



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<http://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Directorio

Rafael Pantoja R.

Director

Volumen VII

Número 2

Fecha: julio-diciembre de 2019

ISSN: 2395-955X

Sección: Selección de
artículos de investigación

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Lourdes Guerrero M.

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON GEOGEBRA

DIDACTICS SEQUENCE FOR LEARNING OF LINEAR EQUATIONS SYSTEMS WITH GEOGEBRA

Edson Gilberto Pérez Pérez, Verónica Vargas Alejo
edzoon@hotmail.com, veronica.vargas@academicos.udg.mx

CUCEI, Universidad de Guadalajara, México

Sección: Experiencias

Docentes

Alicia López B.

Elena Nesterova

Verónica Vargas Alejo

Para citar este artículo:

Pérez, E. G., Vargas, V. (2019). Secuencia didáctica para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con GeoGebra. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 2, pp. 88-97. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

Sección: GeoGebra

Esnel Pérez H.

Armando López Zamudio

Sitio Web

Edgardo Morales O.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 2, julio-diciembre de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: <http://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

**SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE
ECUACIONES LINEALES CON GEOGEBRA**

**DIDACTICS SEQUENCE FOR LEARNING OF LINEAR EQUATIONS SYSTEMS
WITH GEOGEBRA**

Edson Gilberto Pérez Pérez, Verónica Vargas Alejo
edzoon@hotmail.com, veronica.vargas@academicos.udg.mx
CUCEI, Universidad de Guadalajara, México

Resumen

En este artículo se presentan resultados de una investigación relacionada con el aprendizaje de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) para estudiantes de bachillerato. En particular, se describe una secuencia didáctica, basada en la teoría de registros de representación semiótica de Duval y el uso de GeoGebra. La secuencia es el resultado de versiones anteriores, modificadas, ampliadas y refinadas al implementarlas con estudiantes, primero de nivel superior y, posteriormente, de nivel bachillerato. Se compone por applets y hojas de trabajo. Encontramos que aprender SEL implica el uso de diferentes registros de representación asociados con un conjunto de conceptos matemáticos como función, variación, ecuación, incógnita y solución. El uso del software dinámico como GeoGebra se consideró importante porque apoya el aprendizaje de conceptos como variación y función lineal.

Palabras clave: Sistemas de ecuaciones lineales, GeoGebra, solución, estudiantes de bachillerato.

Abstract

In this article we present the findings of a research related to the learning of systems of linear equations for high school students. In particular, a didactic sequence is described, based on Duval's semiotic representations theory and the use of GeoGebra. The sequence is the result of previous versions, modified, extended and refined when it was implemented with undergraduated and high school students. It consists of applets and worksheets. We found that learning SEL involves the use of different representation registers associated with a set of mathematical concepts such as function, variation, equation, unknown and solution. The use of dynamic software such as GeoGebra was considered important because it support the knowledge about the concepts of variation and linear function.

Keywords: Systems of linear equations, GeoGebra, Solution, High school students.

Introducción

En la literatura de investigación internacional (DeVries y Arnon, 2004; Ochoviet, 2009; Segura, 2004) se menciona que los estudiantes de nivel medio superior tienen dificultades con la comprensión del concepto de sistemas de ecuaciones lineales [SEL] y de solución de un SEL. Por ejemplo, los alumnos interpretan que un SEL 2×2 , consistente determinado, tiene dos soluciones, en lugar de interpretar al par ordenado (x, y) como la solución; se observa que los estudiantes generalizan aspectos como este, que han construido en el ámbito

de los sistemas 2×2 , a sistemas 3×3 y reportan que existen SEL 3×3 con tres soluciones relacionadas con el número de variables involucradas. Algunas de estas dificultades están relacionadas con el proceso de enseñanza y la forma tradicional algorítmica como se trabaja el tema en el aula. ¿Cómo apoyar el aprendizaje de SEL por estudiantes de bachillerato?

Existen estudios (Haspekian, 2005; Kieran, 2006; Sutherland y Rojano, 1993; Vargas-Alejo y Guzmán-Hernández, 2012) cuyos resultados muestran que el uso de la tecnología puede apoyar el aprendizaje de SEL y proponen que se realice más investigación que permita proponer el diseño de secuencias didácticas para apoyar con soluciones a la problemática del nivel medio superior en cuanto al aprendizaje del concepto de sistemas de ecuaciones lineales, con apoyo de tecnología. En particular, se necesitan investigaciones apoyadas en resultados de estudios vigentes (García e Izquierdo, 2017), como las que señalan que el software dinámico, como GeoGebra, tiene potencial para apoyar la comprensión de conceptos como variable, función y ecuación, a través del uso de varios registros de representación. ¿Cómo debe diseñarse una secuencia didáctica, basada en GeoGebra, para apoyar el aprendizaje de SEL?

En este artículo se propone y analiza una secuencia didáctica, la cual se sustenta en el uso de representaciones semióticas (Duval, 1993, 1999) y GeoGebra para apoyar el aprendizaje de SEL. El diseño de la secuencia didáctica es parte de una investigación en proceso cuyo objetivo es conocer las dificultades de aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 por estudiantes de nivel bachillerato y apoyar este aprendizaje, mediante el uso de representaciones gráficas, verbales y de la integración de conceptos relacionados como función, ecuación y variación.

Marco Teórico

Un marco teórico que aportó elementos a esta investigación y, por lo tanto, al diseño de la secuencia didáctica es la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1993, 1999). En ella –la teoría– se reitera que para aprender un concepto matemático los estudiantes deben utilizar varios registros de representación y desarrollar habilidades para cambiar de un registro a otro. Duval (1993) afirma que el proceso de comprensión de un concepto matemático implica la coordinación de diversos registros de representación semiótica como lenguaje natural, gráficas, tablas de datos, expresiones algebraicas y representaciones icónicas.

En un análisis cognitivo de dificultades de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas, Duval (2006a) resalta los retos que representa la educación para preparar mejores estudiantes, que hoy se enfrentan a un entorno tecnológico: “los procesos de adquisición de conocimiento matemático son tan complejos que parece ser necesario tener diferentes enfoques” (p.103). Los enfoques a los que se refiere Duval (*ibid*), son las diferentes representaciones que puede tener un objeto matemático.

Para Duval el aprendizaje de las matemáticas requiere un análisis de las actividades cognitivas como son: la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión. Enseñar y aprender matemáticas, requiere de estas actividades cognitivas, además del lenguaje natural y simbólico, y de la utilización de diferentes registros de representación. La actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de

representación. No se puede aprender un concepto matemático sin pasar por el necesario *tratamiento* y *conversión* de diferentes registros de representación semiótica (Duval, 2006b). De acuerdo con esta teoría aprender sistemas de ecuaciones lineales y el concepto de solución implicaría el tratamiento y conversión de distintas representaciones por los estudiantes, lo cual es un elemento esencial considerado en la investigación cuya secuencia didáctica se describe en este artículo.

Por otra parte, GeoGebra es un software de carácter dinámico, que posibilita el uso de diferentes registros de representación semiótica. Se pueden construir applets que apoyen el uso simultáneo de estos por los estudiantes. Además, es una de las herramientas tecnológicas que se sugiere utilizar (García e Izquierdo, 2017; Iranzo y Fortuny, 2009; Tamayo, 2013) para apoyar el aprendizaje de SEL. Pero ¿qué significa aprender SEL? ¿En qué conceptos se debe hacer énfasis al utilizar las distintas representaciones?

De acuerdo con Ochoviet (2009) los alumnos que logran tener éxito al interpretar el número de soluciones de un SEL, son aquellos que han logrado construir la noción de solución a partir de representaciones gráficas asociadas con las representaciones algebraicas. Esta investigadora recomienda que los estudiantes analicen primero un SEL 1×2 , es decir, la ecuación lineal con dos incógnitas, lo que representan estas incógnitas, y las soluciones de la misma; hacer énfasis (mediante el uso de distintas representaciones) en que la ecuación lineal tiene una cantidad infinita de soluciones y cada pareja ordenada es una solución y no dos soluciones.

Por otra parte, Greeno (1991) menciona que un concepto no se puede aprender de manera aislada a otros conceptos, incluso a fenómenos y procesos relacionados. Esto nos conduce a observar que aprender sistemas de ecuaciones lineales implica aprender conceptos como ecuación lineal, incógnita, variación, función lineal y solución, en el marco de problemas que requieran el uso de este conocimiento matemático.

Metodología

La población para la cual se diseñó la secuencia didáctica son estudiantes de nivel bachillerato, con una edad aproximada de dieciséis años. En particular, se pensó en los alumnos que se encuentren estudiando la materia “Matemática y vida cotidiana II” de segundo semestre de bachillerato de la universidad de Guadalajara.

La secuencia didáctica se elaboró en el ambiente de GeoGebra, por el carácter dinámico de la herramienta ya que permite interactuar, no sólo con distintas representaciones semióticas, sino con conceptos como función, ecuación y variación. Se compone de actividades que se deben resolver con applets (figuras 1-4), y tiene como propósito propiciar que el alumno aprenda los diferentes conceptos asociados con sistemas de ecuaciones lineales: como son variable, función lineal, incógnita, ecuación lineal y solución. Todas las actividades se incluyen en hojas de trabajo que acompañan a cada applet. La secuencia está diseñada con base en la teoría de representaciones semióticas de Duval (1993, 1999, 2006a, 2006b). Las actividades requieren que, al resolverlas, el alumno interactúe con diferentes registros de representación (verbal, gráfico y simbólico), de manera que ello le permita comprender e integrar los conceptos matemáticos involucrados durante procesos de *tratamiento* y *conversión* (Duval, 2006).

La secuencia se diseñó para implementarse en 6 sesiones. Los conceptos matemáticos que se abordan se describen a continuación sesión por sesión. Se tomaron en cuenta elementos identificados en el marco teórico por Duval (2006) y Ochoviet (2009).

- Sesión 1 Identificación de conocimientos previos.
- Sesión 2 Resolución de un problema que implica la interacción con un Applet (Figura 1) que involucra los conceptos: ecuación lineal de dos variables, solución, función lineal y variación. Coincidimos con Ochoviet (2009) en que es importante introducir actividades que impliquen la solución de una ecuación lineal de dos variables, previo a la introducción de un SEL 2×2 .
- Sesión 3 Realización de actividades que implican la interacción con un Applet (Figura 2) que incluye representaciones de ecuaciones lineales de dos variables equivalentes.
- Sesión 4 Realización de actividades que implican la interacción con un Applet (Figura 3) que promueve que el alumno construya SEL y analice cuándo un SEL es consistente o inconsistente, determinado o indeterminado.
- Sesión 5 Resolución de un problema, que implica utilizar lo aprendido mediante el uso de un Applet (Figura 4), el cual involucra los conceptos de variación, función lineal, ecuación lineal, incógnita y solución del SEL 2×2 y $m \times 2$. Coincidimos con Ochoviet (2009) en que es importante apoyar el proceso de transferencia del conocimiento aprendido relacionado con solución de un SEL 2×2 .
- Sesión 6 Evaluación de los conocimientos adquiridos.

Los applets diseñados fueron introducidos en cada una de las sesiones, las cuales se describen a continuación.

Sesión 1. Los objetivos son: a) conocer los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre sistemas de ecuaciones lineales (SEL) y conceptos relacionados como variable, función lineal, ecuación lineal, incógnita y solución; b) detectar las dificultades que los alumnos tienen con el uso de estos conceptos y los registros de representación semiótica.

Sesión 2. Se solicita que el estudiante resuelva un problema (Figura 1) que involucra los conceptos: variación, ecuación lineal de dos variables, solución y función lineal. Ello implica que identifique datos, incógnitas y relaciones entre estos. Se propicia que el estudiante trabaje en la *conversión* de diferentes registros de representación semiótica (lenguaje natural, lenguaje algebraico, representación tabular y representación gráfica) e identifique que una ecuación lineal de dos variables tiene infinitas soluciones. Este applet, así como los que se describen en las siguientes sesiones, se acompañan de hojas de trabajo que contienen actividades a realizar con cada applet.

El profesor debe enfatizar en la importancia del *tratamiento* (Duval, 2006) que se le debe dar a la ecuación lineal para expresarla como una función, así como en la *conversión* (Duval, 2006) de las diferentes formas de representación para encontrar la solución de la ecuación lineal de dos variables. El papel del applet construido con GeoGebra es apoyar el proceso de

solución y la *conversión* de registros. En la hoja de trabajo aparece una familia de problemas relacionadas con el problema inicial; cambian los datos y se pide al estudiante resolver de nuevo.

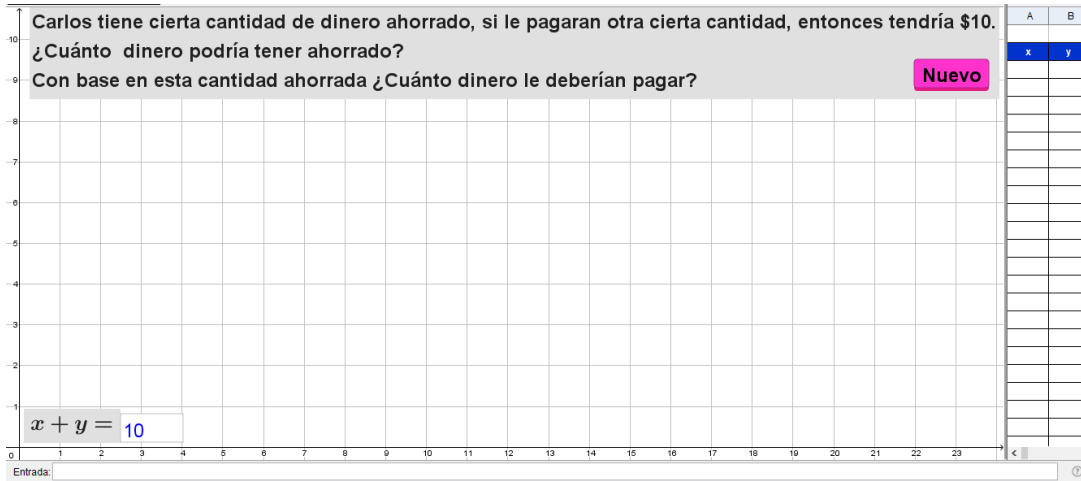


Figura 1. Applet de GeoGebra de la Sesión 2.

Sesión 3. Se propicia que el estudiante retome la representación algebraica de la ecuación lineal proveniente del applet anterior (Figura 1, Sesión 2); obtenga ecuaciones equivalentes y reconozca cuando una ecuación es múltiplo de la otra. Con esta actividad (Figura 2) se busca que el alumno comprenda el concepto de ecuaciones lineales equivalentes. Los estudiantes representarán las ecuaciones lineales mediante los registros: algebraico, gráfico y tabular; conjeturarán y explicarán la construcción de ecuaciones equivalentes.

El profesor deberá enfatizar que la representación gráfica de ecuaciones equivalentes es la misma recta, este conocimiento le servirá como base para la siguiente Sesión 4, donde se trabajará el concepto de SEL. El papel del applet construido con GeoGebra es facilitar el cálculo de múltiplos y divisores de una ecuación lineal de dos incógnitas (*tratamiento*) para que el alumno no realice estos cálculos manualmente y se concentre en el razonamiento asociado con la *conversión* de registros.

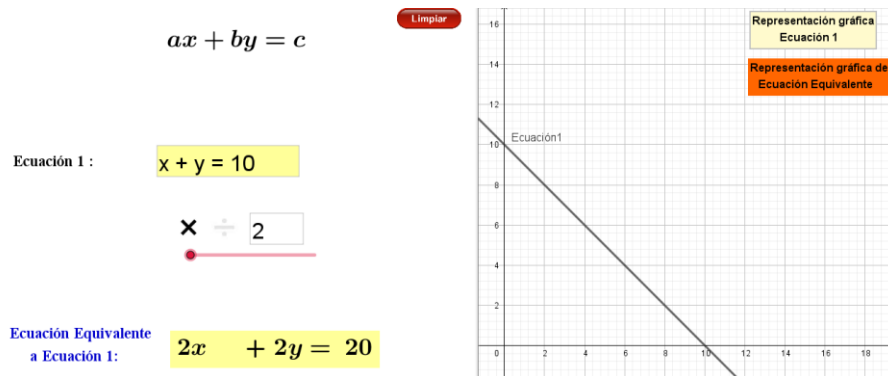


Figura 2. Applet de GeoGebra de la Sesión 3.

Sesión 4. Dado un SEL 2×2 , el estudiante manipulará los coeficientes de las variables para crear sistemas de ecuaciones lineales consistentes (determinados e indeterminados) e inconsistentes (Figura 3). El estudiante identificará las posibles soluciones que tiene un SEL: infinitas soluciones, sin solución y solución única. El estudiante resolverá el SEL utilizando registros de representación: algebraico gráfico y tabular, apoyado por el proceso de *conversión*. Se espera que el estudiante profundice en los conceptos: sistemas de ecuaciones lineales 2×2 , solución, variación y función lineal.

El profesor debe enfatizar los diferentes tipos de solución de un SEL: infinitas soluciones, sin solución y solución única. El papel del applet construido con GeoGebra es apoyar al estudiante a manipular los coeficientes de las ecuaciones lineales, la *conversión* de registros y la identificación de diferentes tipos de solución.

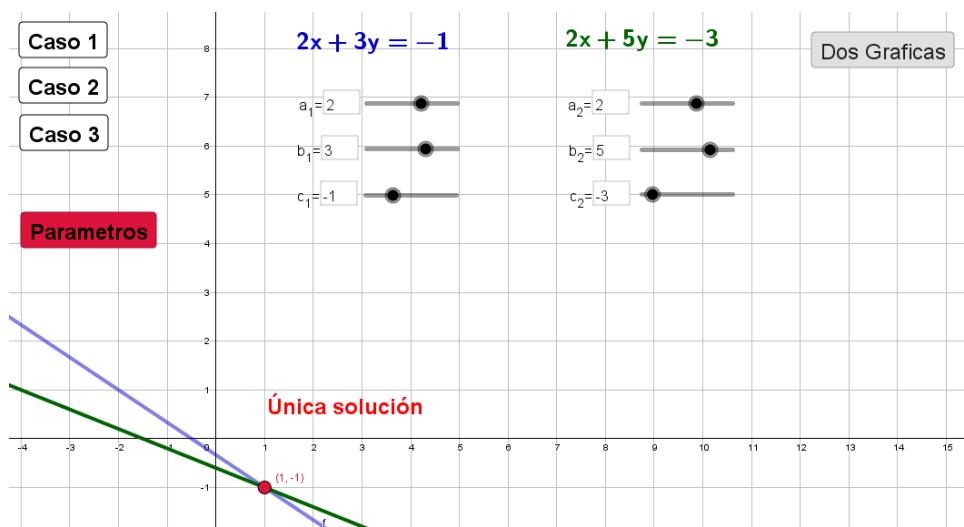


Figura 2. Applet de GeoGebra de la Sesión 4.

Sesión 5. Se solicita al estudiante resolver un problema que involucra: sistemas de ecuaciones lineales 2×2 . Los conceptos que el estudiante requiere utilizar, son los vistos a lo largo de la secuencia didáctica: variación, ecuación lineal de dos variables, función lineal, SEL 2×2 y solución, así como procesos de *conversión*. El estudiante deberá identificar datos, incógnitas y las relaciones entre estos, con el fin de solucionar el problema que se modela mediante un SEL, así como deberán utilizar registros de representación gráfica. Una vez que el estudiante resuelva el problema, se propiciará que transfiera su conocimiento para la resolución de SEL $m \times 2$.

El profesor debe enfatizar en el concepto de solución de un SEL 2×2 y SEL $m \times 2$. El papel del applet es servir al estudiante de apoyo para la comprensión del problema y del concepto solución de un SEL. Puede usarse para que el estudiante incorpore y represente SEL $m \times 2$.

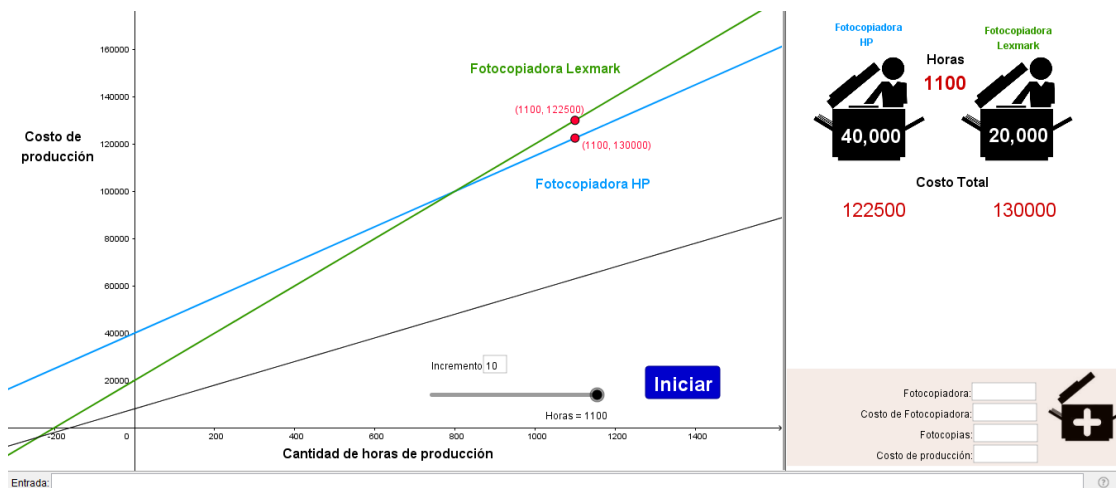


Figura 4. Applet de GeoGebra de la Sesión 5

Sesión 6. Los objetivos son: a) evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes sobre sistemas de ecuaciones lineales (SEL) y conceptos relacionados como variable, función lineal, ecuación lineal y solución, y b) determinar el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje establecidos para cada actividad.

Se propone que la secuencia se desarrolle en un ambiente colaborativo de aprendizaje, donde se propicie el trabajo en binas o equipo, durante la resolución de cada actividad planteada en las hojas de trabajo. Es importante, de acuerdo con ambientes de resolución de problemas (Santos, 2014), que los estudiantes interactúen con sus pares. La formulación de conjeturas, argumentación, comunicación de procedimientos permite que los estudiantes aprendan conceptos matemáticos. Se propone que al final de cada sesión se pase al frente a los estudiantes para que argumenten la solución encontrada. El papel del profesor debería ser de guía y apoyo en la institucionalización del conocimiento, para que el estudiante se apropie del objeto matemático.

Resultados

La secuencia descrita en este artículo, es el resultado de la modificación de dos versiones previas, las cuales fueron aplicadas en fase piloto a distintos estudiantes, primero a uno de nivel universitario y, posteriormente, a dos estudiantes de bachillerato. La primera versión no incluía los applets de las figuras 2 y 3, sino que sólo se componía por los applets de las figuras 1 y 4. En cada applet sólo se incorporaba un problema y no una familia de problemas como en la versión final. El estudiante de nivel universitario, a pesar de conocer el uso de GeoGebra, no pudo resolver el problema diseñado para el applet de la Figura 4, sólo resolvió el problema relacionadas con el applet de la Figura 1. Evidenció dificultades relacionadas con la comprensión de sistemas de ecuaciones lineales, al no poder asociarlo a la solución del problema, aún cuando el SEL se mostraba en forma gráfica en el applet.

Lo anterior implicó profundizar en la lectura de investigación para mejorar la secuencia didáctica. La segunda implementación consistió en el empleo de los cuatro applets en el orden aquí descrito. Sin embargo, las estudiantes no pudieron resolver las actividades, sin ayuda del docente. Esto implicó que se trabajara con más profundidad en las hojas de trabajo. Se

buscó que fueran más detalladas en cuanto a las instrucciones y las actividades propuestas en ellas. Se mejoraron las instrucciones y presentación de cada applet y, finalmente, se obtuvo la secuencia que en este artículo se describe.

Actualmente, se encuentra en proceso la implementación de esta secuencia didáctica en su tercera versión. Se espera lograr los objetivos de aprendizaje planteados y que los estudiantes, a través de la secuencia didáctica, utilicen y transiten entre los diferentes registros de representación semiótica con el apoyo de GeoGebra, dando significado a los conceptos matemáticos involucrados.

Conclusiones

La comprensión conceptual matemática de los estudiantes, de acuerdo con Duval, implica poder reconocer lo invariante entre distintos registros de representación semiótica. En este caso el alumno debería reconocer la solución o no solución de un sistema de ecuaciones lineales. La facilidad que adquieran los estudiantes en el tratamiento y conversión de registros es importante, así como en el manejo de conceptos como función lineal, variación, ecuación lineal, incógnita y solución de un SEL. Consideramos que la secuencia didáctica descrita y construida con base en el marco teórico señalado puede apoyar el desarrollo de conocimiento, es decir, la modificación, extensión y refinamiento del conocimiento de los estudiantes de bachillerato.

Referencias

- DeVries, D., & Arnon, I. (2004). Solution- What does it mean? Helping Linear Algebra Students Develop the Concept While Improving Research Tools. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 55-62.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *In Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*(1), 37-65.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Psychology of Mathematics Education – North America, 21*(2), 3-26.
- Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.
- Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.
- García, J. G., & Izquierdo, S. J. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad, 4*(7), 10-14.
- Greeno, J. G., Collins, A. M., & Resnick, L. B. (1996). Cognition and Learning. In D. C. Berliner & R. C. Calfee, (Eds.), *Handbook of Educational Psychology*. New York: Macmillan.

- Haspekian, M. (2005). Integration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, etude du cas des tableurs. Université Paris-Diderot.
- Iranzo, D., N., & Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 433-446.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the psychology of mathematics education* (p. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.
- Ochoviet, C. (2009). Sobre la entrada al álgebra lineal en el nivel medio: El caso de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis de Doctorado. Cinvestav-IPN, Unidad Legaria. Montevideo, Uruguay.
- Santos, L. M. (2014). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. México: Trillas.
- Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* (Relime). 7(1), 49-78.
- Sutherland, R., & Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 12(4), 353-383.
- Tamayo, E. (2013). Implicaciones didácticas de Geogebra sobre el aprendizaje significativo de los tipos de funciones en estudiantes de secundaria. *Apertura*, 58-69.
- Vargas-Alejo, V., & Guzmán-Hernández, J. (2012). Valor pragmático y epistémico de técnicas en la resolución de problemas verbales algebraicos en ambiente de hoja de cálculo. *Enseñanza de las ciencias*, 30(3), 89-107.