REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 1 Fecha: enero-junio de 2019

ISSN: 2395-955X

RESULTADOS OCULTOS TRAS LA OPERATIVIDAD DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

María Teresa Dávila Araiza, Agustín Grijalva Monteverde

maria.davila@unison.mx, gutygri1@gmail.com

Universidad de Sonora, México

Para citar este artículo:

Dávila, M. T., Grijalva, A. (2019). Resultados ocultos tras la operatividad del Teorema Fundamental del Cálculo. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 1, pp. 85-101. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 1, enero-junio de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

RESULTADOS OCULTOS TRAS LA OPERATIVIDAD DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

María Teresa Dávila-Araiza, Agustín Grijalva Monteverde

maria.davila@unison.mx, gutygri1@gmail.com

Universidad de Sonora, México

Palabras clave: integral, teorema fundamental del cálculo, GeoGebra.

Resumen

En este trabajo discutimos una actividad didáctica mediada con tecnología digital que pretende generar una reflexión en torno al concepto de integral y al teorema fundamental del cálculo (TFC). El diseño de la actividad se fundamenta en elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) y retoma el principio de cambio de marcos de Douady como medio para generar desequilibrios que promuevan el aprendizaje. La actividad parte de una situación problema que favorece el cambio del contexto algebraico al gráfico, lo cual pretende provocar desequilibrios en el significado que tiene el estudiante de integral y del TFC como algoritmos. Luego, a partir de la reflexión sobre los procedimientos en ambos contextos, se busca que el estudiante refine y articule los significados de integral y TFC. Finalmente, con la mediación de un applet creado en GeoGebra, se pretende que los estudiantes accedan a diversas funciones que faciliten la comprobación y generalización de sus resultados.

Key words: integral, fundamental theorem of calculus, GeoGebra.

Abstract

In this paper, we discuss a didactic activity mediated by digital technology that aims to provide a space for reflection about the integral concept and the fundamental theorem of calculus (FTC). We base the design of the activity both on theoretical tools of the Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction and on a principle of Douady's change of frames as a mean to improve learning. The activity starts with a problem situation that promotes a change from algebraic to graphic context in order to induce a conflict in the students' meaning of integral and FTC as algorithms. Then, based on the reflection on the procedures in both algebraic and graphic context, we intend that students refine and articulate their meanings of integral and FTC. Finally, with the mediation of a GeoGebra applet we make available for students a diversity of functions they can use to corroborate and extend their results.

Introducción

El cálculo es una disciplina cuyo estudio se hace presente en los currículos universitarios de carreras diversas que abarcan desde las ciencias básicas e ingeniería hasta las áreas administrativas y biológicas. El estudio del cálculo universitario encierra una gran complejidad que sale a la luz en las constantes dificultades presentadas por los estudiantes de todas las áreas para comprender los conceptos que se consideran centrales en los cursos de cálculo.

La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo ha sido y sigue siendo ampliamente estudiada, es el tema central de revistas como *El cálculo y su Enseñanza*[1];

[1] Disponible en http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php

libros como *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, 1991), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral* (Cuevas et al., 2013) y *La génesis y la enseñanza del cálculo* (ímaz & Moreno, 2010); trabajos de investigación que plantean reflexiones teóricas sobre el cálculo y su enseñanza (Moreno-Armella, 2013, 2014a; 2014b), que documentan dificultades de los estudiantes con los objetos matemáticos estudiados en un curso de cálculo, o bien, que proponen estrategias para su aprendizaje: sobre *límite* (Roh, 2008; Nagle, 2013; Williams, 1991), *función* (Artigue, 1998; Tall, 1992; Niss, 2014), *infinito* (Moreno & Waldegg, 1991; Waldegg, 2005), *derivada y/o integral* (Jiménez & Mejía, 2015; Robles, del Castillo & Font, 2012; Tellechea, 2005; Robles, Tellechea & Font, 2014; Kouropatov & Dreyfus, 2014), por mencionar algunos.

Los trabajos en torno a esta problemática dan cuenta de que la enseñanza y el aprendizaje del cálculo son procesos extremadamente complejos, en gran parte debido a la complejidad misma de los objetos matemáticos involucrados (variable, función, derivada, integral…, sus múltiples representaciones, definiciones, teoremas, algoritmos, contextos, etc.). Aunado a la complejidad de los objetos matemáticos, la enseñanza del cálculo difícilmente logra llevarse a cabo manteniendo un equilibrio entre distintas facetas como: lo conceptual, algorítmico, formal, intuitivo, algebraico, gráfico, numérico, contextos matemáticos, contextos extramatemáticos, la mediación de la tecnología digital, etc. Ante esta situación, no causa sorpresa que los estudiantes logren aplicar algoritmos de derivación e integración a diversos tipos de funciones expresadas algebraicamente y, sin embargo, no desarrollen un significado de los objetos matemáticos involucrados que vaya más allá de esos algoritmos.

Con respecto a la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) y de la integral, que son los temas de interés en este trabajo, tienden a ocurrir dos situaciones extremas. Por un lado, durante la presentación del teorema fundamental, se omite (o no se enfatiza) la discusión de las condiciones del teorema para centrarse en los resultados operativos del mismo que facilitan los procesos de integración y, por otro lado, se privilegia la demostración formal del Teorema. Con respecto a la integral se tiene una situación similar: se prima el aprendizaje de diferentes algoritmos de integración y la definición formal de la integral definida, pero se descuida el estudio de la integral como función, así como la articulación de los diferentes sistemas de representación semiótica y sus significados en contextos diversos.

Una de las propiedades de la función integral que nos interesa resaltar en este trabajo es la continuidad de la integral como función, que puede volverse transparente en los cursos de cálculo y en torno a la cual se puede realizar una discusión provechosa. La Tabla 1 muestra el (primer) teorema fundamental del cálculo, como lo enuncian en Leithold (1998), Spivak (2012) y Rudin (1966).

Tabla 1. *Primer teorema fundamental del cálculo.*

Leithold (1998, p. 362)	Spivak (2012, p. 285)	Rudin (1966, p. 26)

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea x cualquier número de $[a, b]$. Si F es la función definida por $$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$ entonces, $F'(x) = f(x)$ $$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$	Sea f integrable sobre $[a, b]$ y definamos F en $[a, b]$ mediante $F(x) = \int_a^x f.$ Si f es continua en c de $[a, b]$, entonces F es diferenciable en c, y $F'(c) = f(c)$.	Sea $f \varepsilon R$ en $[a, b]$. Para $a \leq x \leq b$, hagamos $$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$ En estas condiciones, F es continua en $[a, b]$; además, si f es continua en un punto x_0 de $[a, b]$, F es diferenciable en x_0, y $F'(x_0) = f(x_0)$

En las versiones Leithold y Spivak no se explicita que la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es siempre una función continua en todo su dominio (Figura 1), como sí se explicita en el texto de Rudin. Otra propiedad de la función $F(x)$ que no se enfatiza es que *casi siempre* es diferenciable, excepto en *algunos* de los puntos donde la función $f(t)$ no es continua. Estos dos hechos pueden pasar desapercibidos para un estudiante, al ser opacados por el énfasis puesto en la potencia operativa que se desprende del teorema fundamental del cálculo.

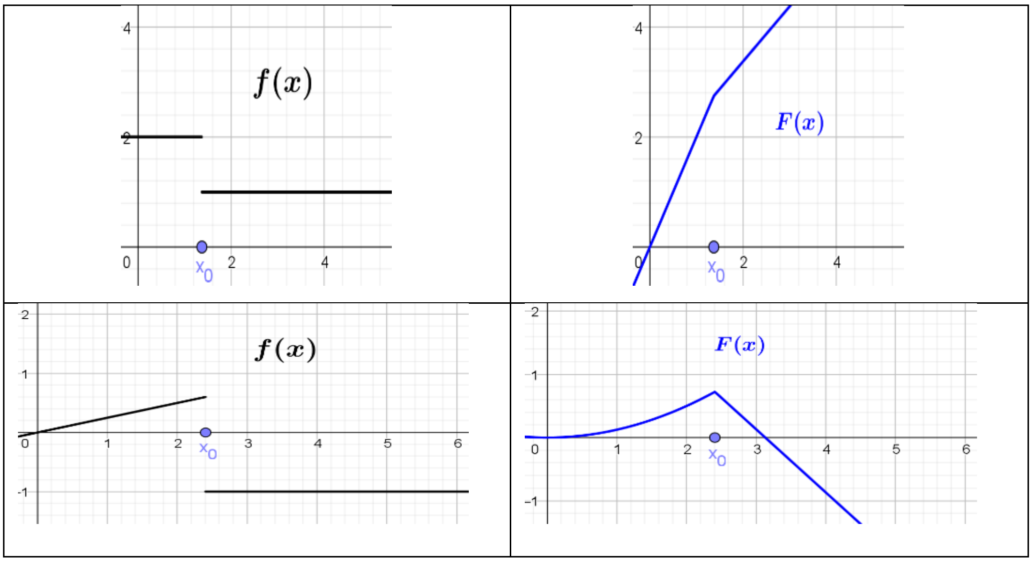


Figura 1. $f(x)$ es discontinua en x_0, pero $F(x)$ es continua en x_0.

Ante esta problemática, proponemos una actividad que ayude al estudiante a refinar y articular sus algoritmos en torno a la integral y el TFC en aras de promover un significado más robusto de estos. La actividad parte del problema, aparentemente simple, de calcular la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para una función discontinua $f(t)$ representada algebraica y gráficamente, y luego trazar su gráfica. Dentro de la actividad, se guía la reflexión de los estudiantes a través de preguntas y tareas ante las cuales pueden emplear sus algoritmos, pero a la vez se promueve la emergencia de conflictos que muestran sus limitaciones y la necesidad de adaptarlos. Luego, con la mediación de la tecnología digital pretendemos potenciar la reflexión del estudiante a través de un applet que le permite graficar diferentes funciones discontinuas y estudiar el comportamiento de la función $F(x)$.

Antecedentes de la actividad didáctica

La actividad que discutiremos fue diseñada tomando en cuenta los resultados obtenidos en un estudio experimental realizado con dos estudiantes de licenciatura en matemáticas, donde exploramos la complejidad de resolver el problema de calcular la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, cuando $f(t)$ es una función discontinua. En esta exploración identificamos los conocimientos matemáticos puestos en juego por los estudiantes al abordar el problema, así como algunas dificultades. Más adelante describiremos el estudio experimental y discutiremos los resultados obtenidos con uno de los estudiantes.

El problema matemático que elegimos para la actividad se inspira en el trabajo de Tellechea (2005), quien plantea un diseño para el estudio introductorio de la integral y del teorema fundamental del cálculo en un entorno gráfico digital creado con el programa Descartes. Como parte de su trabajo, se incluye el tratamiento de funciones continuas y funciones discontinuas para promover establecimiento de conjeturas sobre la continuidad y diferenciabilidad de la función integral correspondiente. La propuesta de Tellechea esboza una ruta didáctica que inicia con el estudio gráfico de sumas de Riemann y concluye con el planteamiento gráfico del teorema fundamental del cálculo.

En el artículo de Robles, Tellechea & Font (2014) se presenta un diseño didáctico que retoma, refina y fundamenta teóricamente la parte del trabajo de Tellechea (2005) que corresponde al estudio gráfico de la integral como función del extremo derecho, así como el teorema fundamental del cálculo. El trabajo de Robles, *et al*. (2014) está diseñado para insertarse en la ruta didáctica planteada por Tellechea (2005). En su propuesta, Robles *et al*., incluyen hojas de trabajo para los estudiantes con tareas específicas que buscan que el estudiante construya, primero de manera estática, la gráfica de la función integral $I(x)$ a partir de la construcción de una tabla con los valores del área $I(x)$ acumulada bajo la curva de una función f, la cual está expresada solo gráficamente. Posteriormente, con la mediación de applets se comprueban los valores obtenidos en la tabla y se verifica la gráfica trazada a partir de esta, tratado de rescatar propiedades generales de las gráficas de la función integral de funciones escalonadas y funciones lineales a trozos. Luego, con la mediación de applets dinámicos, se estudia la linealidad local de la función integral $I(x)$ para relacionar la pendiente de su gráfica en un punto con el valor de la función f en ese punto, arribando a la esencia del teorema fundamental del cálculo. Finalmente, se extiende el trabajo realizado con funciones escalonadas sencillas a funciones escalonadas que aproximan a una función dada f, y se articula esta idea con las sumas de Riemann, para llegar a la función integral $I(x)$ como límite de las integrales de las funciones escalonadas.

Es importante enfatizar que los trabajos de Tellechea (2005) y de Robles, *et al.* (2014) son propuestas para introducir ideas centrales de los conceptos de integral y teorema fundamental del cálculo y que, deliberada y justificadamente, se desarrollan solamente en un ambiente gráfico y numérico, omitiendo en ese momento el trabajo en un contexto algebraico.

Aunque nuestra actividad tiene elementos en común con estos dos trabajos, su diseño, sus fundamentos y su lugar dentro de un curso de cálculo son esencialmente distintos. Nuestra actividad está dirigida a estudiantes que ya estudiaron el teorema fundamental del cálculo, que tienen una noción de integral como área bajo la curva y que pueden emplear algoritmos de integración elementales.

Sustento teórico de la actividad didáctica

El EOS (Godino, Batanero y Font, 2008), es un marco que provee herramientas útiles para analizar detalladamente el significado de un objeto matemático, ya sea este el promovido por una institución o aquel puesto en juego por un estudiante.

En el EOS, las matemáticas se conciben como un lenguaje, como una actividad de resolución de problemas y como un cuerpo organizado y sistematizado de conocimientos. Esta manera de entender las matemáticas permea las nociones centrales de este enfoque.

El EOS es una perspectiva teórica de carácter antropológico pragmático que tiene como noción primaria a las llamadas *prácticas matemáticas*, entendidas como “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 8).

A partir de la noción de práctica se define el *significado* de un objeto matemático como el sistema de prácticas matemáticas significativas (que son útiles para el logro de los objetivos de la actividad realizada) asociado a la resolución de un tipo de situaciones problema. De esta manera, la noción de significado se vuelve relativa a quien realiza las prácticas matemáticas. Si los sistemas de prácticas son propios de un individuo, se habla de *significados personales*, y si los sistemas de prácticas son aquellas compartidas en un grupo o comunidad, se denominan *significados institucionales* (Godino & Batanero, 1998). En términos más coloquiales, se puede entender el significado de un objeto matemático como todo aquello que se puede hacer con el objeto y decir del objeto.

En el contexto de la enseñanza de las matemáticas, cuando se habla de objetos matemáticos solamente se considera a los conceptos o a las definiciones de estos. En el EOS, el término *objeto* tiene un sentido más amplio y a la vez detallado. Se reconoce como *objetos matemáticos* a los emergentes de los sistemas de prácticas asociadas a un tipo de problemas. Cuando nos enfrentamos a un tipo de situaciones problema, en el proceso de solución pueden emerger nuevas situaciones problema, nuevas formas de lenguaje, nuevos procedimientos, nuevas propiedades, nuevos argumentos y nuevos conceptos. Entonces, en el EOS se considera como *objetos matemáticos (primarios)* tanto a las *situaciones problema*, los *lenguajes*, los *conceptos*, los *procedimientos*, las *propiedades* o *proposiciones* y los *argumentos* (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002). Si estos emergentes de los sistemas de prácticas significativas son propios de un individuo, se denominan *objetos personales* y si son compartidos en el seno de una comunidad, se les llama *objetos institucionales*. En este sentido, el propósito general de la enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista del EOS es lograr que los estudiantes, al resolver situaciones problema determinadas, transiten de significaciones personales hacia significaciones institucionales que se toman como referencia en la enseñanza.

El significado institucional de referencia en torno al TFC y la integral

La actividad que diseñamos está dirigida principalmente a estudiantes de ingeniería, por ello, para determinar los significados que queremos promover con la actividad, analizaremos un fragmento del programa[2] de estudios de la asignatura Cálculo

[2]Tomado de http://mat.uson.mx/sitio/documentos/ding/calculo-diferencial-integral-2.pdf

Diferencial e Integral II de la división de Ingeniería de la Universidad de Sonora, en lo referente a los temas de la integral y el TFC (

Tabla 2).

Tabla 2. *Fragmento del plan de estudios.*

CONTENIDO	OBJETIVOS TEMÁTICOS	HABILIDADES ESPECÍFICAS
3. LA INTEGRAL DE RIEMANN. (10 horas) 3.1 Sumas superiores e inferiores de una función acotada. 3.2 La integral superior e integral superior para definir la integral definida de una función acotada en un intervalo cerrado. 3.3 Interpretaciones geométricas y físicas de la integral definida.	Comprender el concepto de Integral definida de Riemann a través de sumas superiores e inferiores. Interpretación geométrica de la integral de una función no-negativa, en términos de área. Utilizar esta herramienta para modelar y resolver problemas geométricos físicos y de la Ingeniería.	• Calcular el área bajo la curva de funciones sencillas, por medio de sumas superiores e inferiores • Modelar y resolver problemas sencillos de la física y la Ingeniería, por medio de sumas superiores e inferiores.
4. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (10 horas) 4.1 Cálculo de integrales definidas para funciones sencillas, en los que el extremo superior es un parámetro. 4.2 La integral como función del extremo superior. 4.3 Continuidad de la función integral . 4.4 El Teorema Fundamental del Cálculo. 4.5 Relación entre áreas y tangentes (Isaac Barrow)	Establecer la relación entre los dos conceptos fundamentales del Cálculo: Derivada e Integral, y la correspondiente relación geométrica área-Tangente.	• Visualizar geométricamente a la Integral como una función del extremo superior. • Antiderivadas e Integral indefinida • Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para encontrar integrales definidas. • Dada una función encontrar gráficamente la función antiderivada. • Resolver problemas que involucren la relación área - tangente.

Un análisis del significado institucional de referencia del Teorema Fundamental del Cálculo y de la integral, muestra su complejidad y la diversidad de objetos matemáticos primarios asociados a ellos.

Dentro del programa de estudios identificamos algunas *situaciones problema* como las siguientes:

- Calcular áreas y distancia recorrida por un móvil
- Calcular antiderivadas gráfica y algebraicamente
- Calcular integrales definidas sencillas e integrales definidas con extremo superior variable

Algunos de los *conceptos* (tanto en *lenguaje* gráfico, como algebraico, así como su *notación* asociada) son:

- Función (expresada algebraica y gráficamente)
- Función continua (curva continua)
- Derivada (como algoritmo algebraico y como pendiente de la recta tangente)
- Sumas superiores e inferiores
- Integral (integral definida, integral como límite de sumas superiores e inferiores, integral asociada a conceptos de área y antiderivada, e integral como función del extremo derecho del intervalo).

- Distancia recorrida (como área).

Los *procedimientos* son:

- Algoritmos algebraicos de derivación y antiderivación de funciones sencillas.
- Cálculo de integrales definidas de funciones simples
- Cálculo de la integral como función del extremo superior.

Proposiciones/propiedades:

- Teorema Fundamental del Cálculo
- La función integral es continua.
- Relación geométrica área-tangente.

Argumentos: no se explicitan.

Para el diseño de nuestra actividad didáctica, seleccionaremos algunos de estos objetos primarios que conforman el significado institucional de referencia, como mostraremos más adelante en la descripción de la actividad.

Prueba experimental previa al diseño de la actividad didáctica

Para el diseño de la actividad didáctica que presentaremos en este trabajo, consideramos los resultados de un estudio experimental que tuvo el propósito de explorar dos aspectos de la situación problema consistente en calcular la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, cuando $f(t)$ es una función discontinua. Nos interesó explorar la complejidad de la situación planteada, así como su potencial para movilizar distintos elementos del significado de la integral, la función y el TFC.

Atendiendo a estos propósitos, realizamos el estudio experimental con dos estudiantes voluntarios de tercer semestre de la licenciatura en matemáticas de una universidad pública de México, que ya habían cursado la asignatura Cálculo Diferencial e Integral II, con el supuesto de que esta condición les permitiría abordar el problema de forma autónoma, argumentar sus suposiciones y resultados, y movilizar diferentes elementos de su significado de los objetos matemáticos involucrados.

La prueba experimental se llevó a cabo con cada estudiante por separado, es decir, no interactuaron entre sí. Se trabajó con cada uno durante 30 minutos en las siguientes condiciones: se les entregó una hoja con el enunciado del problema y se les pidió que explicaran su solución de forma escrita. Los estudiantes tuvieron a su disposición papel y lápiz/bolígrafo únicamente. Sin embargo, durante la resolución del problema, los estudiantes expresaron verbalmente al investigador algunas dificultades o inconsistencias presentadas al resolver el problema. Estos comentarios quedaron registrados en las notas de campo tomadas en cada sesión que, junto con la hoja donde el estudiante plasmó su solución al problema, fueron los instrumentos de recolección de datos.

El problema planteado incluía la gráfica de la función $f(t)$ y el siguiente enunciado:

Sea $f(t)$ una función con dominio en [0,5], cuya gráfica y expresión algebraica son las siguientes: $f(t) = \begin{cases} 2\ para\ 0 \le t < 3 \\ 3\ para\ 3 \le t \le 5 \end{cases}$. Calcula la expresión algebraica de la función F definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ en [0,5] y dibuja su gráfica.

Las respuestas de los estudiantes dan cuenta de la complejidad de un problema que a primera vista parece simple, pues ninguno de los estudiantes resolvió el problema con la primera estrategia que probaron; ambos obtuvieron resultados inconsistentes en algún momento del proceso de resolución, los cuales detectaron y pudieron corregir. Sus producciones escritas indican que fue conflictivo para ellos trabajar con funciones discontinuas, tratando de armonizar los resultados obtenidos en el lenguaje algebraico con aquellos obtenidos en el lenguaje gráfico. Pero a la vez, el problema requirió que pusieran en juego y trataran de articular diferentes significados de la integral y del TFC.

Los elementos teóricos del EOS nos permitieron analizar la riqueza y complejidad del problema planteado, a través del análisis de los significados puestos en juego por estudiantes al intentar resolver el problema. Este análisis constituye, además, la base para el diseño la actividad que presentaremos, la cual incluye preguntas guía y pequeñas tareas que buscan acompañar al estudiante en la solución del problema planteado, considerando las dificultades que se pueden presentar para articular las distintas formas de lenguaje y para construir la función área, como se observó en la prueba experimental descrita.

Dado que el trabajo presentado en este artículo se enfoca en la actividad didáctica diseñada y no en el estudio experimental previo a esta, presentaremos a continuación sólo uno de los casos de nuestro estudio, el cual seleccionamos porque sus producciones son más detalladas y aportan elementos para mostrar la complejidad y riqueza de la situación problema planteada.

El caso de la estudiante C1

La estudiante C1 comenzó con un acercamiento algorítmico en el lenguaje algebraico, poniendo en juego un significado operativo del TFC que se evidenció en el procedimiento de integrar cada una de las expresiones que forman la expresión algebraica de $f(t)$. En este procedimiento algorítmico C1 mostró dificultades con las propiedades de los límites de integración, pues tomó los mismos límites de integración al integrar ambas partes de la expresión algebraica de f (*Figura 1*).

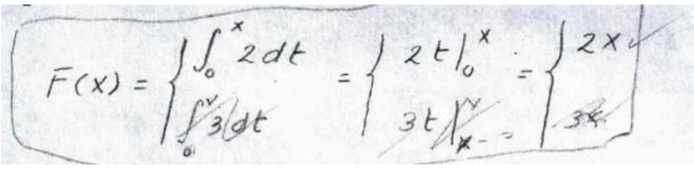


Figura 2. C1 integra cada parte de la expresión algebraica.

El hecho de que C1 aplicó el TFC como algoritmo a una función discontinua sugiere que las hipótesis del TFC, como proposiciones, no estuvieron presentes al trabajar en el lenguaje algebraico. La respuesta de C1 permite inferir prácticas ligadas a la aplicación rutinaria del TFC para la integración de funciones representadas algebraicamente por una única expresión en un intervalo.

Cuando C1 se dispuso a graficar la función $F(x)$ surgieron los conflictos que la llevaron a tachar una parte de su respuesta (lo que corresponde al cálculo de $3x$ en la *Figura 2*). Las producciones escritas de C1 sugieren que al trabajar en el lenguaje gráfico puso en juego un concepto de integral como área bajo la curva que le permitió una reflexión sobre sus procedimientos.

La estudiante dibujó la recta $y = 2x$ como gráfica del primer trozo de la función $F(x)$ en [0,3], luego trazó la recta $y = 3x$ en el intervalo [0,5] y borró esta última (*Figura 3*).

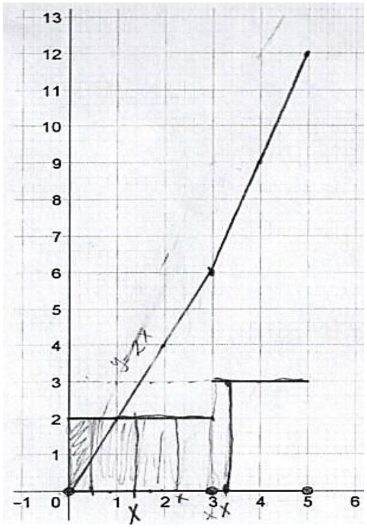


Figura 3. Tratamiento gráfico de F(x).

El hecho de que la estudiante marcara líneas verticales bajo la gráfica de $f(t)$ para diferentes posiciones de x y sombreó algunas regiones, sugiere que puso en juego el concepto de integral como función que, para cada valor de x proporciona el valor del área acumulada bajo la curva desde 0 hasta x, una versión más general del concepto de integral definida.

La estudiante C1 marcó dos puntos en la gráfica, uno de coordenadas (3, 6) y otro de coordenadas (5, 12) y a partir de ello trazó el segundo segmento de recta uniendo los puntos (*Figura 3*). La estudiante C1 expresó verbalmente su conflicto: su respuesta algebraica y gráfica no coincidían, argumentando que el valor del área limitada por la gráfica de $f(t)$ y el eje x en [0,5] es 12, pero cuando $x = 5$, la expresión $y = 3x$ no da ese resultado. Por ello, tachó el resultado de la segunda expresión algebraica para $F(x)$ en la *Figura 2*.

La estudiante está convencida de que la gráfica de Festá formada por segmentos de recta, por ser una antiderivada de funciones constantes; sin embargo, su algoritmo de integración no le proporciona la expresión del segundo segmento de recta.

Luego, la estudiante C1 cambió su estrategia (*Figura 4*). A partir del trabajo realizado en el lenguaje gráfico, se planteó el problema de expresar el área de rectángulos cuya base está determinada por la posición de x. Obtuvo la expresión $2x$ para el área de los rectángulos de base x y altura 2 en el intervalo [0,3]. Después, en el intervalo [3,5] obtiene la expresión $3x - 9$ para el área de los rectángulos de base $x - 3$ y altura 3.

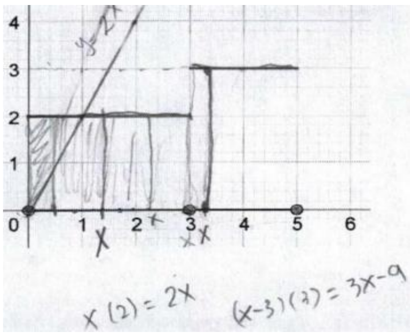
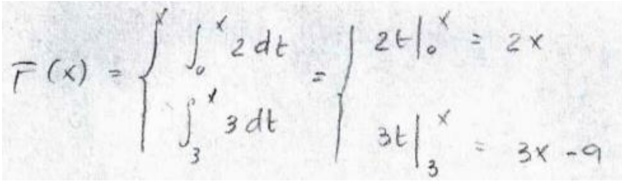


Figura 4. Área de rectángulos.

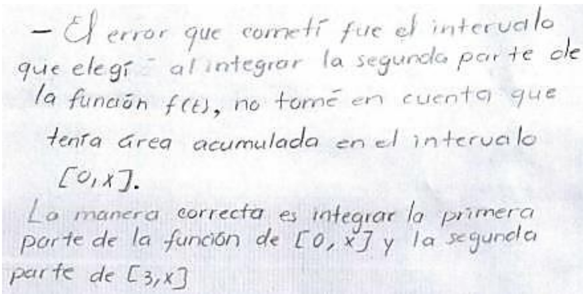
Para la estudiante C1 tomó relevancia el intervalo donde se ubica x, a partir de ello adaptó su algoritmo de integración (*Figura 5*), cambiando los límites de integración en la integral de la segunda expresión de f y obteniendo el mismo resultado que aquel derivado del trabajo en el lenguaje gráfico.



$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 2\,dt \\ \int_3^x 3\,dt \end{cases} = \begin{cases} 2t\big|_0^x = 2x \\ 3t\big|_3^x = 3x-9 \end{cases}$$

Figura 5. Nueva expresión algebraica de F(x).

Finalmente, la estudiante explica de manera escrita su confusión al resolver el problema: "no tomé en cuenta que tenía área acumulada en el intervalo $[0,x]$" (primer párrafo de la *Figura 6*). En su respuesta hay elementos para resolver completamente el problema, sin embargo no logra articularlos completamente, pues termina explicando que "La manera correcta es integrar la primera parte de la función de $[0, x]$ y la segunda parte de $[3, x]$" sin considerar el área ya acumulada en $[0, x]$.



– El error que cometí fue el intervalo que elegí al integrar la segunda parte de la función f(t), no tomé en cuenta que tenía área acumulada en el intervalo [0,x].
La manera correcta es integrar la primera parte de la función de [0, x] y la segunda parte de [3,x]

Figura 6. Explicación de C1 sobre su procedimiento.

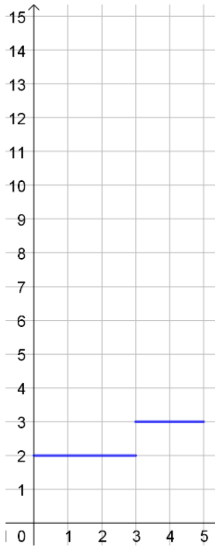
La actividad didáctica

De las producciones de la estudiante C1 se pueden inferir diversas prácticas y objetos primarios que informan de su significado personal de integral y TFC, los cuales informan a su vez los significados promovidos por la institución en la cual realiza sus estudios. Aunque C1 es estudiante de licenciatura en matemáticas, no de ingeniería, consideramos que los significados mostrados son acordes al significado institucional de referencia promovido por el plan de estudios de la División de Ingeniería y por lo tanto los tomamos como guía para el diseño de nuestra actividad.

La actividad que presentamos promueve el trabajo del estudiante en un lenguaje algebraico y en un lenguaje gráfico. Esta característica es una consideración que tiene raíces profundas en el trabajo experimental con C1. Nos percatamos de que el cambio del trabajo matemático de un lenguaje algebraico a un lenguaje gráfico causó conflictos que llevaron a C1 a notar que sus procedimientos algebraicos no arrojaban los mismos resultados que las exploraciones gráficas, lo cual favoreció que C1 tomara consciencia de propiedades de los objetos involucrados, que en el lenguaje algebraico pasaban desapercibidas y que le ayudaron a reformular sus procedimientos algebraicos. Esta situación es reminiscente del principio central del Juego de Marcos de Douady (1986), como medio para generar desequilibrios en el estudiante al notar inconsistencias al cambiar de marco (del algebraico al gráfico) que promuevan el aprendizaje al ser compensados.

La actividad didáctica consta de 5 que describiremos a continuación.

Parte 1. Se plantea el problema siguiente de forma individual, con el objetivo de que cada estudiante ponga en juego sus significados, con un tiempo estimado de 5 minutos para ello.

> En la imagen siguiente se muestra la gráfica de una función definida en el intervalo [0,5], cuya expresión algebraica está dada en dos partes: $f(t) = 2$ cuando t está en el intervalo [0,3] y $f(t) = 3$ cuanto t está en el intervalo [3,5]. Es decir,
>
> 
>
>
> $$f(t) = \begin{cases} 2\ para\ 0 \leq t < 3 \\ 3\ para\ 3 \leq t \leq 5 \end{cases}$$
>
> Calcula la integral $\int_0^x f(t)dt$ en el intervalo [0,5] y dibuja su gráfica en los mismos ejes coordenados.

La función es una función simple que pretendemos permita a los estudiantes apoyarse en el significado de integral como área. A pesar de su simpleza, para un estudiante de ingeniería puede ser extraña una función definida de esta manera.

Parte 2. (5 minutos) Esta parte de la actividad se realiza en equipos (de 3 o 4 estudiantes) y tiene dos propósitos: 1) que los estudiantes comparen sus respuestas para que la diversidad de significados genere una discusión fructífera sobre los conceptos, algoritmos y propiedades presentes en las diversas respuestas. 2) Evocar en los estudiantes el concepto de integral vinculado al área bajo la curva y que lo empleen en sus procedimientos a la par de los algoritmos algebraicos.

Se indica a los estudiantes no borrar sus respuestas a la parte 1 y realizar en equipo las siguientes tareas:

> 1. ¿Cuál es el valor de $\int_0^5 f(t)\,dt$? Explica brevemente cómo lo calculaste.

Se espera que, ante este problema, algunos estudiantes del equipo recurran al concepto de integral como área bajo la curva y otros a la aplicación de un algoritmo de integración y que al obtener resultados distintos discutan cuál es el resultado.

> 2. Gráficamente, ¿qué representa el valor de $\int_0^5 f(t)\,dt$?

Parte 3. (15 minutos) Se pretende que surja y se note un conflicto entre los algoritmos algebraicos y los resultados geométricos y se apoye en distintos conceptos de la integral para resolverlos.

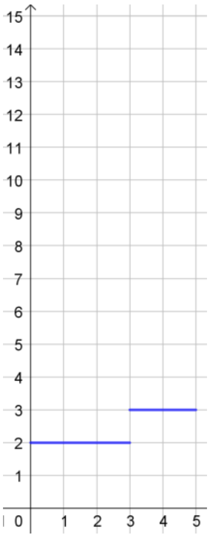
3. Calcula la integral $\int_0^x f(t)\,dt$. Escribe el resultado en el espacio siguiente y explica brevemente tu procedimiento.

Se espera que en esta parte los estudiantes discutan sobre cuál de las expresiones obtenidas en la parte 1 es la más adecuada y cómo saberlo.

4. ¿Qué representa gráficamente la integral $\int_0^x f(t)\,dt$?

La pregunta 4 pretende que los estudiantes reflexionen sobre el concepto asociado a los algoritmos empleados y les proporcione una manera de verificarlos en este contexto esencialmente distinto al trabajo con una función continua representada por una única expresión algebraica.

5. Llamemos $F(x)$ a la función que obtuviste al calcular $\int_0^x f(t)\,dt$, traza su gráfica en los ejes siguientes.



6. Comprueba que tu gráfica y expresión algebraica de la función $F(x)$ se correspondan una a la otra explorando algunos valores específicos de x. Por ejemplo, calcula $\int_0^x f(t)\,dt$ cuando $x = 4$, es decir, el valor de $F(4)$.

Con las tareas 5 y 6 se espera que los estudiantes involucren en su discusión la discontinuidad de la función integrando y se pregunten si la gráfica de la función integral debe o no ser continua. Además, se espera que el concepto de integral como función del área acumulada desde 0 a $x$sea un medio para verificar que la gráfica y la expresión algebraica sean consistentes.

Parte 4. (10 minutos) Las preguntas 7 a 10 pretenden promover y refinar la reflexión sobre la continuidad de la función integral.

7. ¿La función $f(t)$ es continua o discontinua en el intervalo [0,5]? Explica por qué.

8. ¿La gráfica de $F(x)$en el intervalo [0,5] debe ser una sola curva o dos curvas separadas? Explica por qué.

9. ¿Cómo debería ser el valor de $F(x)$ cuando x es un valor muy aproximado a 3, pero menor que 3?

10. ¿Cómo debería ser el valor de $F(x)$ cuando x es un valor muy aproximado a 3, pero mayor que 3?

Al finalizar la parte 4 se sugiere realizar una discusión grupal para acordar cuál es la expresión algebraica y la gráfica de la función $F(x)$, por qué los algoritmos fallan, cuáles son las condiciones del teorema fundamental del cálculo, cuáles fueron las estrategias para resolver el problema.

Parte 5. (30 minutos, trabajo en equipo). En esta parte se complementa la reflexión con la mediación de un applet creado con GeoGebra que permite graficar funciones discontinuas (en el punto c) a partir de dos expresiones algebraicas que se capturan en los campos de entrada como se muestra en la Figura 7. En el applet, los puntos a y b se pueden mover para definir un intervalo de integración. Moviendo el punto c se puede cambiar el punto de discontinuidad de f y al mover el punto x se puede observar el área sombreada desde a hasta x. Las casillas de la derecha permiten mostrar el área sombreada, el punto cuyas coordenadas son $(x, F(x))$ y la gráfica de la función $F(x)$.

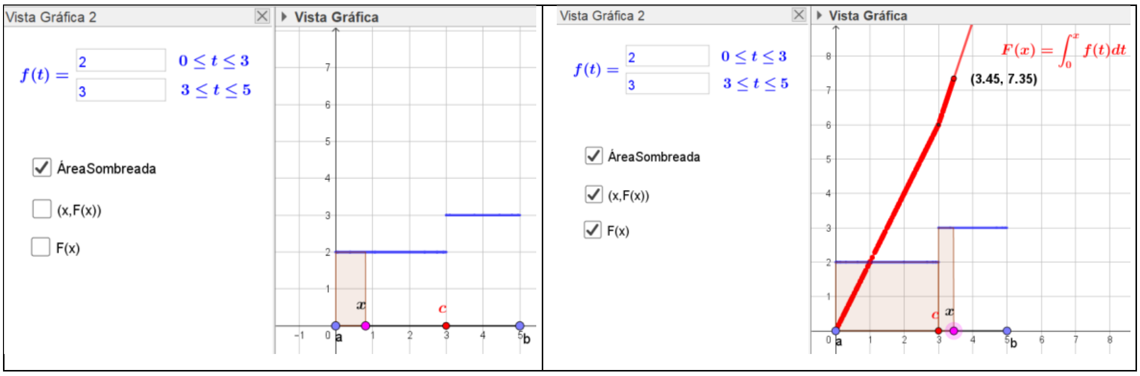


Figura 7. Applet de para el trabajo dinámico

Las instrucciones y tareas para el estudiante son las siguientes:

Abre el archivo Integral.ggb[3]. Se mostrará la función $f(t)$ que estás integrando. El archivo tiene varias características que te permitirán trabajar con otras funciones discontinuas y que explicaremos más adelante. Mueve el punto x y observa que cambia la región sombreada.

11. Completa la siguiente tabla:

x	Área acumulada hasta x	Incremento del área
0	0	--------------------
1	2	2
2	4	2

[3] Disponible en el enlace https://www.geogebra.org/m/uxawvwsk

3		
4		
5		

12. Describe cómo se acumula el área cuando x varía dentro del intervalo [0,3]

13. Describe cómo se acumula el área cuando x varía dentro del intervalo [3,5]

14. ¿Qué pasa con el área acumulada cuando x pasa de ser menor que 3 a ser mayor que 3?

15. Activa la casilla "$(x, F(x))$" y mueve el punto x ¿Explica qué representa el punto nuevo y la gráfica que traza?

16. ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de $F(x)$ en el intervalo [0,3]?

17. ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de $F(x)$ en el intervalo [3,5]?

18. ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de $F(x)$ en $x = 3$?

Al final de la parte 5 se recomienda realizar una discusión grupal para discutir resultados interesantes y relaciones con las partes 1 a 4.

En las clases siguientes, se sugiere trabajar en el applet, planteando el mismo problema de la parte 1 pero variando algunas características que el applet permite cambiar: la función discontinua, el punto de discontinuidad y el intervalo de integración. Se sugiere comenzar con una función positiva, constante en una parte de su dominio y lineal en la otra. Posteriormente, se puede trabajar con una función positiva pero cuyo intervalo de integración no comienza en el cero. Luego, se puede discutir el caso de las funciones que son positivas en una parte del intervalo de integración y negativas en otra.

Conclusiones

La actividad que aquí mostramos se limita a un contexto intramatemático, sin embargo, consideramos que se puede agregar una etapa previa de trabajo para familiarizar al estudiante la integral en otros contextos, como el de movimiento, a partir del estudio de la distancia recorrida y el desplazamiento de un móvil en términos del área bajo la curva y la función integral.

Por otro lado, consideramos que nuestro diseño se puede adaptar, con algunas modificaciones, como instrumento de exploración para realizar un trabajo de investigación sobre los significados y dificultades de los estudiantes en torno a la integral y el uso del TFC y cómo estos significados se transforman a partir de la interacción en equipo, las discusiones grupales y la mediación de la tecnología digital.

Referencias bibliográficas

Carlson, M. P., Smith, N. & Persson, J. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate of change and accumulation: The fundamental theorem of calculus. En *Proceedings of the 2003 Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education-North America*, Honolulu, HI, 2, 165-172.

Cuevas, A., Pluvinage, F., Dorier, J., Hitt, F., Tall, D., Madrid, H., . . . Parraguez, M. (2013). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa*. México: Pearson Educación.

Douady, R. (1986). Jeux de Cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique de Mathematique, 7*(2), 5-31.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Acta Scientiae. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10, 7-37.

Ímaz, C., & Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo. Las trampas del rigor*. México: Trillas.

Jiménez, M. P., & Mejía, H. R. (2015). Una orquestación instrumental para el estudio de la integral definida. *El Cálculo y su Enseñanza, 6*, 71-101. Tomado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/ index.php?vol=6&index_web=12&index_mgzne

Kouropatov, A. & Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge accumulation. *ZDM*, *46*, 533-548. doi: 10.1007/s11858-014-0571-5

Leithold, L. (1998). *El cálculo* (7a. ed.). México: Oxford University Press.

Moreno-Armella, L. (2013). Intuición y rigor: una danza interminable. En C. A. Cuevas et al. (Eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa* (pp. 85-105). México: Pearson.

Moreno-Armella, L. (2014a). An essential tension in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 46*(4), 621-633. doi: 10.1007/s11858-014-0580-4

Moreno-Armella, L. (2014c). Intuir y formalizar: procesos coextensivos. *Educación Matemática*, 26(Número especial), 185-206. Tomado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/2016/08/04/intuir-y-formalizar-procesos-coextensivos/

Nagle, C. (2013). Transitioning from introductory calculus to formal limit conceptions. *For the Learning of Mathematics, 33*(2), pp. 2-10. Tomado de http://www.jstor.org/stable/43894843

Robles, M. G., del Castillo, A. G., & Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación Matemática, 24*(1), 35-71. Tomado de http://somidem.com.mx/revista/vol24-1/

Robles, M. G., Tellechea, E., & Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, *26*(2), 69-109.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 217-233. doi:10.1007/s10649-008-9128-2

Rudin, W. (1966). *Principios de análisis matemático* (2a. ed.). México: McGraw-Hill.

Spivak, M. (2012). *Calculus* (3a. ed.). Barcelona: Editorial Reverté.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. doi: 10.1007/0-306-47203-1

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infitity and proof. En Grouws, D. A. (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 195-511). United States of America: National Council of Teachers of Mathematics.

Tellechea, E. (2005). De la integral de Riemann al teorema fundamental del cálculo: un acercamiento con el applet Descartes. *Memorias de la XV semana regional de investigación y docencia en matemáticas*, Sonora, México, 131-136. Tomado de http://semana.mat.uson.mx/semanaxxvii/memorias.php

Williams, S. R. (1991). Models of limit held by calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219-236. doi:10.2307/749075