pequeño no implica necesariamente baja calidad o resultados menos confiables, pero si se muestran los siguientes errores: menor validez: las muestras muy pequeñas pueden socavar la validez interna y externa de un estudio, mayor imprecisión y probabilidad de falsos negativos, esto nos da una menor probabilidad de decir que sí hay diferencias significativas.

Al finalizar la implementación de la secuencia didáctica con el apoyo de la tecnología y tras revisar los datos obtenidos, se constató que se alcanzó el 85% de los objetivos establecidos. Los principales logros incluyeron la contextualización de la serie de Fourier en el aula mediante la modelación matemática y el análisis de las sumas parciales de Fourier utilizando un dispositivo electrónico y un applet de GeoGebra.

El propósito de esta secuencia fue mejorar la comprensión de los alumnos sobre las sumas parciales de la serie de Fourier y explorar una de sus aplicaciones, en este caso, el barrido de señales. Para próximas actividades se espera que se realicen otras representaciones de la serie de Fourier, como la onda triangular o la onda diente de sierra.

Reflexiones finales

La propuesta presentada resultó innovadora en varios sentidos, por un lado, se mantiene la explicación de los conceptos básicos y estos se complementan porque se integran simulaciones interactivas que muestran cómo las Series de Fourier descomponen señales periódicas en sus componentes armónicos. Así mismo se utiliza el software GeoGebra para mostrar gráficamente la variación de las sumas parciales al modificar los parámetros usando series de Fourier. Se implementa un circuito eléctrico que permite a los estudiantes manipular parámetros y ver cómo cambian las series de Fourier en tiempo real.

También mediante esta metodología se puede relacionar el aprendizaje de Series de Fourier con otras áreas como la física (ondas y vibraciones), la ingeniería (procesamiento de señales, vibraciones), o la informática (compresión de datos). Además, se promueve el aprendizaje colaborativo permitiendo que los estudiantes colaboren y compartan sus descubrimientos.

Consideramos que esta propuesta metodológica, con su estructura didáctica que integra teoría, práctica y tecnología, facilita un aprendizaje de las series de Fourier más accesible y atractivo para los estudiantes, en contraste con las tradicionales sesiones teóricas centradas exclusivamente en la resolución de ejercicios. Al combinar estos elementos, se promueve

una comprensión más profunda y una mayor motivación, permitiendo a los estudiantes experimentar de manera más interactiva y significativa los conceptos involucrados.

En este mismo sentido, la incorporación de tecnología en la enseñanza de las series de Fourier permite comparar las funciones cuando se tienen pocos y muchos términos, lo cual facilita la comprensión de los conceptos. Asimismo, se puede comparar visualmente la aproximación de una función periódica mediante una serie de Fourier con la función original, lo que ayuda a entender la idea de convergencia y la calidad de la aproximación, realizando cálculos de manera eficiente y con alta precisión.

Referencias bibliográficas

- Avitabile, P., Hodgkins, J., y Van Zandt, T. (2006, June). Innovative teaching of Fourier Series using LabView. In *2006 Annual Conference & Exposition* (pp. 11-771).
- Barba, R., Gascón, J., Serrano, L., & Badillo, E. (2017). Tecnología, matemáticas y aprendizaje significativo. *REXE: Revista De Estudios y Experiencias En Educación*, 16, 61-77. doi: 10.21703/rexe.16.16
- Camarillo, F. (2024) Serie de Fourier-Generador de onda cuadrada con timer. Actividad en GeoGebra.org. en: <https://www.geogebra.org/m/pden4ba4>
- Díaz-Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. UNAM, México. 10 (04), 1-15.
- Drijvers, P., & Trouche, L. (Eds.). (2014). *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Vol. 2, Cases and Perspectives*. Springer.
- Gómez, J. (s/f). *Series de Fourier*. En editorial. Universidad Tecnológica de Coahuila. México.
- González, C. & de Enxeñeiros Industriáis, E. T. S. (2003). *Fundamentos del análisis de Fourier*. GAMESAL.
- Guerrero, C., Camacho, M., y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 341-352.
- Hall, J. (2022). *Fourier wave saw tooth*. *Geogebra.org*. <https://www.geogebra.org/m/hGXKvCKc>
- Hsu, H. P. (1973). *Análisis de Fourier*. Fondo Educativo Interamericano. México.
- Kreyszig, E. (2001). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. <https://biblioteca.uazuay.edu.ec/buscar/item/62730>
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in mathematics education: Some critical reflections. *Computers & Education*, 36(3), 213-223. Doi: 10.1016/S0360-1315(00)00055-1
- Mederos, O. y González, B. (2005). *La modelación en la educación matemática*. Universidad Autónoma de Coahuila. México.
- Muro, A., Guerrero, L., & Parra, J. (2007). Tecnologías en la enseñanza de las series de Fourier: Herramientas para la visualización de señales. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 10(1), 33-47.

- Parra, H. (2013). Claves para la contextualización de la matemática en la acción docente. *Omnia*, 19(3), 74-85.
- Rao, S., García, D., Figueroa, R., y Muñoz, G. (2012). *Vibraciones mecánicas*. Pearson Educación.
- Reyes, D., y Arellano, H. (2014). *Prototipo didáctico de mesa vibratoria para el análisis y caracterización de señales de aceleración*. ITESM. México.
- Romero, E., & Farfán, L. (2016). *El papel de las herramientas tecnológicas en la enseñanza de las series de Fourier*. *Journal of Mathematical Pedagogy*, 48(2), 101-112.
- Rodríguez, D., Torres, M., Borjón, E. (2023). Indicadores del TPACK presentes en la enseñanza de las ecuaciones lineales con tecnología dinámica. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, XI (2), 17-30.
- Ruthven, K. (2009). Technology and the Transformation of Mathematics Education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Education* (pp. 23-56). Springer.
- Yáñez, D. (2015). *Series de Fourier y criterios de convergencia*. (Tesis de Licenciatura no publicada). Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo. México.
- Zill, D. G., Edwards Jr, C. H., & Penney, D. E. (2018). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Ed. Thomson Learning.