ANÁLISIS DE TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE DE SUBCONJUNTOS EN $\mathbb{R}$ Y $\mathbb{R}^2$

*Elvira Borjón Robles
eborjon@matematicas.reduaz.mx
*Mónica del Rocío Torres Ibarra
mtorres@matematicas.reduaz.mx
**Otilio B. Mederos Anoceto
omederosa@gmail.com
*Universidad Autónoma de Zacatecas
**Universidad Autónoma de Saltillo, México

Resumen

Esta investigación tiene dos objetivos principales, por un lado reportar las técnicas y estrategias de aprendizaje (Beltrán, 1998) utilizadas por los alumnos que acaban de iniciar una carrera de Licenciatura en Matemáticas, trabajando sobre el tema de subconjuntos en el plano cartesiano y en la recta real, tema fundamental en la formación de un profesional de las matemáticas; y por otro manifestar también las diferencias presentadas en el aula de clases tradicional respecto a un aula con uso de tecnología, evidenciando resultados y procesos de aplicación.

Palabras clave: Técnicas, Estrategias, Aprendizaje, Subconjuntos, Tecnología.

Introducción

Dada la importancia que tienen los diferentes subconjuntos de la recta real y del plano cartesiano en diferentes materias (Cálculo de una y varias variables, Variable Compleja, Análisis Real, Estadística, etc.) de la formación de un licenciado en matemáticas, en esta dirección el análisis que hacemos tiene como objetivo evidenciar los resultados obtenidos en sesiones de trabajo en un ambiente tradicional y otro mediado con las herramientas que proporciona la tecnología TI-NSpire (calculadoras y sistema de navegador en red), con la intención de que los alumnos visualicen distintos tipos de conjuntos (intervalos abiertos, cerrados, semiabiertos, desigualdades con valor absoluto y conjuntos finitos y discretos) en la recta real y en el plano.

Marco Teórico

Existen numerosas definiciones de lo que se refiere al aprendizaje, en este trabajo tomamos como base la de Beltrán (1998), que afirma: "Aprender es un cambio más o menos permanente de conducta que se produce como resultado de la práctica", en este sentido se evidencia lo aprendido a través de la puesta en marcha de una secuencia didáctica estructurada con la finalidad de que los alumnos se apropien de los conceptos relacionados con subconjuntos en la recta real y en el plano.

En este orden de ideas, podemos también acotar el término de aprendizaje pero en el contexto escolar. De acuerdo a numerosas clasificaciones, una de ellas, a la cual haremos referencia en este trabajo, es la que ofrece Mayer (1992), que señala que el aprendizaje escolar se presenta en tres formas distintas, "Adquisición de respuestas, o enfoque conductista, aprendizaje como adquisición de conocimiento y aprendizaje como construcción de significado", nosotros nos ceñiremos en el contexto de la última donde el aprendizaje resulta eminentemente activo e implica una asimilación orgánica desde dentro, además el estudiante no se limita a adquirir conocimiento, sino que lo construye usando la experiencia previa para comprender y moldear el nuevo aprendizaje, consiguientemente, el profesor, en lugar de suministrar conocimientos, participa en el proceso de construirlos junto con el estudiante, se trata de un conocimiento construido y compartido; esto en general es lo que se conoce como un aprendizaje significativo, que dicho de otro manera se define como el aprendizaje en que un estudiante relaciona la información nueva con la que ya posee, reajustando y reconstruyendo ambas informaciones. Se considera este aprendizaje porque la ejecución de éste se al aprendizaje tradicional: el de los contenidos.

En este sentido, para que se propicie un verdadero aprendizaje significativo se deben poner en juego diferentes estrategias de aprendizaje, que de acuerdo a Beltrán (1998), son actividades u operaciones mentales empleadas para facilitar la adquisición de conocimiento, dos de sus características esenciales son que sean directa o indirectamente manipulables, y que tengan un carácter intencional o propositivo, como se evidencia en la figura 1.

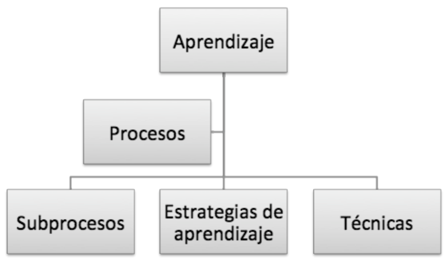

Figura 1. Técnicas y estrategias de aprendizaje

Así mismo, como se muestra en la figura 2, "Las estrategias de aprendizaje promueven el aprendizaje significativo" (Díaz y Hernández, 1999).

Figura 2. Procesos del aprendizaje significativo

Así, las técnicas son recursos que los estudiantes utilizan para poner en marcha las estrategias variadas y pueden resumirse de acuerdo a distintos autores como se muestra en la tabla 1, como las más factibles para el aprendizaje significativo, mencionando además las estrategias que permiten evaluar este aprendizaje, ejemplo de esto son los diferentes tipos de representaciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.

Tabla 1. *Técnicas y estrategias*

Gagné (1974)	**Cook-Mayer (1989)**	**Thomas-Rohwer (1986)**	**Shuell (1988)**	**Beltrán (1998)**
Expectativas			Expectativas	Sensibilización
Atención	Selección	Selección	Atención	Atención
Codificación	Adquisición	Comprensión	Codificación	Adquisición
Almacenaje	Construcción	Memoria	Comprensión	Personalización
Recuperación	Integración	Recuperación	Repetición	Recuperación
Transfer		Integración		Transfer
Respuesta		Auto-control		
Refuerzo			Evaluación	Evaluación

Con todo lo anterior se propiciará en gran medida la adquisición del conocimiento, que comienza con la selección o codificación selectiva, mediante la cual se logra la incorporación del material informativo de interés para el sujeto. Una vez que el material ha sido atendido y seleccionado, el sujeto está en condiciones de darle sentido, de interpretarlo significativamente, es decir, de comprenderlo. Posiblemente éste es el momento más importante del aprendizaje, aquel en el que el sujeto construye significativamente su conocimiento.

Tabla 2. *Cuadro analítico de subprocesos, estrategias y técnicas del subproceso de adquisición*

<table>
<tr><th>Subprocesos</th><th>Estrategias</th><th>Técnicas</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Comprensión</td><td>Selección</td><td>Subrayado, resumen, esquema, idea principal.</td></tr>
<tr><td>Organización</td><td>Red semántica, análisis de contenido estructural, árbol organizado, mapa semántico, mapa conceptual, heurístico, conocimiento como diseño.
Asociación entre representaciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.</td></tr>
<tr><td>Meta-Comprensión</td><td>Planificar tareas, formular preguntas, hacer elecciones.</td></tr>
<tr><td>Retención</td><td>Repetición</td><td>Enumeración, agrupación, reenunciado verbal, reenunciado sustancial, repetición verbal, repetición sustancial, reenunciado detallado, referencia implícita.</td></tr>
</table>

	Elaboración	Preguntas adjuntas, preguntas generadas, predecir, clarificar, interrogación elaborativa, activación del conocimiento previo, analogías, señales, toma de notas, organizadores previos, imágenes, activación del esquema, parafrasear.
	Análisis	Descomponer, dividir.
	Síntesis	Reunir, agrupar, comparación y defensa de resultados grupales con tecnología
Transformación	Categorización	Comparar, clasificar.
	Inferencia	Deducir, inducir, predecir.
	Verificación	Confirmar o descartar ideas, detectar errores.
	Ampliación	Razonar analógicamente, extrapolar y aplicar conocimientos

Metodología

Se trabajó con dos grupos de alumnos del primer semestre de la licenciatura en matemáticas, el primero de 18 alumnos, denominado grupo A, trabajó los ejercicios bajo el esquema de una clase tradicional; mientras que el segundo de 20 alumnos, denominado grupo B, trabajó con el uso de tecnología.

El diseño se realiza con base en cuatro técnicas de aprendizaje a través del uso de representaciones (Sintética, geométrica, analítica y características topológicas) de subconjuntos del conjunto de los números reales y del plano cartesiano, consta de dos ejercicios:

- El cuádruple juego de los subconjuntos de los números reales (recta real), donde se trabajó con representaciones sintética, geométrica y analítica, además de detectar características topológicas de éstos, como se muestra en las figuras 3 y 4.
- El triple juego de los subconjuntos de números reales (plano) donde se trabajó el tránsito entre la representación geométrica y analítica, además de detectar las características topológicas de los mismos, como se muestra en las figuras 5 y 6.

Experimentación de la propuesta

La dinámica se centró en que los alumnos relacionaran las distintas representaciones de un mismo conjunto, logrando con ello que visualicen los subconjuntos puestos en juego para que con ello puedan concluir acerca de características específicas de cada subconjunto.

La secuencia estuvo estructurada de la siguiente manera: Primero se abordaron, mediante la representación gráfica, conjuntos de puntos en la recta real, considerando intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos, simultáneamente los extremos de los intervalos fueron números naturales, enteros, racionales e irracionales. Enseguida se propuso una lista de posibles representaciones analíticas del conjunto para que eligieran la que se asocia a la representación geométrica. Posteriormente se presenta una lista de posibles representaciones sintéticas para que se elija la que corresponda a la representación analítica.

Los alumnos trabajaron realizando transición entre las diferentes representaciones, plasmando sus resultados en un instrumento diseñado exprofeso. El grupo A trabajó bajo el esquema de una clase tradicional, mediante el uso de un instrumento diseñado con la finalidad de que relacionaran las representaciones de cada uno de los subconjuntos, como se muestra en las figuras 3 y 4, respectivamente.

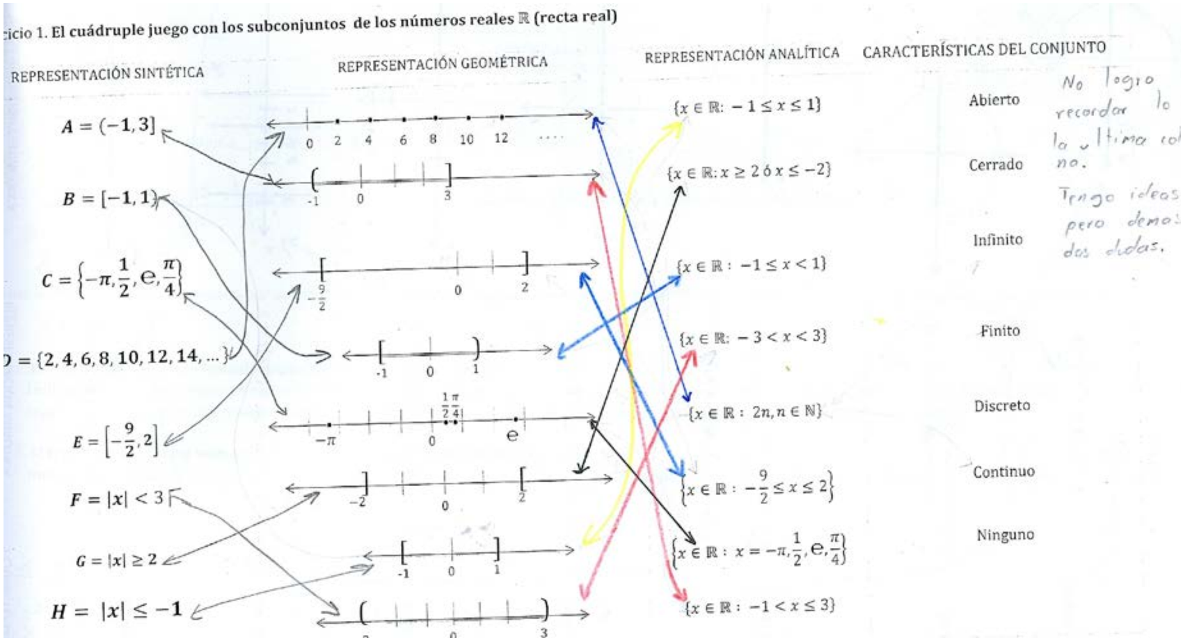

Figura 3. Cuádruple juego utilizado por el grupo A

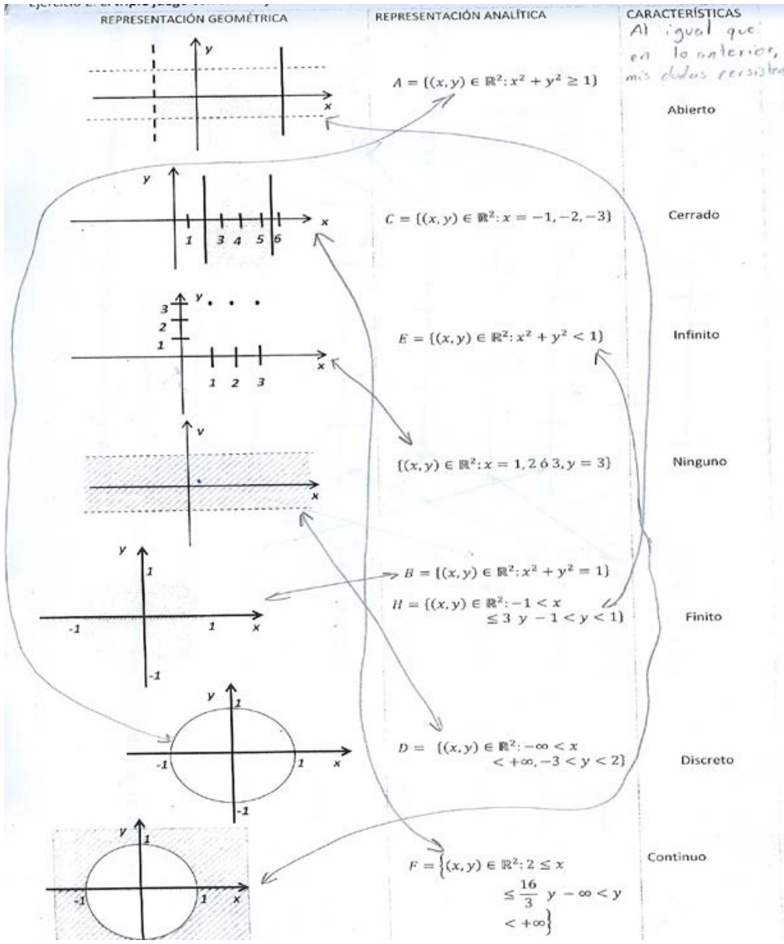

Figura 4. Triple juego utilizado por el grupo A

Por su parte el grupo B trabajó con el uso de las calculadoras TI NSpire, por medio de una secuencia que les presentaba las representaciones geométricas de cada uno de los subconjuntos, al mismo tiempo que recibían por medio del TI Navigator preguntas tipo encuesta que la investigadora iba haciendo de tal forma que pudieran relacionar cada uno de los subconjuntos con sus representaciones, así como asociar las características de cada uno de ellos, como se muestra en las figuras 5 y 6 respectivamente.

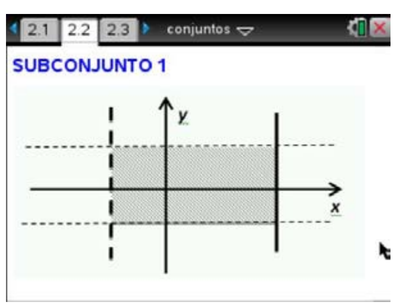

Figura 5. Representación geométrica utilizada por el grupo B

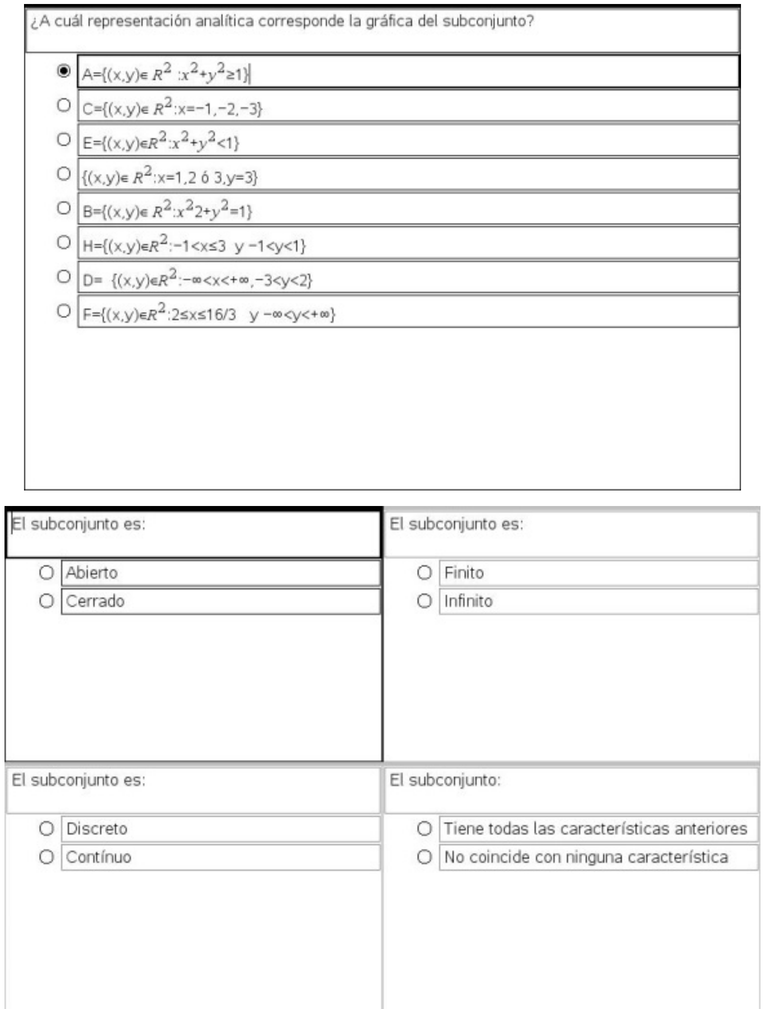

Figura 6. Relación de representación y características utilizada por el grupo B

En éste último grupo, con el uso de TI Navigator, se promovió un aprendizaje mediado con tecnología que permite abordar discusiones grupales para cada uno de los subconjuntos presentados, poniendo en juego las técnicas de comparación y defensa de resultados grupales, ya que el sistema de navegación incluye un software que permite monitorear qué alumnos están respondiendo los diferentes cuestionamientos, así como un concentrado de los resultados de cada una de las preguntas, como se muestra en la figura 7.

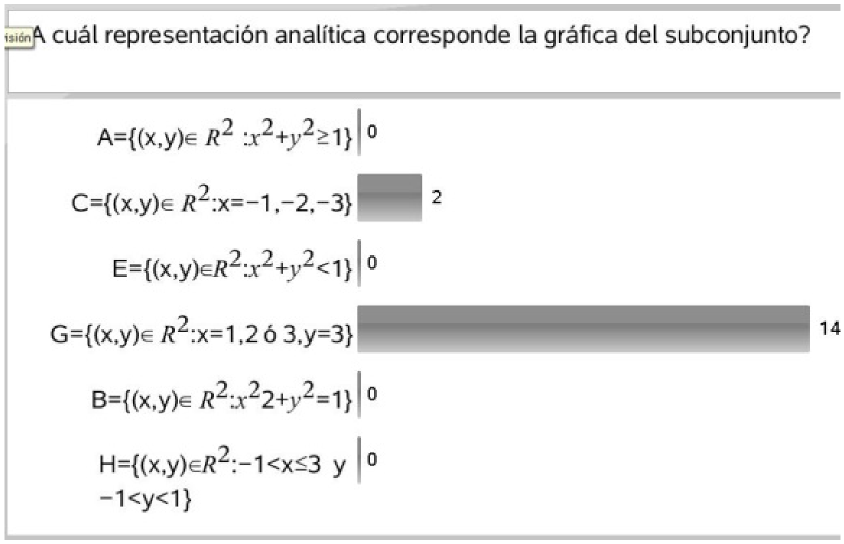

Figura 7. Resultados emitidos por el TI Navigator.

Resultados

El tema que se eligió tiene grandes repercusiones en la formación de los profesionales de la matemática, sin embargo, existen muchos errores que se cometen por parte de los alumnos que se están formando en cuanto al manejo de las diferentes representaciones de los conjuntos. Los principales hallazgos de este trabajo, respecto a la transición entre representaciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$, se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. *Principales hallazgos de transición entre representaciones de* $\mathbb{R}$.

Sintética - Gráfica	**Gráfica - analítica**	**Detección de características**
Se logra fácilmente y sin mayores problemas por parte de los alumnos	Solo el 85% lo realiza sin problemas	• Existe confusión entre los términos Acotado y Finito, así como • No acotado e Infinito • No se identifican conjuntos del tipo $\left\{-\pi,\frac{1}{2},e,\frac{\pi}{4}\right\}$ y $\{2,4,6,8,....\}$ como discretos

Así mismo, respecto a la transición entre representaciones en $\mathbb{R}^2$, los resultados arrojaron que en su mayoría los alumnos logran realizar el tránsito entre representaciones, como se muestra en la figura 8; sin embargo, la detección de sus características es limitada, como se muestra en la figura 9.

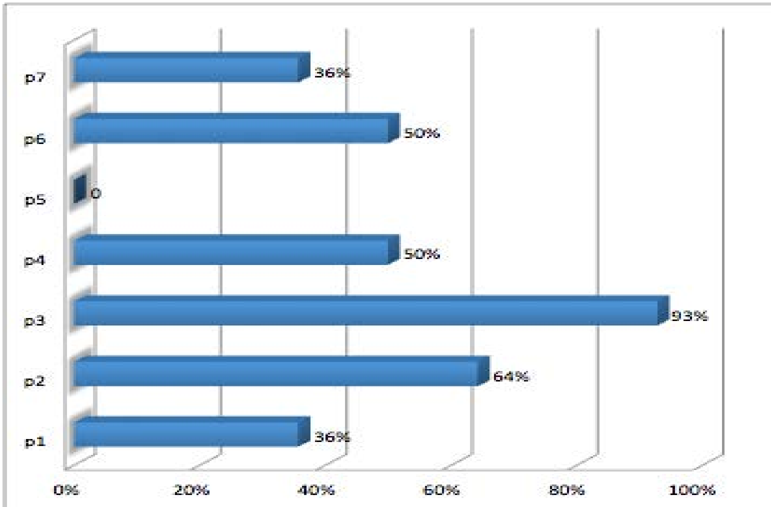

Figura 8. Resultados de la transición entre representaciones en $\mathbb{R}^2$

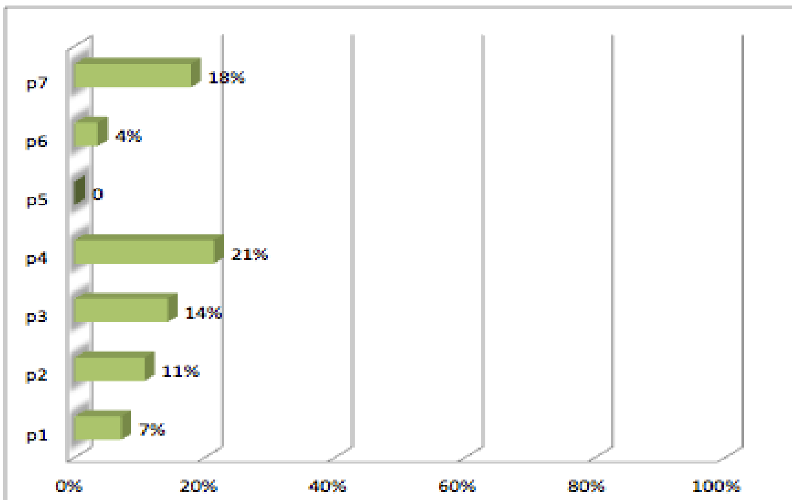

Figura 9. Resultados de la detección de características de subconjuntos en $\mathbb{R}^2$

Conclusiones

En este trabajo se ponen de manifiesto las técnicas y estrategias de aprendizaje utilizadas en el tema de subconjuntos en la recta real y en el plano, concluyendo que se destacan las que se muestran en la tabla 4.

Tabla 4. *Conclusiones respecto a las técnicas y estrategias puestas en juego*

Estrategia	**Técnica**	**Resultado**
Organización	*Asociación entre representaciones de subconjunto de R y R^2*	Se logró parcialmente debido a que algunos alumnos no fueron capaces de transitar correctamente entre las representaciones geométrica y analítica
Meta-comprensión	*Hacer elecciones*	Se logró, pues los alumnos realizaron elecciones y

		asociaron
Elaboración	*Activación del conocimiento previo.*	Se logró, pues se pusieron en juegos los conocimientos previos de los números reales, así como sus representaciones geométrica y analítica
Síntesis	*Comparación y defensa de resultados grupales con tecnología*	Se logró pues la participación fue muy activa, propiciada por los resultados expuestos en el TI Navigator
Verificación	*Confirmar o descartar ideas, detectar errores*	Se logró pues se produjeron algunas discusiones respecto a las respuestas presentadas

De manera general se concluye que los alumnos mostraron parcialmente un aprendizaje significativo de los conceptos puestos en juego, ya que se detecta que la topología de los reales y del plano presenta serias dificultades en su aprendizaje.

De igual manera se reafirma que el uso de la tecnología es un fuerte aliado del profesor de matemáticas, ya que por medio de ella es posible acercar el conocimiento a los estudiantes, de forma que ellos logren visualizar el concepto en cuestión por medio de las diferentes representaciones del objeto.

Bibliografía

Beltrán, J. (1998). *Psicología evolutiva y de la educación. Procesos, estrategias y Técnicas de aprendizaje.* Editorial Síntesis, S.A. Madrid, España.

Cook, L.K. y Mayer, R.E. (1983). Reading strategies training for meaningful learning from prose. En M. Pressley y J.R. Levin: *Cognitive Strategy Research.* New York. Springer-Verlag.

Díaz B. Arceo, Hernández R. (1999). *Estrategias de aprendizaje en Matemáticas*. McGRAW-HILL, México, 1999.

Mayer, R. E. (1992). Cognition and instruction: Their historic meeting within educational psychology. *Journal of Educational Psychology, 84,*405-412.