REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2019

ISSN: 2395-955X

EL APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 × 2 MEDIANTE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON GEOGEBRA

LEARNING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS 2-2 BY SOLVING PROBLEMS WITH GEOGEBRA

[1]Verónica Vargas Alejo, [2]José Zambrano Ayala, [2]Oscar Mendoza Rivas

Universidad de Guadalajara[1], Instituto Tecnológico de Milpa Alta[2]

veronica.vargas@academicos.udg.mx, jose.zam@itmilpaalta.edu.mx, oscarmendoza@itmilpaalta.edu.mx

Para citar este artículo:

Vargas, V., Zambrano, J., Mendoza, O. (2019). El aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales 2 × 2 mediante resolución de problemas con GeoGebra. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 2, pp. 1-20. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 2, julio-diciembre de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

EL APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2×2 MEDIANTE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON GEOGEBRA

LEARNING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS 2-2 BY SOLVING PROBLEMS WITH GEOGEBRA

[1]Verónica Vargas Alejo, [2]José Zambrano Ayala, [2]Oscar Mendoza Rivas

Universidad de Guadalajara[1], Instituto Tecnológico de Milpa Alta[2]

veronica.vargas@academicos.udg.mx, jose.zam@itmilpaalta.edu.mx, oscarmendoza@itmilpaalta.edu.mx

Resumen

Presentamos resultados de una investigación relacionada con el aprendizaje de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales (SEL) 2×2 consistentes e inconsistentes, a través de *conversiones* entre los registros: verbal, algebraico-simbólico y gráfico y *tratamiento* en ellos con el apoyo de software (*e. g.*, GeoGebra). Los datos fueron analizados por tres conceptos los cuales obtuvimos de confluir las teorías *Cambio de atención* y *Representaciones semióticas*. En el estudio participaron 25 estudiantes de nivel superior de entre 19 y 23 años. La metodología fue de tipo cualitativo. Se describen las respuestas de dos equipos al resolver tres problemas. Los resultados indican que los equipos lograron resolver los problemas asociados a SEL 2×2 consistentes con solución única, mediante la conversión entre el registro verbal y el registro gráfico, pero tuvieron dificultades al resolver los problemas asociados a SEL 2×2 inconsistentes y consistentes con infinidad de soluciones.

Palabras clave: Sistema de ecuaciones lineales 2×2, Problemas de enunciado verbal, GeoGebra.

Abstract

We present the results of an investigation related to the learning of solving consistent and inconsistent linear equations systems (SEL) 2×2, through the conversions among the verbal, algebraic-symbolic, and graphic registers, and the treatment with the support of software (*e. g.*, GeoGebra). The data were analyzed by three concepts obtained from the convergence of the theories Shifts of Attention and Register of Semiotic Representations. The study involved 25 high school students between 19 and 23 years old. The methodology was qualitative. The responses of the teams are described. The results indicate that the teams found the solution of the problems associated with consistent SEL 2×2 with a single solution, by converting between the verbal and the graphic register, but they had difficult to solve problems associated with inconsistent and consistent (with infinity of solutions) SEL 2×2.

Keywords: System of linear equations 2×2, Problems of verbal enunciation, GeoGebra.

Introducción

Investigaciones de tipo diagnóstico llevadas a cabo por Dorier, Rorbert, Robinet y Rogalsky entre 1987 y 1994, muestran dificultades de aprendizaje por los estudiantes en conceptos relacionados con espacios vectoriales. Entre las causas destaca la dificultad para vincular las definiciones y conceptos con conocimientos previos (Dorier, Rorbert, Robinet y Rogalsky, 2011). Dorier, *et. al.* (2000, 1999) junto con Sierpinska (2000) reportaron dificultades de aprendizaje en conceptos de Álgebra lineal.

Dorier, *et. al.* (1999) hicieron una contribución importante en la enseñanza de conceptos de Álgebra lineal, ellos llamaron a estas dificultades *obstáculo del formalismo*. Para Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) el obstáculo del formalismo se produce en los estudiantes debido a la forma abstracta en la que el maestro o el libro de texto, presenta la matemática por medio de simbolismo matemático.

De acuerdo con Uicab y Oktaç (2006) el obstáculo del formalismo se presenta cuando los estudiantes no entienden los conceptos, independientemente de la manipulación algebraica: ellos ignoran el significado y las reglas de las matemáticas. Asimismo, Haddad (1999) atribuye que éste se presenta cuando el estudiante lleva a cabo manipulación simbólica, aunque carezca de significado. Por otra parte, Dorier *et. al.* (1999) atribuyen el obstáculo del formalismo a: la gran cantidad de definiciones nuevas y abrumadoras y la dificultad para vincularlas con conocimientos previos, falta de entendimiento de la presentación hipotética-deductiva del conocimiento, falta de dominio de lenguaje matemático y manejo de teorías abstractas y formales.

Entonces ¿cómo evitar el obstáculo del formalismo? De acuerdo con Dorier *et. al.* (1999) si dichas dificultades son propias del álgebra lineal, tienen que ser superadas en este contexto, de modo que muchos investigadores han visto en el uso de la tecnología la posibilidad de sobrepasar dicho obstáculo.

Con la aparición de los Sistemas de Computación Algebraicos (CAS por sus siglas en inglés; *e. g.*, Mathematica, Maple, Matlab, Derive) a principios de la década de los 70, y de los Software de Geometría Dinámica (DGS por sus siglas en inglés; *e. g.*, Cabri, Sketchpad, GeoGebra) al final del siglo pasado y principios del actual, algunos investigadores como Harel (1997), Dreyfus, Hillel y Sierpinska (1999), Sierpinska (2000), Hillel (2001), Uicab y Oktaç (2006), Pruncut (2008), Gol y Sinclair (2010), Soto y Romero (2011), Gol (2012), Ayşegül (2013), Aydin (2014) y Guzmán y Zambrano (2016) han implementado el uso de tecnología para sobrepasar el obstáculo del formalismo. Por ejemplo, Harel (1997) reporta que los resultados obtenidos con el uso de CAS son satisfactorios y Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) observaron que con el uso de Cabri los estudiantes aprendieron conceptos matemáticos de álgebra lineal.

En este artículo mostramos resultados derivados de una investigación relacionada con la pregunta cómo sobrepasar el obstáculo del aprendizaje del concepto de solución de SEL 2×2 mediante problemas de enunciado verbal que implican la construcción y solución de SEL con el uso de GeoGebra. En seguida describimos la investigación mencionada y las preguntas de investigación que se responden en este artículo.

El problema de investigación

De acuerdo con Bednarz y Janvier (1994), Haspekian (2005), Kieran (2014, 2007), Vargas y Guzmán (2012) y Vargas y Cristóbal (2012), resolver problemas enunciados en forma verbal es un reto que enfrentan los estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad cuando se trata de utilizar sistemas de ecuaciones lineales. Con base en este hecho, en la presente investigación interesó dar respuesta al problema: ¿Cómo contribuye el uso de GeoGebra en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales, vía la resolución de problemas enunciados en forma verbal, por estudiantes de ingeniería?

Para responder el problema precedente de investigación, se diseñaron actividades derivadas de problemas enunciados de forma verbal que implicaron la construcción y resolución de SEL 2×2 con apoyo de GeoGebra, con ellas se pretendió conocer las dificultades de aprendizaje de los estudiantes de nivel superior de los primeros años de ingeniería, así como el proceso de comprensión del concepto "solución de un sistema de ecuaciones lineales" y de conceptos matemáticos relacionados (*e. g.*, ecuación, función, sistemas de ecuaciones lineales, solución).

Interesó utilizar ambientes de aprendizaje colaborativos que promovieran la discusión de ideas, construcción de conjeturas, uso de ejemplos y contraejemplos, argumentación y evaluación de resultados.

Objetivo general de la investigación

Analizar y describir la modificación, extensión y refinamiento del conocimiento de estudiantes de los primeros semestres de nivel superior sobre SEL, simultánea al desarrollo de habilidades, para resolver problemas enunciados en forma verbal, mediante el uso de GeoGebra.

Objetivos específicos de la investigación

a) Identificar las ideas matemáticas previas de los estudiantes en torno a los conceptos asociados con SEL y la habilidad para utilizarlos en la resolución de problemas de enunciado verbal.

b) Analizar y describir los procesos de cambio en los conocimientos asociados a sistemas de ecuaciones lineales, en los estudiantes, al utilizarlos en la realización de actividades derivadas de problemas de enunciado verbal, diseñadas con apoyo de GeoGebra.

c) Analizar y describir cómo influyen las representaciones en el desarrollo de habilidades de los estudiantes al realizar actividades derivadas de problemas de enunciado verbal, diseñadas con apoyo de GeoGebra.

En este artículo interesa mostrar resultados en cuanto a los logros obtenidos relacionados con los objetivos b) y c). Se responden las siguientes preguntas de investigación.

1. ¿Cómo influye en estudiantes de ingeniería el uso de representaciones y GeoGebra en la resolución de problemas de enunciado verbal?
2. ¿Cómo se modifica el conocimiento de SEL 2×2 de los estudiantes de ingeniería con el uso de la secuencia de tareas correspondientes a la Actividad 3 aquí descrita que se apoya en representaciones y GeoGebra para la resolución de problemas de enunciado verbal? Específicamente, en cuanto a Asociación de objetos, Posición cognitiva, y Toma de sentido a lo que quieren conocer.

Marco conceptual

Esta investigación se apoya en dos teorías de tipo cognitivo: *Cambio de atención* de Mason (2008) y *Teoría de Representaciones* de Duval (1999, 2003, 2006), las cuales describimos continuación:

Cambio de atención

Esta teoría está compuesta por tres conceptos: atención, conciencia y estar consciente de…, actitud. Se describen a continuación.

Atención. De acuerdo con Mason (2008, p. 4) este concepto es el medio por el cual se lleva a cabo la observación [de objetos matemáticos del profesor o de los estudiantes]. Para este investigador cuando un estudiante atiende –en el sentido de su análisis y reflexión– se posibilita la percepción de las propiedades del objeto u concepto atendido, con ello se favorece el razonamiento matemático. Mason (2008) clasifica este concepto en *Estructura macro* y *Estructura micro*; la primera intenta responder *qué atiende* el estudiante, mientras que la segunda *cómo lo atiende*. Con la Estructura micro se verifica *cómo* el estudiante: *visualiza*, *discierne detalles*, *reconoce relaciones*, *percibe y razona propiedades* de los objetos de estudio. Este autor afirma que sin la atención es imposible dar sentido a lo que el estudiante aprende (p. 4).

Conciencia o *Estar consciente de…* Mason (2008) usa la palabra *conciencia* para referirse al *grado de conciencia* que todo ser humano muestra ante una situación que lo lleve a tomar decisiones. Este investigador clasifica el concepto en *conciencia explícita* y *conciencia implícita* (Mason, 2008, p. 3). La primera se refiere a la conciencia mediante la cual es posible *articular* objetos u conceptos matemáticos; mientras que en la segunda es una *conciencia no articulable*. Por ejemplo, un estudiante evidencia tener *consciencia implícita* si ellos logran deducir que un SEL 2×2 es inconsistente sin *estar consciente de …* que las rectas de las ecuaciones que lo conforman son paralelas y separadas, pues ellos no articulan (relacionan) el registro algebraico con el gráfico. Sin embargo, la conciencia implícita de los estudiantes puede dejar de serlo y pasar a una conciencia explícita, siempre que les permita “ver” (en el sentido de Duval) y manejar de forma *consciente* los objetos matemáticos (p. 9). Mason (2008) afirma que si los estudiantes logran cambiar de conciencia implícita a explicita, entonces ocurre en ellos lo que Vygotsky llamó Zona de Desarrollo Próximo (p. 8).

Actitud. Mason usa el término actitud en sentido afectivo emocional del ser humano, y como la disposición por parte de los estudiantes para lograr su aprendizaje. De acuerdo con este autor, actitud no sólo debe conceptualizarse como la fuerza interior que los estudiantes requieren para aprender, sino también como la forma en que se procesa esa actitud a través de esa fuerza (p. 13). También afirma que las personas modifican su actitud de acuerdo con su entorno (momento y espacio). En particular, el estudiante manifiesta un cambio de actitud por medio de: gestos, posturas, tono de voz, vocabulario, manera de relacionarse con los demás, forma de atender la tarea encomendada.

Teoría de Representaciones

Esta teoría se sustenta en dos conceptos: semiosis y noesis.

Semiosis. Duval (1999) define este concepto como: aprehensión o producción de representaciones semióticas: lenguaje natural, fórmulas algebraicas, figuras geométricas, tablas, entre otros.

Noesis. Es el aprendizaje de un objeto mediante actos cognitivos.

La Semiosis es aquella que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis: "No hay noesis sin semiosis; por el contrario, si hubiera noesis sin semiosis sería como si fuera separado el contenido del objeto de su forma" (Duval, 1999, p. 28). Este autor (2003) afirma que cuando la aprensión de un objeto [*e. g.*, matemático] es inmediata, permite a los individuos [estudiantes] distinguir e identificar los diferentes registros de representación del objeto. Así "ver" [en matemáticas] es reconocer los objetos a simple vista. Por otro lado "visualizar" es una forma de aprehender los objetos de estudio, es producir una representación semiótica que da lugar a la aprehensión inmediata de los objetos representados.

Puntos en que confluyen las teorías (Cambio de atención, Mason, 2008; Representaciones, Duval, 1999, 2003, 2006)

Estas teorías coinciden en tres conceptos que se describen a continuación:

Asociación de objetos (A). Ambas teorías son de tipo cognitivo inmersas en el aprendizaje de objetos (conceptos) matemáticos, los cuales pueden mostrarse a través de varias representaciones semióticas, cuyo aprendizaje no se garantiza sin la debida *atención* de los estudiantes. De acuerdo con Mason (2008) y Duval (1999), el cambio de representación de algún objeto matemático, por ejemplo, de forma algebraica a geométrica o viceversa, puede promover el aprendizaje del objeto en estudio.

Posición cognitiva (P). En la Teoría de Cambio de Atención (Mason, 2008) se explica cómo los estudiantes pueden pasar de conciencia implícita a explícita. Este proceso ocurre cuando ellos pueden "ver" y manejar de manera consciente los objetos de estudio. Asimismo, Duval (2003) afirma que el aprendizaje sucede cuando ocurre la aprehensión del objeto matemático, ello porque permite a los estudiantes distinguir e identificar los diferentes registros de representación semiótica del objeto.

El estudiante le da sentido a lo que quiere conocer (S). Para Mason (2008) un estudiante evidencia aprendizaje óptimo de un objeto en estudio, cuando éste muestre *atención* en él, si mantiene la *actitud* de aprender y es capaz de *ser (estar) consciente de… qué y cómo* es este objeto, lo cual puede ser evidenciado si el estudiante es capaz de pasarlo de un registro a otro.

Los conceptos A, P y S donde confluyen la Teoría de Cambio de atención (2008) y la Teoría de Representaciones (1999, 2003, 2006) previamente comentados se utilizaron como criterios para el análisis de los datos.

Metodología

La investigación fue de tipo cualitativa porque interesaba analizar y describir la modificación, extensión y evolución del conocimiento de los estudiantes, simultánea al desarrollo de habilidades, para resolver problemas enunciados en forma verbal, mediante el uso de GeoGebra.

Participantes

Los estudiantes que participaron en la investigación tenían entre 19 y 23 años de edad, estos estaban cursando la materia de álgebra lineal en el tema Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales, en un instituto tecnológico ubicado al sur de la Ciudad de México.

Actividades

Para este trabajo de investigación fueron diseñadas tres actividades:

Actividad 1. Trabajo con papel-y-lápiz. Esta actividad fue diseñada de modo que las tareas fueran ejecutadas en papel-y-lápiz, cuyo contenido introdujo al estudiante en un ambiente de resolución de problemas con enunciado verbal, que incluyera ecuaciones de la forma $ax + by = c$; es decir, SEL 1×2.

Actividad 2. Uso de comandos básicos de GeoGebra. Las tareas para el estudiante en esta actividad, fueron diseñadas para familiarizar al usuario con los *applets* y con los problemas enunciados de forma verbal.

Actividad 3. SEL 2×2. En esta actividad fueron diseñadas tareas de enunciado verbal que invitaban al estudiante a construir SEL 2×2, las cuales fueron resueltas con el apoyo de GeoGebra.

Para dar respuesta a las preguntas de investigación, en este artículo reportamos resultados sólo de la Actividad 3, la cual está compuesta por:

Problema 1 (SEL 2×2 consistente solución única): Tarea 1a), Tarea 1b), Tarea 1c), ...,

Problema 2 (SEL 2×2 inconsistente): Tarea 2a), Tarea 2b), Tarea 2c), ...,

Problema 3 (SEL 2×2 consistente con infinidad de soluciones): Tarea 3a), Tarea 3b), Tarea 3c), ...

Es importante mencionar que en el Análisis y discusión de los datos, sólo reportamos las respuestas de aquellas tareas que son relevantes como evidencia para el propósito de este artículo.

Forma de trabajo en el aula

La implementación de las tres actividades se llevó a cabo en un salón de clases durante 12 horas-clase. Los estudiantes fueron agrupados por su profesor en equipos de dos y tres integrantes; cada equipo llevaba *laptop*, en la cual fue cargado el programa GeoGebra y los applets.

Applets

El diseño de los applets se llevó a cabo en términos de una situación problemática de mezclas denominada “La Granola”, tomada de Cristóbal y Vargas (2013). La granola es un producto alimenticio elaborado con semillas, frutos secos y miel (Tabla 1). Los valores nutrimentales de la granola pueden variar, dependiendo de los ingredientes que componen la mezcla. Los datos que se utilizaron en los applets corresponden a los de la Tabla 1.

Tabla 1

Características nutrimentales y costos de ingredientes que se utilizan para la elaboración de granola

			Cantidad de nutrimentos por cada 1000 gramos de producto									
			Calorías	proteína	grasa	Carbohidratos	calcio	hierro	zinc	vit. a	vit. b	vit. c
	Especificación	costo (pesos) por kg	Kcal	g	g	g	mg	mg	mg	UI	mg	mg
producto	Avena	60	3900	170	70	560	540	47.2	40	10	2	0
	Ajonjolí	100	5650	170	280	250	980	150	70	9	8	0
	Uva pasa	120	2960	25	6	78	280	26	30	12	2	54
	Almendras	85	5780	210	420	200	2480	43	34	50	1300	0
	Cacahuate	35	5940	173	454	253	700	37	38	50	3	4
	Ciruela pasa	76	1130	12.3	3	300	240	13	3	523	2	0
	Coco rayado	32	3540	33.3	335	150	140	25	20	8	6	33
	Fresa seca	135	690	5.8	6	180	210	3.5	0	900	4	370
	Manzana seca	86	670	2	5	170	40	3.5	5	560	4	2

Los problemas asociados a los applets que se plantearon a los estudiantes, consistieron en la obtención de mezclas con cantidades específicas de ingredientes, así como la determinación de la cantidad de cada ingrediente necesaria para obtener mezclas con ciertas características. La solución de estos problemas se puede relacionar con conceptos como: funciones lineales en una y varias variables, sistemas de ecuaciones lineales con una y varias incógnitas y métodos de solución.

En los applets se construyeron sistemas de ecuaciones lineales en su representación geométrica y algebraica que los estudiantes podían manipular mediante el uso de datos de la Tabla 1 para resolver problemas propuestos por el investigador.

Problema 1 (SEL 2×2 *consistente solución única)*

¿Qué cantidad de *kg de avena* y *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga un *costo de* \$53 y contenga 87 *g de grasa*?

El problema se relaciona con el SEL $\begin{cases} 60x + 100y = 53 \\ 70x + 280y = 87 \end{cases}$.

Nótese que x y y representan la cantidad de kilogramos de avena y de ajonjolí, respectivamente; los coeficientes de x y y del SEL se obtienen de los datos de la Tabla 1. En la primera ecuación, los coeficientes de x y y representan el *costo por kg* de la avena y el *costo por kg* del ajonjolí y son, respectivamente: 60 de la fila de *avena* (columna costo) y 100 de la fila de *ajonjolí* (columna costo); la ecuación representa la mezcla de estos productos cuyo *costo total (pesos)* es de \$53; mientras que los coeficientes de x y y de la segunda ecuación son: 70 de la fila de *avena* (columna grasa) y 280 de la fila correspondiente de *ajonjolí* (columna grasa). La segunda ecuación representa la mezcla de estos productos cuyo gramaje total en grasa es de 87.

La Figura 1 muestra la interfaz del applet; en ésta, el estudiante puede capturar, en las diferentes casillas de entrada, los productos en los ejes cartesianos (*avena* y *ajonjolí*), las especificaciones, *costo de* para la primera ecuación y *g de grasa de* para la segunda ecuación; el término independiente respectivamente, 53 y 87 de cada ecuación; así como los coeficientes que corresponden a x y y –de cada ecuación–, ello de acuerdo con el problema antes mencionado. Con los datos capturados en el applet, el usuario puede arrastrar el botón de cada deslizador con la intención de localizar puntos de intersección (si existen) entre las rectas cuyas gráficas fueron definidas como f y g. Asimismo, la ventana Cálculo Simbólico (CAS) de GeoGebra muestra el registro simbólico con el cual se resuelve el sistema por medio del Método de reducción de Gauss.

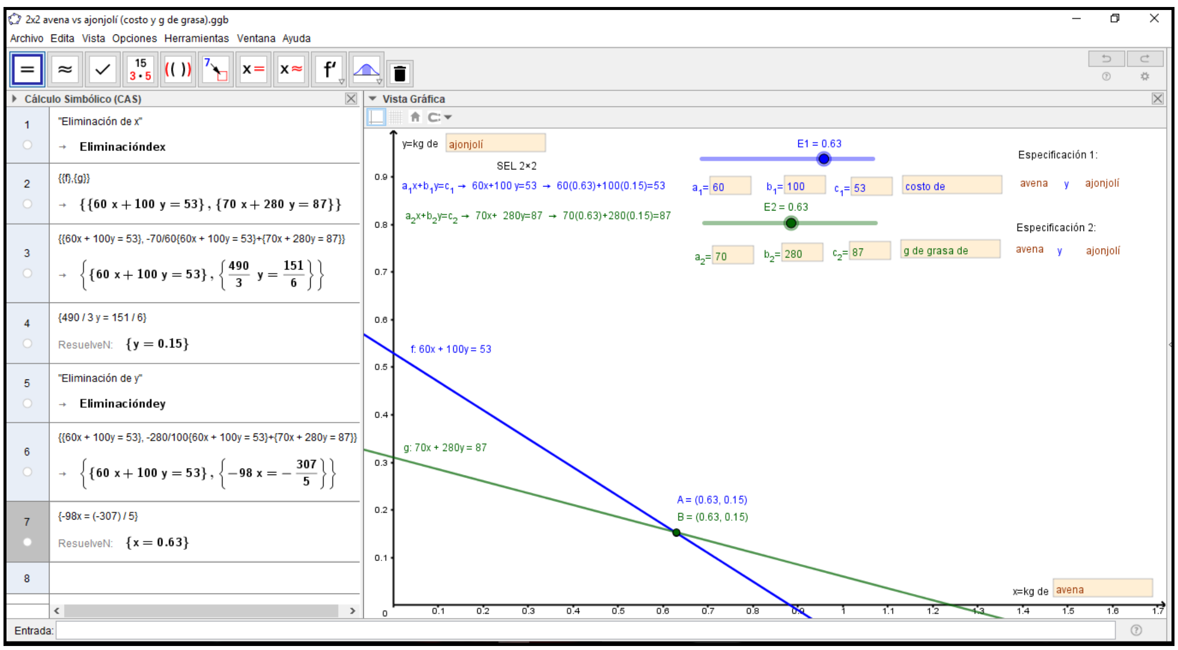

Figura 1. Interfaz del applet: SEL solución única.

Con estos registros, el geométrico y el simbólico, se esperaba que el estudiante diera respuesta a la pregunta antes planteada, de acuerdo con la siguiente idea:

> Para encontrar los valores buscados se requiere resolver el SEL $\begin{cases} 60x + 100y = 53 \\ 70x + 280y = 87 \end{cases}$, cuya solución es $x = 0.63$, $y = 0.15$. Es decir, para que la mezcla tenga un costo de \$53 y contenga 87 *g de grasa*, se requiere de 0.63 *kg de avena* y 0.15 *kg de ajonjolí*.

Problema 2 (SEL 2×2 inconsistente)

Con la modificación de los datos ingresados en las casillas de entrada del applet (Figura 2), los estudiantes procedieron a la solución del problema siguiente:

> ¿Qué cantidad de *kg de avena* y *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga 163 *g de grasa* y 7 *mg de vit b*?

El SEL correspondiente no tiene solución. Se esperaba que los estudiantes dieran una respuesta como:

> Al plantear y resolver el SEL $\begin{cases} 70x + 280y = 163 \\ 2x + 8y = 7 \end{cases}$ se obtiene que no existen valores de x y de y de manera que la mezcla de *avena* y *ajonjolí* contenga 163 *g de grasa* y 7 *mg de vit b*.

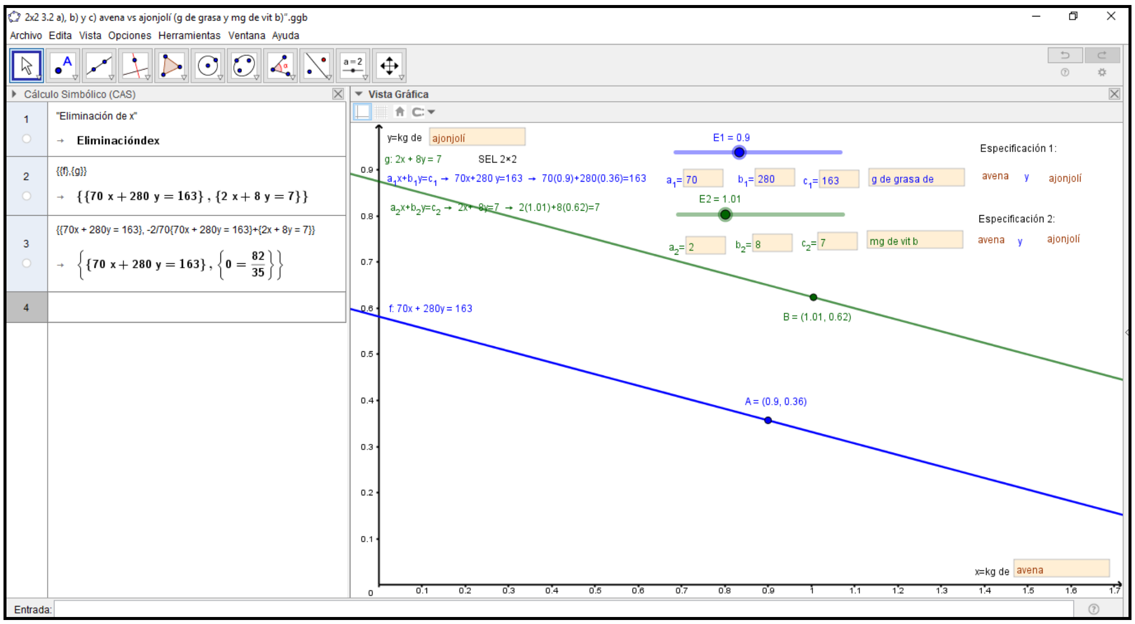

Figura 2. Interfaz del applet*:* SEL sin solución.

Problema 3 (SEL 2×2 *consistente con infinidad de soluciones)*

Un procedimiento, similar al planteamiento de SEL sin solución, se dio para resolver el siguiente problema que implicaba la resolución de un SEL con infinidad de soluciones (véase Figura 3).

> ¿Cuántos *kg de fresa seca* y *kg de manzana seca* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que un *kg* de la mezcla tenga 4 *mg de vit b*?

Se esperaba una respuesta como la siguiente:

Resolver el problema implica dar solución al SEL $\begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$. El SEL tiene una cantidad infinita de soluciones determinadas por el par $(x, 1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$; lo cual indica que, para cualquier par de estos, 1 kg de la mezcla tiene 4 $mg\ de\ vit\ b$.

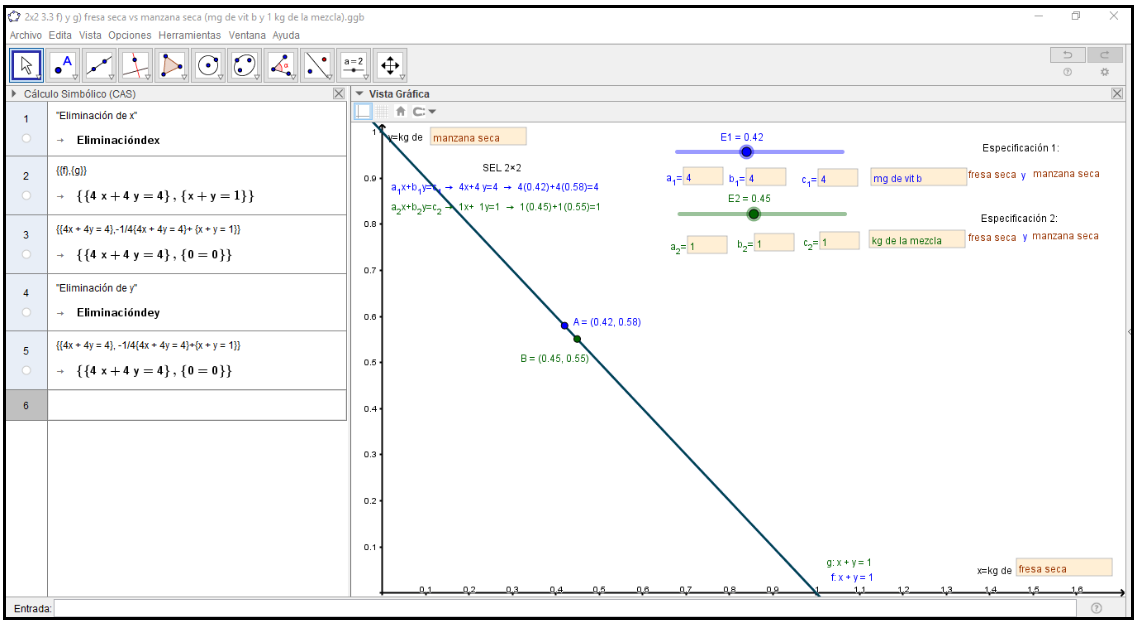

Figura 3. Interfaz del applet: SEL con infinidad de soluciones.

Resultados y discusión

En este artículo son analizados y discutidos sólo los datos de dos equipos participantes: Equipo 4 y Equipo 9, en adelante E4 y E9, respectivamente. Todas las tareas son analizadas de acuerdo con el Marco conceptual comentado en este documento. Por ejemplo, en la Columna 3 de la Tabla 2 se analizaron los datos (descritos en la Columna 2 de dicha tabla) que E4 y E9 reportaron. En otros casos se revisan los comentarios de los estudiantes y entre paréntesis se indica si su respuesta corresponde a: Asociación de objetos (A), Posición cognitiva (P), El estudiante le da sentido a lo que quiere conocer (S), combinación de estos conceptos o su negación mostrada en este documento respectivamente como (~~A~~), (~~P~~) o (~~S~~).

Respuesta al Problema 1 (SEL 2×2 *consistente solución única)*

1a) ¿Por qué si arrastras el punto A sobre la recta $f: 60x + 100y = 53$ y/o el punto B sobre la recta $g: 70x + 280y = 87$ éstos no pasan del primer cuadrante?

Tabla 2

Resultados de E4 y E9 de la Tarea 1a)

E4	Porque en las cantidades dadas no existen cantidades ni costos negativos. “Porque en las cantidades dadas no existen cantidades ni costos negativos.”	E4 y E9 interpretaron de manera adecuada la representación geométrica del problema. Aunque no lo señalaron de manera explícita, identificaron y le dieron significado al dominio de las funciones lineales graficadas. Es decir, le dieron sentido a lo que quisieron conocer (S).
E9	Cuándo arrastras el punto "A" y el "B"; No pasan de 1er cuadrante porque; No hay números negativos “Cuando arrastras el punto “A” y el “B”; No pasan del 1er cuadrante porque: No hay números negativos”	

Después de construir el SEL $\begin{cases} 60x + 100y = 53 \\ 70x + 280y = 87 \end{cases}$ en el applet, de observar que las rectas se intersecan en el punto $(0.63{,}015)$ y de resolver éste por el Método de reducción de Gauss en la ventana Cálculo Simbólico (CAS) de GeoGebra (véase Figura 1), E4 y E9 no tuvieron dificultad para reportar que el SEL es consistente con solución única. Asociaron las representaciones geométricas y algebraicas para dar solución al SEL y la respuesta la relacionaron con el problema enunciado en forma verbal (Asociación de objetos). De esta manera, en la Tabla 3 los equipos respondieron el problema representado en forma verbal (con ayuda de tecnología):

1d) ¿Qué cantidad de *kg de avena* y *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga un *costo de* \$53 y contenga 87 *g de grasa*?

Tabla 3

Resultados de E4 y E9 de la Tarea 1d)

E4	0.154 Kg de Ajonjolí 0.625 Kg de Avena	“0.154 Kg de Ajonjolí” “0.625 Kg de Avena”	Los equipos asociaron de manera adecuada el problema enunciado en forma verbal con el registro geométrico y simbólico del applet. Asociación de objetos (A).
E9	“y”- Avena = 0.154 “x”- Ajonjolí = 0.627	“y”-Avena = 0.154 [kg]” “x”-Ajonjolí – 0.627 [kg]”	

De acuerdo con los resultados precedentes, algunos equipos mostraron cómo responder problemas de enunciado verbal con el apoyo de GeoGebra; a saber, cuando se les planteó en la Tarea 1d) modificaran en el applet el costo de la mezcla de \$83 y 57 *g de grasa* por \$80 y 150 *g de grasa* respectivamente, y con ello resolvieran la Tarea 1e):

1e) ¿Qué cantidad de *kg de avena* y *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga un costo de \$80 y contenga 150 *g de grasa*?

E4 acertó Avena 0.755 (“Avena 0.755 [*kg*]“) y Ajonjoli 0.347 (“Ajonjolí 0.347 [*kg*]“) (Asociación de objetos); mientras que por falta de *atención* (Mason, 2008) E9 falló su intento al reportar Seria 0.8 Kg de avena y 0.5 Kg de Ajonjoli (“Sería 0.8 Kg de avena y 0.5 kg de Ajonjolí”). Este equipo no hizo los cálculos adecuados en la ventana de Cálculo Simbólico (CAS). Ellos sólo reportaron en su hoja de trabajo, sin sentido: Es valido (“Es válido”). E9 no le dio sentido a lo que quiso conocer (~~S~~).

En la Tarea 1g):

1g) ¿Qué cantidad de *kg de avena* y *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga un costo de \$52 y contenga 150 *g* de grasa?

Fue necesario plantear el SEL $\begin{cases} 60x + 100y = 52 \\ 70x + 280y = 150 \end{cases}$ cuya solución –única– es $(-0.04{,}0.55)$. Aunque la respuesta de E4 no es completa (Tabla 4); es decir, no mencionan que las cantidades (coordenadas) correspondientes al punto de intersección de las rectas graficadas son negativas, identificaron que el problema no tenía solución; en otras palabras, lograron asociar, ver y manejar los registros a partir de la experiencia en la solución de los problemas previos. Se observa cierta aprehensión del objeto matemático SEL 2×2 y por tanto Posición cognitiva.

Tabla 4

Resultados de E4 y E9 de la Tarea 1g).

E4	No hay un punto de interseccion por lo tanto no existe una solucion para esta justificacion. “No hay un punto de intersección [se refieren al cuadrante positivo] por lo tanto no existe una solución para esta justificación [se refieren al problema].”	E4 interpreta la solución de forma adecuada (Posición cognitiva), y no como se pudiera pensar, en término de si las rectas se intersectan.
E9	Avena – X = 0.627 “Avena – x=0.27” Ajonjoli – Y = 0.154 “Ajonjolí – y=0.154”	E9 no respondió de forma correcta. No pudo darle sentido al problema y asociarlo con una representación algebraica adecuada. No le dio

		sentido a lo que quiso conocer (~~S~~).

La primera respuesta de E9 no fue adecuada (Tabla 4); sin embargo, este equipo corrigió su error cuando hizo uso del CAS y reportó: Tiene una interseccion en el segundo Cuadrante, No tiene solucion (“Tiene una intersección en el segundo cuadrante, [el SEL] No tiene solución”) E9 asoció el problema en su representación verbal con la representación geométrica, le dio sentido al resultado y lo interpretó en términos del problema. E9 asoció objetos (A) y le dio sentido a lo que quiso conocer (S).

La Tarea 1i) causó confusión entre los estudiantes ya que E4 y E9 (así como ninguno de los equipos participantes) lograron plantear el SEL $\begin{cases} 60x + 100y = 77 \\ x + y = 1 \end{cases}$ y, por tanto, no obtuvieron la solución correcta en los registros gráfico y simbólico por medio de Cálculo Simbólico (CAS) de dicho problema; el enunciado de esta tarea es el siguiente:

1i) ¿Cuántos *kg de avena* y de *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que un *kg* de la mezcla tenga un costo de $77?

Para este tipo de problemas los estudiantes no les fue posible asociar el enunciado en forma verbal con el SEL correspondiente en su forma algebraica. Fallaron en la Asociación de objetos (~~A~~). Ahora bien, de acuerdo con el resultado para la siguiente Tarea 1k):

1k) ¿Qué cantidad de *kg de cacahuate* y *kg de coco rayado* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga 25 *g de proteína* y 73 *g de carbohidratos*?

Se puede argumentar lo siguiente: por un lado, E4 hizo el ajuste adecuado en el applet y planteó el SEL $\begin{cases} 173x + 33.3y = 25 \\ 253\,x + 150y = 73 \end{cases}$. Este equipo reportó de forma correcta el punto de interseccion es 0.075, 0.36 (“el punto de intersección es 0.075, 0.36”) tanto en la ventana Vista Gráfica como en Cálculo Simbólico (CAS) de GeoGebra (Asociación de objetos), pero no mencionó (interpretó) el significado del par ordenado en términos de la cantidad de kilogramos de los productos con las especificaciones del problema, prueba de que posiblemente los estudiantes no asociaron el lenguaje simbólico con el verbal y no le dieron sentido. E4 no le dio sentido a lo que quiso conocer (~~S~~).

Por otro lado, E9 respondió Kg Cacahuate – (“Kg Cacahuate –”), Kg Coco Rayado – (“Kg Coco Rayado”) y 98 g de Mezcla (“98 g de Mezcla”). Este equipo dejó de *ser (estar) consciente* (Mason, 2008); es decir, de articular los objetos y representaciones matemáticas que estaba manipulando y dio respuestas sin significado o sentido en términos de las preguntas y el problema. E9 no le dio sentido a lo quiso conocer (~~S~~).

Reflexión. En los resultados descritos puede observarse que E9 a diferencia de E4 presentó más dificultades para asociar representaciones, dar sentido o significado a resultados y por lo tanto, menor aprehensión del objeto matemático SEL 2×2 consistente con única solución (Posición cognitiva).

Problema 2 Respuesta (SEL 2×2 inconsistente)

En seguida se analizan los datos del grupo de tareas 2 de SEL 2×2 inconsistentes (véase Figura 2), para ello se diseñaron preguntas que buscaban este fin. La Tabla 5 ilustra la respuesta de E4 y E9 del SEL $\begin{cases} 70x + 280y = 163 \\ 2\,x + 8y = 7 \end{cases}$ que correspondió a la Tarea 2c):

2c) ¿Qué cantidad de *kg de avena* y *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga 163 *g de grasa* y 7 *mg de vit b*?

Tabla 5

Resultados de E4 y E9 de la Tarea 2c)

E4	1kg de avena y 1kg de ajonjolí	La respuesta está fuera de contexto, E4 no le dio significado al problema. Este no le dio sentido a lo que quiso conocer (~~S~~).
E9	No tiene solución y SEL No es consistente Kg de Ajonjoli y Avena en grasa (0.5, 0.457) mg de vitamina b (0.1 y 0.85) "No tiene solución y SEL No es consistente Kg de Ajonjoli y Avena en grasa (0.5,0.457) mg de vitamina b (0.1 y 0.85)"	En un inicio, el equipo contestó de forma adecuada que el SEL no era consistente, aparentemente le dio significado al problema. E9 le dio sentido a lo que quiso conocer (S); sin embargo, pareciera que E9 estuvo buscando valores por ensayo y error para encontrar su respuesta. $(0.5, 0.457)$ y $(0.1, 0.85)$ son puntos respectivamente, de las rectas $70x + 280y = 163$ y $2x + 8y = 7$ los cuales es posible que los hayan localizados en el applet. E9 no encontró el resultado, quizás no supo cómo resolver el problema, no asoció significado a la representación gráfica del SEL. E9 no le dio sentido a lo que quiso conocer (~~S~~).

En los resultados de la precedente tarea se ve reflejada ausencia de *consciencia* en E4 (Mason, 2008), es decir, falta de aprehensión del concepto SEL 2×2 inconsistente o falta de Posición cognitiva (~~P~~). Pareciera que E9 sólo "ve" inconsistencia en un SEL2×2 (en el sentido de Duval, 2003) si las rectas no se intersecan (véase comentario de E9 en la Tabla 5) sin identificar cómo puede asociar esta representación gráfica con el registro simbólico. Falta de Asociación de objetos (~~A~~).

Reflexión. En los resultados descritos puede observarse que ambos equipos presentaron dificultades para resolver este problema. Les fue difícil asociar representaciones, dar sentido o significado y, por lo tanto, no se observa una aprehensión del objeto matemático SEL 2×2 inconsistente: falta de Posición cognitiva (~~P~~).

Problema 3 Respuesta (SEL 2×2 consistente con infinidad de soluciones)

Finalmente, se analizan datos de SEL 2×2 consistentes con infinidad de soluciones. Para ello se diseñaron tareas como:

3a) Arrastra los puntos A y B y determina si el SEL $\begin{cases} 70x + 280y = 140 \\ 2x + 8y = 4 \end{cases}$ es consistente. En el siguiente rectángulo justifica tu respuesta.

3b) Contesta la Tarea 3a) con el uso de “Cálculo Simbólico (CAS)” de GeoGebra por medio del método de reducción (eliminación) de Gauss. En el siguiente rectángulo justifique el resultado obtenido.

3d) ¿Cuántos *kg de avena* y *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que 1 *kg* de la mezcla tenga 170 *g de proteína*?

3e) Contesta la Tarea 3d) con el uso de “Cálculo Simbólico (CAS)” de GeoGebra por medio del método de reducción (eliminación) de Gauss. En el siguiente rectángulo has comentarios que justifiquen el resultado obtenido.

La Tabla 6 muestra las respuestas de E4 correspondientes a las tareas precedentes. Obsérvese en los comentarios, de la última columna de esta tabla, cómo E4 se contradice: por un lado, la respuesta de las tareas 3a) y 3b) son aceptables al responder en el registro geométrico que las rectas se “empalman”; por otra parte, las Tareas 3d) y 3e) contradice las respuestas de estas tareas. Además, da a entender que las rectas sólo se intersecan en el punto (0.024,0.976), y menciona que no existe un punto de intersección, además asegura que el SEL (que no plantearon) es inconsistente. Por lo tanto, en esta declaración de E4 se observa falta de *sentido* (Mason, 2008) o significado de un SEL 2×2 incosistente. Es falta de sentido de E4 de lo que quiso conocer (~~S~~) ya que no le dieron significado al registro gráfico y, por tanto, no lograron resolver el problema de SEL 2×2 cuyas rectas son una misma. No se incluyen las respuestas de E9 debido a que fueron incorrectas y no aportan algo relevante para el propósito de este artículo.

Tabla 6

Resultados de E4 de las tareas 3a), 3b), 3d) y 3e).

<table>
<tr><th></th><th>Registro geométrico</th><th>Registro simbólico (CAS)</th><th>Comentarios</th></tr>
<tr><td rowspan="2">E4</td><td>Tarea 3a) Teoría
$\begin{cases} 70x + 280y = 140 \\ 2x + 8y = 4 \end{cases}$</td><td>Tarea 3b) Planteamiento del SEL</td><td rowspan="2">Las respuestas de E4 fueron aceptables. E4 le dio sentido a lo que quiso conocer (S). Pudo asociar las representaciones gráficas y simbólicas.</td></tr>
<tr><td>Sí es consiste porque ambas rectas empal man y existen infinidad de soluciones
“Sí es consistente porque ambas rectas [se] empalman y existen infinidad de soluciones”</td><td>La ecuación principal no cambia y nos refleja infinitas soluciones
“La ecuación principal no cambia y no refleja infinitas soluciones”</td></tr>
</table>

E4	Tarea 3d) E4 no plantea el SEL $\begin{cases}170x+170y=170\\ x+y=1\end{cases}$	Tarea 3e) E4 no hace un trabajo adecuado en CAS	Por un lado, en la Tarea 3d) E4 se limitó a contestar un resultado que no explicaron cómo lo obtuvieron, sobre todo porque no dieron evidencia de haber planteado el SEL, además no asociaron su respuesta con las correspondientes a las tareas 3a) y 3b): falta de Asociación de objetos (~~A~~). Por otro lado, E4 no supo desarrollar el trabajo con CAS y responde de forma inadecuada la Tarea 3d). E4 no le dio sentido de lo que quiso conocer.
	0.024Kg y 0.976 Kg “0.024 Kg y 0.976 Kg”	No existe un punto de intersección y no es consistente. “No existe un punto de intersección y no es [un SEL] consistente”	

Reflexión. En los resultados descritos puede observarse que E4 logró asociar representaciones gráficas y simbólicas, pero no pudo interpretarlas en términos del problema y asociar o no, a partir de ellas, la existencia de soluciones. Por lo tanto, no se aprecia una aprehensión del objeto matemático SEL 2×2 inconsistente: falta de Posición cognitiva (~~P~~).

Conclusiones

El análisis de datos nos arroja que los estudiantes de los equipos E4 y E9, revisados en este artículo, tuvieron errores, pero también lograron avances significativos. Por ejemplo, al inicio de la Actividad 3, interpretaron de manera adecuada problemas de enunciado verbal relacionados con planteamiento y solución de SEL 2×2; sobre todo de SEL con solución única, ello bajo la influencia de representaciones gráficas y algebraicas mediante el uso de GeoGebra. Particularmente, destacamos el trabajo de E9 en el registro simbólico, ya que el uso de CAS les permitió modificar su respuesta equivocada y darle sentido al problema en términos de una nueva Asociación de objetos (Mason, 2008; Duval, 1999, 2003, 2006) a través del uso de más representaciones. Este aporte de E9 permitió observar cómo influyó en estudiantes de ingeniería el uso de representaciones y GeoGebra en la resolución de problemas de enunciado verbal, lo cual está relacionado con la primera pregunta de investigación a responder en este artículo.

A medida que los equipos avanzaron en sus actividades, y de acuerdo con los datos reportados, se observó una falta de *consciencia* (Mason, 2008), es decir, falta de aprehensión del concepto SEL 2×2 inconsistente, principalmente en E9. Lo mismo ocurrió con los SEL 2×2 consistentes con infinidad de soluciones, ello reflejado en la poca conexión entre los registros geométricos y simbólicos (CAS).

La falta de *consciencia* (Mason, 2008) o falta de aprehensión y de asociación de registros semióticos (Duval, 2003), nos llevó a coincidir con resultados obtenidos en otros estudios de autores como Oktaç, (2009), Radford, Edwards y Arzarello (2009), Kieran (2006), entre otros, quienes mencionan que es difícil para los estudiantes comprender conceptos relacionados con las diferentes opciones de solución de un SEL 2×2 y con el concepto de solución. De aquí las dificultades que los estudiantes exhibieron para modificar con éxito el aprendizaje de SEL, reflejado principalmente en el aprendizaje de SEL inconsistentes o consistentes con infinidad de soluciones. Esto responde la segunda pregunta de investigación respecto de cómo se modificó el conocimiento del aprendizaje de SEL 2×2 inconsistentes y SEL 2×2 consistentes con infinidad de soluciones.

Creemos que si se incluyen más tareas, la actividad de La Granola podría apoyar a mejorar la comprensión de SEL 2×2. Por lo tanto, nuestro compromiso es rediseñar las actividades aquí planteadas con la intención de lograr que los estudiantes no solo reporten comprensión de problemas de enunciado verbal y tecnología en el aprendizaje de SEL 2×2, sino que también lo lleven a cabo con otras dimensiones, como SEL 3×2 en el que se incluya el sentido inverso; es decir, dado un SEL relacionarlo con un problema de enunciado verbal.

Referencias bibliográficas

Aydin, S. (2014). The role of technology in the teaching linear algebra. *Studies in Modern Society*, *5*(1), 117-128.

Aysegül, Y. U. (2013). Teaching the diagonalization concept in lineal algebra with technology: a case study at Galatasaray university. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, *12*(1), 119-130.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context: an analysis of problems. *Proceedings of the 18 Internacional Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 64-71). Lisboa, Portugal.

Cristóbal-Escalante, C. & Vargas-Alejo, V. (2013). The Development of Mathematical Concept Knowledge and of the Competence to use this Concept to Create a Model. En G. Kaiser & G. Stillman (Eds.), *Teaching Mathematical Modeling: Conectting to Research and practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling series* (pp. 517-526). Holanda: Springer.

Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2011). On a research programme concerning the teaching and learning of linear algebra in the first-year of a French science university. *International Journal of Mathematical Education in Schiece & Technology*, 2000, *3*(1), 27-35. doi: 10.1080/002073900287354

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. En Dorier, J-L. (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 85-124).

Dorier, J. L, Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (1999). Teaching and learning linear algebra in the first years of French science university. *European Research in Mathematics Education*, *1*. Recuperado de https://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html

Dreyfus, T., Hillel, J. & Sierpinska, A. (1999). Cabri based linear algebra: transformations. *European Research in Mathematics Education*, *I*, 209-221.

Gol, T. S. (2012). *Using Dynamic geometry to explore linear algebra concepts: the emergence of mobile, visual thinking* (Tesis doctoral). Simon Fraser University, Canada.

Gol, T. S., & Sinclair, N. (2010). Shifts of attention in DGE to learn eigen theory. En Pinto, M.F. & Kawasaki, T.F. (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 33-40). Bello Horizonte: Brasil.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131.

Duval, R. (2003). «Voir» en mathématiques. En Filloy, E. (coordinador), *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Fondo de Cultura Económica.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* [Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Peter Lang S. A. Editions scientifiques européennes, 1995]. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Guzmán H. J, & Zambrano A. J. (2016). Vector subspaces generated by vectors of $\mathbb{R}^n$: Role of technology. *Proceedings of the 67 International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching* (pp. 473-486). Aosta, Italia.

Haddad, M. (1999), *Difficulties in the learning and teaching of linear algebra. A Personal experience* (Tesis de maestría). Concordia University, Montreal, Canadá.

Harel, G. (1997). The linear algebra curriculum study group recommendations: Moving beyond concept definition. En Carlson D., Johnson, C, Lay, D., Porter, D., Watkins, A, \& Watkins, W. (Eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra*. MAA Notes, *42*, (pp. 107-126). Whashington D. C.: Institute of Education Science.

Haspekian, M. (2005). *Integration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathematiques, etude du cas des tableurs*. Université Paris-Diderot.

Hillel, J. (2001). Computer algebra systems in the learning and teaching of linear algebra: some examples. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 371-380). Holanda: Kluwer Academic Publisher.

Kieran, C. (2014). Algebra teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Educations* (pp. 27-32). Dordrecht, The Netherlands: Springer Reference.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Charlotte, N.C,: Information Age.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the psychology of mathematics education* (pp. 11–49). Rotterdam: Sense Publishers.

Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners: attention, awareness and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers and learners. En

T. Wood & B. Jaworski (Eds.), *The International handbook of mathematics teachers education, 4*. (pp. 31-56). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher.

Oktaç, A., & Trigueros, M. (2009). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II): 373-385.

Pruncut, A. (2008). *A study of students' theoretical thinking in a technology-assisted environment* (Tesis de maestría). Concordia University: Montreal.

Radford, L., Edwards, L., & Arzarello, F. (2009). Introduction: beyond words. *Educational studies in mathematics*, *70*(2), 91–95.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra in question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Sierpinska, A., Dreyfus, T., & Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(1), 7-10.

Soto, J. L., & Romero, F. C. (2011). El concepto de transformación lineal: una aproximación basada en la conversión gráfico-algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt & C. Cortés (Eds.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 38-49). Canada: Loze-Dion.

Uicab, R., & Octaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(3), 459-490.

Vargas-Alejo, V., & Guzmán-Hernández, J. (2012). Valor pragmático y epistémico de técnicas en la resolución de problemas verbales algebraicos en ambiente de hoja de cálculo. *Enseñanza de las ciencias*, *30*(3), 89-107.

Vargas-Alejo, V., & Cristóbal-Escalante, C. (2012). Developing mathematical competences, learning linear equations, functions and the relation among these concepts. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(7), 48-54.