REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VI Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2018

ISSN: 2395-955X

PROCESOS DE OBJETIVACIÓN DEL CONCEPTO DE VARIACIÓN MEDIANTE EL USO DEL LENGUAJE Y DE LA TECNOLOGÍA

José Luis López Hernández

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-IPN, México

jllopez@cinvestav.mx

Para citar este artículo:

Hernández, J. L. (2018). *Procesos de objetivación del concepto de variación mediante el uso del lenguaje y de la tecnología. REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VI, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VI, No. 2, Julio-Diciembre de 2018, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor.

PROCESOS DE OBJETIVACIÓN DEL CONCEPTO DE VARIACIÓN MEDIANTE EL USO DEL LENGUAJE Y DE LA TECNOLOGÍA

José Luis López Hernández

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-IPN, México

jllopez@cinvestav.mx

Resumen

En este artículo se reportan los resultados obtenidos del trabajo en equipo de estudiantes de nivel medio superior de una escuela pública de la Ciudad de México, al resolver Actividades relacionadas con el concepto de variación en torno a problemas geométricos en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico (GeoGebra). Esta investigación es de tipo cualitativo y está apoyada en la Teoría de la Objetivación (Radford, 2008, 2014, 2015), cuyo fundamento principal es el concepto de *actividad*. El acopio de datos se efectuó por medio de videograbaciones, hojas de trabajo y archivos generados con el software GeoGebra acerca del trabajo de los estudiantes mientras resolvían las Actividades. Los resultados sugieren que el uso del lenguaje y de la tecnología, como mediadores semióticos, promueve en los estudiantes procesos de objetivación del concepto de variación a través del estudio de figuras geométricas, tanto en el ambiente de lápiz-y-papel como en el tecnológico (GeoGebra).

Palabras clave: Objetivación, variación, geometría, GeoGebra.

Abstract

In this article are report the results obtained of teamwork carried out by high-school students (grade 11) in Mexico City while they solving the Activities related with the concept of variation regarding the geometric problems using paper-and-pencil and technological (GeoGebra) environments. This is a qualitative research and is supported by the Theory of Objectification (Radford, 2008, 2014, 2015), whose main fundament is the *activity* concept. The data collection was done by video- recording, worksheets and software generated files with GeoGebra of the students' work while solving the Activities. The results suggest that the use of language and technology, as semiotic mediators, promote in the students the objectification processes of the concept of variation in the students, through the study of geometric figures, both in paper-and-pencil and technological (GeoGebra) environments.

Key words: Objectification, variation, geometry, GeoGebra.

Introducción

En el ambiente de lápiz-y-papel, con frecuencia los estudiantes hacen referencia de algo que ya conocen y lo plasman mediante definiciones o teoremas; mientras que en el ambiente tecnológico se aprende por medio de la exploración a través del artefacto, no se memoriza; surgen nuevos conocimientos incluso de algo que ya tenía instalado el estudiante, pero ahora le da otro sentido a los conceptos. Debido a las acciones epistémicas del artefacto para resolver problemas es posible que el estudiante modifique conceptos que utilizó de inicio.

En Geometría euclidiana, los Software de Geometría Dinámica (SGD) brindan al usuario la oportunidad de interaccionar con las construcciones geométricas, modificarlas y desplazarlas en el área de trabajo, descubrir propiedades y formular conjeturas (González & Herbst, 2009).

En este documento es de interés dar cuenta de cómo influye el uso del lenguaje y de herramientas tecnológicas como mediadores del conocimiento en los procesos de argumentación y validación, relacionados con el aprendizaje del concepto de variación, que llevaron a cabo los estudiantes al resolver las Actividades implementadas en un ambiente de resolución de problemas, tanto con el uso de lápiz-y-papel como con el uso de la herramienta tecnológica GeoGebra.

La siguiente pregunta sirve de guía en el desarrollo de este trabajo: ¿de qué manera el uso del lenguaje y de la tecnología, como mediadores, promueve en los estudiantes procesos de objetivación del concepto de variación al resolver problemas geométricos, tanto en ambiente de lápiz-y-papel como en el tecnológico GeoGebra, que involucran dicho concepto?

Referente teórico

Este estudio se apoya en la Teoría de la Objetivación (Radford, 2008, 2014, 2015), cuyo principio fundamental es el concepto de *actividad*. En esta teoría es primordial evidenciar cómo el sujeto aprende el saber cultural mediante la interacción social y los *medios semióticos de objetivación* (Radford, 2006), tales como artefactos y signos (escritos, verbales o gestuales), fuentes básicas de producción de significados (Radford, 2008); los cuales son utilizados por el sujeto para acceder a los objetos matemáticos. Entre los gestos destacan los que se llevan a cabo con las manos con la intención de aclarar o enfatizar lo expresado por medio del lenguaje escrito o hablado.

Para la Teoría de la Objetivación, el concepto de *actividad* es la fuente de realización personal y social que transforma la conciencia. Radford (2015, pp.133, 134 y 137), concibe el conocimiento a partir de la potencialidad (capacidad para ser o hacer) y de la actualidad o lo concreto. Afirma que el conocimiento no es estático sino dinámico, está en constante evolución; transita de lo potencial a lo actual mediante la actividad al usar los medios semióticos de objetivación.

Los objetos de estudio se transforman en algo concreto, en objetos de pensamiento y de conciencia; entonces surge el aprendizaje. La actividad mediadora del conocimiento potencial al conocimiento actual se lleva a cabo por medio de procesos sociales a través de los cuales los estudiantes se convierten gradualmente al conocimiento crítico constituido históricamente tanto de significados culturales como de formas de pensamiento y acción. De acuerdo con Radford (2015, p.139), estos son llamados procesos de objetivación. De esta manera, el conocimiento en el salón de clases es el resultado de actividades que propician la interacción de estudiantes con sus pares y de estudiantes con el profesor, que promueven la reflexión, la postura crítica, la solidaridad y la responsabilidad de unos y otros.

Metodología

Esta investigación es de tipo cualitativo. Participaron 12 estudiantes de nivel medio superior de distintos grupos de una escuela pública en la ciudad de México –que cursaban en ese momento la asignatura de geometría analítica–. Como parte de la metodología se diseñaron

Actividades para ser resueltas en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico (GeoGebra). Los estudiantes en equipos de dos integrantes fueron video-grabados al resolver las Actividades en ambos ambientes de trabajo con el propósito de analizar cómo el concepto de variación emerge y evoluciona (como proceso de objetivación) mediante el uso del lenguaje y de la tecnología.

El diseño de las Actividades propició el trabajo en equipo y se solicitó a los participantes dar argumentaciones y respuestas específicas en la resolución de cada una de las Actividades; éstas contienen figuras geométricas que facilitaron la comprensión de cada pregunta.

El acopio de datos se llevó a cabo por medio de videograbaciones, hojas de trabajo y archivos generados con el software. Debido a limitaciones de espacio, en este artículo sólo reportamos el trabajo de un equipo resolviendo una Actividad en ambos ambientes de trabajo.

Análisis de datos y discusión de resultados

El discurso llevado a cabo por los estudiantes durante el desarrollo de las Actividades implementadas es un modo de interacción social, una práctica social, una reflexión mediatizada por los artefactos, materiales o cognitivos, como signos, lenguaje y objetos, entre otros (Radford, 2006). En este artículo, para llevar a cabo el análisis de datos se toma en cuenta cómo se relacionan los diferentes modos de aclarar y comunicar conocimientos por parte de los estudiantes mediante el uso del lenguaje y de artefactos durante la resolución conjunta de las Actividades (Radford, 2014), ya que lo hablado, lo gestual y lo escrito están inmersos en un contexto social como procesos de interpretación y producción de significados (Radford, 2006).

En seguida se describe la Actividad reportada en este documento, se muestran los extractos de la discusión y reflexión que llevaron a cabo los estudiantes Toño y Pedro (pseudónimos) del Equipo 1 al resolverla, tanto en el ambiente de lápiz-y-papel como en el tecnológico (GeoGebra) y se analizan los datos obtenidos de su trabajo.

Descripción de la Actividad

Considera un conjunto de rectángulos de área constante $A_0 = ab$, con base a y altura b variables, cuyo perímetro es $P = 2a + 2b$. Entonces, $b = \frac{A_0}{a}$ y $P = 2a + 2\frac{A_0}{a}$, es decir, $P = 2\left(a + \frac{A_0}{a}\right)$; con $a \neq 0$. En la Figura 1 se muestra cómo varían el lado b y el perímetro P (al variar el lado a) de todos aquellos rectángulos cuya área es $A_0 = ab = 20$ unidades cuadradas.

Actividad para resolver en ambiente de lápiz-y-papel (A_LyP)

De acuerdo con la Figura 1, se les pide a los participantes explicar cómo varía el valor de b respecto del valor de a y cuál significado tienen estas variaciones.

Actividad para resolver en ambiente tecnológico GeoGebra (A_TG)

Los estudiantes abrieron un archivo en GeoGebra que muestra la construcción referente a la Figura 1. Ellos arrastraron el deslizador a y observaron qué ocurrió con los puntos R y P. Entonces se les pidió explicar la variación del valor de b respecto del valor de a, lo que ocurre con el área y el perímetro de estos rectángulos para $a = 0$ y para $b = 0$ y cuál es el significado geométrico que tiene la variación del perímetro de los rectángulos cuando varían sus lados pero el área se mantiene constante.

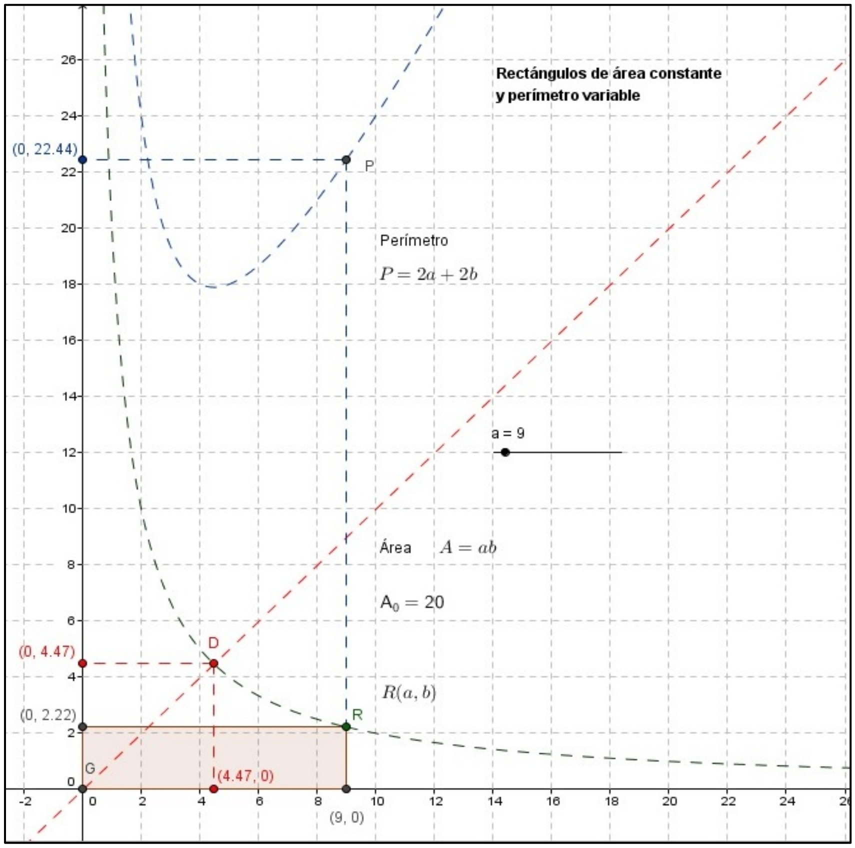


Figura 1. Rectángulos de área constante.

Resolución de la Actividad en ambiente de lápiz-y-papel (A_LyP)

Uso de lenguaje: ordinario, gestual y simbólico

Episodio 1: Comprensión de la Actividad. Identificación de lugares geométricos. [**A_LyP**]

Los estudiantes se enfocaron en comprender primero el enunciado de la Actividad, en identificar, utilizar e interpretar los datos, tales como las expresiones algebraicas y cada una de las curvas presentes en la gráfica.

L1. Pedro: Como ésta es constante [*señala y recorre con el dedo la recta* $y = x$] debe ser el área. Sí mira. [*Señala con su dedo el deslizador* a *dibujado en la Figura 1*]

L2. Toño: […] Pero esta no es constante. La constante es 20. Si estuviera representada el área sería una línea aquí [*con su dedo describe una recta horizontal que pasa por* $y = 20$]. [*Véanse las Figuras 2a, 2b y 2c*] ¿Sí? [*Y aprueba con su dedo pulgar hacia arriba; Figura 2d*]

En L2 de este Episodio 1, Toño utilizó una secuencia de gestos referentes a una idea o acción abstracta para explicar a Pedro cómo es la gráfica que corresponde al área constante de los rectángulos. Aquél imaginó trazar con su dedo, de izquierda a derecha, la recta $y = 20$, la cual no se representa en el papel. Con ese movimiento de su dedo sobre la hoja (figuras, 2a, 2b, 2c), Toño dio significado al hecho de que la altura b es la misma para cualquier valor de a. Pedro comprendió cómo es la representación geométrica de una función constante en el plano, en particular de $y = 20$.

(2a) (2b) (2c) (2d)

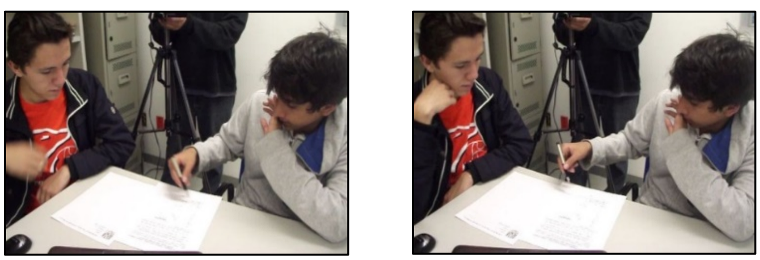
Figura 2. Toño explica a Pedro cómo sería la gráfica que corresponde al área de los rectángulos. Él imagina que traza con su dedo (de izquierda a derecha) la recta $y = 20$.

Los estudiantes centraron su atención en la curva relacionada con $b = \frac{20}{a}$ y en la relacionada con $P = 2a + 2\frac{20}{a} = 2\left(a + \frac{20}{a}\right)$ (véase de la línea L3 a la línea L6 de este Episodio 1).

L3. Toño: La otra curva probablemente es b, es el valor de b. Porque tendría sentido que entre a se volviera mayor [*señala y recorre con la pluma la curva asintótica a los ejes coordenados; Figuras 3a y 3b*], el valor de b se volviera menor…

L4. Pedro: Y si a se vuelve menor, el valor de b se vuelve mayor. Incluso se aproximan…

L5. Toño: Sí, al punto [*señala D*], sí. Entonces sí, supongo que ésta [*de nuevo señala y recorre con la pluma la curva asintótica a los ejes coordenados; figuras 3a y 3b*] es el valor de b en función de a.



(3a) (3b)

Figura 3. Toño explica cómo varía b respecto de a, conforme el valor de a va de menos (3a) a más (3b).

En L3 de este Episodio 1, Toño utilizó una secuencia de gestos para explicar cómo es la gráfica que corresponde a la variación del lado b respecto del lado a de los rectángulos. Él imaginó trazar con su pluma, de izquierda a derecha, la curva asintótica a los ejes coordenados. Con ese movimiento sobre la hoja (figuras, 3a y 3b), Toño se aproximó cada vez más al eje de las abscisas (X) y dio significado a la manera en que varían los valores de b conforme varían los de a; mientras el valor de a crece el de b decrece y viceversa.

A continuación, los estudiantes estudiaron el momento en que el valor del perímetro es mínimo (véanse de la línea L6 a L8 de este Episodio 1).

L6. Toño: Ok, entonces…Sí, tiene sentido que el valor sea mínimo [*se refiere al perímetro* P] cuando ambos son iguales [*se refiere a que* $a = b$].


(4a) (4b)

Figura 4. Pedro utiliza gestos para explicar qué sucede con el perímetro P de los rectángulos cuando sus lados crecen o decrecen. Si disminuye el valor de a crece el de b (4a) y si crece el valor de a disminuye el de b (4b).

L7. Pedro: Sí porque, piénsalo así, si tú tuvieras que tus lados miden uno, [*el área valdría una unidad cuadrada y*] sería el perímetro de cuatro, y si tú esa razón la aumentas al doble sería dos [*de la base*] por un medio [*de la altura*] [*es el valor del área*], tu rectángulo. Entonces el perímetro sería cinco. […]. Y si lo haces al revés [*dos de la altura por un medio de la base*] también sería cinco [*el valor del perímetro*]. [*Véase Figura 4*]

L8. Toño: Sí claro, sí comprendo.

En la línea L7 de este Episodio 1, Pedro da a entender, con ayuda de una secuencia de gestos, cómo varía el perímetro P de los rectángulos cuando sus lados crecen o decrecen respectivamente. Si disminuye el valor de a entonces crece el de b (Figura 4a), si crece el valor de a disminuye el de b (Figura 4b) conservándose el valor del área; lo cual explica con movimientos sincronizados de sus dedos de una y otra mano; mientras los dedos de la mano izquierda se juntan (la longitud de la base disminuye) los de la derecha se alejan (la longitud de altura crece), y viceversa.

En la medida en que las manos de los estudiantes se movieron se convirtieron en signos en sincronía con lo hablado. Palabras y gestos se coordinaron y reflejaron la evolución del proceso de objetivación del conocimiento de los participantes en relación con la variación de los lados de los rectángulos y del perímetro.

La Figura 5 muestra los conjuntos de números reales para posibles valores de a y de b.

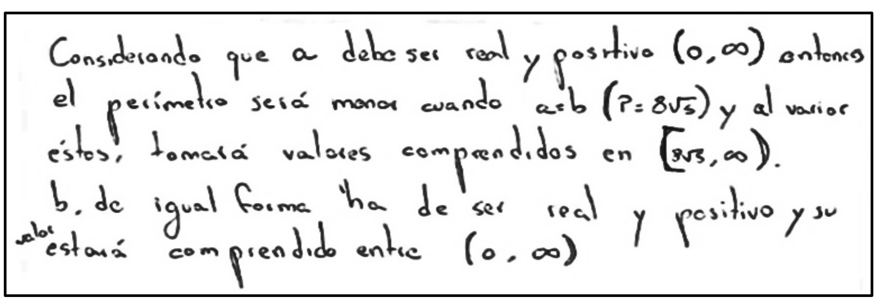


Figura 5. Uso del lenguaje ordinario y simbólico para explicar parte de lo solicitado en A_LyP.

Los participantes usaron el lenguaje simbólico en gran parte de la Actividad para refiere a algoritmos específicos acerca de objetos concretos, como se muestra en la Figura 6, en la que explicaron y justificaron que el cuadrado es el rectángulo de perímetro mínimo.

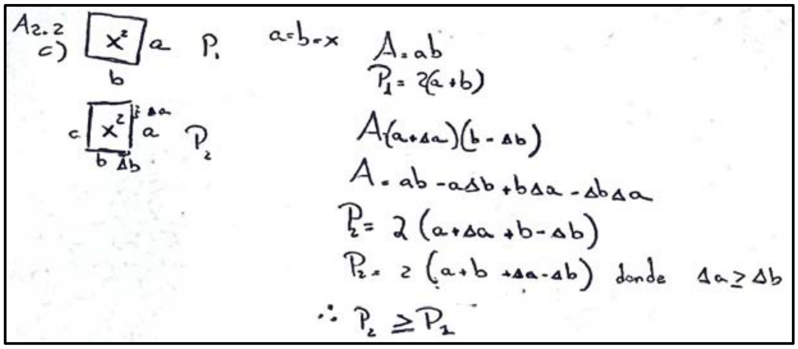


Figura 6. Uso del lenguaje simbólico por parte de Toño y Pedro para explicar cómo varía el perímetro de los rectángulos y cuándo este es mínimo.

Los participantes usaron el concepto de límite de una función (que se estudia en tercer año de bachillerato) para explicar cómo varía la variable b respecto de la variable a (véase Figura 7). Ellos no lograron explicar dicho concepto con sus propias palabras, lo cual hace pensar que ellos no habían reflexionado acerca de dicho concepto y que por tanto aun no lo comprendían. No obstante, identificaron las variables involucradas, cómo varían unas respecto de otras y entendieron el significado de dichas variaciones.

A pesar de que los estudiantes cometieron algunos errores en su afán por expresar sus ideas por medio del lenguaje simbólico y que por momentos no fueron muy claros en sus explicaciones, ellos han comprendido cómo varían los lados de los rectángulos, y en consecuencia, cómo varía el perímetro de todos aquellos rectángulos cuya área es constante.

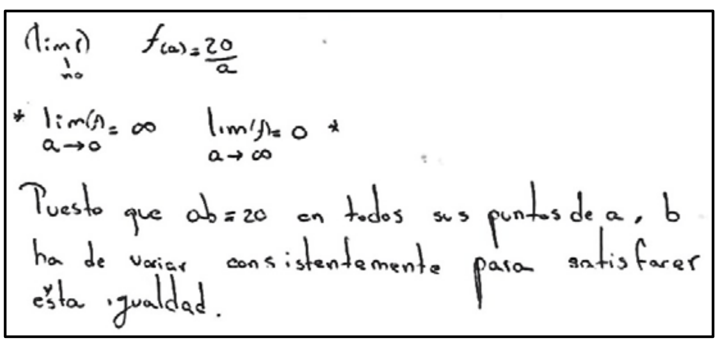


Figura 7. Uso del lenguaje ordinario y simbólico por parte de los estudiantes para dar respuesta a la sección (b) de A_LyP. Expresión de b como función de a.

Las respuestas por escrito de los participantes sintetizan su discurso y dan evidencia de sus constantes reflexiones y evolución de su conocimiento como parte del proceso de objetivación acerca del concepto de variación conforme resolvieron la Actividad.

Resolución de la Actividad en ambiente tecnológico GeoGebra (A_TG)

Trabajo con el artefacto (lenguaje y signos)

Episodio 2: Pensar y actuar con el artefacto. Aproximaciones. [**A_TG**]

Toño y Pedro hablaron en diferentes momentos del comportamiento de las funciones presentes en términos de aproximaciones, de lo que sucede en las cercanías de cierto valor y no de lo que ocurre en ese valor específico (véase de la línea L1 a la línea L5 de este Episodio 2). Aquí, la dinámica de la construcción estuvo a cargo del *deslizador* a.

L1. Toño: Aquí vemos que si a crece [*mueve el deslizador* a], el valor de b nunca toca cero, y pues es muy lógico porque a y b deben tener como producto 20, entonces cero por cualquier cosa…

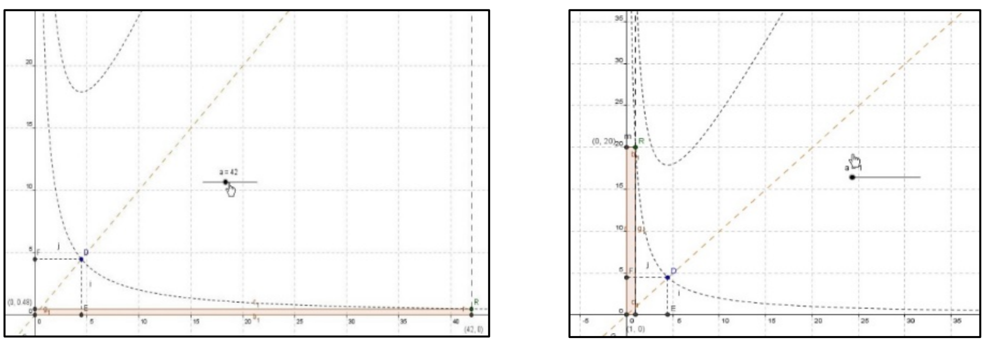
L2. Pedro: No daría 20.

L3. Toño: Pues es cero, no es 20. Entonces sí, cuando a crece… b decrece.

L4. Pedro: Aproximándose, más no tocando…

L5. Toño: Hacia cero, pero en ningún punto es realmente cero. [*Véase Figura 8*]

Con el uso del *deslizador* y del *zoom* de la herramienta tecnológica GeoGebra, fue posible para los estudiantes llevar a cabo una reflexión más profunda y comprender mejor, que con sólo lápiz y papel, por un lado, cómo varía b respecto de a, y por otro lado, porqué los valores de a o de b no pueden ser cero, debido a que la curva es asintótica a los ejes coordenados. Su discurso se desarrolló en términos de aproximaciones aprovechando el carácter dinámico de la construcción.



(8a) (8b)

Figura 8. Variación del lado b conforme varía el lado a. Si a crece entonces b decrece (8a). Si a decrece entonces b crece (8b)

Veamos lo que ocurrió en el momento de referirse a las longitudes de los lados de todos aquellos rectángulos de área constante A_0 cuyo perímetro es mínimo.

L6. Pedro. Los lados son iguales.

L7. Toño: Sí. Está un poco difícil de controlar aquí [*el deslizador* a] porque no le puedo dar a la raíz de… porque sólo está moviéndose en enteros [*el deslizador* a]. Pero cuando R corte aquí [*señala con el cursor el punto D*] a la función identidad, vamos a tener un mínimo, porque vamos a tener un cuadrado y sus lados van a ser raíz del número. […] Y todos los rectángulos [*de igual área*] que tienden a que sus lados son iguales tienen su mínimo perímetro [*Véase Figura 9*]

L8. Pedro: Cuando son cuadrados.

L9. Investigador: ¿Y si les dan otro ejemplo donde el área sea más grande o más pequeña que 20 [*unidades cuadradas*]?

L10. Pedro: Va a ser lo mismo.

L11. Toño: Pues sí, se mantienen las propiedades.

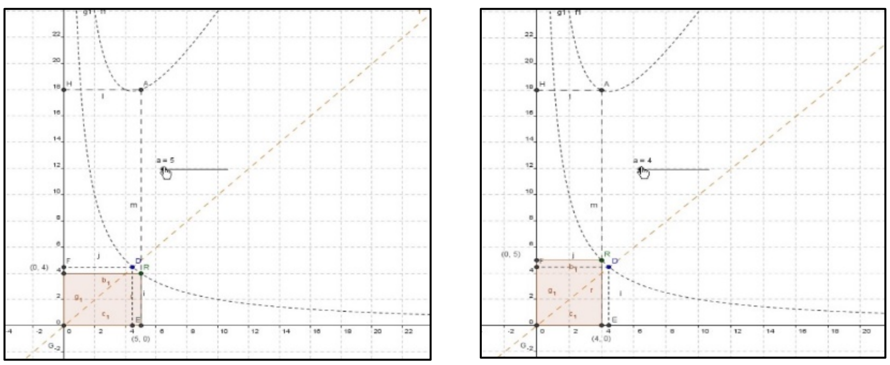
L12. Investigador: ¿Las gráficas para el área y perímetro serán similares a estás?

L13. Toño: Sí.

L14. Pedro: Sí porque… sólo que este punto por ejemplo [*señala con la pluma el punto D*] en lugar de ser raíz de veinte será raíz de… lo que sea el área.

L15. Investigador: ¿Cómo interpretan la recta $y = x$?

L16. Toño: Está para indicarnos el punto donde ambos lados [*del rectángulo*] son iguales, en este caso sería el punto *D*; o sea que aquí [*en la gráfica correspondiente señala con el cursor el valor mínimo del perímetro*] el valor del perímetro es el mínimo en este punto [*señala con el cursor el punto D*], lo colocaría ahí pero el deslizador sólo da enteros [*mientras mueve el deslizador* a]. [*Véase Figura 9*]



(9a) (9b)

Figura 9. Los rectángulos son muy parecidos a un cuadrado (*R* se aproxima a *D*). En (9a), $a > b$; mientras que en (9b), $a < b$.

Mientras Toño y Pedro desplazaron el *deslizador* a observaron el comportamiento de los puntos *P* y *R*. Entonces argumentaron que el punto *R* debe coincidir con el punto *D* (sobre la recta $y = x$), y por consiguiente que $a = b$, para que sea mínimo el perímetro de todos aquellos rectángulos de área constante A_0 (veánse las líneas L7, L15 y L16 de este Episodio 2). Toño observó que los posibles valores para el deslizador a eran números enteros y que por tanto no podría hacer coincidir los puntos *P* y *R*, tomando en cuenta que el valor del perímetro de los rectángulos es mínimo en el momento en que sus lados a y b son iguales a la raíz cuadrada de su área (que no siempre arroja un valor entero), es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado.

Al aproximar a un cuadrado varios rectángulos en un mismo escenario (véase Figura 9) los estudiantes reafirmaron su conocimiento en relación con la variación del perímetro y reflexionaron acerca de las diferencias [llamadas incrementos también por ellos] (véase L7 de este Episodio 2) entre las longitudes de los rectángulos cuya área es constante. Así, las propiedades geométricas de los objetos se conservaron aun cuando éstos se deformaron con el uso del *arrastre*. Toño y Pedro pensaron, actuaron y justificaron su respuesta con el uso de GeoGebra como un medio semiótico de objetivación.

En seguida, Toño y Pedro complementaron lo explicado en la línea L7 respecto al significado geométrico que tiene la variación del perímetro de los rectángulos cuando varían sus lados, pero el área se mantiene constante.

L17. Pedro: Cuando varía cualquiera de los lados… a en este caso.

L18. Toño: Sí, mientras se mantengan las proporciones en estos [*se refiere a que los lados a y b de estos rectángulos cumplen con $ab = 20$*]…; o sea, mientras se mantiene el área el perímetro es variable y crece indefinidamente cuando aumenten o disminuyan sus [*lados del rectángulo*]… [*Véase Figura 8*]. Y tendrá un mínimo [*se refiere al perímetro de estos rectángulos*] cuando a sea igual a b. [*Véase Figura 9*]

Los participantes le dieron sentido a la variación de b respecto de a y comprendieron cómo dicha variación influye en el perímetro de los rectángulos (cuyo valor es mínimo cuando los valores de a y b coinciden) a pesar de que su área permanece constante (véanse las líneas L7, L16, L17 y L18 de éste Episodio 2). Se observa que Toño y Pedro pensaron, reflexionaron y justificaron su respuesta con el uso de GeoGebra como un medio semiótico de objetivación.

En la Figura 10 se muestra la respuesta escrita de los estudiantes.

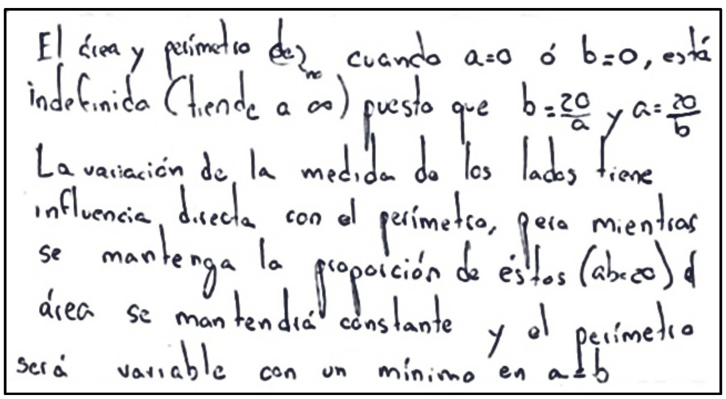

El área y perímetro de no cuando $a=0$ ó $b=0$, está indefinida (tiende a ∞) puesto que $b=\frac{20}{a}$ y $a=\frac{20}{b}$
La variación de la medida de los lados tiene influencia directa con el perímetro, pero mientras se mantenga la proporción de éstos ($ab=20$) el área se mantendrá constante y el perímetro será variable con un mínimo en $a=b$

Figura 10. Respuesta escrita de los estudiantes a la sección (b) de A_TG.

Conclusiones

Durante la resolución de la Actividad con lápiz-y-papel [A_LyP], los estudiantes utilizaron el lenguaje gestual de manera significativa para complementar lo hablado y escrito, así entendieron y explicaron mejor sus ideas; el compartir su conocimiento fue más sencillo. En tanto, con el uso de GeoGebra, ellos arrastraron el deslizador para estudiar diversas trayectorias descritas, respectivamente, por diferentes puntos.

Durante la resolución de la Actividad con la herramienta tecnológica [A_TG], los participantes observaron y entendieron, mediante la dinámica de la construcción, lo estudiado e imaginado en el ambiente estático, tal como la variación de los lados de los rectángulos, y por consiguiente, de su perímetro cuando mantienen constante su área; o la presencia de distintas variables y su relación entre ellas, entendiendo cómo varía una respecto de otra, de qué dependen dichas variaciones y cuál es su significado geométrico.

Con el uso del software, el discurso de los estudiantes se desarrolló más en términos de aproximaciones, como en los momentos en que incorporaron los conceptos de función y límite de una función (éste último se comienza a estudiar en cálculo diferencial de nivel medio superior).

El análisis de datos de este estudio sugiere que el uso del lenguaje y de la tecnología, como mediadores, promueve en los estudiantes procesos de objetivación del concepto de variación, a través del estudio de figuras geométricas, tanto en un ambiente estático como dinámico.

Referencias bibliográficas

González, G. & Herbst, P. (2009). Students' conceptions of congruency through the use of dynamic geometry software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14,* 153–182.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría dela objetivación [ ]. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial, 103-129.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. In Radford, L., Schubring, G. and Seeger, F. (eds.), Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture, Rotterdam, NL, Sense Publishers, pp. 215–234.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2), 132-150.

Radford, L. (2015). The Epistemological Foundations of the Theory of Objectification. Isonomia, 127-149.