



# REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores  
del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V      Número 1      Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

## Directorio

Rafael Pantoja R.

Director

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Lourdes Guerrero M.

Sección: Selección de  
artículos de investigación

Elena Nesterova

Alicia López B.

Verónica Vargas Alejo

Sección: Experiencias

Docentes

Esnel Pérez H.

Armando López Zamudio

Sección: Geogebra

ISSN: 2395-955X

## GENERALIZACIÓN A TRAVÉS DE SUCESIONES FIGURALES EN BACHILLERATO

Mónica Torres Ibarra, Elvira Borjón Robles, Leticia Sosa  
Guerrero, Nancy Calvillo Guevara

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

mtorres@matematicas.reduaz.mx, borjonrojo@hotmail.com,  
lsosa19@hotmail.com, ncalvill@matematicas.reduaz.mx

Para citar este artículo:

Torres, M., Borjón, E., Sosa, L. (2017) Generalización a través de sucesiones  
figurales en bachillerato. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1.  
Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de  
Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: [revista@amiutem.edu.mx](mailto:revista@amiutem.edu.mx). Dirección electrónica: <https://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

# GENERALIZACIÓN A TRAVÉS DE SUCESIONES FIGURALES EN BACHILLERATO

Mónica Torres Ibarra, Elvira Borjón Robles, Leticia Sosa Guerrero, Nancy Calvillo Guevara

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

mtorres@matematicas.reduaz.mx, borjonrojo@hotmail.com, lsosa19@hotmail.com,  
ncalvill@matematicas.reduaz.mx

**Palabras clave:** sucesiones figúrales, generalización, álgebra, representaciones

## Resumen

La presente investigación tiene por objetivo promover la generalización de patrones reconocida como uno de los procedimientos principales de la producción del conocimiento, partiendo de sus tres problemas fundamentales: Fenomenológico, epistemológico y Semiótico (Radford, 2013), particularmente se promueve el desarrollo del pensamiento algebraico. Se diseña e implementa un instrumento apoyado de tecnología (Microsoft Word, Geogebra y Moodle) que permite identificar los diferentes elementos que componen el concepto de sucesión: dominio, codominio, conjunto discreto de puntos, etc. a partir de una aproximación visual de secuencias figúrales de patrones, buscando con ello un acercamiento al concepto de sucesión en alumnos de bachillerato. Este trabajo tiene relevancia debido a que las sucesiones aparecen en los diferentes niveles de educación en México y en pruebas de ingreso a nivel profesional.

**Keywords:** figurative sequences, generalization, algebra, representations

## Abstract

The present research aims to promote the patterns generalization recognized as one of the main procedures of production knowledge, starting from its three fundamental problems: Phenomenological, Epistemological and Semiotic (Radford, 2013), particularly promotes the development of algebraic thinking. It is designed and implemented an instrument supported by technology (Microsoft Word, Geogebra and Moodle) that allows to identify the different elements that make up the concept of succession: domain, codominio, discrete set of points, etc. from a visual approximation of patterns sequences of figures, thus seeking an approach to the concept of succession in high school students. This work has relevance because successions appear in the different levels of education in Mexico and professional admission tests.

## Introducción

La habilidad de contar con un razonamiento matemático está presente en la vida diaria y se fomenta en los planes y programas de estudio en la Educación básica en México, como lo describen Torres, Borjón y Hernández (2013), quienes hacen un análisis de los objetivos planteados en cada uno de los niveles sobre el tema de sucesiones; ellas mencionan la importancia de este concepto al promover en el educando desde la noción de orden,

pasando por la formulación de relaciones y creación de reglas, hasta la interpretación de modelos en diferentes situaciones; que convergen necesariamente en la generalización.

Sin embargo, llegar a esta generalización no es una tarea fácil, Radford (2012) menciona que los alumnos tienden a centrarse en la estructura numérica de los términos y no en su estructura espacial y que esta última es la que provee los índices perceptivos generalizables, indicando que, para lograrlo, el alumno debe pasar por procesos de determinación y abstracción.

Con base en ello, se trabaja en una propuesta que pone en juego estructuras espaciales por medio de sucesiones figúrales, que con el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, como apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje, contribuye en la formación de imágenes mentales que encaminan al alumno a la estructuración del concepto de sucesión.

Por otra parte, el trabajo con representaciones figúrales ha estado enfocado a niveles de enseñanza básica, sin embargo, consideramos que poner en juego este tipo de estrategias en niveles avanzados permitirá acceder a un entendimiento conceptual, en concordancia con lo que afirma Zimmermann (1990, citado en Hitt, 2003, pág. 217)

*Conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso de cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema.*

*Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual, el cual es ampliamente reconocido como carente en la mayoría de los cursos de cálculo como es actualmente enseñado. La manipulación algebraica ha sido enfatizada en demasía y . . . en el proceso el espíritu del cálculo se ha perdido.*

Así pues, el trabajo se fundamenta en la representación figural, a partir de la cual se propiciará un tránsito entre diferentes representaciones del concepto de sucesión, lo que permitirá que el alumno externe sus imágenes mentales, es decir, la visualización que alcanza.

### **Referente Teórico**

Trabajar con el tema de sucesiones, promueve en los educandos un razonamiento matemático que permite alcanzar diversos niveles de abstracción para representar y dar solución a un problema determinado. De acuerdo al análisis de Torres, Borjón y Hernández (2013), en el nivel bachillerato, el aprendizaje esperado al trabajar con sucesiones es que el estudiante pueda “Analizar las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento”, así pues, el contenido de nuestra propuesta está encaminado a potenciar el pensamiento algebraico del concepto de sucesión al identificar los elementos que componen al mismo y generalizarlo, es decir, estimar el comportamiento en un punto.

Partimos de la premisa de que la generalización, debe atender tres problemas fundamentales mutuamente relacionados que menciona Radford (2013, pág. 3):

1. *Fenomenológico, planteado alrededor de la escogencia de las determinaciones sensibles, un problema en el que participan entre otros, la intuición, la intención, la atención y la sensibilidad.*
2. *Epistemológico, que consiste en la extrapolación o generalización propiamente dicha y a través de la cual se produce el nuevo objeto.*
3. *Semiótico, que resulta de los medios a través de los cuáles se denota el objeto generalizado.*

De esta manera, una secuencia figural, permitirá a los alumnos identificar determinaciones sensibles como similitudes y diferencias de patrones, que no solo se basen en cantidades, sino en formas, colores, acomodados, etc., de acuerdo con los elementos que envuelven la generalización:

1. *Una característica común local es notada a partir de un número finito de términos, esta etapa requiere hacer una escogencia entre determinaciones sensibles potenciales.*
2. *Esa característica es generalizada a los otros términos de la secuencia. La generalización puede ser algo que es solamente plausible (abducción):*
  - a. *Cuando es usada para pasar de un término a otro, llegamos a una generalización aritmética – No hay deducción.*
  - b. *Cuando se realiza por ensayo y error, los alumnos producen la fórmula, pero no la deducen – Todavía no es algebraica.*
  - c. *Cuando la característica es utilizada de manera analítica, usada para producir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término llegamos a una generalización algebraica.*

(Radford, 2013, pág. 6-7)

La figura 1, muestra en forma de diagrama, lo que Radford (2013) expresa para lograr la generalización algebraica de secuencias figurales

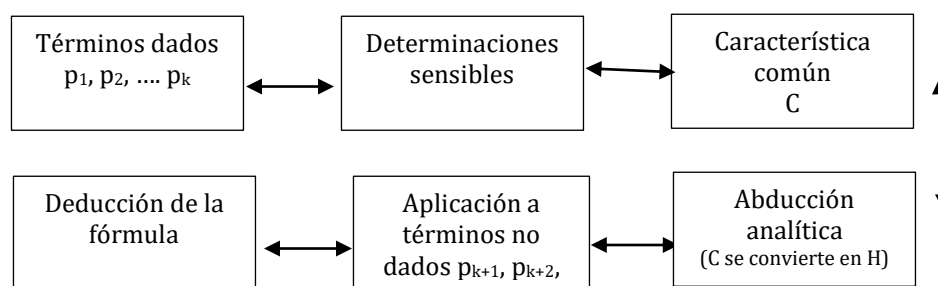


Figura 1. Diagrama del proceso de generalización algebraica de secuencias figurales (Radford, 2013)

Para encaminar a la abducción, se hace uso de algunas representaciones semióticas, (Duval, 1999), entendidas como “una forma de exteriorizar las representaciones mentales por medio de producciones constituidas por el empleo de signos, Las producciones se pueden representar de forma verbal, numérica, algebraica y gráfica; pueden incluir diferentes formas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones

tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc.”, es decir, estas representaciones pueden ser utilizadas con la como una forma visualización, donde los alumnos exterioricen las determinaciones que dan lugar a sus conclusiones.

Zimmermann y Cunningham (1991) describen la visualización matemática como “el proceso de formar imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con ayuda de tecnología) usando tales imágenes efectivamente para un descubrimiento y comprensión matemática”. En este sentido, entendemos por visualización la exteriorización de imágenes mentales con que los alumnos logran encaminarse hacia la conceptualización, que va más allá de la simple percepción, en concordancia con Hitt (2003), quien afirma que:

*La percepción la tomaremos como la función por la que la mente de un individuo organiza sus sensaciones y se forma una representación interna de los objetos externos, en cambio, la visualización tiene que ver con un conocimiento directo e intuitivo que se realiza inconscientemente.*

*(Hitt, 2003, pág. 207)*

Para alcanzar este objetivo, hacemos uso de software dinámico, en la idea de que este contribuirá en la formación y exteriorización de imágenes mentales, que, por medio de la visualización, encaminará a los estudiantes hacia la conceptualización de una sucesión, en concordancia con la idea de Hitt (2003), quien afirma:

*Es necesario implementar en el aula de matemáticas tareas en las que la actividad matemática demande el uso coherente de diferentes representaciones. La tecnología, desde este punto de vista, servirá como herramienta fructífera para la construcción de conceptos matemáticos más profundos que se reflejen en procesos exitosos por parte de los estudiantes en la resolución de problemas.*

*Hitt (2003, pág. 218)*

## **Metodología**

La propuesta consta de una secuencia didáctica compuesta por cuatro ejercicios (en los que se trabajan dos sucesiones lineales y dos sucesiones cuadráticas) y un cuestionario guía, con el objetivo de aproximarlos a la generalización de sucesiones figúrales, con el apoyo de software para su ejecución, utilizado de la siguiente manera:

1. GeoGebra. Serie de aplicaciones diseñadas con la finalidad de que los alumnos interactúen, mediante representaciones figúrales, tabulares y gráficas, el comportamiento de las sucesiones que intervienen en la propuesta. (figura 2)

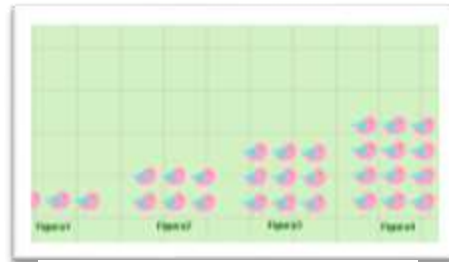


Figura 2. Aplicación en Geogebra

2. Microsoft Word. Instrumento en el que se describen, a través de preguntas guiadas, los pasos para llevar a cabo la secuencia, además, en él se almacenan los resultados de la experimentación individual de cada alumno (figura 3).



Figura 3. Cuestionario contestado en MSWord

3. Plataforma Moodle. Permite a los participantes tener acceso a los materiales diseñados, y una vez realizada la secuencia, es la base para la recogida de datos, los alumnos cuentan con datos para ingresar a la misma (figura 4).



Figura 4. Entorno de la plataforma Moodle utilizada

Con la interrelación de estas aplicaciones (ver figura 5), se espera que los alumnos sean capaces de:

- 1) Identificar el número de elementos de la figura dada en la  $n$  posición de una sucesión,
- 2) Ver a la sucesión como un conjunto de parejas ordenadas
- 3) Identificar dominio y codominio de los conjuntos de parejas obtenidos y
- 4) Generalizar la sucesión mediante representaciones analíticas.



Figura 5. Algunas de las sucesiones presentadas en GeoGebra

La dinámica se estructura de la siguiente forma: Se trabaja en dos sesiones de 50 minutos, con dos grupos de bachillerato, de 10 alumnos cada uno, los cuales tienen a su disposición un equipo de cómputo con acceso a internet para su trabajo individual; los alumnos acceden a la plataforma Moodle para descargar los archivos necesarios, trabajan simultáneamente entre GeoGebra y Word, (ver figura 6)



Figura 6. Alumnos interactuando entre las aplicaciones

En GeoGebra manipulan el valor de  $n$  como un deslizador que genera determinadas posiciones de la sucesión, así, mediante la representación figural se caracterizan los problemas fenomenológicos, la representación tabular exterioriza los problemas epistemológicos y la representación gráfica y algebraica permiten analizar las estructuras semióticas, además, la representación verbal expresada en el archivo de Word, permitirá analizar la dimensión espacial que la secuencia figural les permite visualizar; finalmente, los participantes guardan las modificaciones en el archivo correspondiente y lo suben a la plataforma Moodle, donde se concentran para su posterior análisis.

Una vez almacenados los archivos, se termina la sesión y se procede a realizar la categorización de acuerdo con la fenomenología que propone Radford (2013), al mismo tiempo, se analiza si los alumnos identificaron las componentes del concepto (dominio, rango).

## Resultados



A continuación, se presentan los principales resultados categorizados en fenomenológicos, epistemológicos y semióticos, separados de acuerdo con el tipo de problemas abordados en cada uno:

1. Problemas fenomenológicos, centrados en la representación figural.
  - a. Problemas con sucesiones de comportamiento lineal, solo el 20% de los participantes pudieron descontextualizar la representación figural de su valor numérico, un ejemplo de ello se muestra en la figura 7, identificando que la secuencia tiene un comportamiento establecido entre el dominio y el rango, denotando con ello que para el nivel bachillerato, no se trabajan determinaciones sensibles de posición, si no que se encuentran en una dimensión epistemológica, en la que determinan el valor a través de una fórmula, es decir, logran una generalización aritmética.

Y, ¿Cómo crees que se final 2 estrellas de figura m

Si Susana quiere construir la figura 30, explica ampliamente lo que debe hacer para construirla. **Pues debe poner 3 de base y el número que quiere llegar en este caso 30 de altura**

*Figura 7. Representación verbal con identificación espacial*

- b. Ejercicios de sucesiones con comportamiento cuadrático, el 11% de los participantes reflejan en sus respuestas determinación basada en forma y estructura de los componentes de la figura en la  $n$  posición (como se muestra en figura 8), mientras que 5 de cada 10 dan su argumento en base a una determinación numérica (ver figura 9).

**El número de la figura, y el número de flores que contiene se relaciona de la manera  $n^2$ , es decir que a medida que el número de la figura aumenta, los elementos que posee la figura es el número de posición que ocupa por el mismo, en forma de un cuadrado, es decir de base el número de la posición de la figura y de altura el mismo número hasta cubrir toda la superficie de un cuadrado**

*Figura 8. Identificación espacial de una función cuadrática*

**Que aumenta una fila de base de 3 estrellitas en cada figura al deslizarse y va aumentando 3 estrellitas en cada figura.**

*Figura 9. Determinación aritmética del comportamiento de la función*

2. Problemas epistemológicos, centrados en una representación tabular en la aplicación creada, donde los participantes interactúan con una representación tabular del concepto, autocompletando algunos campos y permitiendo que el usuario completara algunos otros situados estratégicamente, relacionando lo que se visualiza en la representación figural y el comportamiento a predecir en determinado punto (ver figura 10), esta estrategia permitió observar si los participantes utilizan un razonamiento epistemológico o semiótico a la hora de determinar valores numéricos.





Figura 10. Tránsito entre la representación figural y tabular del concepto

Los resultados muestran que el 50% de los participantes argumentan su respuesta basados en una estrategia epistemológica (figura 11), mientras que el 42% emplea una estrategia aritmética (figura 12) donde observan además vestigios del empleo de estructuras semióticas (figura 13); lo que permite deducir que para los estudiantes de bachillerato tiene un efecto más favorable la visualización numérica.

2. ¿Encuentras alguna relación entre los números que completaste?  
Se multiplica el número de la figura por ella misma y se le suma 1

Figura 11. Uso de estrategias aritméticas

¿Encuentras alguna relación entre los números que completaste? Es la figura al cuadrado más 1.

Figura 12. Uso de estrategias epistemológicas

¿Encuentras alguna relación entre los números que completaste?

$$f(n) = 3n - 1$$

Figura 13. Uso de estrategias semióticas

3. Estructuras semióticas, siguiendo el guion de la propuesta, una vez que los participantes logran transitar de la representación figural a la tabular, es momento de analizar el comportamiento de la sucesión en una representación gráfica (ver figura 15); en este sentido, se observa que esta representación es un elemento que les permite identificar en la mayoría de los casos de manera muy rápida una función y argumentar con base en estructuras semióticas, un ejemplo de ello se muestra en la figura 14. Cabe mencionar que esta representación causó sorpresa en los participantes al visualizar que los elementos de una sucesión se representan gráficamente como un conjunto de puntos discretos.

De acuerdo a lo que observas, ¿qué relación existe entre los puntos y la función que graficaste en el punto anterior? Es una función elevada al cuadrado una parábola  
Va aumentando de forma exponencial.

Figura 14. Argumentación en base a la representación gráfica

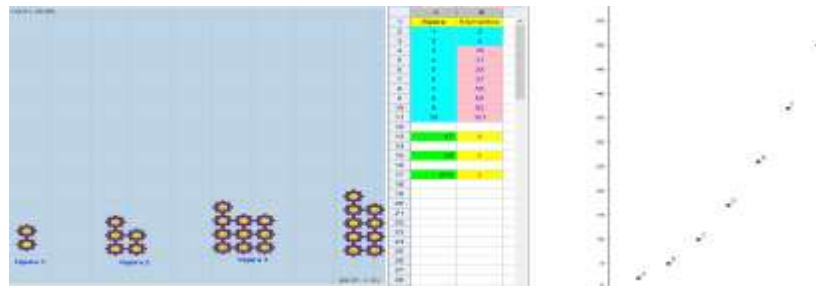


Figura 154. Manipulación de la secuencia en 3 representaciones simultáneas

Sin embargo, en relación con los problemas semióticos, aunque si bien el 93% de los participantes pudieron estructurar una fórmula que generalizará la secuencia, o bien describirla con sus propias palabras, existieron casos aislados en que este paso no se alcanzó, como se muestra en la figura 16.

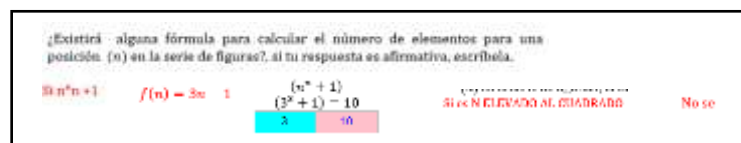


Figura 16. Algunas generalizaciones presentadas

- Identificación de elementos del concepto, una vez que los estudiantes fueron visualizando los comportamientos en diferentes representaciones, se les pidió que detectaran algunos de los elementos del concepto, punto en el que se crearon algunas confusiones, al no relacionar la primera componente de las parejas ordenadas con el dominio de la función, en este caso el lenguaje influyó de sobremanera, pues ellos no lo habían trabajado como componentes de parejas, sin embargo sus respuestas dan muestra también de que tienen clara la diferencia entre el dominio y el rango de la función, un ejemplo de esto se muestra en la figura 17.

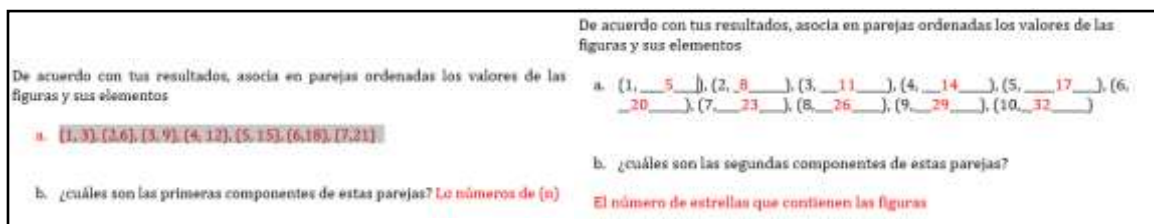


Figura 17. Identificación de dominio y rango

## Conclusiones

El análisis de los resultados obtenidos en la puesta en marcha, ponen de manifiesto que los estudiantes de bachillerato son capaces de interpretar una sucesión figural, detectando en ella de manera acertada los elementos de la función, sus conjeturas dejan ver que hay indicios de una apropiación vaga del concepto.

Con respecto a alcanzar una visualización, encontramos si bien en su mayoría los estudiantes de bachillerato alcanzan un nivel epistemológico respecto a la representación figural, les es posible acceder al nivel semiótico una vez que el concepto se les presenta en las diferentes representaciones.

Respecto al uso de sucesiones figúrales en el nivel bachillerato, los resultados nos muestran que este tipo de representaciones permite a los estudiantes desprenderse del análisis aritmético y detectar la estructura espacial del concepto.

En general, consideramos que el uso de tecnología permitió la visualización matemática en el sentido de Zimmerman y Cunningham debido a que se partió de una imagen para deducir diversas componente de la sucesión, como por ejemplo conjunto de parejas ordenadas cuyo primer elemento es un número natural.

### Referencias bibliográficas

- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano* (Traducido por Myriam Vega Restrepo). Santiago de Cali Colombia: Artes Gráficas Univalle.
- Hitt, F. (2003). Una Reflexión sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2
- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4) (pp 117-133)
- Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En Rico, L., Cañadas M. C., Gutiérrez, J, Molina, M. y Segovia I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática, Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 2-12). Granada España: Editorial Comares
- Torres, M., Borjón, E., Hernández, J. (2013). Una aproximación al concepto de sucesión con uso de tecnología por medio de representaciones semióticas en el nivel bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 2011-2018). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Zimmermann, W., y Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. *Visualization in teaching and learning mathematics*, 1-7.