REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

httpS://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen V Número 1 Fecha: Enero-Junio de 2016

ISSN: 2395-955X

Directorio

Artículo Páginas

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero-Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 28 de Diciembre de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

COMITÉ DE EVALUACIÓN

Karla Liliana Puga Nathal
Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán

Lilia López Vera
Universidad Autónoma de Nuevo León

Ricardo Ulloa Azpeitia, Verónica Vargas Alejo, Humberto Gutiérrez Pulido, Elena Nesterova
CUCEI. Universidad de Guadalajara

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

EL USO DE TECNOLOGÍA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: UN ANÁLISIS DESDE EL TPCK Y EL MKT

Cesar Martínez Hernández, Lilia P. Aké Tec

Universidad de Colima (México)

cmartinez7@ucol.mx, liliapatricia_ake@ucol.mx

Para citar este artículo:

Martínez, C. y Aké, L. P. (2016). El uso de tecnología en la formación de profesores de matemáticas: un análisis desde el TPCK y el MKT. Uso de tecnología y enseñanza de las matemáticas en el nivel superior en zacatecas. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

EL USO DE TECNOLOGÍA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: UN ANÁLISIS DESDE EL TPCK Y EL MKT

Cesar Martínez Hernández, Lilia P. Aké Tec

Universidad de Colima (México)

cmartinez7@ucol.mx, liliapatricia_ake@ucol.mx

Palabras clave: Formación de profesores, tecnología, MKT, TPCK.

Resumen

Se expone una propuesta sobre el uso de tecnología en la formación de profesores de matemáticas, basada en la noción del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) y en el Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPCK o TPACK) a partir del análisis y discusión de un ejemplo del uso de GeoGebra, en el contexto de un programa de posgrado sobre formación-profesionalización de profesores de matemáticas.

Introducción

La formación inicial del profesor de matemáticas es uno de los temas de investigación que ha cobrado interés en la comunidad de investigadores en la Educación Matemática (Llinares & Krainer, 2006). Respecto al uso de tecnología y el papel del profesor, las investigaciones se han centrado, principalmente, en su implementación en el aula, en las modificaciones de la práctica y en las concepciones sobre las ventajas de su uso (*e.g.*, Doerr, Arleback & O'neil, 2012; Johnston, 2010, Ruthven, Hennessy, & Brindley, 2004).

Si bien se reconoce la importancia del uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas, también se reconoce que ésta ha tenido un impacto limitado en el cambio de la práctica del profesor, lo cual, puede deberse al poco desarrollo de la comprensión del rol del profesor y su práctica en ambientes tecnológicos (Doerr, *et al*., 2012), más aún, sobre el papel de la tecnología en su formación inicial. Respecto al uso de tecnología en la formación y en la práctica del profesor, varias investigaciones se sustentan en el denominado TPCK (*Technology-enhanced Pedagogical Content Knowledge*) (Niess, 2005; Niess, Lee, Sadri & Suharwoto, 2006), también conocido como *Technological Pedagogical Content Kowledge*, ahora conocido como TPACK (en este documento se utiliza indistintamente los acrónimos TPCK y TPACK) (Mishra & Koehler, 2006) que refiere al conocimiento que el profesor de matemáticas debe tener sobre el uso de la tecnología para la enseñanza.

Sobre el conocimiento del uso de tecnología para la enseñanza de las matemáticas, algunos investigadores (*e.g*., Niess, 2005) han estudiado el TPCK desarrollado por futuros profesores de matemáticas y ciencias (en formación), en un programa que involucró el uso de dispositivos de recolección de datos (sensores), de acuerdo con esta investigación, la naturaleza de la disciplina y el cómo los profesores visualizan la tecnología son factores importantes en el desarrollo del TPCK. Por su parte, Niess et al. (2006) reportan sobre un programa diseñado para promover en ellos el TPCK para la enseñanza de las matemáticas con hoja de cálculo. Este modelo sobre el conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas, ha sido utilizado en contextos distintos al mundo anglosajón e intentado aplicarse en otras regiones.

En términos de Johnston (2010), el TPACK trata sobre el conocimiento que el profesor debe tener respecto a: la tecnología disponible, los criterios de evaluación de ésta y lineamientos para su uso apropiado. Sin embargo, este modelo no involucra el uso de tecnología para el desarrollo del conocimiento sobre el contenido matemático, que el futuro profesor debe poseer. En el contexto mexicano, los programas de formación del profesor de matemáticas son diversos, desde las escuelas normales para la educación básica y profesionistas universitarios para la educación media superior y superior.

Pocas instituciones del nivel universitario ofrecen programas de licenciatura sobre la enseñanza de las matemáticas. Además, es común que los programas universitarios de ingeniería y ciencias, incluyan como un perfil de egreso a la docencia. En este sentido, preguntas que cobran relevancia son: ¿cuál es el papel de la tecnología en la formación de futuros profesores de matemáticas en nuestro contexto? ¿Los programas de formación específicos de profesores y otros profesionales incluyen una visión del uso de tecnología para la enseñanza de las matemáticas, en qué sentido? Más aún, ¿De qué manera los futuros profesores de matemáticas utilizan tecnología para su propio aprendizaje matemático? ¿En la opinión de los futuros profesores, el uso de para su propio aprendizaje de las matemáticas les ofrece una visión más amplia del potencial de estas herramientas para la enseñanza? ¿Qué contenidos matemáticos, para su propio aprendizaje, deberían ser abordados por los profesores en formación mediante herramientas tecnológicas?

En el sentido de la distinción hecha por Sowder (2007) respecto al conocimiento necesario para la enseñanza (conocimiento para la práctica, conocimiento en la práctica y conocimiento de la práctica), la reflexión y discusión aquí planteada se enmarca dentro del primer tipo, en el cual el conocimiento del contenido matemático es fundamental, así como el conocimiento pedagógico de dicho contenido y, por supuesto, el conocimiento sobre el uso de tecnología. Para ello, lo planteado sobre el papel de la tecnología en la formación de profesores de matemáticas, se sustenta, por un lado en el TPACK, y por otro, en el llamado MKT (Mathematical Knowledge for Teaching), en el cual, el contenido matemático es el eje articulador.

Marco Teórico

Entre los modelos teóricos que abordan la problemática sobre qué conocimientos pertenecen al conocimiento profesional del profesor de matemáticas y la relación con su práctica se encuentra el conocido como *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT) (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008). Un Modelo similar al MKT, pero que incluye conocimiento sobre uso de tecnología es el TPACK (*Technological Pedagogical Content Knowledge*). Ambos tienen similitudes, la principal es que los dos toman como referencia base el trabajo de Shulman (1986) sobre el Conocimiento Pedagógico del Contenido (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK). A partir de éste, el TPACK incluye la tecnología como componente distintivo, mientras que el MKT identifica subcategorías relacionadas con el contenido matemático dentro del PCK. A continuación, se presentan los dos modelos sobre el Conocimiento de los Profesores para la Enseñanza (de las Matemáticas y, con el uso de Tecnología).

Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPCK)

En la actualidad es ampliamente difundido en la comunidad de Matemática Educativa, que las herramientas tecnológicas sean parte del escenario de aula para la enseñanza, en nuestro caso de las matemáticas. Sin embargo, de acuerdo con Niess (2005), pocos profesores en su práctica enseñan el contenido específico de su área mediante el uso de tecnología, esto puede deberse a que el enfoque de "los programas de preparación de futuros profesores de ciencias y matemáticas pretenden desarrollar en ellos, con amplitud y profundidad, el conocimiento del contenido de ciencias y matemáticas" (Niess, p. 510) sin tomar en cuenta el uso de tecnología.

Basado en el constructo desarrollado por Shulman (1986), conocido como Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), es decir la intersección del conocimiento específico del área con el conocimiento pedagógico sobre dicho contenido, Niess plantea que los futuros profesores (y eventualmente los profesores en servicio) deben también desarrollar un sentido del uso de tecnología respecto al conocimiento específico; es decir, sobre qué significa enseñar con herramientas tecnológicas. Así, se trata de un Conocimiento Tecnológico y Pedagógico del Contenido.

En este sentido, Niess propone que el futuro profesor debe desarrollar a la par, sólidos conocimientos de contenidos específicos de su área y sobre tecnología, además de conocimientos sobre la enseñanza y aprendizaje, ya que usualmente el profesor en formación aprende sobre tecnología desligado de su aprendizaje del área específica y pedagógica. En general, aprende una componente (contenido específico, pedagógico o tecnológico) desligado de los otros dos. De esta manera, Niess (2005) identifica el TPCK como la integración del desarrollo de los tres tipos de conocimiento: sobre el contenido, sobre tecnología y sobre la enseñanza y aprendizaje.

De acuerdo con Niess (2005, p. 511), el TPCK se puede caracterizar mediante las siguientes cuatro componentes: una amplia concepción sobre qué significa enseñar cierto contenido específico mediante la integración de tecnología en el aprendizaje; conocimiento sobre estrategias instruccionales y representaciones para la enseñanza de tópicos particulares con tecnología; conocimiento sobre la comprensión, pensamiento y aprendizaje de los estudiantes con tecnología para tópicos específicos y, conocimiento sobre el currículo y materiales que integran tecnología y el aprendizaje de contenidos específicos. En este sentido, Niess plantea que el profesor debe reconsiderar su conocimiento del contenido específico de su área y el impacto de la tecnología en el desarrollo de dicho conocimiento tanto para la enseñanza como para el aprendizaje.

Por su parte Mishra y Koehler (2006) y Koehler y Mishra (2009) caracterizan el TPCK (o TAPCK) como el conocimiento del profesor para la integración de tecnología. De acuerdo con estos investigadores se trata de una compleja interacción de tres elementos del ambiente de aprendizaje: el conocimiento del contenido, la pedagogía y la tecnología. "Dicha interacción, produce los tipos de conocimiento flexibles necesarios para la integración exitosa de tecnología en la enseñanza" (Koehler & Mishra, 2009, p. 60). En la figura 1, se muestra el esquema que proponen Koehler y Mishra (2009) para identificar los tres tipos de conocimiento y sus interacciones de que se compone el TPCK.

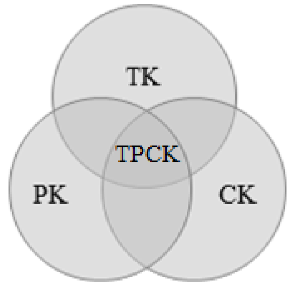


Figura 1. TPCK y sus componentes (Koehler & Mishra, 2009, p. 61).

En la Figura 1 se observa que el TPCK (o TPACK) es la integración de tres tipos de conocimiento: conocimiento de contenido (Content Knowledge, KC), conocimiento pedagógico (Pedagogical Knowledge, PK) y conocimiento tecnológico (Technological Knowledge, TK). El CK, se refiere al conocimiento del contenido específico a enseñar. El PK es el conocimiento sobre los procesos y métodos de enseñanza y aprendizaje, implica comprender cómo los estudiantes aprenden, habilidades sobre técnicas utilizadas en el aula, planeación y evaluación. El TK es el conocimiento sobre tecnologías estándar y nuevas tecnologías, dado que éstas cambian rápidamente en el tiempo, éste tipo de conocimiento debe ser también cambiante (Mishra & Koehler, 2006).

Lo importante, además de la distinción de estos tres tipos de conocimiento es la interacción de uno con otro y la integración de estas tres interacciones. De esta manera, Mishra y Koehler (2006) identifican en el modelo que proponen las siguientes intersecciones:

- *PK-CK (PCK, Conocimiento Pedagógico del Contenido),* coincide respecto a lo planteado por Shulman (1986), de hecho éste trabajo es la base sobre la que es construido el modelo TPCK.
- *TK-CK (TCK, Conocimiento Tecnológico del Contenido),* es el conocimiento sobre la manera en que la tecnología y el contenido específico se relacionan recíprocamente.
- *TK-PK (TPK, Conocimiento Tecnológico Pedagógico),* es el conocimiento sobre tipos de tecnología y cómo implementarlas en la enseñanza y el aprendizaje, y sobre cómo la enseñanza puede cambiar por el uso de tecnología.

De esta manera, el TPCK es un conocimiento que va más allá de sus tres componentes, refiere a la comprensión de representaciones y conceptos con el uso de tecnología; a técnicas pedagógicas que hacen uso de tecnología en formas constructivas para la enseñanza de un contenido, a comprender la complejidad del uso de tecnologías, en el sentido de identificar qué conceptos se complican y cuáles se facilitan para su aprendizaje en ambientes tecnológicos, y cómo ésta ayuda a superar dificultades que los alumnos enfrentan en dicho aprendizaje (Mishra y Koehler (2006, p. 1028-1029). Como lo plantean estos autores, el componente del uso de tecnología, debería ser distintivo en la práctica del profesor, dados los avances de ésta y su cada vez mayor disponibilidad. Pero además es un conocimiento que no es estático, ya que evoluciona con el tiempo, debido a los cambios cada vez más acelerados de las nuevas tecnologías.

Como fue mencionado, la base del TPACK es el constructo desarrollado por Shulman (1986), el PCK, en el cual integran el componente del uso de tecnología. Sin embargo, otros investigadores a partir de dicho constructo han identificado subcategorías del Conocimiento Pedagógico del Contenido, propio del área de las matemáticas.

Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)

El *conocimiento matemático* y *conocimiento sobre enseñanza de las matemáticas* son dos aspectos diferentes, el primero es el conocimiento de la disciplina, mientras que el segundo obedece al campo del *conocimiento profesional* del profesor de matemáticas (da Ponte y Chapman, 2006, p. 462). A partir de los trabajos de Shulman (1986), Ball y su equipo de trabajo (Ball, 2000; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008) proponen la noción de *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT), ésta tiene que ver con lo que los maestros necesitan conocer y ser capaces de hacer, para una enseñanza efectiva y los requisitos de ésta en términos de la comprensión del contenido matemático.

Ball *et al*. (2008, p. 395) definen el MKT como "el conocimiento matemático necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñar matemáticas". El MKT implica identificar el conocimiento matemático demandado en el trabajo que hacen los profesores. Ball, *et al.* (2008, pp. 399-400) caracterizan el MKT como compuesto por dos grandes categorías: el *Conocimiento del contenido matemático* y el *Conocimiento pedagógico del contenido matemático*.

En cada una de estas categorías, estos investigadores identifican tres subdominios, tres relativos a la primera categoría y tres relativos a la segunda:

- *Conocimiento Común del Contenido [matemático] (Common Content Knowledge, CCK)*, descrito por los autores como "aquel conocimiento que es usado en el trabajo de enseñanza en formas comunes a como se utiliza en muchas otras profesiones u ocupaciones que también usan matemáticas" (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 377), por lo tanto, no es propio a la actividad de enseñar pero es un conocimiento fundamental.
- *Conocimiento Especializado del Contenido [matemático] (Specilized Content Knowledge, SCK)*, se refiere al conocimiento matemático propio a la enseñanza; necesario para la enseñanza. Este conocimiento "permite ofrecer explicaciones matemáticas de las reglas y los procedimientos que comúnmente se encuentran en la enseñanza, así como también analizar y comprender los métodos inusuales que permiten resolver un problema" (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 378).
- *Conocimiento en el Horizonte Matemático (Knowledge at the Mathematical Horizon)*, de acuerdo con Ball y Bass (2009), éste se entiende como una toma de conciencia del gran paisaje matemático en el que la experiencia y la instrucción presentes están situadas.
- *Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (Content Knowledge and Students, CKS)*, este tipo de conocimiento combina el conocimiento acerca de los estudiantes y el conocimiento de las matemáticas, se refiere a la interacción entre la comprensión de un contenido matemático específico y familiaridad con el pensamiento matemático de los estudiantes sobre dicho contenido (Ball, Thames, & Phelps, 2008, pp. 399-400).

- *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (Content Knowledge and Teaching, CKT)*, éste combina conocimiento acerca de la enseñanza y conocimiento de las matemáticas, la actividad de enseñar involucra conocimiento matemático para el diseño de la instrucción. Es decir, éste tipo de conocimiento se refiere un concepto o procedimiento matemático particular y la familiaridad con principios didácticos para la enseñanza de dicho contenido (Ball, Thames, & Phelps, 2008, pp. 399-400).
- *Conocimiento del Currículum*: es aquel que implica un conocimiento del currículum sobre el contenido matemático (e.g., metas educativas, las evaluaciones, los temas que se imparten normalmente en los niveles educativos, etc.) (Ball & Bass, 2009).

De acuerdo con Ball y sus colaboradores, las primeras tres categorías (*CCK*, *SCK* y *Conocimiento en el horizonte matemático*) forman parte del dominio que Shulman identifica como Contenido Matemático, mientras que las segundas tres (*CKS, CKT y Conocimiento del Currículum*) pertenecen al dominio del Conocimiento Pedagógico del Contenido. Como puede observarse en las definiciones de las categorías del MKT, el eje articulador es el área específica de las matemáticas. Sin embargo, en ninguna se explicita el uso de tecnología como tal, pero puede entenderse que está de manera implícita. En el siguiente apartado se discute la pertinencia de tomar los dos modelos (MKT y TPACK) sobre el conocimiento de los profesores de matemáticas cuando utiliza tecnología.

La formación del profesor de matemáticas desde el TPACK y el MKT

Hasta este momento, han sido descritos el TPCK y el MKT como dos modelos que caracterizan el conocimiento que deben poseer y mostrar los profesores; el primero, relacionado con la tecnología para la enseñanza de algún contenido en específico, y el segundo, con la enseñanza de las matemáticas, en particular. A partir de estos encuadres teóricos, ¿cuál es la pertinencia y viabilidad de integrarlos para discutir el papel de la tecnología en la formación (inicial y continua) de profesores de matemáticas?

Tanto el MKT como el TPCK toman como referencias el Conocimiento del Contenido y el Conocimiento Pedagógico del Contenido. Mientras que el MKT distingue subcategorías en cada dominio, el TPCK involucra la tecnología en cada uno de estos dominios. En este sentido, es posible entonces, para explicitar el uso de tecnología en el MKT integrarle elementos del TPCK, o viceversa. En un primer intento por integrar ambos modelos, se tomará como base el MKT, sus dos dominios principales y las seis subcategorías, para integrarlo con dos dominios del TPCK.

Es decir, se parte de la idea, por un lado, de intersectar el dominio del Conocimiento del Contenido (formado por tres subcategorías, relativo al MKT) con el dominio del Conocimiento Tecnológico del Contenido (relativo al TPCK). Por otro, intersectar el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK, con sus tres subcategorías, relativo al MKT) con el Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK, relativo al TPCK). La siguiente figura 2 muestra dos esquemas que ilustran lo comentado.

Figura 2. Integración de dominios del MKT con dominios del TPCK.

A partir de lo ilustrado en la figura 2 y dado que el Conocimiento del Contenido (CK_{MKT}) se compone del Conocimiento Común del Contenido (CCK), el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) y del Conocimiento en el Horizonte Matemático, cada una de estas componentes se relaciona entonces con el Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK_{TPCK}). Como fue mencionado en secciones anteriores, el TCK es el conocimiento sobre la manera en que la tecnología y el contenido específico se relacionan recíprocamente. Por ejemplo, dado un contenido matemático, éste puede ser abordado mediante cierto tipo de tecnología o no y viceversa, dado un tipo de tecnología, ésta puede ser utilizada para ciertos contenidos matemáticos, o bien para ninguno (Mishra & Koehler, 2006).

En este sentido, la intersección del CK_{MKT} con TCK_{TPCK} implica el conocimiento de la manera en que la tecnología se relaciona con el Conocimiento Común, el Especializado y en el Horizonte, y viceversa. De la misma manera, respecto al PCK_{MKT}, compuesto por el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CKS), el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (CKT) y Conocimiento del Currículum, implica identificar la relación con el Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK). Es decir, conocimientos sobre tipos de tecnología y su relación con el contenido y los estudiantes; con el contenido y la enseñanza y, con el currículum.

En seguida, se presenta una breve discusión con base en lo planteado en la sección precedente; en particular sobre la interacción CK_{MKT} -TCK_{TPCK}, mediante un ejemplo de un contenido matemático del nivel superior y el uso de Tecnología en el contexto de la formación-profesionalización de profesores de Matemáticas.

La tecnología en el contexto de la profesionalización de profesores de matemáticas

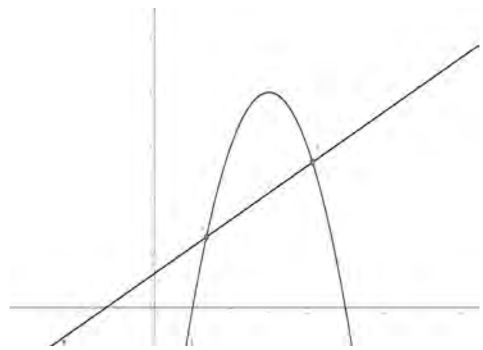
Para discutir, brevemente, la interacción entre el MKT y el TPCK en la profesionalización de profesores de matemáticas, el presente trabajo se enfoca en la interacción entre del Conocimiento Tecnológico del Contenido [matemático] con el Conocimiento Común del Contenido a partir de una Actividad matemática sobre el trazado de tangentes en el contexto del Teorema del Valor Medio reportado en un estudio previo sobre uso de tecnología por Martínez y Ulloa (2015).

En dicha actividad, los participantes fueron 16 alumnos de un posgrado en enseñanza de las matemáticas, todos con grado de licenciatura relacionadas o afín con las matemáticas. Por lo que la población participante contaba con el Conocimiento Común del Contenido matemático abordado, pero con poca experiencia, algunos nula, sobre el uso de tecnología para la enseñanza, es decir, pobre Conocimiento Pedagógico del Contenido y el uso de Tecnología. Debido a este antecedente, la reflexión aquí planteada sobre el trabajo de estos estudiantes de posgrado, se centra en la interacción del uso de Tecnología (GeoGebra como herramienta para el trazado de tangentes) y su Conocimiento Común.

El Conocimiento Común y el uso de Tecnología

Para identificar el tipo de interacción entre el uso de Tecnología y el Conocimiento Común de la población participante, se analizó el trabajo llevado a cabo por ellos en una actividad sobre el trazado de tangentes, mediante GeoGebra, en el contexto del Teorema del Valor Medio. La forma de trabajo fue en equipos (ocho en total); en este documento se reporta el trabajo de solo dos de ellos, a manera de ejemplificar la interacción entre el MKT y el TPCK. La figura 3 muestra una reproducción de la parte central la Actividad desarrollada, para los propósitos de este reporte.

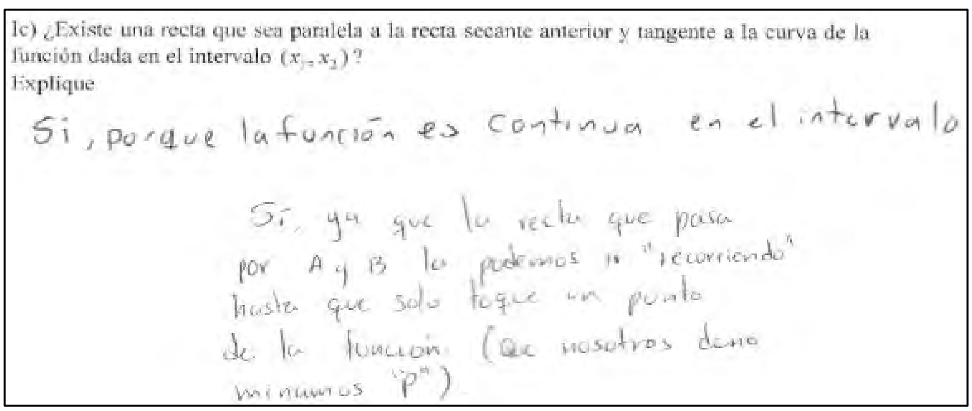
Dada la función $f(x) = -(x-3)^2 + 4$, ¿es posible trazar una recta tangente a la curva y paralela a la recta secante dada, en el intervalo determinado por las abscisas de los puntos de intersección entre la curva y la secante? Explique su respuesta



De ser posible trazar la recta tangente, utilice las vistas Algebraicas y Gráfica de GeoGebra para introducir la función dada y trazar las rectas secante y tangente. Explique su respuesta.

Figura 3. Reproducción de la actividad planteada en Martínez y Ulloa (2015) sobre el trazado de tangentes en el contexto del Teorema del Valor Medio.

El tipo de respuestas ofrecidas por los estudiantes dan muestra del Conocimiento Común del Contenido Matemático, por ejemplo, a la pregunta sobre la posibilidad trazar la recta tangente, los estudiantes hacen alusión a la continuidad de la función, algunos de manera explícita, otros, de manera implícita. Las siguientes son las respuesta de dos de los Equipos a este respecto.



1c) ¿Existe una recta que sea paralela a la recta secante anterior y tangente a la curva de la función dada en el intervalo (x_1, x_2)?
Explique

Si, porque la función es continua en el intervalo

Sí, ya que la recta que pasa por A y B la podemos ir "recorriendo" hasta que solo toque un punto de la función (Que nosotros denominamos "P")

Figura 4. Respuestas de dos Equipos sobre la posibilidad de trazar una recta tangente.

En esta primera parte, podemos argumentar a partir de las respuestas de los equipos, acerca del CCK, en este caso *la continuidad* de la función, sin embargo, lo importante es identificar la relación recíproca entre este Contenido Matemático que involucra la actividad planteada y el uso de GeoGebra. En el trabajo llevado a cabo por los estudiantes, si bien, algunos no dieron una solución exacta, sino aproximaciones, lo importante es observar la relación recíproca entre el CCK y la Tecnología, es decir, si los participantes en sus acciones identifican la tecnología como una herramienta que les permite abordar el Contenido Matemático (el trazo de la recta tangente, sustentado en su noción de continuidad de la función dada), y viceversa, si dado el problema a resolver, éste puede ser abordado mediante GeoGebra.

A los participantes les fue dado el problema y desde el principio se les preguntó, si mediante GeoGebra era posible abordar y resolver la tarea planteada. Todos, por el trabajo llevado a cabo en GeoGebra, identifican que sí es posible resolver la tarea o al menos dar una aproximación. Los distintos Equipos buscan diferentes rutas de resolución de la tarea, por ejemplo, el uso de deslizadores, cálculos directos a partir de las condiciones planteadas y trazos auxiliares.

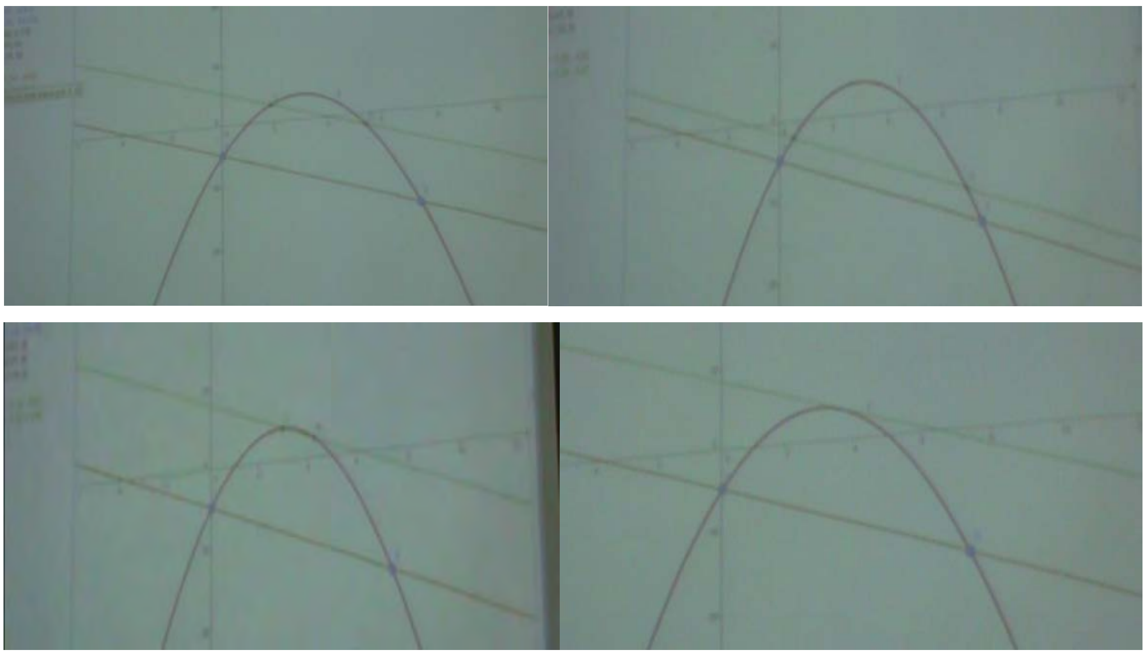


Figura 5. Trabajo en GeoGebra desarrollado por uno de los Equipos mediante el uso de deslizadores.

Todos los participantes identificaron el potencial de la tecnología para bordar el problema. La figura 5 muestra parte del trabajo de uno de los Equipos que utilizó deslizadores como herramienta principal de GeoGebra. Otros, utilizaron el arrastre directo, hicieron cálculos a partir de las condiciones planteadas y algunos más utilizaron trazos auxiliares. De esta manera, se puede observar que los participantes identifican una relación entre el Conocimiento del Contenido Común (CCK) o parte de éste con la tecnología propuesta.

Conclusiones

Se ha planteado la posibilidad de integrar los modelos MKT y TPCK en la formación y profesionalización de profesores de matemáticas, a partir de un breve análisis sobre la intersección de la componente conocida como *Conocimiento Común del Contenid*o con la componente *Conocimiento Tecnológico del Contenido*. La intersección con las demás componentes, el Conocimiento Especializado y en el Horizonte, así como con las tres componentes del PCK con el TPK, merecen un amplio y profundo análisis así como el desarrollo de instrumentos adecuados de recolección de datos.

La idea fundamental del presente trabajo es mostrar la pertinencia de utilizar el MKT y TPCK (o TPACK) como modelos que permiten abordar la formación de profesores de matemáticas y el papel de la tecnología en ello. En particular, se ha enfocado la breve discusión en el Contenido Común de los profesores de matemáticas y la influencia que puede tener la tecnología, a partir de lo planteado por Niess (2005) respecto a que, con las nuevas tecnologías, los profesores en formación y en profesionalización continua, deben tener oportunidad o incluso el reto de reconsiderar su Conocimiento sobre el Contenido [matemático] y el papel que puede jugar la tecnología en el desarrollo de este tipo de conocimiento.

De esta manera, las preguntas que surgen a partir de este breve análisis y discusión aquí planteada, son varias, entre otras, ¿qué caracteriza la interacción de cada una de las categorías del MKT cuando se involucra el uso de tecnología? ¿El conocimiento sobre el uso de tecnología, es un tipo de conocimiento especializado, común, en el horizonte, o bien de carácter pedagógico? ¿Debe la tecnología jugar un papel transversal respecto a las seis categorías del MKT? ¿Cuál es el rol que juega la tecnología en los programas de formación inicial de profesores de matemáticas? ¿Qué oportunidades tiene el futuro profesor de matemáticas, en el contexto Mexicano, de experimentar durante su formación el desarrollo de su conocimiento matemático mediante el uso de tecnologías? ¿Qué oportunidades tiene el profesor en servicio durante sus cursos de profesionalización, de utilizar tecnología para el desarrollo de su conocimiento especializado?, entre otras. Lo aquí planteado es una invitación para abordar estas y otras interrogantes respecto al papel de las nuevas tecnologías en la formación inicial y continua del profesor de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*, 241-247.

Ball, D., & Bass, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizont: Knowing mathematics for teaching to learnes' mathematical futures*. Paper presentado en el 43rd Jahrestagung Für Didaktik Der Mathematik. Recuperado el 15 de junio, 2015 de http://www-personal.umich.edu/~dball/presentations /032309_oldenburg.pdf

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Doerr, H., Arleback, J. & O'neil, A. (2012). Teaching practices, technology and student learning. En L. R. Van Zoest, J-J. Lo & J. L. Kratky (Eds.), *Proceedings of the 34th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME-NA 2012* (pp. 1065-1072). Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Hill, H., Ball, D. & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372-400.

Johnston, C. (2010). Pre-service elementary teachers' evaluation of technology tools for mathematical learning: A reflective model. En J. Yamamoto; J. Kush; R. Lombard & J. Hertzog (Eds.), *Technology Implementation and Teacher Education: Reflective Models* (pp. 259-277). USA: Information Science Reference.

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *9*(1), 60-70.

Llinares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (Student) Teachers and Teacher Educators as Learners. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.*), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429-460). UK: Sense Publishers.

Martínez, C. & Ulloa, R. (2015). Dynamic geometry software and the tracing of tangents in the context of the mean value theorem. *Proceedings of the 37th Annual Conference of the PME-NA*. East Lansing, MI: Michigan State University.

Mishra, P., & Koehler, M.J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054.

Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. *Teaching and Teacher Education*, *21*, 509–523

Niess, M. L., Lee, K., Sadri, P. & Suharwoto, G. (2006). *Guiding inservice mathematics teachers in developing TPCK*. Paper presentado en el Congreso Anual de la Asociación Americana de Investigación Educativa (American Education Research Association). San Francisco, CA. Recuperado el 30 de noviembre, 2015 de http://eusesconsortium.org/docs/AERA_paper.pdf.

Ruthven, K., Hennessy, S. & Brindley, S. (2004). Teacher representations of the successful use of computer-based tools and resources in secondary-school English, mathematics and science. *Teacher and Teaching Education*, *20*, 259-275.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and the development of teachers. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, Vol. 1* (pp. 157-224). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

VALORACIÓN SOBRE EL DISEÑO DE UN CURSO DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA EN LÍNEA PARA LA LICENCIATURA EN TRABAJO SOCIAL DE LA UNIVERSIDAD DE SONORA

Irma Nancy Larios Rodríguez, María Elena Parra Ramos
Universidad de Sonora, México
nancy@mat.uson.mx , meparra@mat.uson.mx

Para citar este artículo:

Larios, I. N. y Parra, M.E. (2016). Valoración sobre el diseño de un curso de estadística descriptiva en línea para la licenciatura en trabajo social de la Universidad de Sonora. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

VALORACIÓN SOBRE EL DISEÑO DE UN CURSO DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA EN LÍNEA PARA LA LICENCIATURA EN TRABAJO SOCIAL DE LA UNIVERSIDAD DE SONORA.

Irma Nancy Larios Rodríguez, María Elena Parra Ramos
Universidad de Sonora, México
nancy@mat.uson.mx , meparra@mat.uson.mx

Palabras clave: Valoración, Estadística descriptiva, Modalidad a distancia

Resumen

En el presente trabajo se realiza una valoración sobre el diseño de un curso de Estadística Descriptiva en Línea, para la licenciatura en Trabajo Social (TS) de la Universidad de Sonora. Para el logro anterior, se consideran los resultados obtenidos por los estudiantes en la implementación del curso durante varios semestres a partir de la primera vez que se ofertó, así como la pertinencia de los recursos utilizados en el diseño. El curso tiene como objetivo general que el alumno sea capaz de utilizar los métodos de la estadística descriptiva en el análisis y resolución de problemas relacionados con el área de ciencias sociales, para la interpretación y toma de decisiones; el curso forma parte del plan de estudios de la licenciatura en TS en la modalidad virtual desde el semestre 2010-2.

Introducción

Actualmente en México las instituciones, principalmente las de nivel superior, están impulsando la educación en la Modalidad a Distancia o en Línea. En esta modalidad, el espacio virtual es una representación de un campus o una escuela, en la cual los estudiantes no necesitan asistir físicamente a un aula. Así mismo, los profesores y los estudiantes interactúan por medio de las herramientas de interconexión como las páginas web dinámicas, el correo electrónico, el chat, los foros web y las bases de datos. Otra de las características de esta modalidad educativa, es su flexibilidad de horarios.

Es evidente que la educación a distancia significa un cambio radical a la educación presencial; desde la misma concepción de la educación a distancia, hasta los mecanismos de acción, administración, diseño, implementación y evaluación por mencionar algunas consideraciones. Sin embargo, cada vez son más las instituciones educativas que ofrecen cursos a distancia y las aulas empiezan a convertirse en espacios virtuales de estudio, lo que convierte a la educación en esta modalidad en un campo amplio de investigación. En la educación a distancia, la función del docente es la de ser mediador del trabajo que desarrollan los estudiantes, dirigiéndolos hacia la adopción de un rol activo y parte muy importante de tal relación, es la retroalimentación de su desempeño por el profesor.

Sin embargo, tal y como señalan Delgado y Solano (2009)

> "…ser mediador en entornos virtuales, no significa cambiar el espacio de un aula tradicional a un aula virtual, cambiar los libros por documentos electrónicos, las discusiones en clase por foros virtuales o las horas de atención a estudiantes por encuentros en chat o foros de conversación. Significa encontrar nuevas estrategias que nos permitan mantener activos a nuestros estudiantes aun cuando éstos se encuentren en distintas partes del mundo, promoviendo la construcción de conocimientos y la colaboración.".

Lo anterior puede parecer fácil, sin embargo, cuando no se tiene experiencia y los conocimientos adecuados el diseñar cursos virtuales puede ser una tarea compleja, desde nuestro punto de vista el diseño de estos cursos requiere una evaluación permanente que permita la retroalimentación y mejora continua.

En la Universidad de Sonora, en el segundo semestre del 2010, se ofertó por vez primera programas educativos de licenciatura bajo el esquema de modalidad a distancia, iniciando con la Licenciatura en Trabajo Social. El presente trabajo se circunscribe dentro de este contexto, la enseñanza de la estadística bajo un ambiente virtual, ya que el plan de estudios de la licenciatura en mención, considera un curso de Estadística Descriptiva, siendo las que elaboran el presente trabajo, las responsables del diseño del curso, el cual se empezó a impartir en el semestre 2011-1, al que se le han realizado modificaciones desde entonces, de forma tal que, en este documento se presentan los resultados obtenidos y se plantean, en base a los resultados de la implementación una serie de recomendaciones para la restructuración del mismo.

Marco Teórico

Como elementos teóricos para el diseño del curso se consideraron los siguientes:

Teoría de la Distancia Transaccional. Dado que la enseñanza en la modalidad a distancia no debe ser una simple trasposición de materiales utilizados en una clase presencial, intentamos incorporar en el diseño, elementos de la teoría de la distancia transaccional de Moore (1990, 1991).

Al hablar de distancia, Moore se refiere a algo más que una simple separación física entre instructor y estudiante, se refiere a una distancia de percepción y entendimiento causada por la separación física, es decir, establece que con la separación física provoca un desfase de comunicación y una brecha psicológica, así como un espacio de malos entendidos potenciales entre lo que percibe el profesor y lo que percibe el estudiante. Este espacio es lo que se define como "distancia transaccional" y el "diálogo", es lo que determina la cantidad de distancia, entendiéndose como las interacciones entre el profesor y estudiante, las cuales se presentan cuando el profesor da instrucciones y el estudiante responde.

La "estructura", se conforma por los componentes en el diseño del curso que son organizados de forma tal que, deben ser proporcionados por varios medios.

Y por último, se define *la "autonomía del estudiante"*, la cual se refiere a la autodirección de estudio, es decir, a la toma de decisiones respecto a su propio aprendizaje y a la construcción de su propio conocimiento basado en experiencias. Tener en cuenta los elementos antes señalados es importante en cualquier tipo de enseñanza y en la educación a distancia, éstos se vuelven aún más importantes.

De acuerdo a Molina y Molina (2002), el diseño instruccional es la organización del conocimiento de los materiales didácticos y medios, considerándolos factores psicopedagógicos que favorecen el aprendizaje significativo de los estudiantes, los que, deberán estar bien estructurados y ser capaces de mostrar el conocimiento organizado y elaborado necesario para facilitar el procesamiento significativo de la información y el aprendizaje. Así mismo, se considera que es uno de los elementos más importantes a considerar en la conducción de cursos en línea y presenciales. Enfatizan que, para elaborar cursos en línea para la educación a distancia, es imprescindible contar con un diseño instruccional bien estructurado.

En un trabajo al respecto del tema, Mc Anally (2001) menciona que, la instrumentación exitosa de un curso en línea no depende únicamente de factores técnicos relacionados con el diseño operativo y/o estético, ya que involucra factores humanos y pedagógicos determinantes. Algunos de los aspectos que considera a tomar en cuenta son el diseño del ambiente de aprendizaje, su estructura, las tareas rutinarias, y el modelo instruccional adoptado.

Al respecto, Díaz (2007) caracteriza a los estudiantes a distancia que pueden tener éxito en los estudios bajo la presente modalidad, lo que puede tomarse en cuenta al momento de seleccionarlos:

- Están altamente motivados.
- Son independientes.
- Son estudiantes activos.
- Tiene habilidades para administrar su tiempo y organizarse.
- Tiene la disciplina para estudiar sin recordatorios externos.
- Puede adaptarse a ambientes de estudio nuevos.

Metodología

El diseño de cursos en la modalidad a distancia en la Universidad de Sonora se lleva a cabo a través de las siguientes etapas:

a) La elaboración del guion instruccional por parte del autor de contenido, con apoyo de la asesoría pedagógica del diseñador instruccional.

b) Corrección de estilo del guion instruccional.

c) Montaje en la plataforma del curso.

d) Revisión y ajustes.

Para el diseño del curso se plantearon las siguientes interrogantes: ¿Cómo lograr una interacción eficiente y oportuna entre asesor-estudiante, entre pares (estudiante-estudiante) y estudiante-recursos? Con el fin de desarrollar aprendizajes significativos en el estudiante ¿Qué recursos es pertinente incorporar al diseñar el curso de Estadística Descriptiva en la modalidad a distancia? ¿Cómo organizar los recursos? ¿Cómo evaluar? ¿Qué estrategias de aprendizaje permitirán alcanzar el objetivo general y objetivos particulares del curso?

Después de llegar a ciertos acuerdos alrededor de los cuestionamientos y acorde a los elementos teóricos descritos en el trabajo señalado anteriormente, se procedió a la elaboración del guion instruccional.

Para el guion instruccional fue necesario considerar, incorporar y/o diseñar los siguientes recursos y/o elementos:

1) Programa del curso de Estadística Descriptiva modalidad presencial (no opcional, es el aprobado por las instancias académicas de la Universidad de Sonora).

2) Uso de Plataforma Moodle (es la utilizada por la Universidad Virtual de la Universidad de Sonora).
3) Creación de Foros, Chat y Cuestionarios, uso de Excel, uso de PowerPoint, uso de Applets Estadísticos.
4) Elaboración de actividades de aprendizaje por unidad temática.
5) Elaboración de notas de apoyo.
6) Desarrollo de talleres integradores por unidad temática.
7) Impulsar trabajo de investigación por parte de los estudiantes.
8) Desarrollo de un proyecto integrador de los temas estudiados en el curso.

Propuesta Didáctica

Exposición de la propuesta: A continuación, se describen, ejemplifican y justifican brevemente algunos de los recursos utilizados en el diseño de curso, que están relacionados con el uso de tecnología.

Desarrollo de proyectos, incorporando recursos tecnológicos: La metodología de proyectos utilizada la planteada por Batanero y Díaz (2011), quienes afirman que cuando los estudiantes trabajan con proyectos se logra aumentar su motivación debido a que:

a) Se conceptualiza la estadística y se hace más relevante, puesto que los datos surgen de un problema y tienen que ser interpretados.
b) Refuerzan el interés, particularmente si son los estudiantes quienes selecciona el tema a desarrollar en el proyecto.
c) La comprensión es mejor ya que se trabaja con datos reales.
d) Se muestra que la estadística sirve para resolver situaciones concretas de la vida real y no se reduce solo a contenidos matemáticos.

Para la *evaluación de los proyectos* se consideran diversos aspectos de conocimiento matemático como son: la comprensión conceptual, conocimiento procedimental, resolución de problemas, formulación y comunicación matemática, razonamiento matemático y actitud y disposición a las matemáticas.

La incorporación de los recursos computacionales es esencial para el desarrollo de los proyectos, tanto para organizar la información obtenida como para su análisis y presentación.

En el desarrollo de los proyectos se promueve que los estudiantes realicen trabajo de investigación en internet para la justificación del tema seleccionado en el proyecto, así como el uso de paquetería estadística como el SPSS o el uso de la hoja electrónica Excel. El tema del proyecto se define al inicio del curso y se va trabajando en equipo durante el curso, siendo este producto la evidencia más importante del logro de los objetivos planteados en él.

Por otro lado, la metodología exige un informe del proyecto el cual debe ser elaborado en el procesador de texto Word de acuerdo a un formato y se incluye una presentación en Power Point, ambos productos serán compartidos en la plataforma de trabajo para todo el grupo.

Uso de applets estadísticos

El uso de applets estadísticos de uso libre, es una herramienta de gran utilidad en el curso, ya que su uso complementado con preguntas orientadoras permite a los estudiantes una rápida manipulación dinámica de información sin necesidad de realizar operaciones y procedimientos complicados, lo que permite centrar el interés en cuestiones en aspectos cualitativos muy importantes, tales como son la interpretación y la distribución de los datos. A manera de ejemplo, se presenta una de las actividades didácticas del curso donde se utiliza este recurso.

Actividad didáctica: El peso de los profesores.

Se entrevistó a un grupo de profesores varones de la Universidad de Sonora para saber su peso (en kilogramos), con la intensión de promover una campaña nutricional, obteniéndose la siguiente información:

66	85	67	95	70	65	82	85	90	85	88	76	77	95	96	95
86	60	86	86	85	98	77	55	64	95	70	75	82	85	90	100
86	86	60	86	82	85	110	100	75	85	82	100	85	80	48	64
77	85	85	60	86	95	85	95	98	70	77	60	77	105	95	105
60	77	67	110	66	98	60	86	82	110	66	112	60	95	77	90
96	110	82	57	96	65	86	110	80	115	90	96	90	120	95	90
60	77	98	98	77	98	85	67	66	96	85	98	95	70	90	70
77	48	96	60	82	77	75	55	67	82	77	77	90	82	85	77
96	77	67	75	95	100	75	80	105	100	98	90	90	85	90	90
90	75	77	86	88	75	90	60	100	77	75	77	95	77	100	90
85	80	88	100	86	105	120	96	98	105	95	86	85	70	88	85
64	77	82	85	82	112	86	82	100	82	80	95	85	86	95	75
70	85	75	88	85	100	70									

Enunciado:

Utilizando el applet que se encuentra en la siguiente dirección web: http://www.rossmanchance.com/applets/Dotplot.html y utilizando la instrucción *Descriptive Statistics* del menú de *Data Analysis*, capture en el recuadro de edición la información correspondiente al peso de los profesores y realice lo siguiente:

a) Construya el histograma de frecuencia y describa cual es la tendencia del peso de los profesores.
b) Incorpore el *boxplot* y describa como se visualiza la longitud entre los brazos, así como entre los extremos de la caja.
c) Genere ahora libremente muestras aleatorias y repita lo solicitado en el a) y b) y describa lo observado.
d) Participe en el Foro de la actividad didáctica el peso de los profesores, comentando lo observado.

A continuación, se presentan las pantallas que se generan al realizar los incisos a y b.

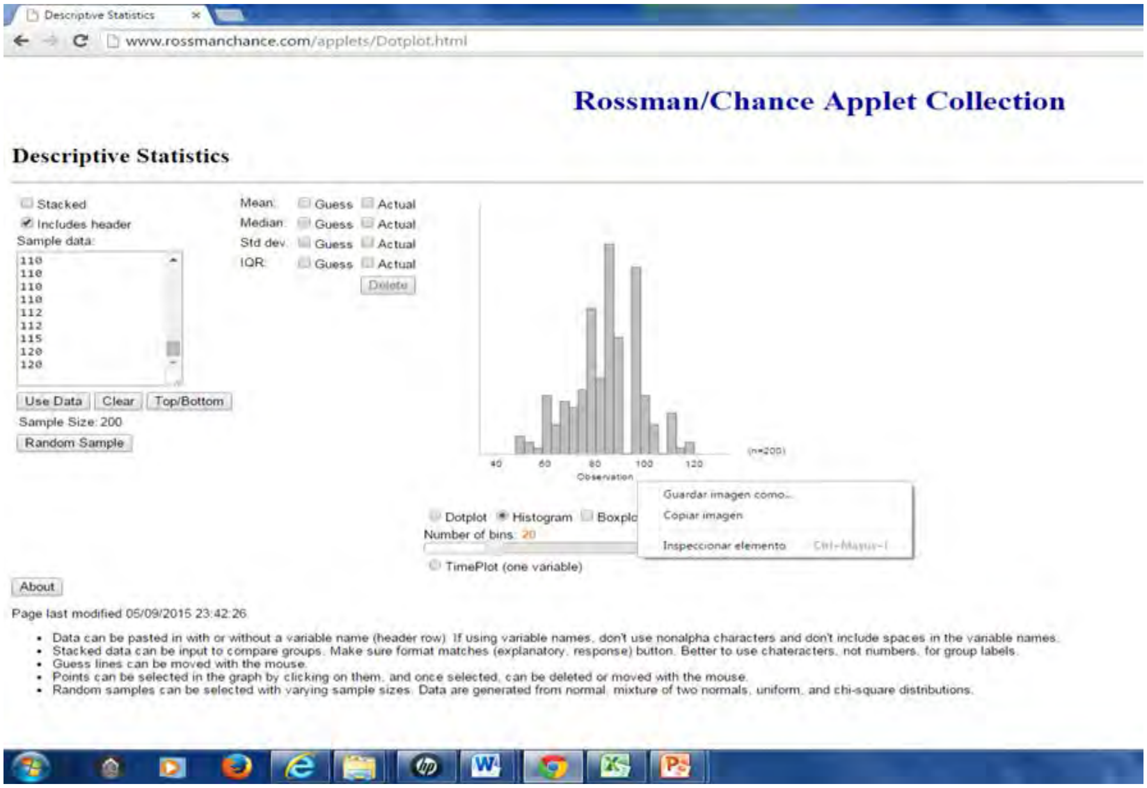


Figura 1. Histograma que se genera con el applet.

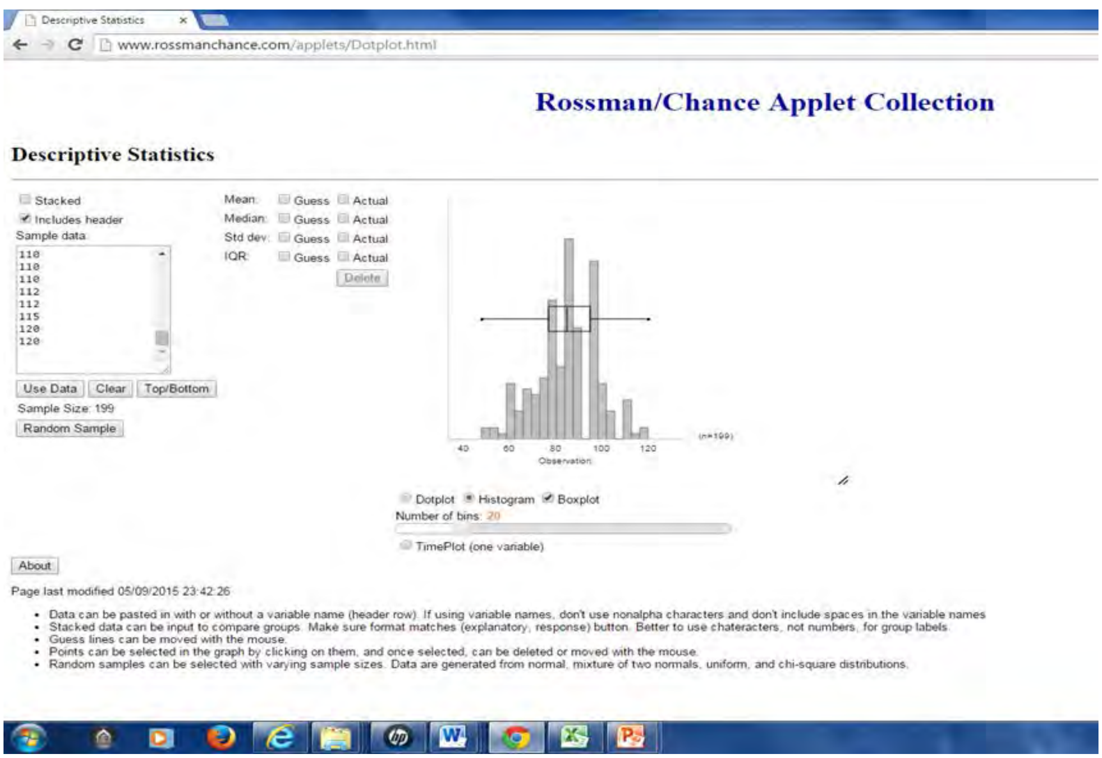


Figura 2. El *Boxplot* y el histograma.

En la Figura 1 se muestra el histograma que se genera con el applet, en el cual se espera que los estudiantes puedan notar la tendencia a la normalidad y aprovechando que se pueden generar simultáneamente el *Boxplot* y el histograma puedan asociar la relación que existe entre ambos, ver la Figura 2.

Se les solicita que realicen el procedimiento con otras situaciones donde existe, por ejemplo, sesgo entre los datos o bimodalidad (estas situaciones no se presentan por cuestiones de espacio). El Applet también genera muestras aleatorias de tal forma que también puede ser manipulado de forma libre, sin capturar datos específicos, lo cual permite a los estudiantes de manera rápida, visualizar diferentes comportamientos de los datos.

Este applet también permite calcular estadísticos como la desviación estándar, el rango intercuartílico, media, mediana, así como ubicarlos en las gráficas (ver Figura 3), lo cual es un recurso permite a los estudiantes entender e interpretar la información que proporcionan dichos estadísticos, en nuestra experiencia esta es una parte que suele ser difícil para los estudiantes del área de sociales.

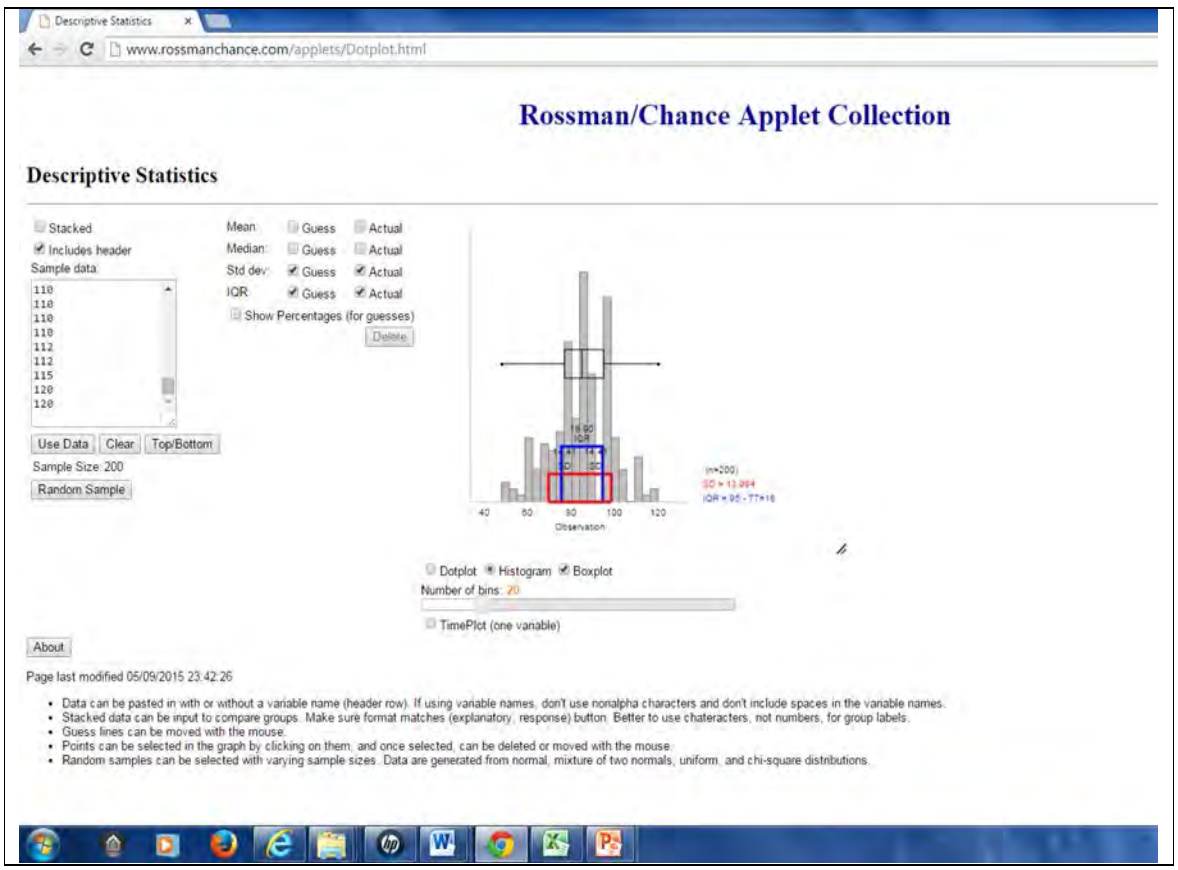


Figura 3. Estadísticos de la muestra.

En otra actividad didáctica se integra el peso de los profesores y su estatura y en otro applet, se trabaja el tema de regresión y correlación lineal que es tema final del programa del curso.

Al igual que en el applet presentado en esta actividad, se pueden generar muestras aleatorias, lo cual permite a los estudiantes manipularlo libremente para diferentes situaciones y así poder ver diferentes tendencias entre los datos. Se intenta en la medida de lo posible plantear en las actividades de aprendizaje, situaciones que puedan irse integrando en diferentes contenidos disciplinares del curso. Es por medio de los foros y los chats, donde se comparten las experiencias al desarrollar las actividades entre los estudiantes y el docente.

Resultados

Puesta en escena y resultados generales: La etapa de evaluación y revisión, que es la que permite la restructuración del diseño de un curso modalidad a distancia, es una parte muy importante a considerar, la cual es abordada por varios autores entre los que se encuentran Molina y Molina (2002). Cuestiones que se tomaron en cuenta para esta etapa, son: la parte donde señalan que, una revisión de experiencias de aplicación de modelos a distancia permite indicar que la aplicación de las nuevas tecnologías no siempre resulta exitosa incluso, está lejos de ser satisfactoria en términos de logros.

Así mismo, a pesar de señalar que la causa de los fracasos es multifactorial, ellos consideran que los siguientes factores son los que deben primordialmente tomarse en cuenta al restructurar un curso:

- Aspectos meramente técnicos entre los que se encuentra fallas en el equipo, en la señal entre otros.
- Cuestiones sociales como el de no contar aún con una cultura de esta modalidad de educación persistiendo el método presencial.
- Poca o nula importancia a la parte psicopedagógica, entre otros.
- Además recomiendan que las características del medio tecnológico que será utilizado, deben ser consideradas para el diseño y planeación de los medios didácticos y dan un especial énfasis a la conformación de equipos de trabajo encargados de plasmar, tanto lo relativo al contenido, como los aspectos psicopedagógicos, didácticos y tecnológicos implicados en el proceso.

El curso se ha implementado durante los semestres 2011-1, 2014-1 y 2015-1, con un solo curso en cada caso, los resultados cuantitativos se presentan en la Tabla 1.

Como se muestra en la Tabla 1, en todas las ocasiones que se impartió el curso, el número de estudiantes inscritos son pocos, lo cual hasta este momento ha sido favorable para la valoración del diseño. Uno de los aspectos importantes a destacar, es que hay un alto porcentaje de estudiantes que nunca participan o que abandonan el curso rápidamente.

También es importante señalar que es común entre los estudiantes que terminan el curso, subir de manera tardía las evidencias de aprendizaje a la plataforma, esto parece indicar se tiene problemas para la organización y administración del tiempo o que no logran adaptarse a la modalidad educativa en línea.

Si se analizan los resultados en relación a los estudiantes que finalizan el curso, se puede observar, que fue en la segunda puesta en escena, donde está el más alto porcentaje de estudiantes que aprobaron el curso (92%) y en la tercera puesta en escena, donde el porcentaje de estudiantes reprobados es el más alto (44%); es precisamente en este último caso donde los estudiantes tuvieron el mayor retraso en realizar las actividades del curso, de tal manera que algunos estudiantes que estuvieron subiendo evidencias de manera más o menos regular, ya no realizaron las últimas actividades. En todas las puestas en escena del curso, la mayoría de los estudiantes evaluaron el curso como difícil en las Evaluaciones al Desempeño Docente.

Tabla 1. *Datos de los cursos impartidos.*

	Semestre 2011-1 Primera puesta en escena	Semestre 2014-1 Segunda puesta en escena	Semestre 2015-1 Tercera puesta en escena
Período de duración del curso	21 de abril- 20 de marzo	Semestre normal.	Semestre normal.
# de estudiantes inscritos	13	20	21
# de estudiantes que abandonaron el curso o nunca participaron	6 (46%)	7 (35%)	10 (48%)
# de estudiantes que terminaron el curso	7(54%)	13 (65%)	11(52%)
# de estudiantes que aprobaron	5 (71%)	12 (92%)	6 (56%)
# de estudiantes que reprobaron	2 (29%)	1(8%)	5 (44%)

En la primera impartición del curso, los objetivos planteados en los foros, fueron parcialmente alcanzados debido a que hubo poca participación en ellos, sin embargo, esto fue mejorando en las puestas en escena posteriores.

Las actividades de aprendizaje fueron diseñadas con la intensión de cubrir tanto los cálculos estadísticos, aspectos de interpretación de los resultados en el contexto de las problemáticas planteadas, así como toma de decisiones, sin embargo, las actividades realizadas por casi todo los estudiantes, estuvieron centradas en el cálculo dejando a un lado los aspectos cualitativos.

Los talleres integradores fueron utilizados sólo en la primera impartición, siendo sustituidos por el proyecto de investigación, el cual ha resultado una estrategia de aprendizaje más exitosa en el logro del objetivo general, así como de los particulares del curso, de hecho, este es el producto más importante del curso ya que integra diversos contenidos disciplinares del mismo, además, promueve el desarrollo de competencias estadísticas y genéricas en los estudiantes. Sin embargo, se considera que, el desarrollar un taller integrador ligado a un curso específico de la licenciatura en Trabajo Social, puede lograr impactar en la motivación de los estudiantes hacia el mismo.

Se requiere que los estudiantes manejen el software Excel o algún software estadístico para realizar cálculos, graficas, tablas, funciones estadísticas. Lo anterior permite que el curso se centre más en los aspectos cualitativos que en los cuantitativos.

En el diseño de curso se dio por hecho que los estudiantes manejaban al menos un poco de Excel, pero en la mayoría de los casos no ha sido así y la ayuda que se les puede brindar a los estudiantes en el uso de tecnología, es bastante complicada en relación a los cursos presenciales, esto problema se ha intentado minimizar recomendando diversos videos de YouTube como apoyo de diversos procedimientos.

Como parte del rediseño del curso, se debe separar los procedimientos de cálculo, de los aspectos cualitativos en las actividades de aprendizaje, de forma tal que, permita que la plataforma evalúe los aspectos cuantitativos y el asesor los cualitativos.

Conclusiones

Por lo novedoso que es el trabajo en un ambiente virtual en nuestra institución, en este primer momento (de pilotaje) es pertinente tener consideraciones en relación a los plazos de envío de actividades de aprendizaje y/o participación en los foros a los estudiantes, sin embargo, hay que tener cuidado con ese aspecto, porque puede ocasionar una forma disfuncional de trabajo por parte de los estudiantes.

Los participantes en la modalidad a distancia tienen que organizar sus actividades para cumplir con las agendas establecidas en los cursos, de otra manera, las posibilidades de obtener las retroalimentaciones sobre el trabajo realizado por parte en tiempo se complica, porque el cierre final del curso está establecido institucionalmente en el calendario escolar.

Se puede concluir, que en lo general, los estudiantes tuvieron problemas en la organización del tiempo, que les permitiera enviar a la plataforma las actividades en los tiempos señalados.

Se detectó que los estudiantes tienen problemas para comunicarse en forma escrita, lo anterior es una seria dificultad en los alcances de los objetivos planteados en el curso, dado que es esta forma de comunicación esencial en la educación a distancia.

La plataforma funciona bastante bien, se puede ingresar y trabajar en ella sin mayores problemas.

Nos parece que los estudiantes que estudian en un ambiente a distancia, deben de tener una serie de habilidades que es necesario definir, para poder caracterizar a los que pueden desenvolverse exitosamente en la educación a distancia

Es evidente que la educación a distancia significa un cambio radical a la educación presencial; desde la misma concepción de la educación a distancia, hasta los mecanismos de acción, administración, diseño, implementación y evaluación por mencionar algunas consideraciones.

Sin embargo, cada vez son más las instituciones educativas que ofrecen cursos a distancia, las aulas empiezan a convertirse en espacios virtuales de estudio, siendo por lo tanto la educación en esta modalidad un campo amplio de investigación, en ese sentido es importante continuar con trabajos en esa dirección, esperando seguir compartiendo nuestra experiencia con docentes e investigadores con los mismos intereses para poder tener orientaciones que nos permitan avanzar en nuestra propuesta de curso.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). Estadística con Proyectos. Granada, España: Universidad de Granada

Delgado, M. y Solano, A. (2009). Estrategias didácticas creativas en entornos virtuales para el aprendizaje. *Actualidades investigativas en educación.*Vol.9 (No.2) pp.1-21.

Díaz, J. (2007). "El estudiante a distancia exitoso". Recuperado en: www.uv.mx/jdiaz/aprenderlinea/elestudianteexitoso.doc.

Molina, M & Molina, J. (2002). Diseño instruccional para la educación a distancia. Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=37302408

McAnally-Salas, L. y Armijo, C. (2001). "La estructura de un curso en línea y el uso de las dimensiones del aprendizaje como modelo instruccional". Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/McAnally.PDF

Moore, M. (1990). Recent Contributions to the Theory of Distance Education. Open Learning, 5(3).

Moore, M. (1991), Editorial: Distance Education Theory. The American Journal of Distance Education. [4] Molina, M. & Molina, J. (2002). Diseño instruccional para la educación a distancia. Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=37302408.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

PROPUESTA DE CLASE PARA LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRAL DEFINIDA CON EL USO DE TECNOLOGÍA MEDIANTE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO TPACK

Jesús Muñoz, Eduardo Briceño, Judith Hernández

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

jjmunozher@yahoo.com.mx, ecbs74@gmail.com, judith700@hotmail.com

Para citar este artículo:

Muñoz, J., Briceño, E. y Hernández, J. (2016). Propuesta de clase para la enseñanza de la integral definida con el uso de tecnología mediante la implementación del modelo TPACK. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

PROPUESTA DE CLASE PARA LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRAL DEFINIDA CON EL USO DE TECNOLOGÍA MEDIANTE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO TPACK

Jesús Muñoz, Eduardo Briceño, Judith Hernández

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

jjmunozher@yahoo.com.mx, *ecbs74@gmail.com*, *judith700@hotmail.com*

Palabras Clave: TPACK, práctica docente, integración tecnológica.

Resumen

Las tecnologías digitales en educación matemática, traen consigo que el docente cambie sus estrategias de enseñanza, lo cual requiere que sepa potenciar su uso en su dimensión didáctica. Lo anterior se encuentra en un estado conflictivo, ya que el profesor cuenta con escasa referencia profesional de esta práctica, es decir, cómo usar la tecnología para enseñar y no solo eso, sino cómo modificar el contenido matemático. En ese sentido, se reporta un avance de investigación del uso de tecnología mediante una propuesta para la clase de la integral definida, que articula sistemáticamente el conocimiento matemático, didáctico y tecnológico mediante el modelo teórico TPACK (Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido). Complementado a este modelo se encuentra THA (Trayectorias Hipóteticas de Apredizaje) como una guía o plan de trabajo metodológico que complementen la propuesta de clase.

Introducción

El Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM, 2000), declaró que las tecnologías deberían utilizarse amplia y responsablemente para facilitar a los estudiantes, la visualización de los conceptos matemáticos. En ese sentido, es una herramienta didáctica que ayuda a la construcción de significado de los objetos estudiados (Miranda y Sacristán, 2012). Esto requiere que el profesor sepa potenciar su uso como herramienta didáctica, considerando el trabajar colaborativamente en cursos de actualización profesional (Vitabar, 2011).

Haciomeroglu, Bu y Haciomeroglu (2010), mencionan que la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas con tecnología ha recibido mayor atención en los últimos años. Al respecto señalan, que a pesar de la creciente importancia que se tiene de su implementación, los resultados reportan que los profesores hacen un uso limitado de ésta en el aula. Por lo tanto, las nuevas tendencias de investigación que se describen a continuación, se enmarcan hacia la importancia de mejorar la práctica docente con el uso de tecnología para su clase de matemáticas. Por lo tanto, se describe una propuesta, como resultado, de clase sobre la integral definida que articula el conocimiento didáctico, matemático y tecnológico (TPACK) complementado con una guía metodológica (THA), que permite planificar la aplicación de esta articulación de conocimientos.

La Práctica docente con el uso de tecnología, algunos aportes

Las investigaciones referente a cómo mejorar la práctica docente, están dando un giro importante en las investigaciones en matemática educativa, ya que se orientan, en su mayoría, al diseño de actividades apropiadas proponiendo estrategias efectivas para su enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el uso de tecnología. Por ejemplo retomando a Haciomeroglu, Bu y Haciomeroglu (2010), reportan el estudio realizado a 68 profesores en formación en la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria. Para lograrlo incluyeron conocimientos y dinámicas, que desde la perspectiva de los autores, potenciaron positivamente la perspectiva de los futuros profesores sobre el uso de tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Las dinámicas consistieron en la reflexión y discusión conjunta de la instrucción tomando en cuenta, conocimientos matemáticos y didácticos, es decir, no se limitaron o centraron solo en un uso manipulativo del GeoGebra, sino que propiciaron la reflexión de su propia práctica hacia articulación de conocimientos didácticos y matemáticos. Sin embargo, algunos de ellos expresaron su renuencia de usarlo en su práctica docente, ya que se limita en un uso rutinario del software para verificar resultados y medir objetos, siendo estas actividades realizables a papel y lápiz.

González (2014) realizó un estudio con estudiantes en formación docente de matemática y física. El estudio muestra una experiencia del uso del software de geometría dinámica, considerando un enfoque profesional, es decir, con intención de que logren adquirir conocimientos sobre el uso de tecnología para considerar *modos de actuación* útiles en su desempeño como profesores. La primera componente es el enfoque profesional donde los docentes en formación, adquieran dominio del software con contenidos matemáticos adaptados con dicha tecnología. Por lo tanto, se les impartió un curso para aprender a utilizar el software, considerando las principales dificultades encontradas por los estudiantes, y mostrando de esa manera su utilidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El curso fue diseñado por los siguientes pasos:

1. Realizar un diagnóstico sobre los contenidos matemáticos precedentes.
2. Incluir como nuevo contenido en la disciplina, un curso elemental de uso de software de geometría dinámica, con el objetivo de preparar a profesores en formación en la utilización de las herramientas y diferentes comandos del software.
3. Determinar los contenidos que serían tratados con el uso del software
4. Preparar las tareas docentes a desarrollar en alumnos y profesores en el aula, como para el trabajo independiente en casa.
5. Orientar un trabajo sobre la elaboración de una tarea docente con el software de un contenido no abordado en clase, incluida una discusión de la tarea en el aula. Esta acción tiene el fin de comprobar la interiorización de los modos de actuación profesional en lo que concierne a la etapa de planificación del trabajo.
6. Realizar una entrevista grupal, para conocer las opiniones finales de los estudiantes acerca de las formas de trabajo utilizadas.

De nueva cuenta se pueden identificar en los pasos anteriores, la inclusión de conocimientos de corte tecnológico, didáctico y matemático, aunque en este caso la articulación de los mismos no es tan evidente. Un elemento rescatable en el desarrollo de esta investigación fue la necesidad de modificar algunas tareas docentes, que incluían actividades de construcción, por otras donde el foco fue la realización de conjeturas. De esta manera, se logra un cambio en las concepciones de las tareas docentes y en nuestra opinión, en los alcances de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

Vitabar (2011) reporta un estudio con 90 profesores en servicio, que participaron en cursos de actualización profesional a distancia, para aprender sobre el uso del software de GeoGebra para sus clases de matemáticas. El objetivo fue conocer las necesidades de profesores de matemáticas en servicio, que esperan mejorar su práctica al participar en programas de actualización profesional. La investigación se centró en lo rescatable del uso de tecnología en el aula, y a partir de ello, ofrecer algunas recomendaciones que intentan mejorar este tipo de propuestas formativas. Para dar evidencia, se solicitó a los profesores el diseño de una propuesta didáctica aprovechando las potencialidades de la tecnología. Al analizar las propuestas, se detectaron tipificaciones que caracterizan la práctica el profesor con el uso de tecnología para su clase de matemática:

- *Los resistentes*: Docentes con poca formación en el uso de tecnología, por lo regular comparan las nuevas metodologías con las tradicionales, analizando la relación del esfuerzo consumido y los logros alcanzados. Expresan cierta resistencia sobre incorporar la tecnología en el aula y son críticos a la hora de evaluar su conveniencia. A estos profesores les preocupa mucho el poco dominio de los comandos de la tecnología y de su funcionalidad y por ello, le quitan atención a los aspectos didácticos.
- *Los novatos*: Profesores con poca experiencia, regularmente jóvenes y sin aversión al uso de tecnología. Creen en la necesidad de incorporar la tecnología en el aula basándose en la motivación que esto genera en los estudiantes, pero en el análisis de sus propuestas, la didáctica se relaciona al uso de tecnología por el simple hecho de utilizarla, lo cual resulta inconveniente ya que se centran solo en el entorno tecnológico, que empaña el interés didáctico de la actividad.
- *Los tecnócratas*: Estos profesores están muy familiarizados con el uso de la tecnología. Tienen la creencia de que la tecnología puede simplificar el trabajo en el aula. Aprenden fácilmente nuevos programas computacionales y se sienten seguros al momento de usar tecnología en el aula. Una característica bastante común en estos profesores, es que el uso en sí mismo del software, se sobrepone al aprendizaje de la matemática y la propuesta se transforma en una clase de informática.
- *Los experientes*: Profesores que poseen un buen nivel de reflexión didáctica de su práctica. Son capaces de entender la bondad de cierta metodología en función de la calidad del aprendizaje de sus alumnos. Estos profesores consideran a la tecnología como un medio, y no como un fin, es decir, suelen preparar tareas donde la tecnología no es el centro, ni tampoco un obstáculo por lo tanto potencian la dimensión didáctica de la actividad.

De esta manera el autor hace tres recomendaciones:

1. Menciona que los cursos de actualización debe promover el trabajo colaborativo en conjunto con el investigador, ya que puede generar un ambiente de trabajo que luego trascenderá en el curso y promoverá una concepción de cómo encarar una formación permanente.
2. Señala que los cursos deben centrarse en aspectos didácticos y no en aspectos solo tecnológicos, ya que esto ayuda a que profesores inseguros de usar la tecnología, se sientan confiados cuando vean que la calidad de su trabajo, no radica en solo conocimiento tecnológico sino de carácter didáctico.

3. Por último, se recomienda que los cursos se extiendan por algún tiempo con el fin de que el profesor, se sienta acompañado en su trabajo cotidiano y no solo de preparar una actividad como evaluación de un curso puntual.

Por otra parte De Villiers (2006) señala que se debe tener cuidado con el uso de software de geometría dinámica, ya que la mayoría de las investigaciones realizadas sobre el uso de la tecnología solo hablan de sus potencialidades educativas, sin abordar los posibles inconvenientes que suceden como práctica de su uso en las aulas de clase. Algunas de ellas se mencionan a continuación:

1. *El inconveniente del no cambio*. Es descrito por el empleo que hacen los profesores al introducir el software de geometría dinámica al salón de clases, solamente como una extensión de lo que se hace a papel y lápiz. “De esta manera se requiere aprender a utilizar las tecnologías donde la actividad matemática se transforme en hacer cosas que previamente no podrían haber sido posible hacerlas a papel y lápiz” (Sutherland 2005, p. 4; citado en De Villiers, 2006). De lo contrario, se puede caer en la categoría de profesores resistentes mencionados anteriormente.
2. *El inconveniente de primero dominar el software.* Consiste en que muchos de los profesores asumen que los estudiantes deben primero dominar ampliamente el software, para que pueda ser utilizado efectivamente en el salón de clases para la enseñanza. Esta creencia está muy lejos de la realidad, ya que los estudiantes no necesitan conocer a profundidad el software para poder llevar a cabo exploraciones y conjeturas. Él considera que esto se puede lograr, simplemente con exponer al estudiante con las habilidades específicas necesarias para el aprendizaje particular de un concepto. Este inconveniente puede relacionarse con la categoría de los tecnócratas, en dónde el alcance de la tecnología se ve limitada a solo un uso tecnológico y no didáctico.
3. *El inconveniente del aprendizaje sin dolor*. Este consiste con la creencia de que, tan solo pedir a los alumnos que trabajen un problema utilizando geometría dinámica, automáticamente el aprendizaje se dará de manera fácil. A menos que el estudiante sea cuidadosamente guiado para observar y examinar lo que acontece en la pantalla, muy poco aprendizaje podría estar ocurriendo. En nuestra opinión, este último inconveniente puede estar ligado a la categoría de las prácticas docentes de los novatos.

De Villiers (2006) ejemplifica a una estudiante en formación docente de matemáticas, donde se le solicitó una reflexión después de cada actividad. En una de sus reflexiones, ella elogió en sobremanera el uso del software de geometría dinámica, ya que ayudó a comprender mejor los teoremas y demostraciones, sin embargo al momento de evaluarla, se notó que la estudiante había aprendido muy poco.

El investigador argumenta que una posible causa se debe a la impresión, o tal vez confundida con la potencialidad del programa, desconectándose de la parte conceptual del contenido matemático. Esto desde la teoría de la Genesis instrumental se llama el proceso de instrumentalización, considerando que no basta solo el buen manejo de la tecnología, sino que existe una parte epistémica que debe emerger de este proceso (instrumentación) y que se integra al conocimiento para comprender un contenido matemático (Artigue, 2002).

A manera de reflexión los trabajos descritos, brindan un panorama sobre los avances de la práctica docente con el uso de las tecnologías para la clase de matemáticas. En contraparte, aunque los planes de estudio promueven el uso de las tecnologías, no se puede negar el estado problemático del cómo usarlas para la enseñanza sin caer en la tipificación de informático, como menciona Vitabar (2011).

Estos trabajos describen de cierta manera, sobre inquietudes de implementar la tecnología en la práctica docente. Algunas de estas inquietudes se orientan a las siguientes preguntas*: cómo llevar un contenido matemático*, *qué didáctica se debe desarrollar y qué de la tecnología usar al momento de implementarla en la clase de matemáticas*. Tales preguntas nos llevan a problematizar la necesidad de articular estos conocimientos y planear su forma de intervención en el aula.

La dificultad de la enseñanza de la Integral Definida

Siendo el contenido matemático de la integral definida que se propone en esta investigación, conviene reportar algunas dificultades que justifican el diseño de una propuesta de enseñanza con el uso de tecnología. Ramírez, Muñoz e Ibarra (2011), con el objetivo de indagar si los estudiantes logran una aprehensión conceptual de la integral definida en la resolución de problemas, documentaron el tipo de aprendizaje logrado por 176 estudiantes de Ingeniería en relación con la integral definida. Hicieron uso de un examen diagnóstico que implicó la identificación y tránsito de la integral en diferentes registros de representación (geométrico, algebraico y numérico) en la resolución de problemas. Concluyeron que la mayoría de los estudiantes adquieren un aprendizaje memorístico y algorítmico, sin lograr construir el significado de la integral definida.

Kouropatov & Dreyfus (2014) trabajaron con estudiantes de bachillerato sobre el aprendizaje del concepto de integral definida, basándose en la idea de acumulación. Se mostró evidencia del potencial del enfoque que llevó a los estudiantes a tener un punto de vista sobre el concepto y que los prepara para el teorema fundamental del Cálculo. En este trabajo se implementó un cuestionario con algunas preguntas conceptuales referentes a la integración, por ejemplo, calcular el área del rectángulo que se muestra en la figura 1. Esto con el fin de conseguir información sobre el pensamiento de los estudiantes en situaciones matemáticas elementales basada sobre la idea de acumulación.

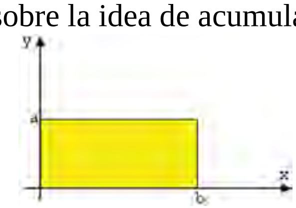


Figura 1. Área tomada de Kouropatov & Dreyfus (2014, p. 2).

Se identificó que cuando se les pide escribir la integral para calcular el área del rectángulo dado, sólo el 42% respondieron correctamente, el 15% no respondieron y el 12% configuraron bien la integral $\int_0^b adx$, pero cometieron errores de cálculo tales como: $\int_0^b adx = \left.\frac{a^2}{2}\right|_0^b = \frac{b^2}{2} - 0 = \frac{b^2}{2}$, sin haberse percatado de que el resultado era diferente al cálculo del área haciendo uso de la fórmula "*axb*". Aproximadamente el 31% de los estudiantes propusieron respuestas integrales como:

$$\int_0^b adx\,,\ \int_a^b f(x)dx\,,\ \int_a^b f(a)dx\,,\ \int_0^b (\mathrm{a}-\mathrm{b})dx \text{ y } \int F(a)-F(b)+c\,.$$

Por otra parte, Llorens y Santonja (1997) mencionan algunas concepciones erróneas que tienen los estudiantes sobre el concepto de integral definida:

a) Se argumenta que los estudiantes identifican la integral con la primitiva. En este sentido, cuando calculan una integral, para ellos no interviene ningún proceso de convergencia ni tampoco un aspecto geométrico, por lo que queda en un proceso puramente algebraico de métodos de integración, sin ser aplicados al cálculo de área o ignoran por completo que se trata de las sumas de Riemann.

b) En segundo lugar, los alumnos identifican la integral definida con la regla de Barrow, incluso cuando ésta no puede aplicarse.

c) Finalmente se menciona que los estudiantes no relacionan el concepto de área con la integral.

Esto lleva a que alumno prefiera el contexto algebraico-formal que al visual-geométrico, debido a que no ha podido realizar la integración de ambos contextos. Así, se propone invertir el orden de enseñanza que usualmente declaran los libros de texto: cálculo de primitivas, métodos de integración, la integral definida y métodos de integración. Esta nueva organización de los contenidos de la matemática escolar sugieren como primer aspecto para el Cálculo integral, utilizar la construcción de Cauchy-Riemann con el apoyo de tecnología, diseñando prácticas que permitan al estudiante visualizar el concepto de área.

Por otra parte, Turégano (1998) señala que las dificultades que presentan los estudiantes en la compresión del concepto de integral definida, se deben a que se basa en conceptos más elementales como por ejemplo límite e infinito, que por sí solos presentan obstáculos epistemológicos (Ward, 2011). Esto lleva a los estudiantes a asimilar al mismo tiempo los fenómenos asociados a la aparición del infinito y de límite. Por lo que el autor menciona la importancia de conocer el desarrollo histórico del concepto para comprender su génesis, para proponer otra forma de organizar su enseñanza.

Por último, Cantor (2013) considera que la enseñanza de la integral se enfoca más a los cálculos de primitivas y métodos de integración, siendo el objetivo adiestrar en habilidades para propieciar trucos y destrezas en el estudiante, opacando el concepto de integral definida como área bajo la curva. Se puede constatar, que en muchos textos se omite una revisión del concepto de área (Hurtado 2016), como un "concepto intuitivo" que permite interpretar de ese modo las integrales y que cada vez es más necesario por el potencial que tiene el uso de tecnología en este aspecto. Así, Cantor (2013) desarrolla una secuencia del concepto de integral definida como área bajo una curva, desde una perspectiva gráfica y numérica, partiendo de la idea de aproximación y análisis de su variabilidad.

Estos aspectos nos permiten considerar, que la enseñanza de la integral definida ha privilegiado los métodos algorítmicos, donde lo predominante es el contexto algebraico-formal. Lo anterior ha ocasionado entre otras cosas, una pérdida de los significados que se pueden propiciar en el acercamiento visual-geométrico, siendo este contexto donde el uso de la tecnología puede ser un medio idóneo para desarrollarse. Aunque existen diversas posturas de enseñanza, por ejemplo, unas se orientan a la aplicación de las primitivas para calcular áreas mediante la regla de Barrow, otras definen la integral con el uso del lenguaje algebraico para después ver su interpretación geométrica, o bien cuando se introduce la integral definida como el cálculo del área bajo la curva, Existe poca reflexión sobre la práctica docente cuando se propone aspectos visuales de la enseñanza de la integral definida con el uso de tecnología. Esto es algo que consideramos importante reportar en este trabajo, tratando de responder una pregunta que detonó la investigación ¿cómo implementar la tecnología en las aulas de clase respecto a un contenido matemático?

Problemática de investigación

La investigación acerca del uso de tecnología para la enseñanza, ha recibido atención en varios campos de la matemática educativa en las dos últimas décadas (Kaput, 1992; citado en Haciomeroglu *et al,* 2010). Su uso en las escuelas ha ido creciendo en los últimos años, dada la dependencia que se tiene en la vida diaria, sin embargo, la incorporación a los sistemas educativos ha sido lenta (Miranda y Sacristán, 2012). Esto da como resultado la escasa utilización y variabilidad por parte de los profesores, independientemente del nivel de enseñanza en el que se desarrollan (Hernández y Quintero, 2009).

El uso de las tecnologías digitales para la enseñanza de las matemáticas ha sido reconocida, pero no “explotada a plenitud por lo profesores por falta de capacitación con esas tecnologías” (Valero, Barba y Del Castillo; 2011, p. 188). Por ejemplo se reporta que para los maestros, la incorporación de la tecnología en el aula es compleja (Chai, Ng, Li, Hong y Koh, 2013). Una posible causa, es que muchos profesores no cuentan con el conocimiento del contenido didáctico tecnológico, que respalden el aprendizaje de las matemáticas utilizando nuevas tecnologías (Niess et al, 2009; citado en Haciomeroglu et al, 2010). Es decir, no basta ser experto en el uso de las tecnologías, sino en las formas o métodos empleados hacia la enseñanza (Haciomeroglu *et al*, 2010). En ese sentido, se requiere de investigación que permita reflexionar la sistematización de tres dimensiones del conocimiento, necesarios para la clase de matemáticas. Estos son: el conocimiento matemático ¿qué enseñar de la integral definida y por qué?; el conocimiento didáctico ¿cómo enseñarlo? y el conocimiento tecnológico ¿cómo integrar la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de un contenido matemático específico? Por lo tanto, es importante que el profesor desarrolle competencias y reflexione sobre su práctica al incorporar estos tres conocimientos a su clase.

Las referencias descritas anteriormente, nos remiten a la caracterización de nuestra problemática de investigación en la formación docente con el uso de tecnología. Una dificultad que limita esta actividad, es la falta del conocimiento tecnológico por parte de los profesores (Haciomeroglu, *et al*, 2010). En particular, la renuencia se hace fuerte dado que no tienen marcos de referencia de cómo articular cierto conocimiento matemático, tecnológico y didáctico. El resultado es, que generalmente, los profesores utilizan el software de geometría dinámica como una extensión de la geometría que se hace a papel y lápiz, sin embargo la falta del conocimiento tecnológico no es la única dificultad.

Los profesores que cuentan con el conocimiento tecnológico, pueden hacer un uso de esta herramienta como un fin en sí mismo y no como un medio, como es el caso de los profesores tecnócratas, que no saben articular su conocimiento tecnológico con el matemático (Vitabar, 2011). El problema consiste en cómo se deben articular estos tres conocimientos para llevarlos al aula de clase. Por último, Rojano (2006) señala que una de las categorías del uso de las tecnologías digitales en la educación, corresponde a que se conciben como agentes del cambio tanto de los modos de apropiación de conocimiento, como de las prácticas en el aula y de los contenidos curriculares mismos.

Lo anterior nos permite reflexionar que la complejidad radica a una desarticulación de estos tres conocimientos. Con lo descrito, nos hacemos la siguiente pregunta ¿Qué reflexión se obtiene hacia la formación docente en el uso de tecnología, al articular el conocimiento didáctico matemático sobre el tema de la integral definida con el uso de GeoGebra? De tal forma que se planteó como objetivo realizar una propuesta de articulación del conocimiento didáctico y matemático con el software de geometría dinámica GeoGebra para el tema de la integral definida. Es decir, reportamos como resultado una propuesta de articulación del conocimiento didáctico al tema de la integral definida con el uso de GeoGebra bajo el modelo TPACK y que a continuación describimos.

Marco Teórico

El Modelo didáctico de integración tecnológica, el TPACK fue desarrollado por Mishra y Koehler (2006). El TPACK aborda la problemática de integrar la tecnología en el aula para la enseñanza de la ciencia. Este modelo describe los tipos de conocimiento que el profesor necesita para la efectiva enseñanza de un contenido específico por medio de tecnología. El TPACK es una extensión del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) de Shulman (1986), citado en Koehler y Mishra, 2009). Este marco explica cómo la comprensión que tienen los profesores de las tecnologías educativas y el PCK, interactúan entre ellas para producir enseñanza efectiva con tecnología.

Este modelo está compuesto por tres núcleos principales que están relacionados con el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido (CK), conocimiento pedagógico (PK) y conocimiento tecnológico (TK). Para este modelo las intersecciones entre estos cuerpos de conocimiento son igual de importantes. Estas intersecciones están representadas como PCK (conocimiento pedagógico del contenido), TCK (conocimiento tecnológico del contenido), TPK (conocimiento tecnológico pedagógico), y el TPACK (conocimiento tecnológico pedagógico del contenido). Todas estas intersecciones son presentadas en la figura 2.

Definiciones de los conocimientos considerados por el TPACK

A continuación se presentan las concepciones presentadas en Koehler y Mishra (2009) de los conocimientos propuestos en el modelo TPACK:

Conocimiento del Contenido (CK). Es el que tiene el maestro acerca de la materia a ser enseñada y aprendida; teniendo una importancia crítica para estos. Este tipo de conocimiento incluye conceptos, teorías, ideas, marcos de trabajo organizativos, conocimientos de evidencias y pruebas; así como prácticas establecidas y enfoques hacia el desarrollo de este conocimiento. La naturaleza y el tipo de conocimientos difieren en gran medida entre disciplinas. Por lo que los maestros deben entender los conocimientos fundamentales de la disciplina que ellos enseñan.

Conocimiento pedagógico (PK). Es el que tienen los profesores acerca de los procesos, prácticas o métodos de enseñanza y aprendizaje. Estos abarcan la totalidad de los propósitos educativos, valores y metas. Este tipo de conocimiento se refiere a como los estudiantes aprenden, técnicas de manejo del salón de clases, destrezas, planeación de clases y evaluaciones. Incluye técnicas o métodos utilizados en el salón de clases y estrategias para la evaluación de la comprensión de los estudiantes. Un profesor que tiene un profundo conocimiento pedagógico, comprende cómo los estudiantes construyen el conocimiento y adquieren habilidades, y cómo ellos desarrollan hábitos mentales y disposiciones positivas hacia el aprendizaje.

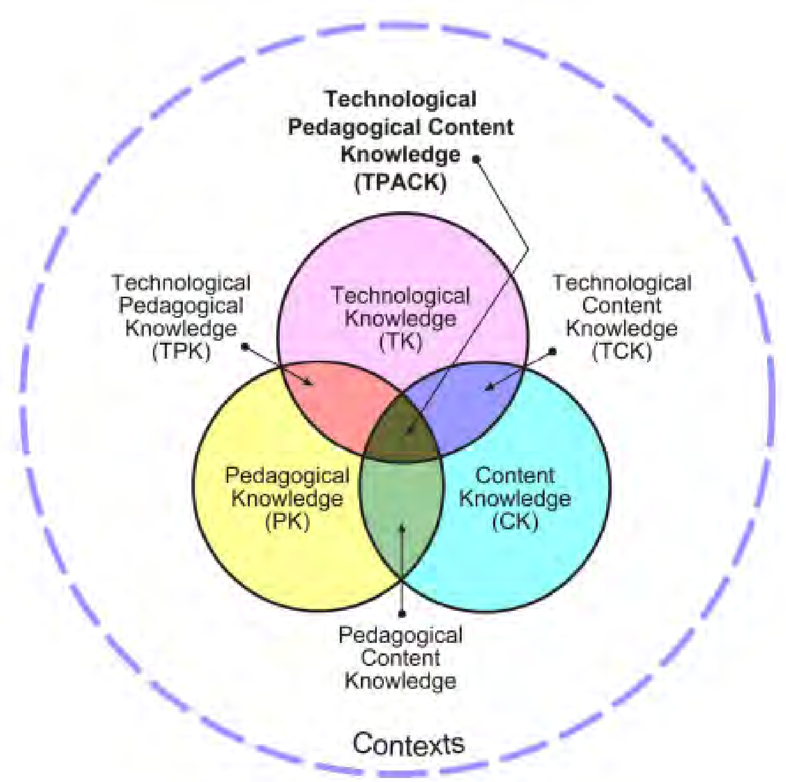


Figura 2. Marco del Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (Koehler y Mishra, 2009; p. 63).

Conocimiento Tecnológico (TK). La definición es similar a la dada por *Fluency of Information Technology* (FITness) propuesta por *Committee of Information Technology Literacy* del *National Research Council* (Koehler y Mishra, 2009). El *FITness* requiere que las personas comprendan la información tecnológica lo suficiente, para aplicarla productivamente en el trabajo y en la vida diaria, reconocer cuando la información tecnológica puede ayudar o entorpecer la realización de una tarea, y adaptar continuamente los cambios en la información tecnológica. Adquirir el conocimiento tecnológico de esta manera, le permite a una persona realizar una variedad de tareas diferentes utilizando información tecnológica, y desarrollar diferentes maneras de realizar cierta tarea.

Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK). Este es similar y consistente con la idea de Shulman (1986, citado en Koehler y Mishra, 2009) del conocimiento pedagógico que es aplicable a la enseñanza de un contenido en específico (PCK). Central a la conceptualización de Shulman del PCK, está la noción de la transformación de la materia para la enseñanza. De acuerdo con Shulman (1986), esta transformación ocurre cuando el profesor interpreta la materia, encuentra múltiples maneras de representarla, y la adapta e hila los materiales instructivos para concepciones alternativas y al conocimiento previo del estudiante. De esta manera, tener conocimiento de las interpretaciones erróneas y las maneras de afrontarlas, la importancia de forjar conexiones entre las ideas basadas en el contenido, el conocimiento previo del estudiante, estrategias alternativas de enseñanza, y la flexibilidad que viene de explorar maneras alternativas de ver el mismo problema o idea son todas esenciales para la enseñanza efectiva.

Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK). Es la comprensión de cómo la tecnología y el contenido se influencían y limitan una a otra. Los profesores necesitan dominar más que la materia que se imparte; ellos deben tener un profundo entendimiento de cómo la materia se puede modificar por la aplicación del uso específico de una tecnología. Los profesores deben comprender qué tecnologías específicas, son las más adecuadas para abordar el aprendizaje de la materia dentro de sus dominios y de cómo el contenido dictamina o tal vez cambia la tecnología, o viceversa.

Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK). Es el entendimiento de cómo la enseñanza y aprendizaje puede cambiar cuando tecnologías específicas son utilizadas de forma concreta. Esto incluye conocer los alcances y limitantes de una serie de herramientas tecnológicas al relacionarse a los diseños y estrategias pedagógicas disciplinares apropiados. Para construir el TPK es necesario tener una comprensión más profunda de los alcances y limitaciones de las tecnologías y los contextos disciplinarios dentro de los cuales funcionan.

Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK). Es una forma emergente de conocimiento que va más allá de las tres componentes: contenido, pedagogía y tecnología; es una comprensión que emerge de las interacciones entre estas componentes. El TPACK es la base para una enseñanza efectiva con tecnología. Este requiere: una comprensión de cómo los conceptos se pueden representar utilizando tecnología; técnicas pedagógicas que utilizan tecnología de maneras constructivas; conocimiento de qué es lo que hace fácil o difícil aprender ciertos conceptos y cómo la tecnología puede redireccionar algunos de los problemas que enfrentan los estudiantes; saber sobre el conocimiento previo de los estudiantes y teorías epistemológicas; además de cómo las tecnologías pueden ser utilizadas para construir a partir del conocimiento existente, nuevas epistemologías o reforzar las existentes.

Por último, el círculo punteado que aparece en el diagrama etiquetado como contexto, enfatiza la comprensión de que los diferentes conocimientos no existen en el vacío, sino, que están instanciados en contextos específicos de la enseñanza y aprendizaje. Cada situación presentada a los profesores es una combinación única de los tres núcleos que componen el TPACK. En consecuencia, no hay una solución tecnológica que sea única que aplique para cada maestro, para cada curso, o para cada visión de aprendizaje. Más bien, las soluciones recaen en las habilidades de los profesores, para recorrer flexiblemente, los espacios definidos por los tres elementos del modelo y las interacciones complejas entre éstos, en contextos específicos.

Es así como, con estos referentes teóricos se intenta reflexionar un TPACK de la integral definida, articulando los tres conocimientos especializados ya mencionados. En ese sentido, se proponen el este modelo de articulación de conocimientos para la enseñanza de la integral definida que corresponde a una adecuación de su secuencia didáctica (autor, 2014).

Propuesta Didáctica

Modelo del TPACK de la integral definida

A continuación describimos la articulación de las intersecciones de los conocimientos matemático, didáctico y tecnológico, propuesta para el tema de integral definida en el contexto de una clase a nivel medio superior. La actividad es adaptada de Cantor (2013) y diseñada en Geogebra. El lector puede descargar de https://www.geogebra.org/m/Pu4bSAQn , tanto la hoja de trabajo como el archivo Geogebra.

Conocimiento pedagógico de la integral definida. En esta dimensión se tomó la siguiente definición de integral definida considerando la propuesta curricular del programa de estudios del nivel medio superior en México (DGB, 2011) y como recomendación reportada en Llorens y Santonja (1997):

> Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Hacemos que $x_0\ (= a), x_{1,} x_2, \dots, x_n (= b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elegimos $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ como los puntos muestra en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el *i-ésimo* subintervalo $[x_{i-1},\ x_i]$. Entonces la integral definida de f, desde a hasta b, es
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

(Steward, 1999)

Además, su elección se justifica diciendo que la definición tiene una ventaja didáctica, pues se puede vincular con la visualización de cálculo de áreas en distintos contextos como describe (Cantor, 2013), es decir, la aproximación por sumas por exceso y por defecto en representaciones geométricas, numéricas y algebraicas.

Conocimiento tecnológico de la integral definida. En esta componente, el profesor identificó qué rutinas del GeoGebra podrían ser utilizadas para abordar el concepto de integral mediante la visualización de áreas; como resultado, él propone las siguientes construcciones en Geogebra. La finalidad de las mismas, es que los estudiantes, exploren y argumenten la noción de área con la suma de rectángulos por exceso y por defecto, en relación con la integral definida. Enseguida se describen las construcciones propuestas y utilizadas por el profesor en su experiencia de clase:

1. Actividad 1. En esta primera actividad se definen los valores a_1, b_1. Enseguida se definen los puntos a = (a_1, 0) y b = (b_1, 0) y se utiliza el comando Segmento[a, b] siendo a el límite inferior y b el límite superior del segmento [a, b]. Para poder estar cambiando los valores de a y b se les vincula una casilla de entrada. Se define el valor n (número de subintervalos) y también se le asigna una casilla de entrada para poder variar este valor. Para graficar los puntos de la partición se utiliza el comando lista1 = Secuencia[(i, 0), i, a1, b_1, (b_1 - a_1) / n]. Para obtener las coordenadas de los puntos de la partición se utiliza

el comando lista2 = Secuencia[Texto[(x(Elemento[lista1, i]), y (Elemento[lista1, i])), Elemento[lista1, i]], i, 2, n]. Por último se define el valor lsi = (b_1 - a_1) / n para obtener la longitud de los subintervalos.

2. Actividad 2. En esta actividad iniciamos definiendo la función f(x) = 0. A esta función se le vincula la casilla de entrada que nombramos Función para poder trabajar con diferentes funciones utilizando el mismo subintervalo y partición que se definió en la Actividad 1. Definimos lista3 = Secuencia[(Elemento[x(lista1), i], f(Elemento[x(lista1), i])), i, 1, n + 1] para generar los puntos de la partición al ser evaluados por la función que se definió anteriormente. Para hacer que las coordenadas de los puntos aparezcan en el ordenador, se utiliza el comando lista4 = Secuencia[Texto[(x(Elemento[lista3, i]), y(Elemento[lista3, i])), Elemento[lista3, i]], i, 1, n + 1]. Se crea el deslizador rectángulosuperiores y se define lista5 = Secuencia[Polígono[Elemento[lista3, i + 1], Elemento[lista1, i + 1], Elemento[lista1, i], (x(Elemento[lista1, i]), y(Elemento[lista3, i + 1]))], i, 1, rectángulosuperiores] para que el ordenador dibuje los rectángulos superiores de la partición. De igual manera se crea el deslizador rectángulosinferiores y se define lista6 = Secuencia[Polígono[Elemento[lista3, i], (x(Elemento[lista1, i + 1]), y(Elemento[lista3, i])), Elemento[lista1, i + 1], Elemento[lista1, i]], i, 1, rectángulosinferiores] para que el ordenador dibuje los rectángulos inferiores de la partición. En esta actividad también se utilizan casillas de control para activar o desactivar comandos.
3. Actividad 3. En esta actividad se definen los valores Sumainferior = Suma[lista6] y Sumasuperior = Suma[lista5].

Intencionalidad didáctica de las construcciones realizadas en GeoGebra para la enseñanza de la integral definida

Sobre la Primera construcción con GeoGebra. Las tareas de la Actividad 1 son propuestas para que los estudiantes relacionen el valor de “n” con el número y longitud de los subintervalos. De esta manera se pretende introducir la noción de partición.

Sobre la segunda construcción con GeoGebra. Las tareas planteadas en la Actividad 2 tienen como objetivo realizar una aproximación del área bajo el segmento parabólico, $y = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo [1, 6] utilizando sumas superiores. Los estudiantes tendrán que completar una tabla utilizando las sumas superiores con la intención de que ellos relacionen las alturas de los rectángulos con los puntos de la partición. En la última parte de esta actividad se les pide que realicen el llenado de la tabla, pero ahora con una partición de seis subintervalos, con la intención que relacionen que a más particiones que tenga el subintervalo se obtiene una mejor aproximación del área.

Sobre la Tercera construcción con GeoGebra. Las tareas propuestas en la Actividad 3 tienen como objetivo, que los estudiantes identifiquen que conforme el número de intervalos aumenta, la diferencia entre las sumas superiores e inferiores disminuye. De esta manera se introduce de forma intuitiva a la integral definida como la aproximación del área bajo la curva y su relación con la idea de límite. Después de que los estudiantes hayan terminado el último ejercicio de la Actividad 3, se espera tendrán los elementos para formalizar la definición de integral definida, desde el enfoque de Riemann propuesto en el plan de estudios del nivel medio superior.

Hasta el momento se han presentado los conocimientos que fueron identificados y construidos por el profesor mediante el modelo TPACK; sin embargo, esto no permite soslayar la organización de esta articulación para su implementación en clase. Esto se resolvió mediante la herramienta metodológica de planeación, ejecución y evaluación de la clase denominada “las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA)”. Esta herramienta se presenta a continuación.

Metodología

La planeación de la aplicación de la enseñanza de la integral definida

Como ya se dijo anteriormente, aunque existe en el TPACK una parte didáctica que ayuda a la intencionalidad de lo que se quiere aprender, ésta no proporciona una guía o plan de trabajo que complementen la reflexión docente. Para ello se consideró el término Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) de Simón (1995). La THA ofrece una descripción de aspectos clave para la planeación de clases de matemáticas. Una THA se basa en los objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes; en las tareas matemáticas que se utilizarán para promover estos objetivos y en las hipótesis que tiene el profesor acerca de los procesos de aprendizaje de los estudiantes en torno al contenido matemático a enseñar (Figura 3).

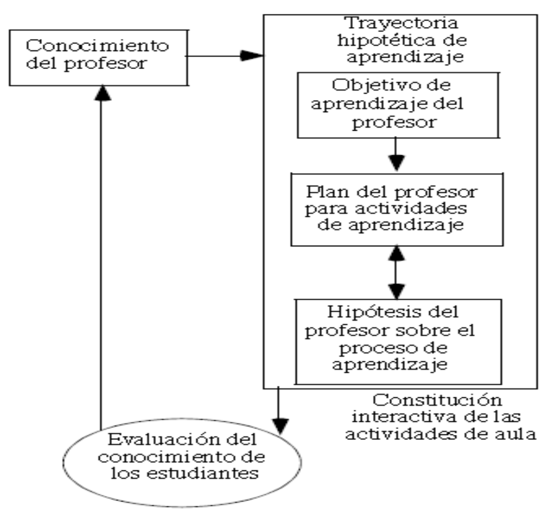


Figura 3. Ciclo de la enseñanza de las matemáticas de abreviado (Simón, 1995 p. 136).

Este diagrama se describe de la siguiente manera. El objetivo de aprendizaje que tiene el profesor indica la dirección de la trayectoria hipotética de aprendizaje. En ese sentido se traza un camino por el que puede transitar el aprendizaje; esta hipótesis es contrastada posteriormente con lo obtenido después de la clase. Para ello se parte del supuesto que el aprendizaje individual de los escolares recorre caminos idiosincráticos, pero frecuentemente similares. Esta hipótesis, incluye algunos supuestos como que el aprendizaje de un individuo presenta ciertas regularidades, que la comunidad de la clase condiciona la actividad matemática de maneras frecuentemente predecibles y que muchos de los escolares en la misma clase pueden beneficiarse de la misma tarea matemática (Steffe, Von Glasersfeld, Richards y Cobb, 1983, p.118). De esta manera, una THA le proporciona al profesor, criterios para seleccionar un diseño instruccional particular, por lo tanto, el profesor toma sus decisiones del diseño basado en su mejor conjetura acerca de cómo puede suceder el aprendizaje.

En este caso, Simón (1995), señala que la creación y la continua modificación de la THA, es la pieza central del modelo de reflexionar sobre la clase de matemáticas. El autor señala que la interacción colectiva entre el profesor y los estudiantes o cara a cara profesor y estudiante, constituye una experiencia diferente a la que el profesor había anticipado. Esta interacción mediada por las actividades del salón de clases, conlleva a una modificación en las ideas y conocimiento del profesor, para darle sentido a lo que acontece y aconteció en el salón de clases. El diagrama de la Figura 3, indica que la evaluación del conocimiento de los estudiantes puede contraer adaptaciones en el conocimiento del profesor que, sucesivamente, llevan a una nueva THA o su modificación.

Así se plantea como objetivo de aprendizaje del profesor, una de las competencias establecidas por la dirección general de bachillerato:

> *Calcula e interpreta áreas bajo la curva mediante las Sumas de Riemann en la resolución de problemas en un entorno teórico* (DGB, 2011, p. 19).

En ese sentido, la propuesta intenta desarrollar en los estudiantes, la competencia que estipula el programa mediante la aproximación de la definición de integral definida mediante las sumas de Riemann, y pretende que los estudiantes puedan apropiarse de la noción del concepto de integral definida, introduciendo la aproximación de áreas bajo una curva mediante una actividad estructurada con GeoGebra. Entonces, el plan de clases consistió en que el profesor guía al estudiante mediante esta actividad estructurada para que ellos, en pares, respondan la hoja de trabajo que se le proporcionó, posterior se socializan sus respuestas, propiciando el debate entre ellos y su reflexión. La hipótesis es que este debate de las actividades estructuradas con GeoGebra, permita al estudiante construir la noción de integral definida como área bajo la curva, dando sentido a su expresión simbólica antes de verla como cálculo de primitivas y técnicas de integración.

Conclusiones

Con lo anterior, el avance de investigación que se presenta, reporta una propuesta de articulación de conocimientos TPACK para la enseñanza de la integral definida con el uso de GeoGebra. El objetivo es validar dicha articulación TPACK mediante un plan de trabajo en clase (THA) ya mencionada. La indagación del análisis posterior a esta aplicación de conocimientos matemáticos, la tecnológicos y la didácticos, marcará directrices en un rediseño de las actividades que propiciará un nuevo TPACK y THA y de cual consideramos un proceso de formación docente con el uso de las TIC a aulas de clase, en este caso el uso de GeoGebra.

De esta manera, este trabajo brinda un marco de referencia del cómo se puede utilizar el modelo TPACK, en el desarrollo profesional de profesores de matemáticas. Además, consideramos que los resultados pueden brindar estrategias y limitaciones a considerar, en la enseñanza de la integral definida con el uso de GeoGebra rescatando, la riqueza y ventajas que presente en el aprendizaje de los estudiantes. De tal manera que este reporte de investigación, da pauta a que profesores apliquen estas actividades y tener una evidencia propia de su práctica docente en el uso de GeoGebra. Esto es posible debido a que no requiere de un conocimiento tecnológico de GeoGebra, ya que la actividad está estructurada, sino su conocimiento didáctico será importante en el uso de esa propuesta.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The Genesis of a Reflection about instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

Chai, C., Li, W., Hong, H. y Koh, J. (2013). Validating and modeling technological pedagogical content knowledge framework among Asian preservice teachers. *Australasian Journal of Educational Technology. 29*(1), 41-53.

Cantor, G. (2013). *Elementos para la enseñanza de la integral definida como área bajo la curva*. (Tesis inédita de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

De Villiers, M. (2006). Some pitfalls of dynamic geometry software. *Learning and Teaching Mathematics,* (4), 46-52.

DGB (2011). Programa de estudios de Cálculo Integral.

González, J. (2014). Formación inicial de profesores en geometría con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Educación,* (65), 161-172.

Haciomeroglu, E., Bu, L., y Haciomeroglu, G. (2010). Integrating technology into mathematics education teacher courses. En *Proceedings of the First North American GeoGebra Conference 2010.* (pp. 27-32). NY: Ithaca College

Hernández, A. y Quintero, A. (2009). La integración de las TIC en el currículo: necesidades formativas e interés del profesorado. *REIFOP, 12*(2), 103–119.

Koehler, M. y Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9*(1), 60-70.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2014). Learning the concept integral by constructing knowledge about accumulation. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 46* (4), pp. 533-548. doi: 10.1007/s11858-014-0571-5

Llorens, J., y Santonja, F. (1997). Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas*, *5*(12), 61-76

Miranda, M. y Sacristán, A. (2012). Digital technologies in mexicán high-schools. En Van Zoest, L. R., Lo, J. J., y Kratky, J. L. (Eds.), En *Proceedings of the 34th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 1097-1102) Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author. http://www.nctm.org.

Niess, M., Ronau, R., Shafer, K., Driskell, S., Harper S., Johnston, C., Browning, C., Özgün-Koca, S. y Kersaint, G. (2009). Mathematics teacher TPACK standards and development model. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *9*(1), 4-24.

Ramírez, P. S., Muñoz, K., e Ibarra, K. (2011). Aprendizaje de la integral definida en estudiantes de ingeniería. *ReCalc. 3*, p. 32-42. Recuperado de: http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Narri-Ramirez-Patricia-del-Socorro.pdf

Rojano, M. T. (2006). Los principios básicos de los modelos EFIT y EMAT. En Rojano Ceballos, M. T. (Ed.), *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula*. pp. 15-23. México: Secretaría de Educación Pública

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, *15*(2), 4-14.

Simón, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Stewart, J. (2006). *Cálculo, conceptos y contextos, 3a. ed*. México: Thomson

Turégano, P. (1998). Del área a la integral: Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias*, *16*(2), 233-249.

Valero, M., Barba, M. y Del Castillo, A. (2011). El laboratorio digital de matemáticas del CBTIS 164: Innovación educativa a través de la autogestión. En Cortés, J. C., y Guerrero, M. L. (Eds.), *Colección: Uso de tecnología en educación matemática. Investigaciones y propuestas 2011.* (pp. 187-193). México: Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática.

Vitabar, F. (2011). Cursos de GeoGebra para profesores en Uruguay: valoraciones, padecimientos y reclamos. *XIII CIAEM-IACME,* Recife, Brasil.

Ward, S. (2011). *El proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite en el bachillerato.* (Tesis inédita de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Culiacán Rosales, M.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio. 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

SOFTWARE LIBRE Y TIC EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS DISCRETAS

José Francisco Villalpando Becerra, Rafael Pantoja Rangel

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara. México

jose.villalpando@red.cucei.udg.mx, *rpantoja@prodigy.net.mx*

Para citar este artículo:

Villapando, J. F. y Pantoja, R. (2016). Software libre y TIC en la enseñanza de las matemátcas discretas. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

SOFTWARE LIBRE Y TIC EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS DISCRETAS

José Francisco Villalpando Becerra, Rafael Pantoja Rangel

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara. México

jose.villalpando@red.cucei.udg.mx, *rpantoja@prodigy.net.mx*

Palabras clave: Software libre, tecnologías de la información y la comunicación, Matemáticas Discretas, actividades didácticas

Resumen

En la Universidad de Guadalajara se ha sugerido utilizar las Tecnologías de la Información y la Comunicación y el software libre para que sea incluido en la materia Matemáticas Discretas. La misma se imparte en las Ingenierías en Informática y en Computación en algunos Centros Universitarios de la Universidad de Guadalajara. Además, para cumplir los objetivos de su contenido temático se elaboraron dieciséis actividades didácticas enfocadas en problemas cotidianos, cada uno debe ser resuelto apoyado en el manejo de diversas herramientas computacionales y software libre.

Introducción

Desde hace más de 30 años nos hemos acostumbrado a que quien vende un programa de matemáticas, imponga las condiciones bajo las que puedo usarlo. Dicho software, no siempre se adapta a nuestras necesidades. Esto no tiene por qué ser así, y es precisamente el software libre el que concede las libertades que en muchas ocasiones el software comercial niega.

Así pues, el término software libre se refiere a libertad si el usuario tiene los siguientes derechos o libertades:

- Ejecutar el programa en cualquier sitio, con cualquier propósito y para siempre.
- Estudiarlo y adaptarlo a nuestras necesidades.
- Redistribución, de modo que se nos permita colaborar con vecinos y amigos.
- Mejorar el programa y publicar las mejoras.

Estas libertades exigen el código fuente del programa. Las mismas se pueden garantizar, de acuerdo con la legalidad vigente, por medio de una licencia. En ella se plasman las libertades, pero también restricciones compatibles con ellas, como dar crédito a los autores originales si se redistribuye. Incluso puede obligar a que los programas ajenos mejorados por nosotros también sean libres, promoviendo así la creación de más software libre (De Nápoli, 2012).

Una ventaja de usar software libre en la docencia, en particular en la enseñanza de las matemáticas, es que se pueden distribuir copias del programa legalmente a los alumnos. Esto permite que puedan utilizar el programa en sus casas. La licencia del programa nos autoriza a hacerlo (Villalpando, 2011).

La UNESCO (2005) define a las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) como un conjunto de disciplinas científicas, tecnológicas, de ingeniería y de técnicas de gestión utilizadas en el manejo y procesamiento de la información: sus aplicaciones, las computadoras y su interacción con los hombres y máquinas; y los contenidos asociados de carácter social, económico y cultural.

La utilización de las TIC en la enseñanza de las Matemáticas Discretas se da de manera natural, ya que estas son consideradas como una de las áreas de las matemáticas modernas que ha experimentado mayor crecimiento en los últimos años, debido principalmente a su estrecha relación con el desarrollo y evolución de las computadoras (Villalpando Becerra y García Sandoval, 2014).

Dicho tipo de matemáticas estudian los conceptos que tienen un ámbito finito y surge como una disciplina que unifica diversas áreas, en apariencia tan dispersas, como lo son: lógica y cálculo proposicional, teoría de conjuntos, teoría de grafos, teoría de árboles, combinatoria, álgebra booleana, relaciones, inducción matemática, análisis y diseño de algoritmos, relaciones binarias, relaciones de recurrencia, etc.

Matemáticas Discretas y software libre en la Universidad de Guadalajara

En los Centros Universitarios de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI), de los Altos (CUAltos), de la Ciénega (CUCiénega), de los Lagos (CULagos) y de la Costa (CUCosta) de la Universidad de Guadalajara (UdeG) se imparten las carreras de ingeniería en computación e ingeniería informática, cuyos planes de estudio has sido modificaron recientemente. En los dictámenes del H. Consejo General Universitario (2012a y 2012b) se aclara que dichos planes deben ser de forma modular y por competencias.

Una de las principales modificaciones a los mismos, consistió en incluir la materia I5892 Matemática Discreta, en ambas ingenierías, en el primer semestre como materia obligatoria, la cual corresponde al área de formación básica común y al módulo 1 denominado arquitectura y programación de sistemas.

En el contenido temático de la misma se incluye como objetivo el manejo de herramientas computacionales en la resolución de problemas, es decir, la utilización de las TIC, y como competencia a desarrollar el manejo de la matemática como lenguaje para los sistemas inteligentes y utilización de software libre para la solución de problemas.

Marco Teórico

Arratia, Jáñez, Martín y Pérez (2002) muestran la relación entre la matemática y las TIC y afirmando que los grandes avances en la informática y la comunicación de los últimos años, hacen prever una revolución que está sólo en sus inicios y que hoy en día es una realidad. Las tecnologías se utilizan para comunicarse, como herramienta de trabajo y también como instrumento de ocio. Aparecen en todas las parcelas de la vida actual, desde la investigación científica hasta el mundo de la empresa, pasando por la enseñanza. En esta última, se puede considerar que el uso de estos avances, favorece el desarrollo de capacidades intelectuales y la adquisición de destrezas por parte del alumno, mediante una nueva forma de organizar, distribuir, representar y codificar la realidad.

Villalpando, García y Rodríguez (2013) afirman que la utilización de software libre en la enseñanza de las matemáticas permite que los alumnos puedan utilizarlo en sus casas pues la licencia del programa autoriza a hacerlo. Otra ventaja es que permite acceder al conocimiento que hay detrás del software. Utilizando software libre, tanto alumnos como investigadores pueden, por ejemplo, consultar el algoritmo que utiliza el programa para realizar determinado cálculo, incluso pueden tomar el código fuente en sus manos y mejorarlo, o adaptarlo para hacer algo diferente.

Según Agudelo y Flores (2000) en el campo de la didáctica, cuando se habla de actividades, se hace referencia a las ejercitaciones que diseñadas y planificadas, tienen la finalidad que mediante un conjunto de prácticas continúas centradas en los educandos, se logren los objetivos propuestos.

Gómez (2006) manifiesta que las actividades, son el medio para movilizar el entramado de comunicaciones que se pueden establecer en clase; las relaciones que allí se crean definen los diferentes papeles del profesorado y el estudiantado. De este modo, las actividades, y las secuencias que forman, tendrán unos y otros efectos educativos en función de las características específicas de las relaciones que posibilitan.

La misma autora afirma que desde este punto de vista, las actividades didácticas abarcan tanto las actuaciones del docente y del educando, como las interacciones que de ellas se derivan. La manera de relacionarse en clase y el grado de participación de docentes y estudiantes estará en función de la concepción del aprendizaje que se maneje. Las actividades que están inmersas en los procesos didácticos, contribuyen al logro de las competencias, a la construcción de los aprendizajes por parte de los discípulos y favorece la función mediadora del docente.

Entonces, se puede decir que las actividades didácticas, son un instrumento que organizan y coordinan intencionalmente las acciones de docentes y alumnos, en función del sentido del aprendizaje que se desea promover. Para la materia I5892 Matemáticas Discretas la planificación de las mismas se centró en la interacción entre el contenido temático, el docente y el alumno.

Metodología

Para cumplir los objetivos y competencias del contenido temático de la materia I5892 Matemáticas Discretas, se le asignaron al curso dieciséis actividades didácticas, que coinciden con la cantidad de semanas efectivas de clases, que se diseñaron de tal forma que se entregarán, la primera al final de la primera semana de clases, la segunda al final de la segunda semana y así sucesivamente hasta completar todas las actividades. Para cada una de las actividades se eligió un problema, preferentemente cotidiano, enfocado en alguna área específica de las Matemáticas Discretas, que puede ser resuelto utilizando software libre.

En la dirección http://hypatia.cucei.udg.mx/reforma/cursos/mat−discreta/actividades.php (figura 1) se alojaron en línea las actividades didácticas en formato Word. Cada alumno debe descargarlas y contestarlas directamente en el archivo descargado. En dicho archivo se deben incluir todos los cálculos realizados o la captura de pantalla correspondiente, según sea el caso, posteriormente deben ser impresas entregadas al profesor en el tiempo señalado.

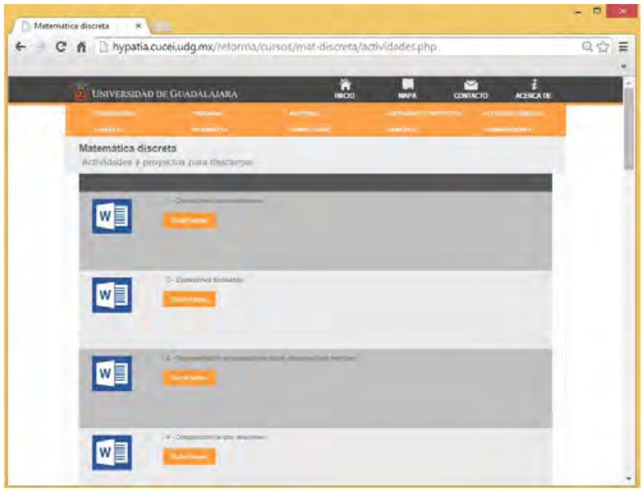


Figura 1. Ubicación de las actividades didácticas.

Como se mencionó, las Matemáticas Discretas unifican diversas áreas de las matemáticas, por lo que los criterios mínimos que el software libre debía cumplir, para ser considerado como un producto viable, para resolver los problemas de las actividades didácticas fueron los siguientes:

- Se aplique a un área específica de la Matemática Discreta y que resuelva problemas propios de esa área.
- Contar con documentación de instalación y manual de usuario, en caso de no contar directamente, que exista información en internet de cómo hacerlo.
- Contar con un asistente de instalación, en caso de con contar con uno, que su instalación sea sencilla.
- Poder ser instalado en diferentes sistemas operativos.

Resultados

Después de un análisis exhaustivo, por parte de los autores, del software libre para resolver los problemas de las actividades didácticas se eligieron los programas: *Magrada* para grafos y árboles, *Wiris* para relaciones y combinatoria, *Dia* para expresiones booleanas y bases de datos, *Windis* también para grafos y árboles, y *Maxima* para relaciones y combinatoria. A continuación se describe brevemente cada uno los programas mencionados.

MaGraDa

Es un applet gratuito programado en Java y diseñado específicamente para trabajar con grafos y árboles. Trabaja con grafos tanto dirigidos como no dirigidos (Figura 2) y ponderados como no ponderados. Es sencillo y cómodo de manejar, está basado en menús sobre pantalla y consta de dos pantallas de visualización. La dirección donde se puede descargar es http://www.dccia.ua.es/~jpenades/MaGraDa/MaGraDa.html.

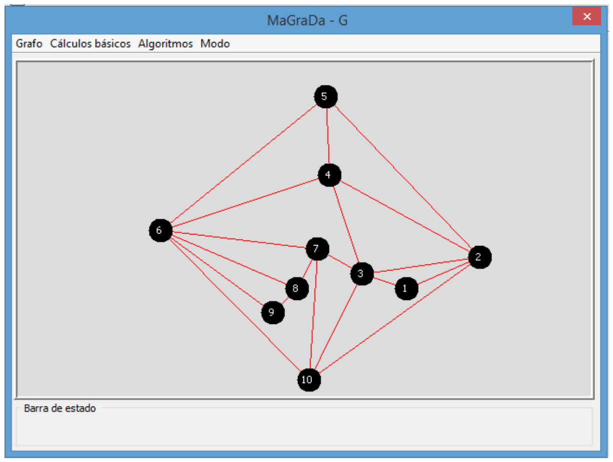


Figura 2. Grafo no dirigido en MaGraDa.

Dia

Es un editor de diagramas que soporta más de 30 tipos de diagramas diferentes, tales como diagramas de flujo, diagramas de red, modelos de bases de datos (figura 3), expresiones boolenas, circuitos lógicos, etc. Además tiene una gran cantidad de objetos previamente diseñados que ayudan a dibujar diagramas profesionales. El mismo se puede descargar de la dirección http://dia-installer.de/download/index.html.

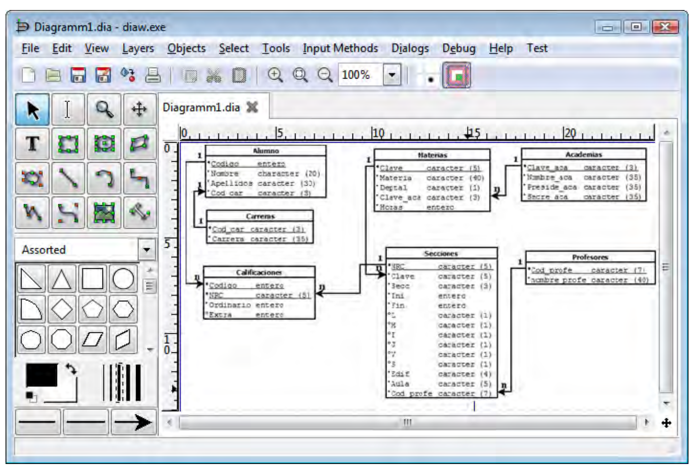


Figura 3. Diagrama realizado en Dia.

Wiris (on line)

Es una plataforma de cálculo matemático que funciona "*on line*" a través de cualquier navegador de Internet utilizando un applet de Java, el mismo puede ser ejecutado directamente en la dirección http://www.wiris.net/melilla.es/wiris/es/index.html. Existe una versión "off line" denomina Wiris Little que puede descargarse de la dirección http://www.wiris.com/download/bruno/windows/setup.exe.

Con Wiris se pueden realizar operaciones con números enteros, racionales, radicales, decimales, reales y complejos. Funciones trascendentes de variable reales (trigonométricas, exponenciales y logarítmicas). Progresiones aritméticas y geométricas. Permutaciones y combinaciones. Listas y conjuntos. Unión, intersección y complementario de listas y conjuntos. Factorial y coeficientes binomiales. Algunos cálculos con Wiris se muestran en la figura 4.

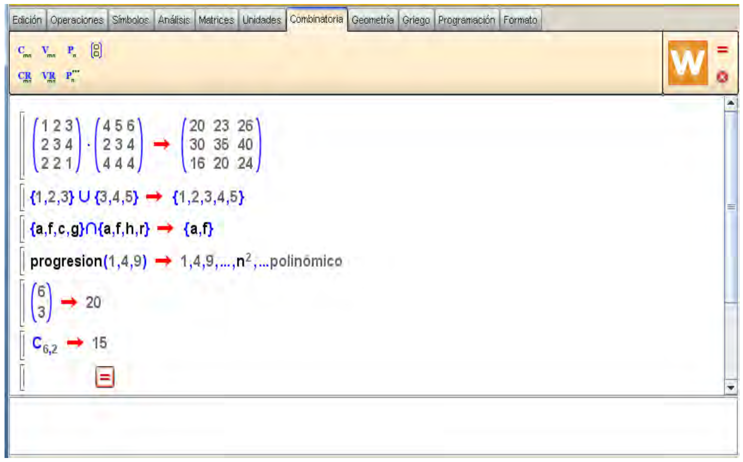


Figura 4. Cálculos realizados en Wiris.

Windisc

Es un conjunto de subprogramas gratuitos, que se ocupan de temas de Matemática Discretas, tales como el problema del viajante, árboles, grafos, coloreado de mapas, circuitos de Euler y de Hamilton, etc. También se puede trabajar con grafos tanto dirigidos como no dirigidos (figura 5) y ponderados como no ponderados. Se puede descargar de la dirección http://math.exeter.edu/rparris/windisc.html.

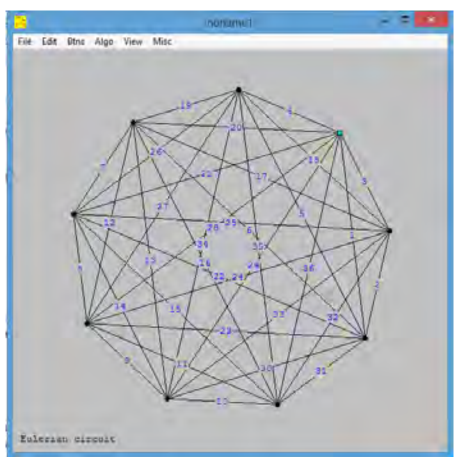


Figura 5. Grafo no dirigido en MaGraDa.

Maxima

Es un sistema de algebra computacional (CAS, por sus siglas en ingles), para la manipulación de expresiones simbólicas y numéricas, incluyendo diferenciación, integración, expansión en series de Taylor, transformadas de Laplace, ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas de ecuaciones lineales, vectores, matrices, combinatoria (figura 6), operaciones con conjuntos y tensores. Maxima produce resultados de alta precisión usando fracciones exactas, números enteros de precisión arbitraria y números de coma flotante con precisión variable (Villalpando, 2011). Adicionalmente puede graficar funciones y datos en dos y tres dimensiones. Se puede descargar de la dirección http://maxima.sourceforge.net.

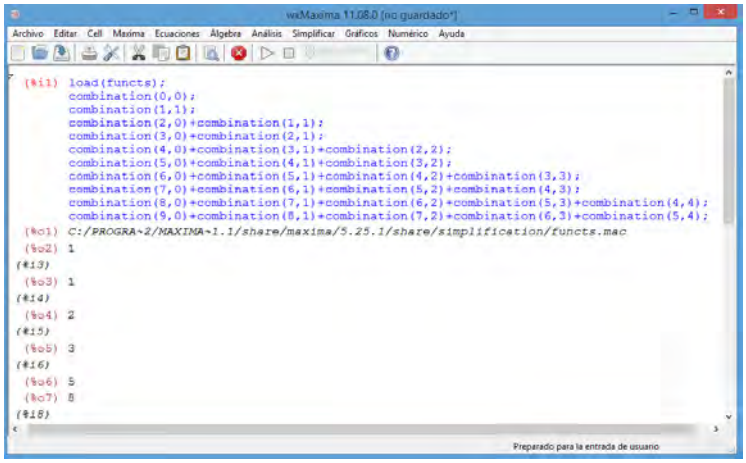


Figura 6. Cálculos de combinatoria realizados en Maxima.

En la tabla 1 se muestran las dieciséis actividades didácticas diseñadas para el curso, así como el software libre con el que se deben de resolver los problemas incluidos en las mismas.

Tabla1. *Actividades didácticas y software libre utilizado.*

Actividad Didáctica	Software libre utilizado
1. Operaciones sobre relaciones.	*Maxima*
2. Expresiones booleanas.	*Dia*
3. Representación de operaciones sobre relaciones con matrices.	*Maxima*
4. Composición de dos relaciones.	*Wiris*
5. Bases de datos y relaciones.	*Dia*
6. Clases de equivalencia.	*Maxima*
7. Permutaciones y combinaciones.	*Maxima*
8. Rompecabezas 15 (más permutaciones y combinaciones).	*Maxima*
9. Identidades combinatorias.	*Maxima*
10. Propiedades del Triángulo de Pascal.	*Maxima*
11. Problema del camino más corto.	*MaGraDa*
12. Grafos isomorfos.	*MaGraDa*
13. Paseos y circuitos de Euler.	*MaGraDa*
14. Paseos y circuitos de Hamilton.	*Windisc*
15. Coloreado de grafos y número cromático.	*Wiris y Windisc*
16. Grafos en general.	*MaGraDa y Windisc*

Alcances y limites

El contenido temático de la materia I5892 Matemáticas Discretas, es el mismo para las carreras de ingeniería en computación e ingeniería informática que se imparte en los centros universitarios CUCEI, CUAltos, CUCiénega, CULagos y CUCosta, siendo la primera ocasión que se utilizan TIC y software para la enseñanza de la materia.

Las actividades didácticas, se diseñaron por petición del Director de la División de Electrónica y Computación (DIVEC) del CUCEI, desconociendo si las mismas han sido utilizadas en los demás centros universitarios, ya que los únicos profesores que recibieron capacitación sobre el uso del software libre y la filosofía de las mismas, fueron precisamente los de CUCEI.

Al ser la primera ocasión en la que se utilizan TIC y software libre para la enseñanza de las Matemáticas Discretas, algunos de los estudiantes reconocieron posibles fallas, que deben ser superadas, en relación al manejo de las actividades didácticas y de las actitudes que se asumen al trabajar con este tipo de actividades.

La materia no se imparte en ningún laboratorio de cómputo, ya que los estudiantes, casi en su totalidad, cuentan con computadora ya sea personal o de escritorio.

Ejemplo de una actividad didáctica

En cada actividad didáctica se inicia con una introducción del tema a tratar, en algunos casos también presenta algún un ejemplo sencillo, posteriormente se indica en qué consiste el problema a resolver así como diversas preguntas relacionadas con el mismo, y finalmente con qué software debe ser resuelto.

En la figura 9 se muestra la actividad didáctica 7, denominada "permutaciones y combinaciones". En la parte *i*) de dicha figura se presenta la introducción al tema a tratar, además de un pequeño ejemplo.

En la parte *ii*) se explica una variante del juego de las canicas que hay en la ferias, el cual será el problema a tratar. Posteriormente se indica con qué software libre se resolverán las preguntas relacionadas con el problema, que en este caso son siete.

Conclusiones

Si partimos del convencimiento de que la educación no tiene por objeto exclusivamente transmitir una serie de conocimientos técnicos o prácticos, sino que busca fundamentalmente transmitir valores socialmente positivos, resulta claro que la utilización de software libre contribuyó a este propósito.

Además resultó ser no solo es una excelente estrategia didáctico-pedagógica sino también económica, pues el ahorro derivado de su utilización posibilitó que los estudiantes tengan las herramientas de software que necesitan, además de no haber problemas con costos por renovaciones de licencias.

Al utilizar TIC y software libre en el diseño de las actividades didácticas, se logró fortalecer y desarrollar las competencias propuestas en el contenido temático de la materia I5892 Matemáticas Discretas para las carreras de ingeniería informática y computación en el CUCEI de la UdeG. Además contribuyeron a la construcción de los aprendizajes por parte de los alumnos y favorecieron la función mediadora del docente.

Los alumnos al tener casi total libertad sobre cómo debían ser entregadas las actividades, lograron potenciar y diversificar su forma de trabajar, ya que no se exige que sean entregadas en algún formato específico, solamente que fueran contestadas en el archivo descargado e impresas para posteriormente ser entregadas en el tiempo señalado.

Actividad Didáctica 7

Permutaciones y combinaciones

Introducción

Las permutaciones de un conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ son todas las ordenaciones de los elementos del conjunto. Todos los elementos deben ser distintos. Por ejemplo, las permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$ son:

1, 2, 3   1, 3, 2   2,1, 3   3, 2, 1   2, 3, 1   3, 1, 2

El numero de permutaciones de un conjunto de n elementos es

$$nPn = n!$$

Las permutaciones-r de un conjunto de n elementos distintos son todas las ordenaciones de tamaño r de elementos del conjunto, sin que existan repeticiones, para calcularlas es

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Algunos autores le llaman *variaciones nVr* sin repetición a este tipo de permutaciones.

Un caso especial de las permutaciones es cuando los n elementos son distintos pero pueden repetirse al momento de ordenarlos o seleccionarlos. Algunos autores le llaman variaciones con repeticion y esta dado por n^r; o para dichos autores

$$nVRr = n^r$$

Las permutaciones con repetición son las disposiciones ordenadas de n elementos de modo que del primer tipo hay n_1, del segundo tipo n_2, … y, del k-ésimo tipo hay n_k. Por tanto, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Para calcular dichas permutaciones es

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Las combinación-r de un conjunto de n elementos distintos son en realidad subconjuntos de tamaño r elementos del conjunto. Para calcularlas es

$$nCr = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

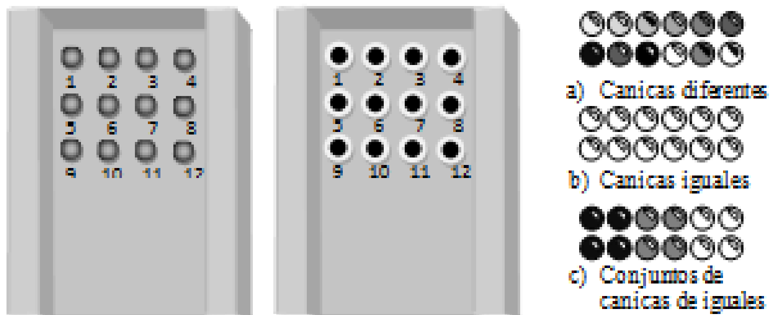
Finalmente las combinaciones con repetición es esencialmente una lista de tamaño r de elementos del conjunto que pueden repetirse al acomodarse o seleccionarse. Para calcular dichas combinaciones es

$$nCRr = \binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{r-1}$$

i)

Matemática Discreta – Actividad Didáctica 7 – Permutaciones y combinaciones

Actividad: llegamos a una feria y nos dirigimos al juego de las canicas. Hay dos tipos de juegos con 12 agujeros, el que cada agujero puede contener sólo una canica y el que cada agujero puede contener la cantidad de canicas que sea. Ademas se tienen tres tipos de canicas, todas diferentes, todas iguales y conjuntos de canicas iguales; cada uno con 12 canicas.



A) Puede contener solo una canica B) Puede contener la cantidad de canicas que sea

Con *Maxima* obtener lo que se pide a continuación, indicando que tipo es:

	Operacion	Tipo	Instruccion y resultado
1.	¿De cuantas formas se pueden colocar las 12 canicas diferentes en el juego que contiene solo una canica?		
2.	¿De cuantas formas se pueden colocar las 12 canicas iguales en el juego que contiene solo una canica?		
3.	B) ¿De cuantas formas se pueden colocar las 12 canicas diferentes el juego que contiene las canicas que sean?		
4.	b) B) ¿De cuantas formas se pueden colocar las 12 canicas iguales en el juego que contiene las canicas que sean?		
5.	c) A) ¿De cuantas formas se pueden colocar las 12 canicas con conjuntos de canicas iguales en el juego que contiene sólo una canica?		
6.	¿De cuantas formas se pueden colocar 6 canicas diferentes el juego que contiene solo una canica?		
7.	¿De cuantas formas se pueden colocar 6 canicas iguales el juego que contiene solo una canica?		

– 2 –

ii)

Figura 9. Actividad didáctica 7: *i*) introducción, *ii*) problema a resolver.

Referencias bibliográfícas

Agudelo R. y Flores F. (2000). Actividades Didácticas. *ALFAOMEGA,* (3ra ed.). Oxford México: Universitty Press.

Arratia, O., Jáñez, L., Martín, M. A., y Pérez, M. T. (2002): *Matemáticas y nuevas tecnologías: educación e investigación con manipulación simbólica*. Depto. de Matemática Aplicada a la Ingeniería. E.T.S. Ingenieros Industriales. Universidad de Valladolid, España.

De Nápoli P. (2012). *Software Libre para enseñar o aprender Matemática, por qué y cómo*. http://mate.dm.uba.ar/~pdenapo/charla-sl-matematica/charla-sl-matematica.pdf. Consultado el 10 de septiembre de 2012.

Gómez E. (2008). *Factores socioeconómicos y pedagógicos que inciden en el rendimiento académico en estudiantes*. Nicaragua: Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua.

H. Consejo General Universitario (2012a). *Dictamen Núm. I/2012/381 referente a la modificación del Plan de Estudios de la Ingeniería en Computación*. Universidad de Guadalajara. Guadalajara, México.

H. Consejo General Universitario (2012b). *Dictamen Núm. I/2012/383 referente a la modificación del Plan de Estudios de la Licenciatura en Informática*. Universidad de Guadalajara. Guadalajara, México.

UNESCO (2005). *Las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la enseñanza. Manual para docentes ó cómo crear nuevos entornos de aprendizaje abierto por medio de las TIC*. Montevideo, Uruguay: Ediciones Trilse.

Villalpando B., J. F., García S., A. y Rodríguez C., J. A. (2013). *Manual para la materia de Cómputo para Ciencias*. Manual no publicado. Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Jalisco, México.

Villalpando B., J. F. y García S., A. (2014). *Matemáticas Discretas. Aplicaciones y Ejercicios* (1ra. ed.). México: Grupo Editorial Patria.

Villalpando B., J. F. (2011). *Software libre para la enseñanza de las Matemáticas: en búsqueda de alternativas*. 8° Seminario Nacional: Enseñanza de las Matemáticas con las Tecnologías de la Información y la Comunicación. Ciudad Guzmán, Jalisco, México.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

INTERPRETACIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE EN DIFERENTES REPRESENTACIONES CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SUPERIOR

Laura Jannet Chablé Álvarez, Lourdes Guerrero Magaña

Universidad de Guadalajara, México.

jann_laura@hotmail.com, lourdes.guerrero@gmail.com

Para citar este artículo:

Chablé, L. J. y Guerrero, L. (2016). Interpretación del concepto de variable en diferentes representaciones con estudiantes de educación superior. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

INTERPRETACIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE EN DIFERENTES REPRESENTACIONES CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SUPERIOR

Laura Jannet Chablé Álvarez, Lourdes Guerrero Magaña

Universidad de Guadalajara, México.

jann_laura@hotmail.com, lourdes.guerrero@gmail.com

Palabras clave: Variable, relación, representaciones, GeoGebra, precálculo

Resumen

La presente investigación pretende detectar cuáles son las dificultades principales que presentan los alumnos de licenciatura al tratar con diferentes formas de representación (simbólica, gráfica, numérica, verbal) (Duval, 1993) de relaciones entre variables. El propósito del trabajo es presentar los primeros resultados de la investigación, los cuales consisten en una prueba piloto que busca hacer una indagación preliminar sobre las diferentes interpretaciones que dan los alumnos al concepto de variable, con el empleo de un cuaderno de trabajo con diferentes actividades, en las que se debe analizar y explorar dinámicamente, el comportamiento de familias de funciones a través de la relación ecuación-gráfica, al hacer variar los parámetros en la expresión simbólica de dichas funciones.

Introducción

La variación es una de las propiedades fundamentales de los objetos matemáticos (Devlin, 2000; Morales & Díaz, 2003) y al mismo tiempo presenta dificultades importantes para su aprendizaje (Küchemann, 1981; Booth, 1984; Kieran et al., 1996). Muchas investigaciones (Trigueros, Ursini y Lozano, 2000; Juárez, 2011) dan cuenta de la gran dificultad de este concepto tanto por estudiantes de bachillerato como del nivel superior.

Con el estudio de Morales y Díaz (2003) se obtuvo que, al analizar las respuestas dadas por los alumnos, se identificaron seis diferentes maneras de interpretar los símbolos literales, a saber:

- Letra evaluada. A la letra se le asigna un valor numérico;
- Letra no utilizada. La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado;
- Letra como objeto. Se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí;
- Letra como incógnita específica. La letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella;
- Letra como número generalizado. Se considera que la letra representa o es capaz de asumir distintos valores;
- Letra como variable. Se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

En estos resultados, destaca el hecho de que los alumnos tienen diferentes maneras de interpretar las letras usadas para representar las variables, lo que indica que quienes se inician en el estudio del álgebra, consideran que los símbolos literales pueden interpretarse de diferentes formas, y que su significado puede variar con el problema. Esto muestra que la interpretación dada no es siempre la apropiada, y frecuentemente es la fuente de respuestas erróneas.

Otro estudio acerca de las concepciones erróneas sobre el uso de letras, que presentaron algunos estudiantes de nivel superior, reporta que cuando a los alumnos se les presentan relaciones funcionales en forma analítica, tienden a confundir la variable independiente y la variable dependiente (Juárez, 2011, pág.85).

Por otra parte, Ursini (1994) considera que en el álgebra elemental, aparecen esencialmente tres usos de la variable: incógnita específica, número general y en relación funcional. Señala también que un usuario competente del álgebra, es capaz de interpretar la variable de modos distintos, dependiendo del problema en el que aparece. El no reconocer que la variable tiene distintos usos puede representar un obstáculo para aprender álgebra.

Para el aprendizaje del Álgebra escolar y el estudio de la variación, Kaput (1999) propone tres enfoques, de acuerdo con acercamientos generales de Carraher & Schliemann (2007):

1) el estudio de estructuras y sistemas abstractos para construir relaciones y hacer cálculos, incluyendo las que surgen en la aritmética y el razonamiento cuantitativo (el álgebra como una generalización de la aritmética).
2) el estudio de la variación, de relaciones y funciones.
3) un grupo de lenguajes de modelación para expresar y apoyar el razonamiento sobre las situaciones que se quieren modelar.

Estos aspectos fundamentales, determinan procesos de razonamiento que se considera que fluyen hacia cada uno de sus planteamientos, incluyendo entre ellos a la generalización, la expresión de generalizaciones que sistemáticamente se acercan hacia los sistemas de símbolos convencionales, y las acciones guiadas sintácticamente sobre símbolos organizados en dichos sistemas.

Una problemática detectada en el acercamiento al álgebra mediante la modelación, es que las situaciones a modelar, que generalmente se utilizan en este enfoque, en su mayoría pueden ser tratadas utilizando estrategias puramente aritméticas.

Los estudiantes, al contar con estos recursos, no ven la necesidad de utilizar el álgebra para resolver los problemas que se les presentan; sienten que se trata de un requerimiento innecesario impuesto por el profesor. Así mismo, cuando la enseñanza se dirige solamente por el enfoque basado en la estructura, no hay manera de aportar significado a los símbolos y la enseñanza se dirige hacia la ejercitación de procedimientos de manipulación algebraica.

Los estudiantes necesitan tiempo para apropiarse del conocimiento matemático y, aunque la actividad de manipulación simbólica es importante en muchas situaciones del quehacer matemático, no debería consumir la mayor parte del tiempo de los cursos de álgebra, como es tradición. Es importante que los estudiantes logren entender ideas y conceptos, y desarrollar paulatinamente procesos de generalización y simbolización (Guerrero, Morales, & Nuñez, 2014).

Marco Teórico

La investigación se sustenta en la teoría de representaciones de Duval (1993), así como en investigaciones previas sobre las interpretaciones que los estudiantes asignan al uso de las literales en matemáticas (Morales & Díaz, 2003).

Duval (1993) hace énfasis en que el conocimiento matemático, se puede representar bajo diferentes formas semióticas y sostiene que un objetivo en la enseñanza de las matemáticas, debe ser que los estudiantes desarrollen habilidades para cambiar de un registro a otro, en cualquier representación semiótica. Una escritura, una notación, un símbolo, representa un objeto matemático: un número, una función, un vector,…. , lo mismo, los trazos y las figuras representan objetos matemáticos: un segmento, un punto o un círculo. La distinción entre un objeto y su representación es, pues, un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas.

Para Duval, las representaciones pueden ser de dos tipos: representaciones mentales y representaciones semióticas.

- Las representaciones mentales cubren al conjunto de imágenes y globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado.
- Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representaciones, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Se considera a las representaciones semióticas como un simple medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación, es decir, para volver visibles o accesibles a otros.

Debido a que se pretendió que los estudiantes trabajaran en forma colaborativa, se tomó en cuenta la metodología ACODESA, propuesta por Hitt (2013), que se basa en el enfoque individual y social en la construcción del conocimiento matemático.

La metodología ACODESA se integra de varias etapas interrelacionadas unas con otras: trabajo individual, trabajo en equipo, debate en el aula, auto-reflexión y la institucionalización; es importante señalar que en las primeras tres etapas, el maestro es un guía y es deber de los estudiantes argumentar y validar sus producciones; en el proceso de institucionalización es donde el maestro resalta la diferentes representaciones y presenta las representaciones institucionales.

Metodología

La metodología a seguir en esta investigación es de carácter descriptivo que, como indica su propia denominación, tiene como objetivo la descripción de las cualidades de un fenómeno. No se trata de probar o de medir en qué grado una cierta cualidad se encuentra en un cierto acontecimiento dado, sino de distinguir y caracterizar tantas cualidades como sea posible.

Dentro de las características principales de esta metodología podemos mencionar que:

a) Los investigadores participan en la investigación a través de la interacción con los sujetos que estudian, es el instrumento de medida.
b) Se pueden incorporar hallazgos que no se habían previsto.
c) Los investigadores deben dejar a un lado sus propios prejuicios y creencias y analizar a los sujetos y/o fenómenos desde la perspectiva de estos últimos.

De acuerdo con los objetivos de cada etapa de la investigación, fue necesaria la elaboración de diversos tipos de materiales:

- Actividades que involucren el concepto de variable (Cuaderno de trabajo).
- El software Geogebra instalado en un centro de cómputo.
- Un Diario de campo.

Experimentación

Como parte inicial de la investigación, se pidió a los alumnos de manera individual que definieran el concepto de variable, incógnita y ecuación, con la finalidad de clasificar sus respuestas con relación al concepto de variable.

En el cuaderno de trabajo se integraron dos actividades; cada una de ellas conformada por una construcción manipulable en Geogebra y una serie de cuestionamientos asociados a dicha construcción. Las construcciones en Geogebra forman parte del conjunto de archivos incorporados en la plataforma del Proyecto Gauss (http://recursostic.educacion.es/gauss/web/) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España, el cual brinda actividades didácticas en línea, como apoyo al aprendizaje de las matemáticas de diferentes niveles educativos en España (Primaria, ESO, Bachillerato).

En las figuras 1 y 2 se muestran dos ejemplos de las situaciones incluidas en el cuaderno de trabajo. La primera (Figura 1) se implementó para que el alumno reflexione sobre el uso de parámetros en las expresiones algebraicas, analizar y explorar dinámicamente el comportamiento de diferentes familias de funciones a través de la relación ecuación-gráfica, al hacer variar los parámetros en la expresión simbólica de dichas funciones.

En la segunda situación (Figura 2), el estudiante debía identificar la pendiente y la ordenada al origen de una recta, cuya ecuación es de la forma $y = mx + b$; el objetivo es que el estudiante muestre su capacidad para hacer una conversión del registro gráfico al registro verbal, de acuerdo con la teoría de representaciones de Duval (1993).

En cada una de las actividades del cuaderno de trabajo se incluyeron instrucciones precisas para dar respuesta a los cuestionamientos pedidos.

En la actividad titulada “Variación de Coeficientes”, el tiempo disponible para contestar fue de 40 minutos y se necesitó de los siguientes materiales: Computadora o tableta con Geogebra instalado, archivo denominado “Actividad_1.ggb”, y lapicero. En la figura 3 se muestran algunos cuestionamientos incluidos en esta primera actividad.

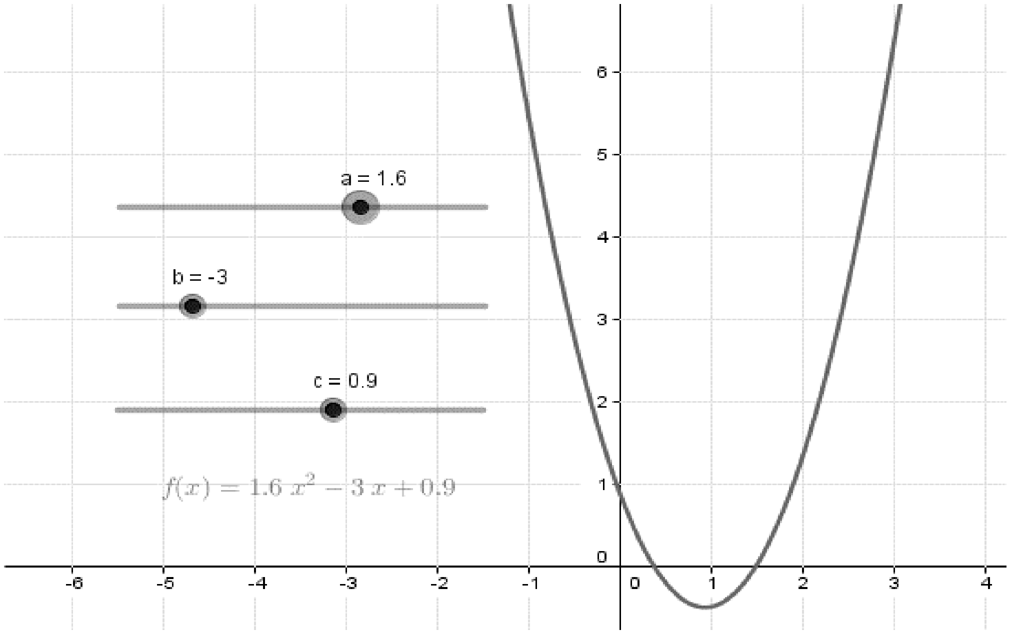


Figura 1. Provocar reflexión sobre el uso de los parámetros

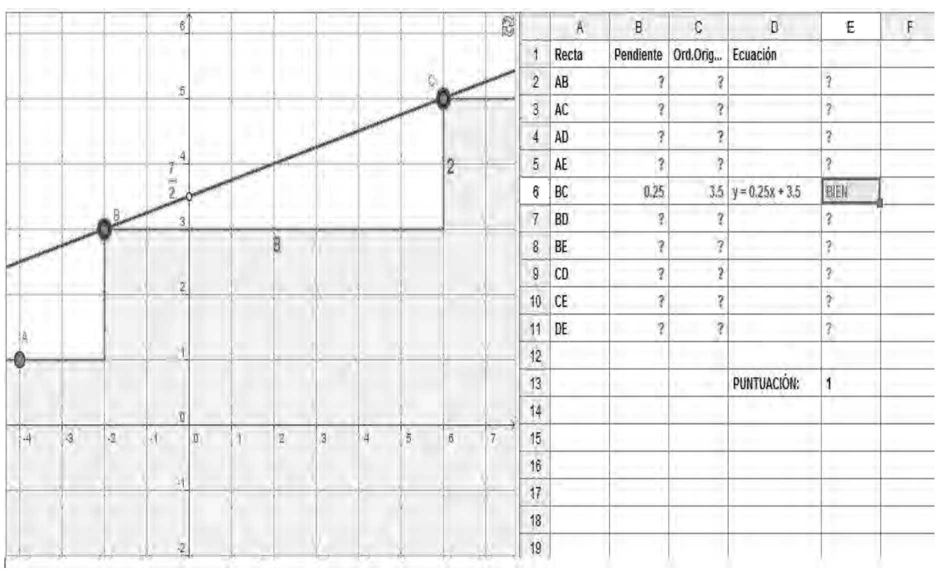


Figura 2. Conversión del registro gráfico al verbal

1. ¿Qué efecto produce en la gráfica, el variar el signo del coeficiente principal (a)?
2. ¿Qué efecto produce en la gráfica, el variar el valor de c?
3. ¿Qué efecto produce en la gráfica, el variar el valor de b?
4. Escriban en la barra de Entrada (casilla inferior de la ventana): f(x)=a*(x–b)^2+c. ¿Qué tipo de funciones son éstas?

Figura 3. Algunos de los reactivos que se incluyen en la actividad “Variación de Coeficiente”.

Para la segunda actividad, titulada "Pendiente y ordenada al origen en rectas", se asignó un tiempo de 30 minutos. Los materiales propuestos fueron: computadora o tableta con Geogebra instalado, archivo denominado "Actividad_4.ggb" y lapicero. En la figura 4 muestra una tabla que los estudiantes necesitaron llenar al manipular el archivo "Actividad_4.ggb".

Recta	Pendiente	Ordenada al origen	Ecuación
AB			
AC			
AD			
AE			
BC			
BD			
BE			
CD			
CE			
DE			

Figura 4: Tabla correspondiente a la actividad "Pendiente y ordenada al origen en rectas"

Sujetos y procedimiento en la Prueba piloto: Se aplicó a 32 estudiantes de entre 18 y 20 años de primer semestre de Ingeniería Civil, quienes cursaban la materia de Precálculo en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara. Para dar respuesta al cuaderno de trabajo, se formaron equipos de tres integrantes. Se utilizaron notas de observación (diario de campo) tomadas por un investigador.

Resultados

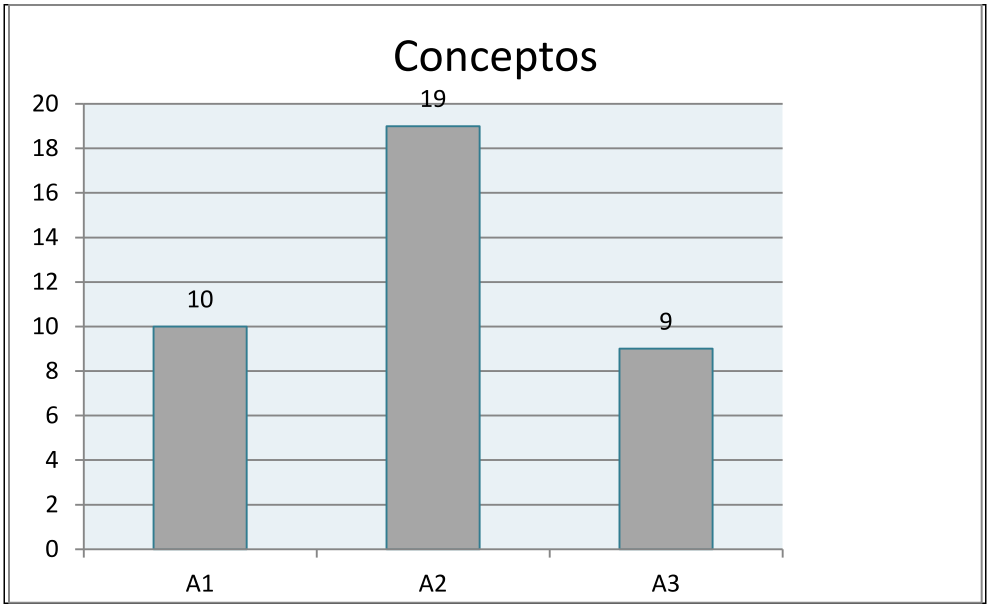
El análisis de los datos proporcionados por los estudiantes, nos llevó a los siguientes resultados. Primeramente en la gráfica 1 se presenta de forma general el registro de respuestas correctas de los estudiantes. Las etiquetas que se muestran en el eje horizontal corresponden a las preguntas:

A1: ¿Qué es una variable?

A2: ¿Qué es una incógnita?

A3: ¿Qué es una ecuación?

Para establecer hasta qué punto los estudiantes han alcanzado las metas educativas, se calificaron las respuestas de cada estudiante en torno a las preguntas anteriores. La gráfica 1 refleja la cantidad de alumnos que acertó a cada cuestión.



Gráfica 1: Registro de respuestas correctas de los estudiantes

Como se observa en la gráfica 1, más de la mitad de los estudiantes (22 de 32) presentaron dificultades en la pregunta A1 (¿Qué es una variable?); describir el concepto de variable resulta difícil interpretar.

Al referirse al concepto de incógnita, los estudiantes tienen una concepción más clara de dicho concepto, pues resulta que la mayoría de los estudiantes lo relaciona con un valor desconocido de una ecuación.

Las respuestas dadas por los estudiantes a estos cuestionamientos fueron clasificadas con el fin de detectar las dificultades e interpretaciones relacionadas con el concepto de variable. Dicha clasificación se muestra en la tabla 1.

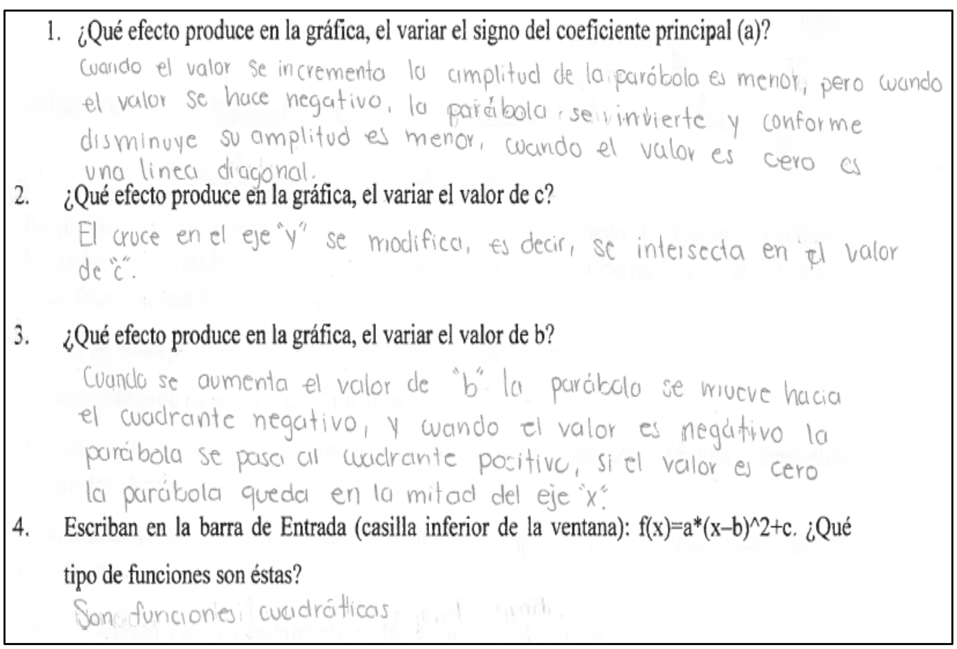
Tabla 1: *Clasificación de las respuestas de los estudiantes*

Clasificación	Respuesta de los estudiantes
Cantidad no constante	Un valor que no es constante en una ecuación.
	Un dato que cambia y no es constante.
Término que varía	Es el valor que puede variar, puede ser cualquier valor la incógnita.
	Es una expresión que puede tomar valor elegido de un conjunto y cuya variación altera.
	Un símbolo o representación que puede cambiar.
	Algo que puede cambiar de valor.
Incógnita	Es un número con nuestra incógnita.
	Una incógnita o valor que depende enteramente de otra.
	Son resultados que pueden cambiar según el valor que tenga la incógnita.

	Es una incógnita representada por algún símbolo (casi siempre letras).
	Es el valor que queremos obtener mediante la resolución de la incógnita.
En una relación	Es el valor de un número que cambia en función en otro.
	El valor de un número que cambia en valor a otro.
Solución en una ecuación	Son posibles soluciones o valores que puede tener una ecuación.
	Es lo que no se tiene valor en una ecuación.
	El elemento que puede cambiar dentro de una ecuación.
	Es un dato en una ecuación que puede representar dos o más tipos de valores.
	Son los valores que pueden variar en una ecuación.
	Es un elemento de una ecuación de la cual se busca conocer su valor numérico.
	Un valor que puede variar respecto a su dependencia en la ecuación.
	Es el valor que cambia en una ecuación.
	Es el dato que cambia en una ecuación.

Con la hoja de trabajo "Variación de Coeficiente", sirve para extraer información sobre la concepción que los estudiantes tienen acerca de variable y variable como parámetro, al analizar el comportamiento de los deslizadores implicado en cada familia de función.

Las figuras 5 y 6, las imágenes corresponden a una muestra del tipo de respuestas que dan los estudiantes de dos equipos:



1. **¿Qué efecto produce en la gráfica, el variar el signo del coeficiente principal (a)?**

Cuando el valor se incrementa la amplitud de la parábola es menor, pero cuando el valor se hace negativo, la parábola se invierte y conforme disminuye su amplitud es menor, cuando el valor es cero es una linea diagonal.

2. **¿Qué efecto produce en la gráfica, el variar el valor de c?**

El cruce en el eje "y" se modifica, es decir, se intersecta en el valor de "c".

3. **¿Qué efecto produce en la gráfica, el variar el valor de b?**

Cuando se aumenta el valor de "b" la parábola se mueve hacia el cuadrante negativo, y cuando el valor es negativo la parábola se pasa al cuadrante positivo, si el valor es cero la parábola queda en la mitad del eje "x".

4. **Escriban en la barra de Entrada (casilla inferior de la ventana): f(x)=a*(x–b)^2+c. ¿Qué tipo de funciones son éstas?**

Son funciones cuadráticas

Figura 5. Respuesta de los reactivos de la hoja de trabajo "Variación de Coeficiente"

1. ¿Qué efecto produce en la gráfica, el variar el signo del coeficiente principal (a)?
La concavidad de la gráfica se vuelve contraria, (ahora está hacia abajo) muestra que cuando el valor de a es positivo la gráfica tendrá su concavidad hacia arriba y cuando es negativo hacia abajo.
2. ¿Qué efecto produce en la gráfica, el variar el valor de c?
La gráfica se aleja del eje x cuando aumenta su valor, a la vez que cuando su valor adquiere valor negativo la gráfica se eleva y cuando es negativo la gráfica desciende, cambiando su rango. (Se desplaza en y).
3. ¿Qué efecto produce en la gráfica, el variar el valor de b?
La gráfica se conserva igual, se mueve en torno al punto de intersección en el eje "y" que en este caso está dado por el valor de c.
4. Escriban en la barra de Entrada (casilla inferior de la ventana): f(x)=a*(x–b)^2+c. ¿Qué tipo de funciones son éstas? Cuadráticas, ya que al graficarla surge una parábola.

Figura 6. Respuesta de otro equipo al manipular el archivo "Actividad_1.ggb"

Los resultados obtenidos al explorar la representación gráfica del comportamiento del conjunto de funciones, además de manipular los deslizadores del archivo "Actividad_1.ggb" se reduce a que más de 50% de los estudiantes concluye:

"al manipular el deslizador "a" el sentido de la parábola se invierte"

"el deslizador "b" cambia de posición, cambia de cuadrante positivo a negativo"

"para el deslizador "c" la parábola se expande o reduce"

La dificultad de reconocer la relación de "a, b y c" en la familia de funciones provocó confusión en los alumnos, ellos afirmaron que dichas letras siempre se escribe con un número y que se llama coeficiente (un número que acompaña a la "x"). De los doce equipos solo tres lograron identificar la función de cada deslizador.

Al implementar la hoja de trabajo "Pendiente y ordenada al origen en rectas" con el objetivo de generar una reflexión sobre la importancia del uso de variable ligado al uso de variable como parámetro. Los integrantes de los equipos se mostraron motivados al llenar la tabla que se les pidió en la hoja de trabajo; ellos trabajaron con el archivo denominado "Actividad_4.ggb", que consistió en la manipulación de rectas, que les permitían encontrar el valor de "b" y de "m", para posteriormente escribir diez ecuaciones de cada recta y que la interacción con la computadora fuera más entretenido.

La siguiente imagen (figura 7) muestra la respuesta de un equipo en el llenado de la tabla.

Recta	Pendiente	Ordenada al origen	Ecuación
AB	1	5	$y = x + 5$
AC	0.4	2.6	$y = 0.4x + 2.6$
AD	-0.5	-1	$y = -0.5x - 1$
AE	-1	-3	$y = -x - 3$
BC	0.25	3.5	$y = 0.25x + 3.5$
BD	-1	1	$y = -x + 1$
BE	-2	-1	$y = -2x - 1$
CD	4	-19	$y = 4x - 19$
CE	2.5	-10	$y = 2.5x - 10$
DE	1	-7	$y = x - 7$

Figura 7. Resultado de un equipo de la hoja de trabajo "Pendiente y ordenada al origen"

Conclusiones

Uno de los resultados generales, muestra una tendencia generalizada de los estudiantes al interpretar a la variable como una incógnita. Así mismo, varios estudiantes se refieren a la variable como una letra, que muestra una confusión entre el concepto y su representación en el sentido de Duval (1993).

Para las hojas de trabajo y con la implementación del Geogebra, los alumnos mostraron motivación al contestar la hoja de trabajo. Sin embargo, aún persiste el bloque del uso de variable como parámetro, la implementación de letras como "a, b, c, m, x" significa una barrera para ser interpretado como variable, pero se rescata que la interacción con la tecnología, es una herramienta que ayuda a mejorar las representaciones semióticas de los estudiantes.

En comparación con otras investigaciones se concluye que los alumnos de nivel superior presentan dificultades en la interpretación del concepto de variable, similares al de estudiantes de bachillerato.

Referencias Bibliográficas

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.

Devlin, K. (2000). *The Language of Mathematics. Making the Invisible Visible*. NY: W.H. Freeman and Company,

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives Vol. 5, pp. 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: Hitt, F. (Editor) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Ed. Iberoamérica. México.

Guerrero, M., Morales, O. & Nuñez, P. (2014). Una vía de acceso a la variación mediante el número generalizado con el software expresser. *AMIUTEM*, pp. 21-34.

Hitt, F. (2013). *Aprendizaje de las matemáticas en ambientes de colaboración y resolución de problemas y de situaciones problemas*. Quebeq, Cánada: UQAM, Départment de Mathématiques.

Juárez, J. A. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Revista Números*, Vol.76. Marzo de 2011, pp 83-103.

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. In E. Fennema, y T.A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*, pp. 133-155, Mahwah, NJ: Lawrence Erbaum Associates.

Kieran, C; Boileau, A. & Garancon, M. (1996). Intorducing Algebra by means of a Technology-Supported, Funcitonal Approach. En: N. Bednarz, *et. al.* (Eds.) *Approaches to Algebra*, pp. 257-293. The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K.M. Hart (Ed.). *Children's Understanding of Mathematics*, pp. 102-119. London: John Murray.

Morales, L., & Díaz, J. (2003). Concepto de Variable: Dificultades de su uso a nivel universitario. *Memorias de la XVII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas*. UNISON. Obtenido de http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII

Trigueros, M., Ursini, S. & Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación matemática*. Vol. 12, No. 2, pp. 27-48.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

EL USO DE LA REGLETA EN LA SUMA DE LOS NÚMEROS ENTEROS CON ALUMNOS DE PRIMER GRADO DE SECUNDARIA

María Eugenia Barbosa Castañón, Nancy Janeth Calvillo Guevara, Elvira Borjón Robles

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

eugenia1401@hotmail.com, nancycalvillo@gmail.com, eborjon@matematicas.reduaz.mx

Para citar este artículo:

Barbosa, M. E., Calvillo, N. J. y Borjon, E. (2016). El uso de la regleta en la suma de los números enteros con alumnos de primer grado de secundaria**.** *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

EL USO DE LA REGLETA EN LA SUMA DE LOS NÚMEROS ENTEROS CON ALUMNOS DE PRIMER GRADO DE SECUNDARIA

María Eugenia Barbosa Castañón, Nancy Janeth Calvillo Guevara, Elvira Borjón Robles

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

eugenia1401@hotmail.com, nancycalvillo@gmail.com, eborjon@matematicas.reduaz.mx

Palabras clave: suma de números enteros negativos, regleta.

Resumen

El presente trabajo tuvo como propósito el aportar una herramienta para coadyuvar a solventar las dificultades, que presentan los alumnos de primer grado de secundaria al realizar sumas de números enteros, así como cuando efectúan diferencias donde el minuendo contiene signo negativo, para ello se elaboró el material didáctico conocido como regleta. La investigación fue realizada en dos módulos de 45 minutos, con 12 alumnos que conformaron 4 equipos de tres integrantes. Es importante mencionar que para esta actividad, se consideró lo propuesto por la teoría de situaciones didácticas y la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1998). Cabe resaltar que en una primera etapa, el uso de la regleta elaborada por la profesora - investigadora despertó el interés por resolver la actividad planteada, posteriormente, ésta ya no fue necesaria, pues los jóvenes comprendieron su uso.

Introducción

La suma de números enteros, comienza a estudiarse en el primer grado de secundaria, en el cuarto bloque en el tema de números y sistemas de numeración, en el eje de sentido numérico y pensamiento algebraico, esto se propone en el plan de estudios de 2011 (México. Secretaría de Educación Pública, 2011). Además, en el aula los enteros se enseñan normalmente a través de problemas relativos a temperaturas sobre y bajo cero, niveles sobre y bajo el mar, con ayuda de la recta numérica, suma de fichas de dos colores diferentes, etc.

Al respecto, Bruno (1996) nos advierte que el estudio de los números enteros es difícil, pues requiere un alto nivel de abstracción ya que es la primera vez que los alumnos se encuentran con el paso de las matemáticas concretas a las formales. Otro problema que se tiene al trabajar con números enteros es el que identificaron Gallardo, Santos y Hernández (2010), al pedirle al alumno de mejor desempeño, resolver ejercicios sobre situaciones en el marco social, como por ejemplo: qué pasaría si tengo una manzana y regalo esa manzana; con el fin de inducirlo a que diera una respuesta, en la que el resultado es cero. Estos investigadores mencionan que aunque el estudiante haya identificado todos los sentidos de uso de los números negativos, presenta dificultades en “el cero aritmético” ya que la nada no siempre conduce a la aceptación del número cero, depende del contexto.

Estos autores consideran que el problema esencial de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no se encuentra únicamente en la comprensión de los contenidos, sino en la forma que se llevan a cabo los procesos de abstracción y generalización, esto es, la separación del conocimiento matemático del resto del conocimiento humano.

Por otro lado, los números enteros constituyen una fuerte herramienta para el estudio de las matemáticas. De esta manera, se requiere que los alumnos tengan presente que hay números enteros menores que cero y es importante que logren trabajar con ellos, de lo contrario al enfrentar temas como: ecuaciones lineales con una incógnita, patrones y ecuaciones, valor absoluto, notación científica, o problemas de aplicación monetarias, entre otros, tendrán problemas con la resta de números enteros con signo, por ejemplo al intentar realizar la operación $9 - (-20)$; los alumnos difícilmente llegarán a un resultado correcto, en las situaciones que se involucra el producto de dos números negativos, los alumnos hacen todo lo posible por cambiar los números a conveniencia, para que el resultado les dé un número entero positivo.

En este sentido Bruno y Martinón (1994) constataron que al abordar la enseñanza de los números negativos a través de la resolución de problemas es interesante, ya que permite a los alumnos reflexionar y razonar sobre las operaciones básicas y su significado. Cabe señalar que se les facilitó más el contexto "Deber – Tener".

De esta manera, es que el objetivo de nuestra investigación es experimentar una situación didáctica con la que los alumnos de primer grado de secundaria, puedan atender las dificultades que se presentan al realizar sumas de números enteros, proporcionándoles material didáctico para su manipulación.

Con ello se pretende despertar en el alumno interés por resolver situaciones matemáticas con base en la resolución de problemas que involucran la suma y resta de números enteros.

Marco teórico

De acuerdo con el tema de estudio y en espera de obtener un resultado favorable para los alumnos, es que se tomó la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, por su aportación a la didáctica de las matemáticas, ya que ésta se basa en la interacción entre el alumno, el profesor y el saber. Con esta teoría, se estudian y modelan fenómenos didácticos que ocurren cuando un profesor se propone enseñar una noción, un teorema o un procedimiento a sus estudiantes. A decir de Brousseau (1982, en Gálvez, 1994, p. 44) una situación didáctica se refiere a:

> *Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno, un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.*

Los diferentes tipos de situaciones didácticas que propone Brousseau son:

Las situaciones de acción, donde el alumno debe actuar sobre un medio (material, o simbólico), la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta, para organizar su actividad de resolución del problema planteado (Cantoral et al., 2000).

Las situaciones de formulación, cuyo objetivo es la *comunicación* en informaciones entre alumnos. Para eso deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que debe comunicar (Cantoral et. al, 2000).

Las situaciones de validación, en las que se trata de *convencer* a uno o a varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen (Cantoral et. al, 2000).

Las situaciones de institucionalización, destinadas a establecer *convenciones sociales*. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase, asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación. En este momento, es cuando el profesor considerando las propuestas de solución, formaliza el concepto o conocimiento y con esto lograr que quede claro.

Otro concepto que consideramos importante retomar es el de "Devolución", según Panizza (2004) ésta se da en varios momentos, en el primero de ellos el profesor debe asegurar que el problema sea entendido. Este momento de la devolución es esencial, pues ¿cómo puede interesarle al alumno un problema que no entiende?

En el segundo momento, para que el problema sea aceptado, además de que debe ser del interés del alumno, debe de ser un reto para el alumno, debe de ser un verdadero problema y representar un reto, para que se despierte en él el deseo de resolverlo utilizando todos sus recursos y cuando éstos no sean suficientes, haga uso de los conocimientos que el docente desea que el alumno construya.

Para el tercer momento el maestro debe tomar en cuenta que el alumno pueda proponer varias opciones al resolver el problema, de esta manera el alumno podrá seguir el procedimiento que él considere más adecuado.

En la selección del problema será determinante la elección de las variables didácticas, éstas podrán ayudar a modificarlo de manera que sea adecuado a las necesidades del alumno. En nuestro caso serán los números involucrados en la situación, ya que se pueden modificar para la estrategia de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para realizar la situación.

Elementos metodológicos

La experimentación se realizó con 12 alumnos de primer grado grupo B, de la Secundaria de la Universidad Autónoma de Zacatecas, seleccionados al azar de un grupo de 40. Se aplicó la situación en dos módulos de 45 minutos, los días 12 y 19 de mayo de 2015, con un horario de 7:45 a 8:30 de la mañana. Los muchachos conformaron cuatro equipos de tres integrantes en cada una de las sesiones. Además, se utilizaron letras, en lugar de sus nombres, para designar a los alumnos.

Como evidencias se hicieron videograbaciones, se tomaron fotografías y se recogieron las hojas de trabajo de cada uno de los cuatro equipos.

Para el desarrollo de esta investigación se optó por utilizar la ingeniería didáctica (Artigue, 1998, p. 48):

> *El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase.*

La ingeniería didáctica se basa en un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en el aula, es decir, sobre la concepción, realización y observación y análisis de secuencias de enseñanza. Las fases de la ingeniería didáctica son: Análisis preliminares, Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas, Experimentación y Análisis *a posteriori* y *validación.*

En nuestra investigación se ha optado por omitir los análisis preliminares, puesto que se seleccionó una situación didáctica ya diseñada para ser experimentada, con la adaptación de las variables didácticas. En esta oportunidad presentaremos la situación didáctica elegida así como algunos de los principales resultados.

Situación didáctica

La situación didáctica lleva por nombre "fractales" y es tomada del Fichero de Actividades Didácticas (Espinoza, García y García, 1999, p. 44).

1. En sentido horario resta los números que están en los círculos. Coloca el resultado en el punto medio correspondiente a los números que estás restando. Puedes utilizar la regleta para ayudarte en el proceso.

Para facilitar el trabajo, así como para apoyar en la comprensión de los números negativos, se les proporcionó una regleta graduada con números positivos y negativos que irán de -20 a 20, ésta tendrá un indicador (una flecha amarilla) para señalar los números.

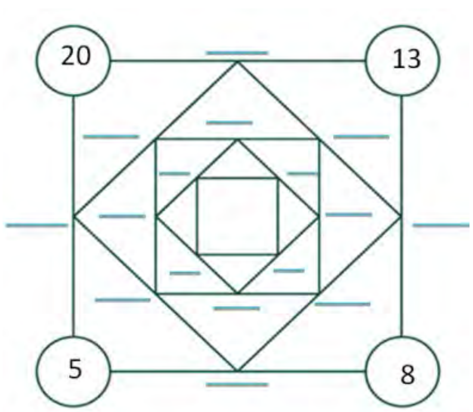


Figura 1. Fractal con los cuatro ciclos.

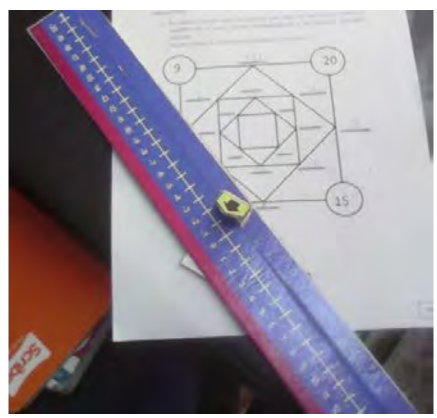


Figura 2. Regleta.

Para el uso de la regleta se les pidió que siempre comenzaran de cero y a partir de ahí se hiciera el movimiento de la flecha para localizar el primer número en cuestión; por ejemplo, el 20, para lo cual se harán 20 movimientos a la derecha y luego proceder a mover la flecha hacia la izquierda o derecha según proceda. Con la finalidad de que los alumnos conocieran y manipularan el instrumento de apoyo, se realizaron algunos ejercicios para su uso, por ejemplo: -6 -3 =, -6 + 12 =, -10 + 3 =, etc.

La experimentación de la sesión dos quedó organizada como se explicita en la Tabla 1.

Tabla 1. *Organización de la experimentación.*

Etapa	Descripción	Tiempo estimado
Paso 1	Uso de la regleta realizando ejercicios diversos como: $12-4,\ -18+9$	10 minutos
Paso 2	Situación de acción, que consiste en la puesta en marcha de la situación	15minutos
Paso 3	Situación de formulación donde los estudiantes buscan con sus conocimientos la solución a la situación	20 minutos
Paso 4	Situación de validación, donde los estudiantes tomarán acuerdos de los procedimientos obtenidos y los compartirán con sus compañeros.	15 minutos
Paso 5	Situación de institucionalización, donde el maestro formaliza el concepto.	15 minutos

Resultados

En la sesión 1 los alumnos se dedicaron principalmente al trabajo con la regleta. Pero en esta oportunidad compartiremos los resultados de la sesión 2.

Situación de acción

La maestra organizó a los doce alumnos en cuatro equipos, enseguida les proporcionó la hoja con la actividad que se les invitó a realizar. Los alumnos hicieron algunos ejercicios para el uso de la regleta, considerando varios casos: sumar dos números, cuando uno de ellos es entero negativo, sumar dos números cuando ambos son negativos y hacer la diferencia de dos números cuando el sustraendo es negativo.

La maestra solicitó a los equipos dieran solución a la actividad usando la regleta, los alumnos con un poco más de fluidez que en la sesión 1, comenzaron a trabajar y notaron que los números variaron; sin embargo, sólo hicieron el comentario y trabajaron de manera adecuada.

Situación de Formulación

Cada equipo comenzó a hacer sus comentarios y directamente hicieron las diferencias y anotaron.

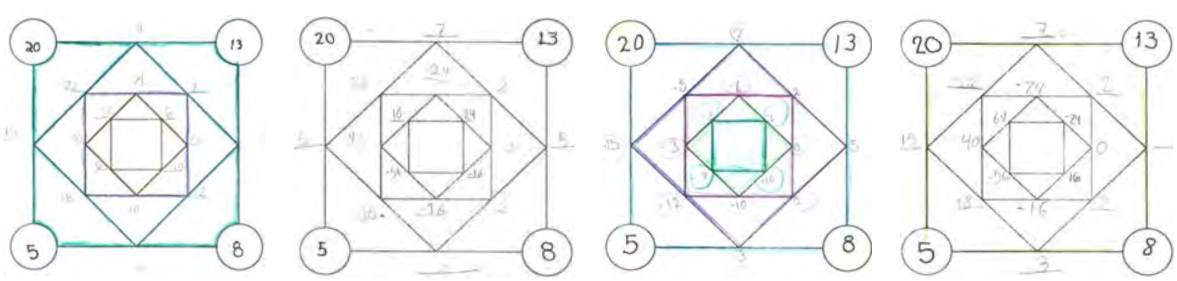


Figura 3. Fractales entregados por los 4 equipos en la actividad.

Cabe resaltar que para la organización de los resultados usamos un color verde para cuando la diferencia se realizó de manera adecuada, un color rosa para cuando la diferencia está mal y azul para cuando la diferencia está bien, pero no es la esperada. Los resultados de las hojas de trabajo son los siguientes:

Tabla 2. *Primer Ciclo.*

Equipo	Diferencia 1	Diferencia 2	Diferencia 3	Diferencia 4
Resultados esperados	**20-13=7**	**13-8=5**	**8-5=3**	**5-20=-15**
1	20-13=7	13-8=5	8-5=3	5-20=-15
2	20-13=7	13-8=5	8-5=3	5-20=-15
3	20-13=7	13-8=5	8-5=3	5-20=-15
4	20-13=7	13-8=5	8-5=3	5-20=-15

En el primer ciclo los alumnos ejecutan las cuatro diferencias con éxito.

Tabla 3. *Segundo ciclo.*

Equipo	Diferencia 1	Diferencia 2	Diferencia 3	Diferencia 4
Resultados esperados	**7-5=2**	**5-3=2**	**3-(-15) = 18**	**-15-7 = -22**
1	7-5=2	5-3=2	3-(-15) = 18	-15-7 = -22
2	7-5= -2	5-3=2	3-(-15) = -18	-15-7 = -22
3	7-5=2	5-3=2	3-(-15) = -12	-15-7 = -8
4	7-5=2	5-3=2	3-(-15) = 18	-15-7 = -22

En el segundo ciclo los equipos uno y cuatro realizan las diferencias con éxito, a partir del segundo ciclo el equipo uno en la primera diferencia $7-5$ ellos dan como resultado -2; es decir, cambiaron el signo de los números.

El equipo tres en la tercera diferencia, al hacer la resta de $3-(-15) = -18$, el resultado es erróneo, pues hicieron una suma en la que consideraron que los dos números eran negativos, el equipo dos, en la tercera diferencia hicieron $3-(-15) = -12$.

En la cuarta diferencia el equipo tres cometió el siguiente error $-15-7 = -8$, que también revela error en el signo, parece que consideraron que tenían signos diferentes, por eso restaron, pero son signos iguales, y el resultado, pues no consideran el signo del sustraendo, sin embargo el resto de los equipos hicieron las diferencias de manera correcta.

Tabla 4. *Tercer ciclo.*

Equipo	Diferencia 1	Diferencia 2	Diferencia 3	Diferencia 4
Resultados esperados	**2-2=0**	**2-18=-16**	**18-(-22) = 40**	**-22-2=-24**
1	2-2=0	2-18=10	18-22 = 40	-22-2 = -24
2	2-2=0	2-18=-16	-18-22=-40	-22-(-2) =24
3	2-2=0	2-18=-16	-12-(-8)=-3	-8-2=-6
4	2-2=0	2-18=-16	18-(-22)=40	-22-2=-24

En el tercer ciclo en la primera diferencia los cuatro equipos la realizaron con éxito, para la segunda diferencia los equipos dos, tres y cuatro las realizaron de manera correcta, mientras que el equipo uno hizo $2 - 18 = 10$, lo cual es un resultado erróneo pues no restaron los números, de este resultado no encontramos alguna relación con los anteriores.

Para la tercera diferencia los equipos dos y cuatro las realizan con éxito, el uno y el tres tienen error, en el equipo uno registraron $10 - 22 = 40$ aunque el resultado es correcto (debería dar 40) la diferencia planteada no es adecuada, el equipo tres hizo $-12 - (-8) = -3$, el resultado no cumple con la diferencia, se equivocaron con una unidad.

En la diferencia cuatro los equipos uno y cuatro las realizan bien, mientras que el equipo dos y cuatro tienen $-22 - (-2) = 24$, donde se observa que omitieron el signo del primer número, el otro registró $-8 - 2 = -6$, donde omitieron el operador antes del sustraendo, aunque el resultado lo dieron correcto; sin embargo, no es la diferencia que debían usar.

Tabla 5. *Cuarto ciclo.*

Equipo	**Diferencia 1**	**Diferencia 2**	**Diferencia 3**	**Diferencia 4**
Resultados esperados	**-24-0=- 24**	**0-(-16)= 16**	**-16-40= -56**	**40-(-24) = 64**
1	-24-0=6	0-10 = -10	10-40 =6	40-(-24) = -2
2	24-0=24	0-(-16) = -16	-16-40 =-56	40-24=16
3	-6-0= -6	0-10 = -10	-10-(-3) = -7	-3-(-6) = -3
4	-24-0= -24	0-(-16) = 16	-16-40=-56	40-(-24) = 64

Para el cuarto ciclo se tiene que en la primera diferencia el equipo uno tiene $-24 - 0 = 6$ (no encontramos alguna explicación para este resultado), el equipo dos y tres plantean una diferencia que no corresponde al resultado esperado; sin embargo, es correcto de acuerdo a lo que ellos anotaron, el equipo cuatro realizó bien la diferencia.

Para la diferencia dos el equipo uno la hizo bien, el equipo dos omitió el signo del minuendo dando como resultado el mismo número que el sustraendo sin considerar el signo que lo precede, el equipo tres realizó la diferencia bien con respecto a las anotaciones de ellos sin ser correcta para lo esperado, el equipo cuatro hizo con éxito la diferencia.

Para la tercera diferencia el equipo dos y cuatro tienen bien el resultado, el equipo uno tiene $10 - 40 = 6$ lo cual está mal, es como si hubieran tomado el cuarenta como cuatro y el equipo tres tiene el resultado correcto de acuerdo a lo que plantearon sin ser el resultado esperado.

En el cuarto ciclo el equipo uno y tres tiene errores similares a los anteriores, el equipo dos tiene bien el resultado de acuerdo a lo anotado por ellos, el cuarto equipo realizó correctamente la diferencia.

Recordemos que el uso de la regleta se da sobre todo al comienzo de la actividad, donde cada uno de los integrantes del equipo tenía una tarea: manipular la regleta, dictar la diferencia y tomar notas de las operaciones. En lo que sigue se presenta un fragmento de registro en el que unas alumnas trabajan en equipo:

> Alumna 1: ¿cuál es la diferencia entre 9 y 20?
>
> //La alumna 2, en la regleta, a partir del cero, ubica el 9 y luego hace 20 movimientos a la izquierda encontrando así la primera diferencia: -11//

En general se observó que esta dinámica ayudó a la mayoría de los equipos a completar la actividad, sin embargo, varios de ellos presentaron dificultades al hacer las sumas, pues, en algunos casos no identificaron hacia donde moverse en la regleta, dependiendo del signo que tuvieran.

> Alumna 3: Ahora, realiza la diferencia entre 15 – 19.
>
> Alumna 2: Hay que hacer los 19 movimientos a la izquierda, da 4.

La alumna 2, que tiene la regleta, busca el 15, pero luego dice que los 19 movimientos serán a la izquierda, dando como resultado 4. Se observa que la alumna 2 se equivocó porque omitió el uso de la regleta y en su lugar trató de adivinar el resultado.

También se percibió que algunos otros equipos, por momentos dejaron de lado la regleta e hicieron la tarea solamente escribiendo la operación, en estos casos el principal error fuer la omisión del signo del sustraendo.

Una visión en general de los errores cometidos se puede observar en la Tabla 6.

Tabla 6. *Errores cometidos en la actividad.*

Error	**Explicación**	**Equipos**
$7-5=-2$	Realizan la diferencia pero el resultado lo pone negativo, aunque debería ser positivo, se cree que se dejaron llevar por el signo del sustraendo.	Equipo 2 primera diferencia primer ciclo.
$3-(-15)\ =-18$	Cambiaron el signo del resultado, pues el número 18 es correcto, pero el signo no.	El equipo 2 en el segundo ciclo, la tercera diferencia.
$3-(-15)=\ -12$	Hicieron una diferencia, pero el resultado lo registraron negativo, pareciera que no tomaron en cuenta el signo del operador.	El equipo 3 en el segundo ciclo, la tercera diferencia.
$-15-7\ =-8$ $-8-2=-6$	Omitieron el signo del sustraendo y efectuaron la diferencia en los dos casos	El equipo 3 en el segundo ciclo , la cuarta diferencia

Situación de Validación - Institucionalización

Al interior de los equipos se observó que los alumnos comenzaron a corregirse con más seguridad y recordándose constantemente "menos - menos" cuando así se les presentó la situación, en el caso de la suma de números cuando tenían signos diferentes resolvieron con éxito la mayoría de éstas pues respetaron los signos de cada número. La seguridad fue evidente, pues se observó que ahora sí corregían al compañero que por equipo lideraba, además de hacerlo de manera correcta.

En esta situación la maestra solicitó que alguno de los alumnos pasara a dar sus resultados; a lo que solamente el alumno A pidió pasar al frente, para esto la maestra previamente había dibujado el fractal en el pizarrón.

Este alumno A comenzó a hacer las diferencias, sin pedir opinión de los demás compañeros, para algunas de ellas hizo anotaciones en el pizarrón, para otras las hizo de manera mental.

Figura 4. Alumno A validando actividad.

La alumna K le hace notar que tuvo un error cuando sumó $18-(-22)= -40$, por lo que el alumno A, que había puesto -40, corrigió.

Los demás alumnos estuvieron de acuerdo, luego de esto el alumno pasó a su lugar. El tiempo de la sesión estaba por concluir, por tal motivo la maestra tomó la palabra para cerrar la actividad 2:

Maestra: ¿Hicieron lo mismo que en la actividad pasada?

Alumna (**M**): Sí, pero hicimos mejor las restas, ya nos fijamos en el "menos – menos" o "prohibido no". //los alumnos relacionan el producto de dos números negativos igual a un número positivo con el "prohibido no", que significa "permitido"//

La maestra vuelve a preguntar para buscar la devolución:

Maestra: ¿Qué aprendieron?

Alumnos: A restar dos números negativos y sumarlos cuando tienen diferente signo, fijándonos en el signo.

Maestra: ¿Cómo?

Alumno (**Sa**): Bueno, que cuando tenemos, por ejemplo $5 - 20 = -15$ respetamos el signo del más grande o también cuando tenemos por ejemplo $-15 - (-5)$ se suma el 5.

Para concluir, la maestra retoma algunos elementos que ya se habían institucionalizado en la sesión 1:

Maestra: Ok, gracias, se nos terminó el tiempo, pero necesito que hagamos un recuento de lo que trabajamos. ¿Cómo se le llama a este conjunto de números**?**

Alumnos: Enteros

Maestra: ¿Y con que letra se les denota?

Alumnos: Con la $\boldsymbol{Z}$**.**

//La maestra anotó en el pizarrón la letra Z mayúscula y abrió llaves para poner los números que los alumnos le dijeron//

Maestra: ¿cuáles son?

Alumnos: son el $-3-,2,-1,0,1\ ,2\ ,3,$

No mencionaron los puntos suspensivos antes y después de los números sin embargo la maestra los anota y para asegurar que sabían a que se referían les pregunta

Maestra: //Escribe $\boldsymbol{Z} = \{\ldots - 3 - ,2, -1,0,1\ ,2\ ,3, \ldots\}$// ¿qué significan estos puntos?

Alumnos: que crece infinito.

Maestra: ¿qué más aprendieron?

Alumnos: a sumar números con diferente signo y respetar el signo del más grande.

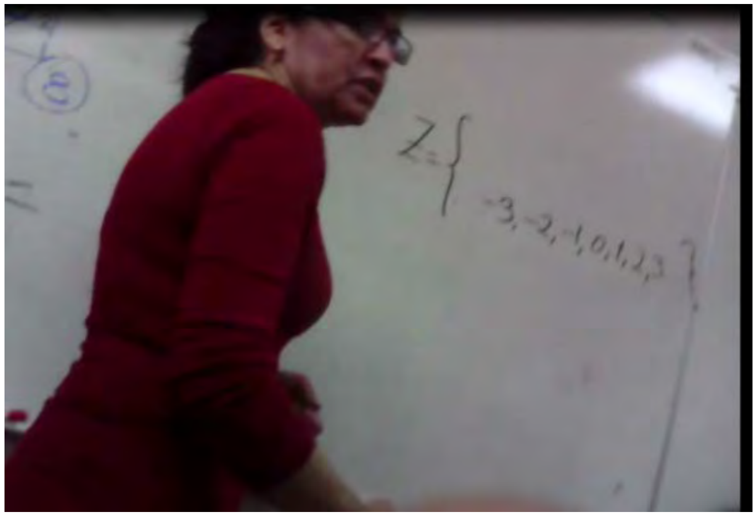


Figura 5. Profesora retomando institucionalización en la sesión 2.

Cabe mencionar que se considera que se dio la devolución de la situación pues la mayoría de los alumnos resolvió con éxito la actividad. Se termina la sesión y la maestra agradece su participación y rescata las hojas de trabajo.

Conclusiones

El presente trabajo de investigación tuvo como propósito el aportar una herramienta para coadyuvar a solventar las dificultades que presentan los alumnos de primer grado de secundaria al realizar sumas de números con signo, así como cuando efectúan diferencias y el minuendo contiene signo negativo ya que al presentarse tales dificultades los resultados de los alumnos en su mayoría son incorrectos.

Podemos afirmar que para los alumnos es difícil despojarse de las estrategias aprendidas desde la educación primaria en dónde no se trabaja con números negativos, pues al no encontrar sentido al tener un resultado negativo, optan por cambiar el signo para que éste les resulte positivo, aunque sea lo contrario.

La situación que se abordó fue apoyada con material didáctico elaborado por la profesora y que al ser manipulado por los alumnos despertó un gran interés por resolverla, lo cual provocó comentarios del grupo en el que se aplicó hacia los demás grupos quienes pedían que también fuera aplicada con ellos.

Una de las ideas que quedan al término de esta investigación, es la posibilidad de llevar a cabo en la práctica diaria situaciones de este tipo; sin embargo, se sabe que no se podría aplicar, dado que se tienen programados tiempos determinados y temas a abordar según lo propuesto por la Secretaría de Educación Pública, por otro lado Brousseau (2002) advierte que no debemos abusar del uso de las situaciones didácticas, pues son solamente una herramienta más para el profesor, no todos los temas se pueden abordar de esta manera.

Con respecto al objetivo del presente trabajo, que era lograr que el alumno fuera capaz de realizar las sumas de números enteros con signo, que al encontrarse con la resta de un número negativo no se les dificultara solucionarlo y lograran hacerlo de manera correcta se puede decir que con la situación didáctica, este objetivo se logró puesto que los alumnos al hacer las sumas y diferencias con los cambios de variables, cometieron menos errores, éstos disminuyeron de manera significativa; sin embargo, en uno de los equipos tuvieron dificultades para realizar las sumas o diferencias, lo cual nos hace saber que la situación se logró en un 78% con éxito.

Por otro lado, este trabajo de investigación también pretendía brindar una herramienta que permitiera a los alumnos enfrentarse con seguridad con la suma de números enteros, ya que en el salón de clases, se ha observado que tienen dificultades para entender dichas sumas, pues aunque en los libros de texto, como ya se mencionó, lo abordan desde varios sentidos: como la suma de fichas de dos colores diferentes, niveles sobre y bajo cero en cuanto a temperatura, en el deber y tener de manera monetaria, así como ejercicios en la recta numérica, no es suficiente para la comprensión del tema.

Por tal razón, y tomando en cuenta esta dificultades que nos interesó diseñar material didáctico para que sirviera de apoyo para el estudio de la suma de números enteros con signo, con la finalidad que el alumno en temas posteriores cuente con el conocimiento necesario para resolver de manera exitosa. Cabe resaltar que el uso de la regleta se da solamente al inicio del trabajo con los números negativos, posteriormente, ya no es necesaria para realizar las operaciones, pues los jóvenes llegan a comprender el trabajo con los negativos.

A pesar de que en el libro de texto que se llevó en el curso de este año escolar lo manejan con dibujos agradables, creemos que el manipular la regleta les hizo entender de manera rápida las operaciones con números enteros, pues es un material que les llamó mucho la atención y todos los integrantes de los equipos deseaban utilizarla.

En cuanto a las recomendaciones para futuras experiencias se sugiere lo siguiente:

Aplicar la situación en dos sesiones, puesto que 50 minutos no son suficientes para abordarse tal como la proponemos, trabajando en situación de acción, formulación, validación e institucionalización, se recomienda para futuras experiencias tomar una sesión para las situaciones de acción y formulación y otra para las restantes.

Si se destinara más tiempo para la situación se podría pedir al alumno que observe con detenimiento qué es lo que le piden que haga y no intente contestar de manera rápida, solo para terminar antes que el resto de los compañeros. Además, aunque para estos alumnos no funcionó, se sugiere seguir pidiendo a los estudiantes una explicación de manera escrita acerca de los procedimientos que hacen, pues esto les ayudará a desarrollar la competencia de argumentación, no solo en esta actividad, sino en el quehacer cotidiano de la enseñanza.

Por otro lado, la actividad se limita al manejo de los números enteros, para aumentar su nivel de dificultad, y ya sin el uso de la regleta, se pueden utilizar números racionales, de esta manera se deja abierta la posibilidad para posteriores investigaciones.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Colombia: Iberoamérica.

Brousseau, G. (2002). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Sainz (comps.), *Didáctica de las matemáticas, aportes y reflexiones* (pp. 65 – 94). Buenos aires: Paidós Educador.

Bruno, A. (1996). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. *LA GACETA* 4 (2), *415-426*.

Bruno, A. y Martinón, A. (1994). Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos. *Suma*, 16, 9-18.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanís, J. A., Rodríguez, A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra, y I. Saiz, *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 39-50). Buenos Aires: Paidós.

Gallardo, A., Santos, N. y Hernández, J. A. (2010). La aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en alumnos de secundaria. Un estudio de caso. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 303-314). Lleida: SEIEM.

México. Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011, guía para el maestro: Educación básica secundaria. Matemáticas.* D.F., México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

Panizza, M. (2004). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En *Enseñar matemática el Nivel Inicial y el primer Ciclo de la EGB. Análisis y propuestas* (pp. 59-71). Buenos Aires: Paidós.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

SUGERENCIAS PARA LA ENSEÑANZA DE SUMAS Y SUCESIONES DE NÚMEROS EN EL BACHILLERATO

Carol Yareli Gaxiola Hernández, Silvia Elena Ibarra Olmos

Universidad de Sonora, México

Carol.gaxiolah@gmail.com, sibarra@mat.uson.mx

Para citar este artículo:

Gaxiola, C. Y. & Ibarra, O. (2016). Sugerencias para la enseñanza de sumas y sucesiones de números en el bachillerato**.** *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

SUGERENCIAS PARA LA ENSEÑANZA DE SUMAS Y SUCESIONES DE NÚMEROS EN EL BACHILLERATO

Carol Yareli Gaxiola Hernández, Silvia Elena Ibarra Olmos

Universidad de Sonora, México

carol.gaxiolah@gmail.com, *sibarra@mat.uson.mx*

Palabras clave: sucesiones numéricas, bachillerato, prácticas docentes.

Resumen

El trabajo que se presenta a continuación forma parte de un proyecto que actualmente se desarrolla en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, el cual contempla el diseño y ejecución de proyectos de intervención en el aula para el curso de Matemáticas 1 del bachillerato. El propósito de este trabajo consiste en el diseño de una guía dirigida a los profesores que imparten dicho curso, en la cual se plantean una serie de sugerencias para la enseñanza de las sumas y sucesiones de números, incluyendo además actividades complementarias y el diseño de applets realizados con un software de geometría dinámica.

Introducción

Con el propósito de establecer una relación entre los subsistemas de la Educación Media Superior (EMS) y elevar la calidad de la educación, en México se instituyó una Reforma Integral para la Educación Media Superior (RIEMS), en la que se especifican las características que debe tener la educación de este nivel. Asimismo, se considera como parte fundamental al docente, quien debe basar sus prácticas en lo prescrito en dicha Reforma.

Al centrar la reflexión en caso de los profesores de matemáticas, es necesario traducir lo que establece la RIEMS para esta disciplina, en decir, especificar cómo pueden los docentes promover en sus estudiantes las competencias disciplinares en el campo de las matemáticas. Es indispensable interpretar lo que se establece en el Acuerdo Secretarial 447, el cual señala las competencias docentes para quienes impartan educación media superior en la modalidad escolarizada, y adecuarlo a un ambiente propio para el estudio de las matemáticas.

Como apoyo a las funciones que el profesor de matemáticas de bachillerato desarrolla, surge el interés por diseñar una guía dirigida a los profesores que imparten el curso Matemáticas I en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH), en la cual se proporcione apoyo con respecto a los propósitos y enfoques de las secuencias didácticas, que integran uno de los Módulos de Aprendizaje empleado en esa institución, así como actividades complementarias a las ya existentes.

El trabajo que se presenta a continuación forma parte de un proyecto que actualmente se desarrolla en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, el cual tiene como título “La educación matemática en el contexto de la Reforma Integral de la Educación Media Superior en el Estado de Sonora”. El mencionado proyecto, en una de sus etapas, incluye el diseño y ejecución de proyectos de intervención en el aula para el curso de Matemáticas 1 del bachillerato.

Matemáticas I fue diseñado atendiendo los planteamientos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior, en la cual se plantea un enfoque educativo basado en el desarrollo de competencias, tomando a la resolución de problemas como estrategia para promover el aprendizaje. Sin embargo, el material mencionado carece de sugerencias explícitas que apoyen la labor de conducción del profesorado, cuando las secuencias didácticas que integran el Módulo son llevadas al aula, por lo que se decidió atender ese faltante y diseñar la guía ya mencionada.

Marco teórico y herramientas metodológicas

Para fundamentar el proyecto de intervención se recurrió a elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), el cual aporta herramientas para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicho enfoque pone especial atención en los objetos matemáticos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y a la forma en que dichos objetos se relacionan con respecto a un conocimiento particular.

Se emplearon las nociones teóricas denominadas configuraciones y trayectorias epistémicas y docentes, las cuales sirvieron de base para la construcción de los significados institucionales de referencia y pretendido (Godino, Contreras & Font, 2006). Las fuentes utilizadas para dicha construcción fueron el programa de Matemáticas I, establecido por la Dirección General de Bachillerato (DGB) y el módulo de aprendizaje Matemáticas 1 de COBACH, respectivamente. Por otra parte, se consideraron las funciones docentes que EOS proporciona, como apoyo para establecer una relación entre las competencias docentes instituidas por la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS) y el perfil docente que instituye la DGB para los profesores que laboran en este subsistema. Esto permitió definir la trayectoria y configuración docente correspondiente.

Otra de las herramientas que sustentan el proyecto son las facetas de idoneidad didáctica provenientes del EOS, pues sirvieron de base para realizar el análisis y valoración a priori de la idoneidad didáctica del bloque referente al tema “Sumas y sucesiones de números”. Con ello se lograron identificar aquellas dimensiones que requerían apoyo y retroalimentación. El EOS contempla seis dimensiones, las cuales son epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica, que componen el proceso de instrucción matemática, (Godino, 2011).

Por otro lado, con base en una revisión bibliográfica realizada sobre investigaciones en torno al contenido matemático “sucesiones de números”, se identificaron dificultades que enfrentan los estudiantes y las aportaciones que se han hecho al respecto; esta acción tuvo como propósito adaptar e incorporar algunas de esas propuestas en el diseño de la guía. Además de lo anterior, se empleó el software GeoGebra para el diseño de applets que toman como referencia a las actividades que integran el módulo.

Exposición de la propuesta

Se iniciará la descripción de la propuesta formulada exponiendo los propósitos de la misma. Con este instrumento se pretende:

a) Crear un apoyo para el profesor, con respecto a los propósitos y objetivos buscados con cada una de las actividades que integran las secuencias didácticas.

b) Proporcionar estrategias para el docente, para orientar el desempeño de los estudiantes, respecto a los significados y objetos matemáticos contenidos en las secuencias didácticas de interés.

c) Integrar recursos tecnológicos que funjan como apoyo para las prácticas docentes.

Consecuentemente, se traducen los propósitos anteriores en la incorporación en la guía de las tres componentes siguientes:

- Orientaciones didácticas. Consisten en la identificación de las competencias genéricas y disciplinares por promover, los objetivos, conocimientos matemáticos, así como las posibles respuestas que podrían ser proporcionadas por los estudiantes. Una vez identificadas se explicitan al profesor, haciendo hincapié en las funciones que el docente debe desarrollar, en la implementación de cada una de las actividades que integran las secuencias didácticas del módulo.

- Applets complementarios. Fueron diseñados como apoyo a las actividades que integran el módulo, ya sea como implementación en el desarrollo de la actividad o como aportación a la institucionalización de los conocimientos matemáticos. Además de proporcionar orientaciones didácticas para la manipulación de los elementos que integran el applet, así como para lograr el objetivo de cada uno de ellos.

- Actividades complementarias. Con su inclusión se buscó aportar una serie de actividades como apoyo a los ya existentes, además de presentar nuevos contextos para el estudio de sucesiones. Se integra una sección para el desarrollo de la serie de actividades que se proponen como apoyo, para la construcción de los conocimientos matemáticos referentes al tema de sucesiones, además de las hojas de trabajo para dichas actividades.

Una aclaración importante, es que la propuesta toma como centro de acción el tratamiento que se hace en el módulo seleccionado sobre el tema “Series y sucesiones de números”, y lo que aquí se presenta, además de lo ya expuesto, se limita a una muestra de algunos de los applets que complementan algunas de las actividades del módulo de aprendizaje.

Un aspecto importante en el estudio de sucesiones es el hecho de estar profundamente relacionado con la identificación y obtención de patrones, temática que está presente en la educación básica desde el primer año de primaria, sin embargo, constantemente implican dificultades para los estudiantes. De acuerdo a esto, Chalé y Acuña (2013, p. 2) argumentan que “el proceso de detección del patrón que subyace a una secuencia a partir del análisis de figuras no es espontáneo”.

En ocasiones es difícil para los estudiantes hacer una generalización o identificar el comportamiento del patrón de una sucesión numérica, Cañadas, Castro y Castro (2012, p. 563) argumentan que “la generalización puede verse como una «generalización de patrones», y esto ha hecho que se considere una de las rutas destacadas para introducir a los estudiantes en el álgebra, pero no la única”.

Otros autores señalan deficiencias en el pensamiento algebraico de los alumnos, pues constantemente se presentan problemas con la generalización. Osorio (2012) argumenta que algunas dificultades que enfrentan los alumnos que están por ingresar en la

EMS, están relacionadas principalmente con los procedimientos que se utilizan para hacer la generalización de una sucesión.

Una de las características que se destacan en el estudio de sucesiones es el proceso de generalización, el cual puede ser expresado en diferentes sistemas de representación, lo cual proporciona herramientas en el estudio de sucesiones numéricas. De acuerdo a Cañadas, Castro y Castro (2012), los estudiantes pueden identificar el patrón que sigue una sucesión en distintos niveles de generalización, esto basado en el sistema de representación, sea ésta aritmética, gráfica, verbal o algebraica.

Por esta razón se enfatiza en emplear estos sistemas de representación, con los cuales se facilite seleccionar herramientas para la implementación del tema de sucesiones, en el caso del profesor, y herramientas para la selección de estrategias en el proceso de generalización, en el caso de los estudiantes. Esto apoyándose del uso de GeoGebra, lo cual proporciona un interés para los estudiantes, además de proveer una mejor visualización en el proceso de generalización. Mateos (2012) argumenta que uno de los aspectos importantes en el estudio de sucesiones, es la presentación de una ilustración que describa los primeros términos de la sucesión, lo cual promueve un razonamiento menos forzado.

Gamboa (2007) destaca diferentes aspectos en el uso de software en la enseñanza de las matemáticas como la motivación, ya que para incorporar esta herramienta se necesita de un diseño adecuado y contundente; es importante seleccionar o diseñar herramientas que aporten en los procesos de enseñanza y aprendizaje, por lo cual es necesario conocer las características del software.

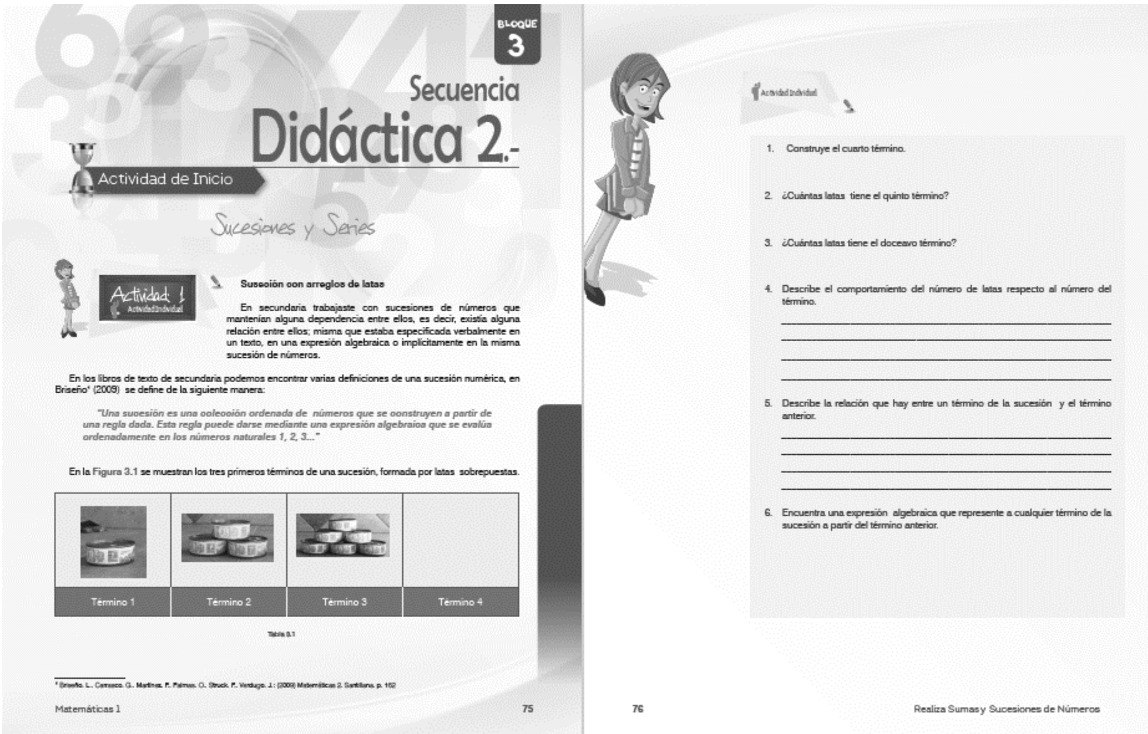
Contar con un recurso tecnológico, permite aprovechar diferentes herramientas en el desarrollo de temas matemáticos, así como explorar las diferentes representaciones de un concepto matemático. Tal es el caso de las sucesiones numéricas, puesto que visualizar estas representaciones, mejora el proceso de selección de las estrategias más convenientes para los aspectos que se están estudiando. Por esta razón se propone el diseño de applets complementarios a las actividades de módulo.

A continuación, se presentan dos ejemplos para ilustrar la discusión que se ha realizado hasta el momento.

Sucesión con arreglo de latas

La actividad se enfoca en una sucesión de latas sobrepuestas (Vargas, Rodríguez, del Castillo, Villalba, Ibarra, Grijalva, Armenta, Ávila, Urrea, Soto, Bravo, 2014, pp. 75-76). A partir de cuestionamientos se promueve que los estudiantes identifiquen el patrón de la sucesión, examinando sus diferentes representaciones: figural, verbal, numérico y algebraico, como una introducción al estudio de sucesiones (Figura 1), lo cual permitirá que los estudiantes establezcan una expresión algebraica, a través de la fórmula recursiva.

De acuerdo a los componentes que integran la actividad, se han incorporado algunos elementos que permitan al profesor lograr los objetivos establecidos para ésta. Como parte inicial se declaran el ***propósito de la actividad***, ***conocimientos matemáticos*** y ***errores y/o dificultades***; a través de estos elementos se espera proporcionar una visión de las características que deben tomarse en cuenta en la planeación, como parte de la resolución de una situación problema, detallando los objetos matemáticos intervinientes y emergentes, así como las conflictos que pueden presentarse.



BLOQUE 3

Secuencia Didáctica 2.-

Actividad de Inicio

Sucesiones y Series

Actividad 1
Actividad Individual

Sucesión con arreglos de latas

En secundaria trabajaste con sucesiones de números que mantenían alguna dependencia entre ellos, es decir, existía alguna relación entre ellos; misma que estaba especificada verbalmente en un texto, en una expresión algebraica o implícitamente en la misma sucesión de números.

En los libros de texto de secundaria podemos encontrar varias definiciones de una sucesión numérica, en Briseño[1] (2009) se define de la siguiente manera:

"Una sucesión es una colección ordenada de números que se construyen a partir de una regla dada. Esta regla puede darse mediante una expresión algebraica que se evalúa ordenadamente en los números naturales 1, 2, 3..."

En la Figura 3.1 se muestran los tres primeros términos de una sucesión, formada por latas sobrepuestas.

Término 1	Término 2	Término 3	Término 4

Tabla 3.1

[1] Briseño, L., Carrasco, G., Martínez, P., Palmas, O., Struck, F., Verdugo, J.: (2009) Matemáticas 2. Santillana. p. 162

Matemáticas 1 75

Actividad Individual

1. Construye el cuarto término.
2. ¿Cuántas latas tiene el quinto término?
3. ¿Cuántas latas tiene el doceavo término?
4. Describe el comportamiento del número de latas respecto al número del término.
5. Describe la relación que hay entre un término de la sucesión y el término anterior.
6. Encuentra una expresión algebraica que represente a cualquier término de la sucesión a partir del término anterior.

76 Realiza Sumas y Sucesiones de Números

Figura 1. Actividad tomada del módulo de aprendizaje Matemáticas 1.

Con base en los elementos mencionados, se construyen las ***competencias disciplinares*** y ***posibles respuestas***, esto para mostrar al profesor las competencias matemáticas que puede promover con esta actividad, así como la adaptación de atributos que permitan identificar las acciones a desarrollar. De acuerdo a los objetivos y las competencias, se proporcionan las respuestas que pueden formular los estudiantes, destacando la importancia de no ser las únicas y que estás pueden variar respecto a la generalización que logran.

Además, se incluyen algunos elementos que integren los aspectos necesarios para la implementación de la actividad, como son las ***orientaciones didácticas*** y ***representaciones de la sucesión***. Estos elementos buscan proporcionar al profesor una visión de lo que se puede presentar en la implementación de las actividades, además de identificar las acciones a llevar a cabo dentro de sus prácticas docentes, es decir, describir los aspectos relevantes en el desarrollo de las actividades, y que esto permita planear aquellas acciones que debe poner en práctica en el salón de clases, tomando en cuenta las representaciones de la sucesión (Figura 2).

Como apoyo a esta actividad se propone un applet con el que se pueda manipular, con un deslizador, el término de la sucesión que se quiere conocer. Sin embargo, en su primer acercamiento con el applet, la manipulación se restringe a los primeros diez términos, ya que el objetivo principal es que los estudiantes puedan reconocer el comportamiento de la sucesión término a término, y a partir de éste puedan elaborar sus propias conjeturas.

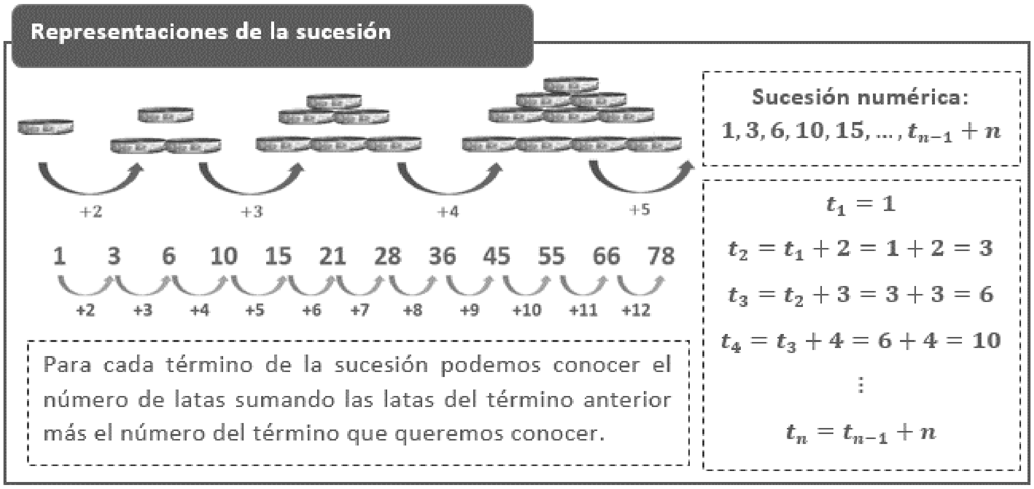


Figura 2. Representaciones de la sucesión con arreglo de latas.

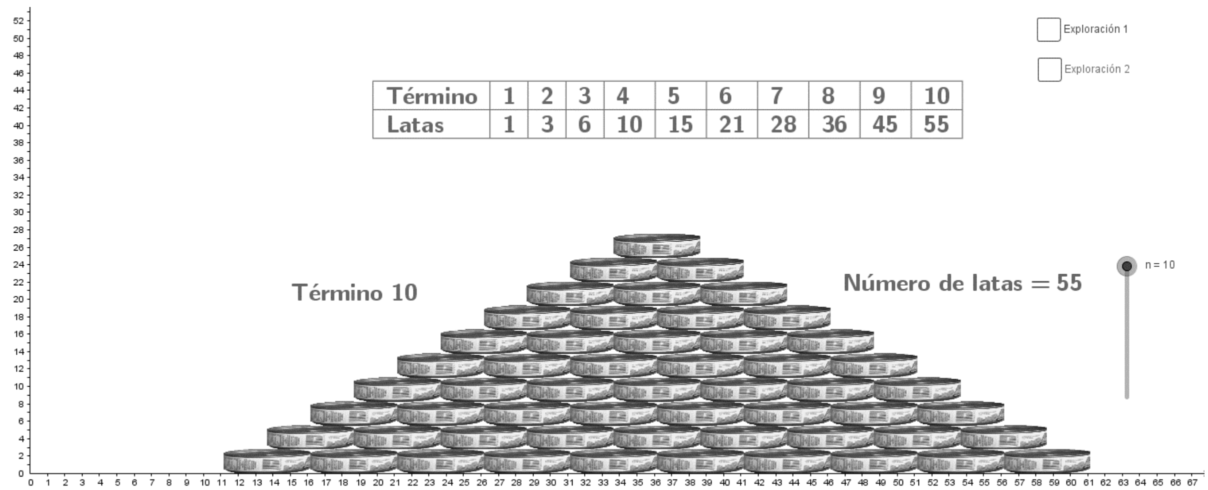


Figura 3. Applet sucesión con arreglo de latas.

Interesa además que los alumnos visualicen diferentes representaciones de la situación que se plantea en la actividad, para identificar los elementos que se mantienen fijos y aquellos que varían de un término a otro. Se espera que con la manipulación del applet se pueda reconocer el patrón que sigue la sucesión. Además, proporcionar argumentos que permitan justificar las respuestas que se obtuvieron en la resolución de la actividad.

El applet se enfoca en tres momentos, en el primero (Figura 3) se puede observar cómo varía el número de latas de acuerdo al término de la sucesión, en una ilustración del arreglo de latas, en correspondencia con el llenado de la tabla, respecto al número de latas para cada uno de los términos de la sucesión.

En los siguientes momentos (Figura 4) se promueve que se identifique la relación que existe entre los términos de la sucesión y la información de la tabla, con respecto a la gráfica que se forma con la manipulación del deslizador, en la que puede observarse que para cada uno de los términos se corresponde un número de latas.

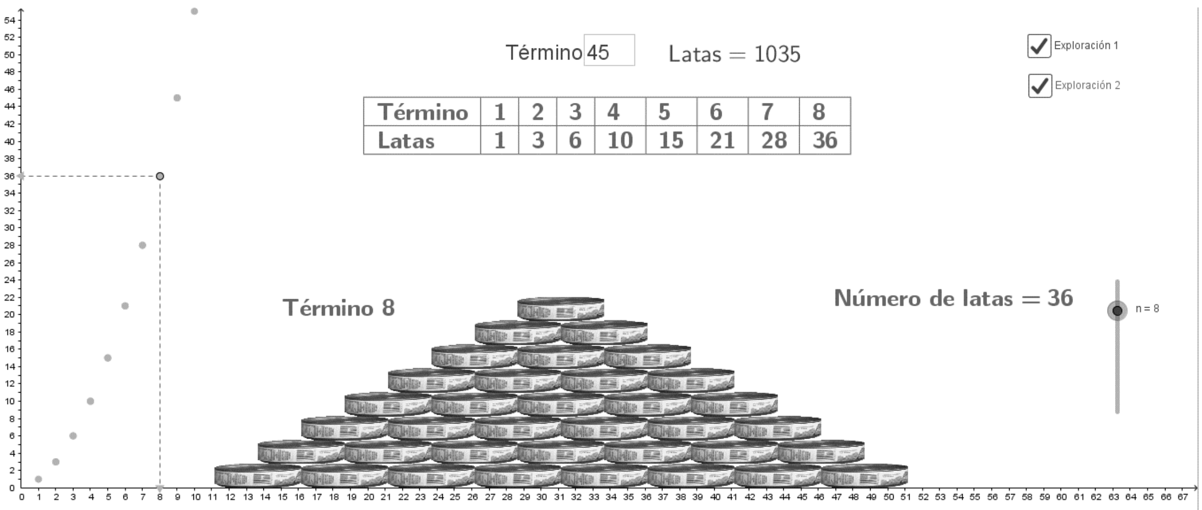
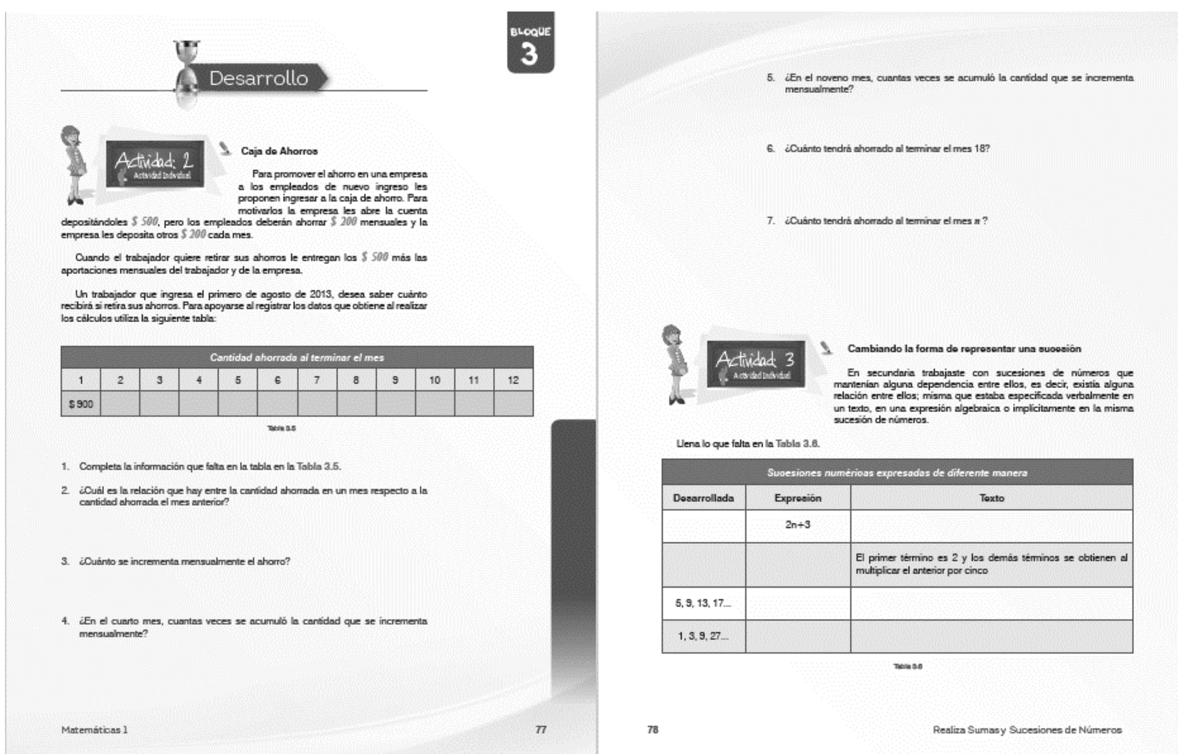


Figura 4. Exploración 1 y Exploración 2 de actividad.

Como exploración final, se da la oportunidad de ingresar el valor del término del cual se quiere conocer el número de latas, con la finalidad de comprobar las conjeturas que se construyeron al inicio de la actividad. Es decir, que se puedan observar los valores para cualquier término de la sucesión, y que a partir de éste, se pueda comprobar si las expresiones algebraicas que se formularon son adecuadas para esta sucesión.

Se expondrá a continuación el manejo realizado con la actividad denominada Caja de ahorro.

Caja de ahorro



BLOQUE 3

Desarrollo

Actividad: 2
Actividad Individual

Caja de Ahorros

Para promover el ahorro en una empresa a los empleados de nuevo ingreso les proponen ingresar a la caja de ahorro. Para motivarlos la empresa les abre la cuenta depositándoles $ 500, pero los empleados deberán ahorrar $ 200 mensuales y la empresa les deposita otros $ 200 cada mes.

Cuando el trabajador quiere retirar sus ahorros le entregan los $ 500 más las aportaciones mensuales del trabajador y de la empresa.

Un trabajador que ingresa el primero de agosto de 2013, desea saber cuánto recibirá si retira sus ahorros. Para apoyarse al registrar los datos que obtiene al realizar los cálculos utiliza la siguiente tabla:

Cantidad ahorrada al terminar el mes											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$ 900											

Tabla 3.5

1. Completa la información que falta en la tabla en la Tabla 3.5.
2. ¿Cuál es la relación que hay entre la cantidad ahorrada en un mes respecto a la cantidad ahorrada el mes anterior?
3. ¿Cuánto se incrementa mensualmente el ahorro?
4. ¿En el cuarto mes, cuantas veces se acumuló la cantidad que se incrementa mensualmente?

Matemáticas 1 77

5. ¿En el noveno mes, cuantas veces se acumuló la cantidad que se incrementa mensualmente?
6. ¿Cuánto tendrá ahorrado al terminar el mes 18?
7. ¿Cuánto tendrá ahorrado al terminar el mes *n* ?

Actividad: 3
Actividad Individual

Cambiando la forma de representar una sucesión

En secundaria trabajaste con sucesiones de números que mantenían alguna dependencia entre ellos, es decir, existía alguna relación entre ellos; misma que estaba especificada verbalmente en un texto, en una expresión algebraica o implícitamente en la misma sucesión de números.

Llena lo que falta en la Tabla 3.6.

Sucesiones numéricas expresadas de diferente manera		
Desarrollada	**Expresión**	**Texto**
	2n+3	
		El primer término es 2 y los demás términos se obtienen al multiplicar el anterior por cinco
5, 9, 13, 17...		
1, 3, 9, 27...		

Tabla 3.6

78 Realiza Sumas y Sucesiones de Números

Figura 5. Actividad tomada del módulo de aprendizaje Matemáticas 1.

La actividad se enfoca en la sucesión que forma el ahorro de un trabajador mes con mes (Vargas, *et al*., 2014, pp. 77-78). Se plantea una situación en la que el estudiante debe construir la sucesión, de acuerdo a la información que se proporciona: apertura de la cuenta, mensualidad y aportación de la empresa, utilizando como recurso una tabla respecto al mes de ahorro y el total de ahorro de dicho mes. Mediante cuestionamientos se promueve que se identifique el patrón y la expresión algebraica de la sucesión (Figura 5).

Similar al caso de la sucesión con arreglo de latas, se incorporan elementos que permitan al profesor, identificar los aspectos que debe tomar en cuenta como parte de su práctica docente, destacando los propósitos de la actividad, conocimientos matemáticos, errores y/o dificultades y posibles respuestas. Con la finalidad de contribuir en las orientaciones didácticas que se proponen para la implementación de cada una de las actividades, además de proporcionar las representaciones de la sucesión (Figura 6).

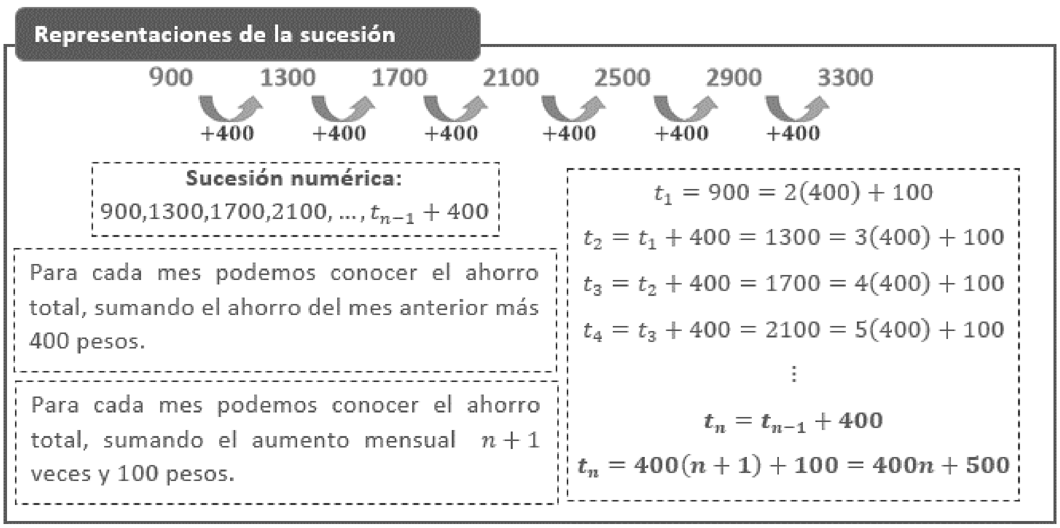


Figura 6. Representaciones de la sucesión de la caja de ahorro.

Como apoyo a esta actividad se propone un applet, (Figura 7), que se manipula con un deslizador, para observar el número del mes y el total de ahorro que se obtendría, con lo que busca establecer cómo es el crecimiento del ahorro mes con mes. Con el applet se tiene como propósito visualizar la relación que existe entre las diferentes representaciones de la sucesión, para identificar el comportamiento del crecimiento de ahorro respecto a los meses de ahorro, y se espera que con la manipulación del applet se pueda reconocer el patrón que sigue la sucesión.

El applet se enfoca en dos momentos, primero en crear una relación entre la información que proporciona la tabla respecto al mes y, el ahorro total y la representación gráfica de estos datos, promoviendo la formulación de conjeturas respecto al patrón de la sucesión. El deslizador se limita a los primeros 20 meses, para que a partir de la exploración general se pueda comprobar si las conjeturas que se propusieron en la actividad son adecuadas, y que esto permita establecer una expresión general de esta sucesión.

En el primer acercamiento con el applet se establecen los valores para la apertura y mensualidad del ahorro de acuerdo a la actividad, pero cuenta con la opción de hacer cambios en estos valores para incluir una mayor cantidad de situaciones, con las que se pueda observar cómo es el ahorro mes con mes para cualquier caso, así como identificar que el ahorro total depende de dichos valores.

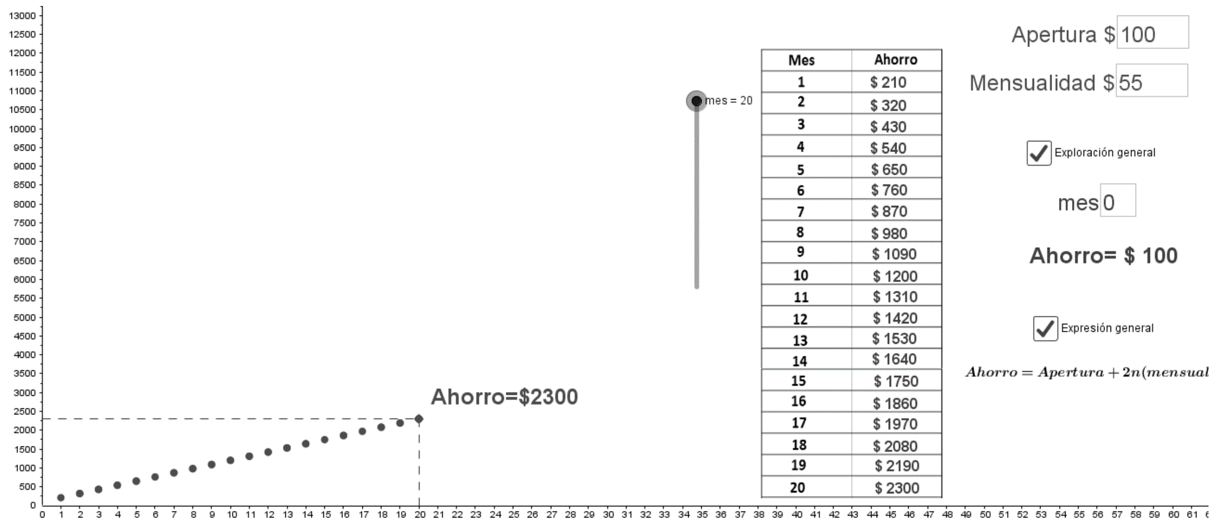


Figura 7. Applet sucesión de caja de ahorro.

Reflexiones finales

De acuerdo al análisis de idoneidad didáctica del bloque respecto al tema "sumas y sucesiones de números", se pudieron destacar diferentes aspectos que permitieron identificar los elementos que integran nuestro diseño, con base en esto se describen las reflexiones que se presentan a continuación.

Una de los componentes que se destacó por contar con un nivel alto, fue la correspondencia entre los significados institucionales de referencia y pretendido. Sin embargo, uno de los objetivos que plantea el programa de estudio, es la construcción de gráficas para establecer el comportamiento de sucesiones aritméticas y geométricas, y éste es un aspecto que no se explota en las actividades del módulo. Atendiendo a esto, se incorpora en los applets la representación gráfica, como impulsor para identificar el comportamiento de una sucesión y establecer la relación que existe entre las diferentes representaciones de una sucesión.

Se cuenta con una configuración y trayectoria epistémica adecuadas, ya que los objetos matemáticos emergen correspondientes a los conocimientos previos de los estudiantes, además de integrar aspectos necesarios para el estudio de sucesiones y series. No obstante, es necesario introducir nuevos materiales de apoyo para hacer más eficiente las situaciones que se presentan en las actividades, para reforzar los conocimientos matemáticos que integran las secuencias didácticas. Por esta razón, la importancia de incorporar el diseño de applets como complemento a las actividades del módulo, así como las sugerencias necesarias para que el profesor pueda desarrollarlas en el aula.

El proporcionar este tipo de herramientas permite contar una visión amplia de las situaciones que se presentan en las actividades, lo cual permite que los estudiantes cuenten con diferentes opciones para la selección de estrategias que más se adapten a sus habilidades y que el proceso de generalización no se enfoque únicamente en lograr una expresión algebraica, sino conocer por qué una expresión permite conocer los elementos de una sucesión, así como argumentar y justificar el que dicha expresión resulte ser la adecuada.

Referencias bibliográficas

Cañadas, M., Castro , E., & Castro, E. (2012). Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. *La Gaceta de la RSME, 15*(3), 561–573.

Chalé, S., & Acuña, C. (Noviembre,2013). El desarrollo del pensamiento algebraico: la visualización en el caso de los patrones. Santo Domingo, Republica Dominicana: I CEMACYC.

Gamboa Araya, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*(3), 11-44.

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *CIAEM-IACME*.

Godino, J., Contreras, Á., & Font, V. (2006). análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la congnición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88.

Mateos, M. (2012). *¿Cómo enseñar sucesiones lineales?. Razonamiento inductivo y hoja de cálculo. Trabajo fin de máster.* Universidad de Cantabria.

Osorio, J. (2012). Procesos de generalización que intervienen en el aprendizaje del alumno al hacer uso de sucesiones. *Acta Latinoamerica ME, 25,* 75-81.

Subsecretaría de Educación Media Superior. (29 de octubre de 2008). *ACUERDO número 447 por el que se establecen las competencias docentes para quienes impartan educación media superior en la modalidad escolarizada.* México: SEMS.

Subsecretaría de Educación Media Superior. (2008). *Reforma Integral de la Educación Media Superior en México: La Creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad.* México: SEMS.

Vargas, R.; Rodríguez, M.; del Castillo, A.; Villalba, M.; Ibarra, S.; Grijalva, A.; Armenta , M.; Ávila , R.; Urrea , M.; Soto, J.; Bravo, J.;. (2014). *Matemáticas 1*. México: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Recuperado el 05 de Diciembre de 2014, de http://www.cobachsonora.edu.mx:8086/portalcobach/pdf/modulosaprendizaje/Basica/Matematicas1.pdf

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES QUE INVOLUCRAN EXPRESIONES CON RADICALES

María del Rosario Gallardo Reyes, Graciela Eréndira Núñez Palenius

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. México

chayogallardo@terra.com.mx, erepalenius@hotmail.com

Para citar este artículo:

Gallardo, M. A. y Nuñez, G. E. (2016). Actividades de aprendizaje para la solución de ecuaciones que involucran expresiones con radicales. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES QUE INVOLUCRAN EXPRESIONES CON RADICALES

María del Rosario Gallardo Reyes, Graciela Eréndira Núñez Palenius

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

chayogallardo@terra.com.mx, erepalenius@hotmail.com

Palabras clave: Aprendizaje colaborativo, TIC.

Resumen

En este trabajo se presentan resultados de una investigación en donde se utilizaron las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), para fortalecer un ambiente didáctico e influir en la construcción de conceptos algebraicos cuando se resuelven actividades de aprendizaje que despierten el interés del alumno, desarrollando habilidades de razonamiento y comprensión de éstos conceptos, motivando su estudio con mediación de la calculadora TI-Nspire CX CAS. Estas actividades se aplicaron a estudiantes del nivel superior en un ambiente de trabajo colaborativo. Como cita Artigue (2002) y Rojano (2003), el uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, y en especial de las calculadoras, han incorporado herramientas que disminuyen el trabajo operativo, permitiendo mostrar procesos, modelar problemas, así como ampliar su análisis.

Introducción

El uso de la tecnología ha generado cambios sustanciales en la forma como los estudiantes aprenden matemáticas. Cada uno de los ambientes en los que se interactúa con calculadoras (TI-Nspire CAS), proporciona condiciones para que los estudiantes identifiquen, examinen y comuniquen distintas ideas matemáticas (Cortés, Miranda y Carrillo, 2012).

En este proyecto se presentan los resultados que se obtuvieron al implementar actividades de aprendizaje con temas de Álgebra, que incorporan la calculadora TI-Nspire CX CAS y que propician el aprendizaje colaborativo, para que de esta manera los estudiantes hagan suyas las competencias matemáticas. El trabajo de investigación, se llevó a cabo con estudiantes de nuevo ingreso de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Los antecedentes a este trabajo, son investigaciones en donde se habla sobre el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza de las matemáticas, principalmente en tópicos de álgebra, tanto en México como en países como Costa Rica y EUA.

Una de las características más importantes de esta investigación, es la implementación de actividades de aprendizaje con la calculadora TI-Nspire CX CAS, el uso de esta, es porque integra sistemas de algebra computacional (CAS), reconocidos por su combinación poderosa de computación simbólica y visualización gráfica en la enseñanza de matemáticas. A la fecha se tienen pocos antecedentes de su uso en México, aunque actualmente se han elaborado algunos trabajos de investigación con el uso de esta tecnología.

Por otro lado, el estudio del álgebra es trascendental como contenido matemático en diferentes etapas del Sistema Educativo, desde la Secundaria obligatoria hasta la Universidad. Además, en los últimos veinte años han surgido propuestas para incorporar algunas cuestiones del Pensamiento Algebraico.

Las investigaciones realizadas para el estudio del Pensamiento Algebraico, se han orientado en los últimos 30 años a:

- El análisis de las características esenciales del Pensamiento Algebraico.
- Los niveles de organización.
- Los problemas que se ocasionan en la enseñanza y en el aprendizaje del álgebra.

Asimismo, diferentes trabajos como los de Kieran y Filloy (1989), Kieran (1992, 2007), muestran que la investigación en Pensamiento Algebraico trata de encontrar soluciones a preguntas como: ¿Qué pueden hacer y qué no pueden hacer los estudiantes y los profesores en los distintos ciclos o niveles del sistema educativo en Pensamiento Algebraico?

Una visión general sobre las investigaciones en Pensamiento Algebraico en la educación se puede extraer de los siguientes trabajos:

- Kieran y Filloy (1989), describen algunas de las contribuciones más significativas de la investigación sobre procesos cognitivos, implicados en el aprendizaje del algebra escolar hasta finales de los ochenta, entre las que cabe destacar el marco aritmético de referencia. Estás aportaciones ponen de manifiesto la presencia de un cuerpo creciente de conocimientos, sobre los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra.
- Kieran (1992), presenta un documento sobre las investigaciones en álgebra, en el que realiza un análisis histórico del álgebra, una descripción del contenido del álgebra, una reflexión y discusión de las demandas psicológicas hechas sobre el aprendiz de álgebra por el contenido matemático y una descripción breve del panorama de la perspectiva de enseñanza. En él analiza y trata de comprender mejor las dificultades, que los estudiantes tienen al aprender álgebra y los problemas de su enseñanza.
- Kieran (2007), aporta un nuevo trabajo en el que hace una revisión de la enseñanza y el aprendizaje del algebra en la educación, mostrando formas de construir significados para los símbolos algebraicos y para su manipulación.

Por lo anteriormente descrito, se consideró importante el trabajo con esta rama de las matemáticas para esta investigación. Asimismo, el alto nivel de abstracción que requieren algunos conceptos matemáticos, hace indispensable la utilización de recursos didácticos que apoyen el proceso de enseñanza y aprendizaje (Núñez y Cortés, 2011), como es para nuestro caso la actividad de aprendizaje, el uso de la calculadora y el trabajo colaborativo con el apoyo del profesor.

Marco teórico

La propuesta teórica para este trabajo de investigación incluye la teoría de los *Registros de Representación Semiótica* de Duval (1993, 1995, 1998), ya que el trabajo con las actividades de aprendizaje y la calculadora hacen transitar al estudiante por diferentes registros de representación, como son: el lenguaje común, el numérico, el algebraico y el gráfico. Además de los sustentos teóricos, del uso de las TIC para el aprendizaje de las matemáticas, por utilizar la calculadora como un medio para que el estudiante logre la conceptualización de los tópicos matemáticos abordados; y del *Aprendizaje colaborativo*, ya que fue la metodología empleada para las experimentaciones realizadas, por los alcances que tiene en los aprendizajes de los estudiantes al ser utilizada.

Si se está interesado en los sistemas semióticos de representación y en la importancia de las tareas de conversión entre diferentes representaciones, se deben tener presente algunos aspectos teóricos que presentan autores como Duval (1993, 1995, 1998), Hiebert y Carpenter (1992), Janvier (1987), entre otros.

El trabajo de Hiebert y Carpenter (1992), nos explica ideas sobre la construcción de conceptos matemáticos, dentro del marco teórico de las redes formadas por representaciones internas, generadas por la manipulación de representaciones externas. Además, explican que una idea matemática, procedimiento o hecho, es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento o hecho, es entendido profundamente si este está ligado a una red existente con fuertes o numerosas conexiones.

Por otro lado, uno de los trabajos de Duval (1993) habla de las “representaciones semióticas” como un conjunto de signos, que son el medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles a otros individuos, además señala que el conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas semióticas. Por lo tanto, las representaciones mentales nunca pueden ser independientes de las representaciones semióticas. La elección de un determinado registro de representación puede ser la clave para facilitar la comprensión de un objeto matemático.

Continuando con el mismo autor, en matemáticas la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. Duval (1993) argumenta, que el desarrollo de las representaciones mentales depende de la interiorización de las representaciones semióticas, las cuales para intervenir en la actividad cognitiva, deben integrarse por dos componentes inseparables: La ***Semiosis***, que es cualquier forma de actividad, conducta o proceso que involucre signos, incluyendo la creación de un significado; es un proceso que se desarrolla en la mente del intérprete, se inicia con la percepción del signo y finaliza con la presencia en su mente del objeto del signo; y la ***Noesis,*** que es la aprehensión conceptual de un objeto.

Además, Duval (1998) afirma que ***no existe noetica sin semiótica*** y cita, que el uso de varios registros parece una condición necesaria para que los objetos matemáticos no sean confundidos con sus representaciones y para que puedan también ser reconocidos en cada una de ellas, así, la variabilidad de registros de representación (figuras, gráficas, escritura simbólica, lenguaje) conlleva una aprehensión conceptual de los objetos (Duval, 1995).

Por otro lado, acerca de las TIC podemos decir, que están presentes en todos los sistemas que componen los diferentes ámbitos de la sociedad. En el campo de la educación se puede afirmar que, aunque ha sido lenta la inclusión de esas tecnologías, hay investigaciones que sustentan la importancia de su uso. Ya no se debate sobre su necesidad, sino las ventajas que ofrece su utilización (la mejor manera de sacarles provecho, al ser medios o herramientas que contribuyen a enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje), su incidencia en la cognición y procesos del pensamiento de los alumnos y la manera como impactan en la reestructuración del currículo educativo.

Indudablemente frente a este gran cambio, la educación debe hacerse eco y construir un nuevo modelo que permita a los alumnos la utilización de las TIC con la finalidad de mejorar su aprendizaje. Todo esto subraya, que la educación superior debe capacitar a cada uno de sus docentes en la aplicación de esta tecnología, crear sitios web educativos e insertar a los alumnos en el uso de este medio tan importante, es decir, que los distintos espacios curriculares tiendan a planificarse con la utilización de las TIC, como medio pedagógico esencial para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Su incidencia en la educación es tal, que constituye un valioso recurso que permite llevar un proceso educativo centrado en el aprendizaje del alumno. Sin embargo, no es necesario que el profesor haga uso de la tecnología computacional en todas las actividades, sino sólo en aquellas en las que su uso mejore el proceso de aprendizaje.

En otro orden de ideas, el aprendizaje colaborativo está basado en los siguientes principios (Orr, 1998):

1. Trabajando juntos resulta en un mejor entendimiento a comparación de haber trabajado independientemente.
2. Las interacciones habladas y escritas contribuyen a una mejor comprensión.
3. Existe la oportunidad de ser consciente a través de experiencias del aula, de las relaciones entre interacciones sociales y de una mejor comprensión.
4. Algunos elementos de dicha comprensión son idiosincrásicos e impredecibles.
5. La participación es voluntaria.

Metodología

Esta investigación, es parte de un proyecto que explora la aplicación de las actividades diseñadas por Hitt y Kieran (2009), con el uso de la calculadora TI-Nsipre CX CAS como una herramienta didáctica para el aprendizaje de conceptos algebraicos, como son las ecuaciones que involucran radicales, para que los estudiantes aprendan a solucionarlas.

El trabajo colaborativo fue la metodología que se implementó en cada una de las sesiones de trabajo, porque se pretendía que el Aprendizaje Colaborativo fuera la base para el desarrollo de las capacidades de comunicación y colaboración de los estudiantes, ya que muchos de ellos al comenzar a resolver la fase de solución en equipo, tenían solo ideas intuitivas relacionadas con el problema (Núñez, Ceja, Guerrero, 2012).

Se realizaron dos experimentaciones: una piloto y otra formal. La primera, diseñada de tal forma que diera información acerca de la estructura didáctica de las actividades, las dificultades que tuvieron los estudiantes al trabajar con ellas y la metodología aplicada. La segunda, se llevó a cabo tomando en cuenta todas las observaciones realizadas de la experimentación piloto.

Como parte de la metodología se realizó una entrevista a los integrantes del equipo que realizó procedimientos interesantes para la investigación, para que fueran evidenciados de nueva cuenta y por medio de cuestionamientos explicaran cómo lo hicieron, para lo cual se elaboró un guion de preguntas.

La toma de datos para la investigación se realizó, de la evidencia escrita y de las videograbaciones hechas en las experimentaciones y la entrevista.

Experimentación

Para las experimentaciones se contó con el trabajo de 21 alumnos del primer módulo de la carrera de Ingeniería Química, con los cuales se formaron siete equipos de tres integrantes cada uno. Se reformuló parte de la redacción de las actividades de aprendizaje (Hitt y Kieran, 2009), para tenerlas acorde al contexto de los estudiantes. Las sesiones de trabajo fueron dos y tuvieron una duración de tres horas cada una de ellas. A cada equipo se le entregó una calculadora, la actividad rediseñada por el equipo de investigación y hojas en blanco, para que los participantes anotaran sus observaciones y dudas que surgieran durante el desarrollo de la actividad.

En la ***primera sesión*** se trabajó el manejo de la calculadora, así como de los principales comandos que se utilizarían para resolver la actividad, como: ENTER, FACTOR, EXPAND y SOLVE. En la ***segunda sesión*** se aplicó la actividad en donde se aborda la racionalización del denominador de una expresión.

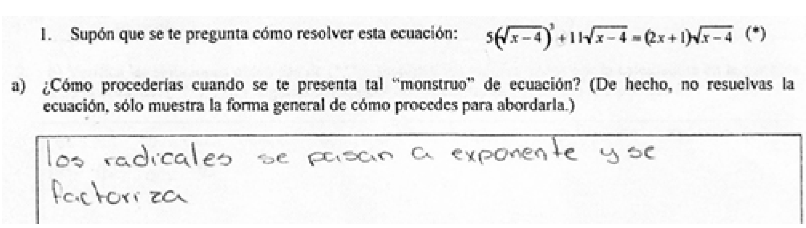
Por otro lado, a los integrantes de los equipos se les cambió el rol de trabajo: el que manipulaba la calculadora, el que leía y respondía la actividad (papel y lápiz), y el que coordinaba el trabajo.

Se instalaron en el salón de clases, dos cámaras para videograbar: una cámara fija para observar las interacciones que se daban entre los equipos, entre los alumnos y el investigador; y otra cámara móvil que podía hacer acercamientos, para ver cómo resolvían las actividades y lo que escribían en las hojas que se les proporcionaron.

Resultados

Uno de los objetivos que tiene la actividad de aprendizaje es: Comprender la necesidad de verificar las soluciones de las ecuaciones que involucran variables bajo el signo radical. Presentaremos algunos resultados que muestran los razonamientos de los estudiantes para concretar los objetivos:

1. Los alumnos al resolver la actividad, analizan la ecuación que tienen y expresan los radicales en exponentes fraccionarios, la factorizan y así encuentran sus raíces. Ellos fueron capaces de emplear los métodos aprendidos en una actividad anterior (solución de ecuaciones lineales y cuadráticas), para resolver ecuaciones que involucraban radicales.

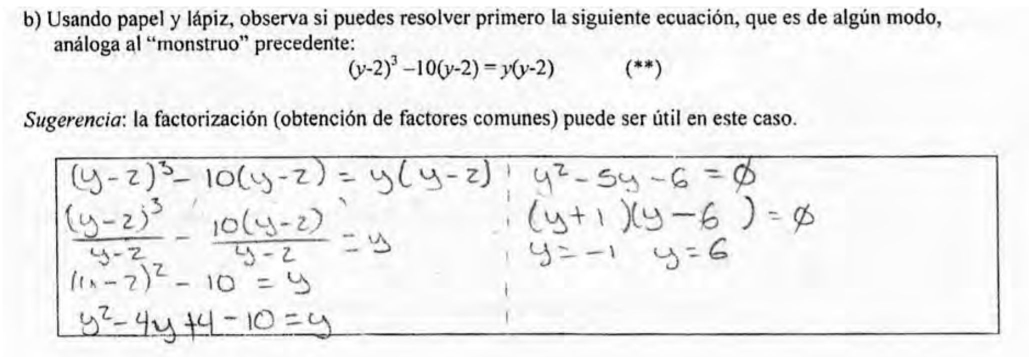

1. Supón que se te pregunta cómo resolver esta ecuación: $5(\sqrt{x-4})^3+11\sqrt{x-4}=(2x+1)\sqrt{x-4}$ (*)

a) ¿Cómo procederías cuando se te presenta tal "monstruo" de ecuación? (De hecho, no resuelvas la ecuación, sólo muestra la forma general de cómo procedes para abordarla.)

los radicales se pasan a exponente y se factoriza

Figura 1. Evidencia del uso de la factorización

2. En la actividad se involucra una ecuación que tiene factores de la forma $(x-a)^n$, en donde los alumnos tienen que resolverla con lápiz y papel para encontrar sus raíces. Observaron que la ecuación tiene un factor $x-a$ y que podían dividir la ecuación por ese factor, al hacer esto les quedó una ecuación más sencilla para factorizar y poder encontrar las raíces. Pero cuando hacen el procedimiento anterior en la calculadora, obtienen un valor de más, dándose cuenta que cuando dividieron la ecuación por el factor $x-a$ estaban eliminando uno de los valores. En lugar de resolver la ecuación inicial de grado n, estaban trabajando con una ecuación de grado $n-1$. Esto lo pudieron identificar, por el trabajo que habían realizado con lápiz y papel.



b) Usando papel y lápiz, observa si puedes resolver primero la siguiente ecuación, que es de algún modo, análoga al "monstruo" precedente:

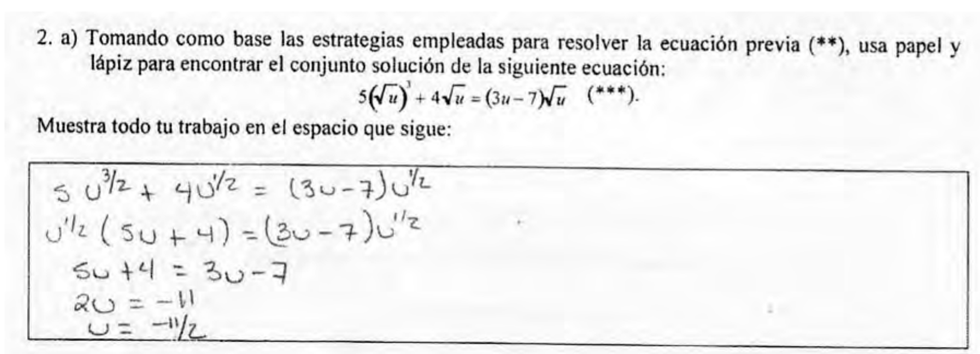
$$(y-2)^3 - 10(y-2) = y(y-2) \qquad (**)$$

Sugerencia: la factorización (obtención de factores comunes) puede ser útil en este caso.

$(y-2)^3 - 10(y-2) = y(y-2)$
$\frac{(y-2)^3}{y-2} - \frac{10(y-2)}{y-2} = y$
$(y-2)^2 - 10 = y$
$y^2-4y+4-10=y$
$y^2-5y-6=\phi$
$(y+1)(y-6)=\phi$
$y=-1 \quad y=6$

Figura 2. Evidencia de la eliminación de una raíz

3. Otro razonamiento que hicieron los estudiantes cuando trabajaron con raíces pares en una ecuación, fue que haciendo el mismo procedimiento de factorización obtienen un valor negativo, pero cuando lo sustituyen en la ecuación obtienen una solución de un número imaginario.



2. a) Tomando como base las estrategias empleadas para resolver la ecuación previa (**), usa papel y lápiz para encontrar el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$5\left(\sqrt{u}\right)^3 + 4\sqrt{u} = (3u-7)\sqrt{u} \qquad (***).$$

Muestra todo tu trabajo en el espacio que sigue:

$5u^{3/2} + 4u^{1/2} = (3u-7)u^{1/2}$
$u^{1/2}(5u+4) = (3u-7)u^{1/2}$
$5u+4 = 3u-7$
$2u = -11$
$u = -11/2$

Figura 3. Evidencia de una raíz imaginaria

Conclusiones

1. Los estudiantes al trabajar con esta actividad, aprendieron que pueden resolver una ecuación que involucra radicales con el mismo procedimiento con el que resuelven una ecuación sin radicales.
2. También pudieron constatar que cuando existe una ecuación que contiene radicales pares, se pueden obtener raíces reales o imaginarias.

3. Otra situación que les causó extrañeza pero que al final del trabajo aprendieron, fue cuando una ecuación se divide entre uno de sus factores, se elimina una de las raíces de la misma.
4. Los razonamientos que tienen los estudiantes en la solución de la actividad parten por lo general de la visualización, lo anterior por trabajar con lápiz y papel, y posteriormente con la calculadora. Además, de que manejan diferentes registros de representación y transitan de un registro a otro; lo cual, favorece que el estudiante conceptualice los tópicos algebraicos involucrados en la actividad (Duval, 1993, 1995).
5. Los estudiantes utilizan como estrategia de solución, el consenso de las discusiones entre los integrantes del equipo y las interrogantes que se hacen acerca de cómo resolver la actividad, de tal manera que el alumno crea un razonamiento propio para dar solución a las ecuaciones.
6. Aprendieron a trabajar en forma colaborativa (Brady, 2010; Calzadilla, 2001), con el apoyo de la metodología aplicada y la estructura didáctica de las actividades. Concretaron lo anteriormente citado, cuando intercambiaban los roles de trabajo (líder, manejo de calculadora y solución de la actividad) y cuando discutían los procedimientos y resultados que obtenían al desarrollar la actividad.
7. Los estudiantes al resolver las actividades hacen uso de diferentes estrategias de solución, que los llevan a razonar e interaccionar entre ellos para llegar al resultado mostrado por la calculadora, la cual es un medio para lograr el aprendizaje de los conceptos involucrados (resultado número 2).

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*. International journal of computers for mathematical learning* **7:** 245–274.

Brady, C. (2010). El aprendizaje colaborativo con tecnología. *Innovaciones Educativas.* Texas Instruments.

Calzadilla, M. (2001). Aprendizaje colaborativo y tecnologías de la información y comunicación. *EOI-Revista Iberoamericana de Educación*, 1-10.

Cortés, J., Miranda, R. y Carrillo, G. (2012). Uso de la Tecnología en educación matemática. Investigaciones y Propuestas 2012. *Modelación matemática con el uso de la calculadora TI-Nspire CAS, como una alternativa para el aprendizaje significativo de funciones* (241-254). Guadalajara: AMIUTEM, A.C.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensé. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive,* IREM de Strasbourg. (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN, México 1997).

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensé humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Peter Lang. Suisse.

Duval, R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre representation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.*6, 139-163.

Hiebert, J., Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with understanding. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Company.

Janvier, C. (1987). Representations and Understanding: The notion of Function as an example. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, p. 67-71.

Hitt, F., Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with task designed from a task-technique-theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14,121-152.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), pp. 229-240.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En Grows, D.A. (ED.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company. New York, pp. 390-419.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. En Lester, F.K. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.707-762). Reston, Virginia: NTCM e IAP.

Núñez, G. y Cortés, J. (2011). Uso de la Tecnología en educación matemática. Investigaciones y Propuestas 2011. *Desarrollo de Ambientes Tecnológicos Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas; Una experiencia con la Línea Recta* (51-56). Morelia: AMIUTEM, A.C.

Núñez, G., Ceja, J. y Guerrero, L. (2012). Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología. Resolución de problemas y Aprendizaje Colaborativo. *Aprendizaje Colaborativo como medio para favorecer el razonamiento geométrico de estudiantes de bachillerato* (41-57). Cd. Guzmán: Instituto Tecnológico.

Orr, M., (1998). *Opportunities and chances: lessons learned from a community youth services effort*. New York: Peter Lang.

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México [Incorporating technological learning environments into the school culture: An educational innovation project in mathematics and science in the public secondary schools of México]. *Revista Iberoamericana de Educación, 33*, 135-165.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

CÁLCULO APROXIMADO DEL VOLUMEN DE UNA SANDÍA Y UN RECIPIENTE CÓMO SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN EN EL ITCG CON APOYO DE TRACKER Y GEOGEBRA

Rosaura Ferreyra Olvera, Rafael Pantoja González

CUCEI, Universidad de Guadalajara, Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán, SEP

ferreyrarosaura@gmail.com, rpantoja3@hotmail.com

Para citar este artículo:

Ferreyra, R. y Pantoja, G., R. (2016). El uso de la regleta en la suma de los cálculo aproximado del volumen de una sandía y un recipiente cómo sólidos de revolución en el ITCG con apoyo de tracker y geogebra. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

CÁLCULO APROXIMADO DEL VOLUMEN DE UNA SANDÍA Y UN RECIPIENTE CÓMO SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN EN EL ITCG CON APOYO DE TRACKER Y GEOGEBRA

Rosaura Ferreyra Olvera, Rafael Pantoja González

CUCEI, Universidad de Guadalajara, Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán, SEP

ferreyrarosaura@gmail.com, rpantoja3@hotmail.com

Palabras clave: Integración, sólido de revolución, modelación, grupo colaborativo.

Resumen

En este artículo se presentan los resultados obtenidos en un taller realizado con alumnos de nivel superior en el Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán, Jalisco, en el cual se trabajó con actividades de aprendizaje, cuyo propósito es promover la enseñanza y aprendizaje del cálculo de volumen de sólidos de revolución a partir de situaciones problema de la vida diaria. Se implementó la metodología de trabajo colaborativo, se les brindó un curso-taller para el uso de GeoGebra, Tracker y video digital con la finalidad de que adquirieran habilidad y capacidad para manipular las tecnologías y el software requerido para el procesamiento del video digital de las situaciones problema seleccionadas. Obteniéndose como evidencia la actividad resuelta, hoja de trabajo y videograbaciones.

Introducción

Los conocimientos que se adquieren en el aula por lo general se quedan sólo en ejemplos en papel y lápiz, pocas veces son llevados a la práctica, por esto, la propuesta didáctica plantea que los alumnos relacionen las aplicaciones del cálculo con su entorno, específicamente del cálculo del volumen de sólidos de revolución obtenidos de objetos cotidianos, por ejemplo: una sandía, una manzana, un huevo, un foco, un lápiz, un florero, entre otros.

Se coincide con Flores, Valencia, Dávila y García (2008) quienes señalan que antes del cálculo, las matemáticas solo describían lo fijo y estático, con él se pudo describir el movimiento y lo dinámico; al establecer una comparación, podría decirse que antes del cálculo las matemáticas solo proporcionaban fotografías de la realidad, y después de él, películas. Se afirma, que un buen curso de cálculo cambia la percepción del estudiante, lo cual es uno de los propósitos de esta investigación, en la que se pretende emplear como marco teórico la modelación matemática, como metodología ACODESA y las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), como herramienta para propiciar el aprendizaje de los sólidos de revolución.

Como parte de la motivación para utilizar objetos de la vida cotidiana en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en Heck (2008) se plantea la pregunta: ¿Cuál es el volumen y el área de un huevo de gallina? Para dar respuesta a esta cuestión se utilizó la modelación con el álgebra, la geometría y técnicas de regresión, apoyadas en el software GeoGebra.

En la actualidad, los actores de la educación disponen de varias herramientas para enseñar y aprender, ya que pueden recurrir al software especializado de matemáticas, libre y comercial, a los programas multimedia o a los videos digitales explicativos y a las redes sociales como Skype o YouTube, por mencionar algunas de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) más comunes, mismas que se utilizarán en el taller para el cálculo de sólidos de revolución a partir de situaciones problema de la vida cotidiana. Por ejemplo en Cervantes (2012) se plantea una propuesta, en la que se señala el uso de los programas computacionales MathLab, Winplot y NX8, para el aprendizaje de los sólidos de revolución.

Es importante señalar que el empleo de situaciones problema cotidianas (Hitt y Cortés, 2009; Hitt y González, 2015) involucra contextos que suelen ser interesantes para los alumnos por ser familiares en el contexto de su vida diaria. En el caso del taller impartido a estudiantes de segundo semestre del Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán, se trataron las situaciones problema de calcular el volumen de una sandía y del recipiente mostrado en la figura 1.

Mediante un trabajo con TRACKER y posteriormente con el Geogebra los alumnos lograron calcular los volúmenes de los sólidos de revolución, que anteriormente se había calculado mediante el llenado del recipiente con una medida de un litro y la sandía mediante el principio de Arquímedes.

Figura 1. Fotos de la sandía y del recipiente

Marco teórico

En sus inicios, el desarrollo histórico del cálculo integral se relaciona con situaciones problema de su contexto, como lo son el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, prácticas ancestrales de la modelación matemática relacionada con aspectos cotidianos, que por alguna razón se ha olvidado incluir en las aulas o tratar en la matemática escolar.

Ya en civilizaciones antiguas como la egipcia, babilonia y griega, se calculaban longitudes, áreas y volúmenes, por ejemplo, Arquímedes (287-212 a.C.) hizo contribuciones significativas, entre ellas: el cálculo del área de un segmento de parábola, que es 4/3 del área de un triángulo con la misma base, vértice y 2/3 del área del paralelogramo circunscrito; utilizó el método de exhaución para encontrar una aproximación al área del círculo y longitud de la circunferencia y evidenciar la existencia de la constante π como elemento importante del círculo; determinó la relación existente entre volúmenes de la esfera, el cono y el cilindro; halló el área de una elipse, el volumen de cualquier segmento de un paraboloide de revolución y de un segmento de un hiperboloide de revolución.

Otra evidencia relacionada con el cálculo de áreas y volúmenes fue la aportación de Johannes–Kepler (1571-1630), en su trabajo sobre el movimiento planetario, encontró el área de sectores de una elipse y su método consistió en determinar las áreas como sumas de un número ilimitado de líneas. Kepler en su obra Nueva Geometría Sólida de los Barriles de Vino (Cardill, 2009) describe la forma de cómo calcular el volumen para más de noventa barriles, para lo que consideró al sólido compuesto de infinitos cuerpos infinitesimales de volúmenes conocidos, método muy parecido a la forma de calcular un sólido de revolución actual.

Cavalieri (1598-1647) alumno de Galileo comparó las áreas (o volúmenes) de los “indivisibles” que forman una figura, con los que forman otra y dedujo que, si aquellas se hallaban en una determinada relación, también lo están en la misma relación las figuras correspondientes. Cavalieri descompuso las figuras en indivisibles de magnitud inferior, así, para calcular volúmenes, cortaba los cuerpos y medía las áreas de las secciones. Esto suponía una ruptura con los procedimientos previos de los griegos y de Kepler y fue expuesto en 1635 en su libro Geometría de los indivisibles (Suarez, 2008). Cabe mencionar que los logros obtenidos por Arquímedes, Kepler y Cavalieri son hechos que fundamentan esta investigación y ejemplos ancestrales del empleo de la modelación matemática.

Tal como lo exponen Biembengut y Hein (2004), la modelación matemática es defendida en diversos países como método de enseñanza de las matemáticas en todos los niveles escolares, ya que permite al alumno no solamente aprender las matemáticas de una forma alternativa y relacionarla con las otras áreas del conocimiento, sino también mejorar la capacidad de leer, interpretar, formular y solucionar situaciones problema, motivo por el que en las últimas décadas ha cobrado mayor relevancia y se ha incorporado en diferentes currículos escolares en los diferentes niveles educativos.

La modelación matemática es el proceso de encontrar una situación indeterminada, problematizar, y con la investigación, el razonamiento y la estructura matemática transformar dicha situación. El modelado produce un resultado - un modelo - que es una descripción o una representación de la situación, elaborado a partir de las disciplinas matemáticas, en relación con la experiencia de la persona, en sí esto ha ido cambiado a través del proceso de modelación (Blum, Galbraith, Henn, y Niss, 2007). La elaboración de un modelo matemático requiere, por parte del modelador, conocimientos tanto matemáticos como no matemáticos, además de una buena dosis de intuición y creatividad para interpretar el contexto y discernir cuáles son las variables involucradas (Biembengut y Hein, 2004, pp. 12-13).

Por su parte Martínez, Arrieta y Canul (2005) consideran a su vez, que la modelación permite construir un contexto donde los estudiantes y profesor de forma interactiva en el aula construyan argumentos, herramientas y significados a partir de la modelación de un fenómeno.

Con el uso de la modelación matemática como sustento teórico, se pretende obtener un modelo matemático por cada situación de la vida cotidiana asignadas a cada equipo colaborativo, con la finalidad de discutir y exponer ideas, perspectivas, conocimientos propios y que el alumno se interese por el aprendizaje de los sólidos de revolución, mediante su relación con objetos de su contexto (Pantoja, Ulloa, Nesterova, 2013; Pantoja, Guerrero, Ulloa, Nesterova, 2016*)*.

El aprendizaje en ambientes colaborativos (Lucero, 2003), busca propiciar espacios en los cuales se dé el desarrollo de habilidades individuales y grupales, a partir de la discusión entre los estudiantes al momento de explorar nuevos conceptos, contexto en el que cada quien es responsable de su propio aprendizaje. Se busca que estos ambientes sean ricos en posibilidades y más que organizadores de la información, propicien el crecimiento del grupo.

Driscoll y Vergara (1997, p. 91) mencionan que el verdadero aprendizaje colaborativo, requiere que los alumnos no sólo trabajen juntos, sino que cooperen en el logro de una meta que no se puede alcanzar en forma individual, y para ello se programará en la fase experimental trabajo colaborativo, desde seleccionar la situación problema, diseñar el set de grabación, editar el video, análisis de la información proporcionada por Tracker y propiciar la reflexión grupal.

Metodología

El taller se realizó ante un grupo de Ingeniería del Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán, su organización fue de la siguiente manera: presentación e introducción de la influencia que tienen las matemáticas en nuestro entorno, específicamente en el tema de sólidos de revolución, por ejemplo, se les cuestionó sobre cómo calcular el volumen de un extinguidor con el uso de las matemáticas, esto lleva a modelar matemáticamente la situación problema a resolver (volumen del extinguidor) y con el uso del cálculo integral se encuentra dicho volumen.

Para el cálculo del volumen del extinguidor, se hizo un dibujo de acuerdo a la forma del extinguidor, se mostró que dicho dibujo se puede relacionar con alguna figura geométrica, la cual tiene las medidas reales del objeto, para esto se toma una regla y se encuentran las medidas del extinguidor para así obtener la función que represente el sólido y mediante la fórmula del volumen para sólidos de revolución, se encuentra una aproximación a su volumen.

Así como este ejemplo se les explicó a los estudiantes que existen muchas otras situaciones en la vida diaria, en los cuales vemos las matemáticas, por mencionar algunos: girar una llanta, ciclista, corredor, llenado de recipientes, tiro parabólico etc.

La primera sesión se centró sobre la práctica del llenado de recipientes, se implementó un ambiente de trabajo colaborativo en equipos de dos integrantes, que fueron seleccionados por los mismos alumnos, es decir, cada estudiante decidió con quien trabajar, enseguida se les entregaron varios videos previamente grabados (Figura 2), sobre el llenado de diferentes recipientes y un manual del software Tracker en formato Word.

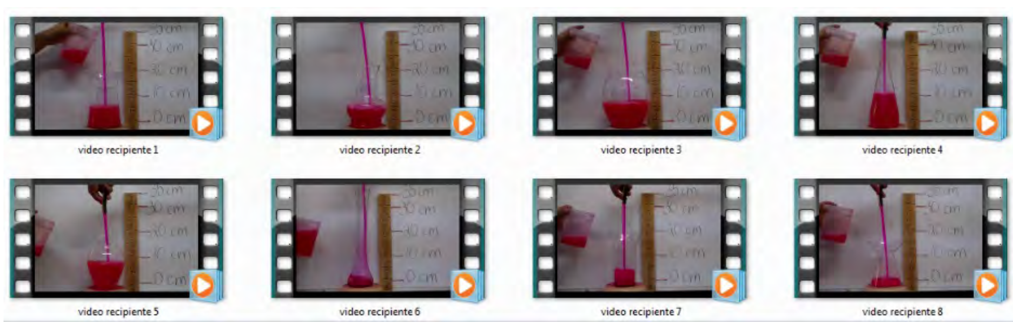


Figura 2. Videos grabados del llenado de recipientes

Antes de comenzar la actividad se les dio una breve explicación acerca del software Tracker, funcionamiento, uso, herramientas, comandos, etc.

Al abrir Tracker aparece la siguiente pantalla (Figura 3):

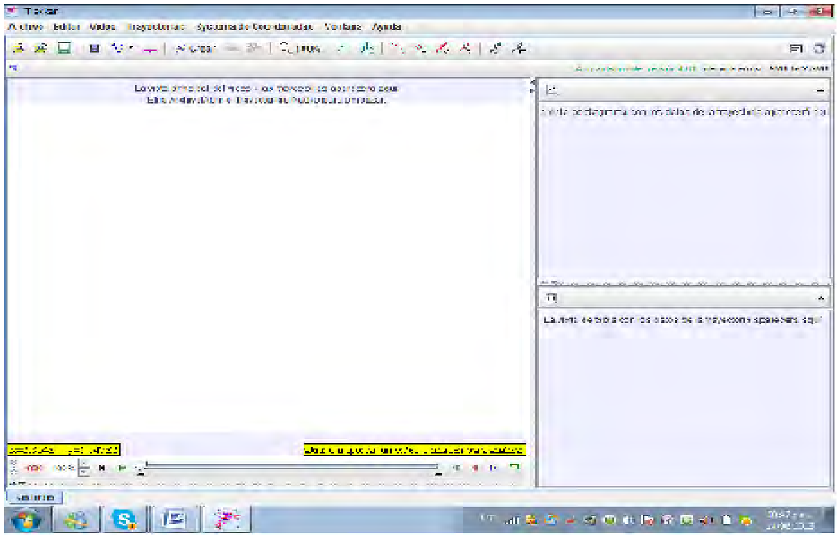


Figura 3. Pantalla principal de Tracker

Se les explicó a los alumnos como abrir un video en Tracker para comenzar a analizarlo. Del menú principal seleccionar la opción: ***Video➔Importar*** y seleccionar el video con el que se desea trabajar. (Figura 4). Se les dijo a los estudiantes que Tracker trabaja en un ambiente Windows, es decir, pueden guardar, abrir, copiar, imprimir un archivo, entre otras funciones.

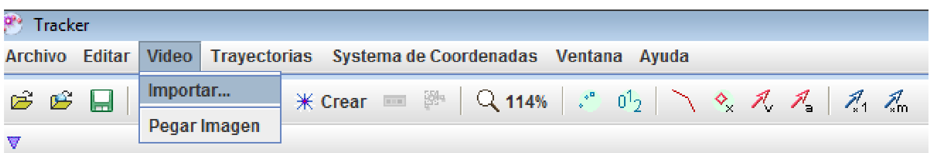


Figura 4. Menú para seleccionar el video

Posteriormente se obtiene la siguiente pantalla de la figura 5. Aquí cada equipo de trabajo seleccionó el video de su interés.

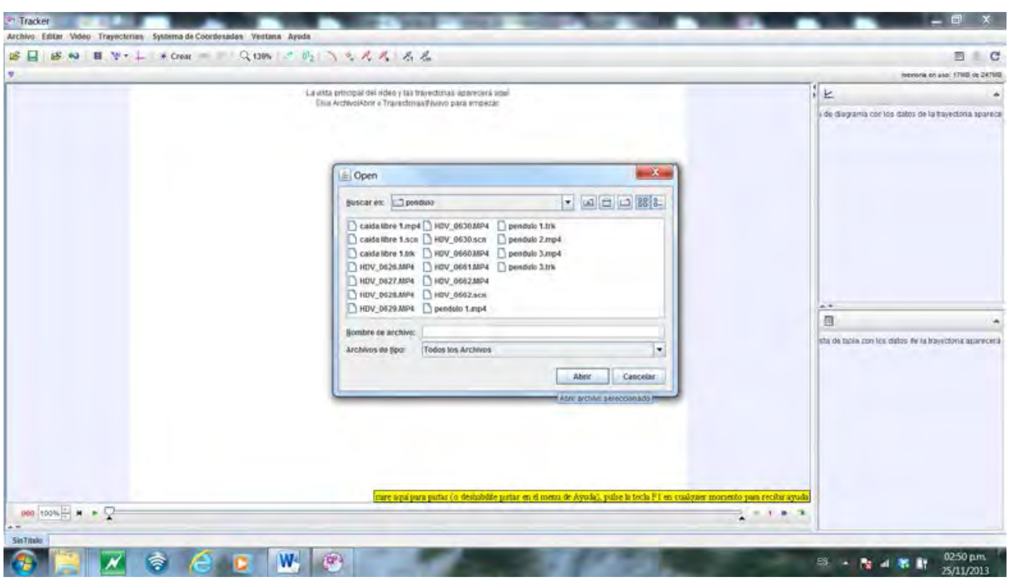


Figura 5. Conjunto de video que pueden ser utilizados con el Tracker.

Una vez que el programa Tracker cargó el video, se les mencionó a los alumnos que es importante que en el video se marque alguna referencia de medida con parámetros reales, por ejemplo: un metro, una ventana, una regla etc. En el caso de los videos sobre el llenado de recipientes cada uno tenía una medida de referencia, por ejemplo, en la figura 6 hay una tira de papel pegada detrás del recipiente.

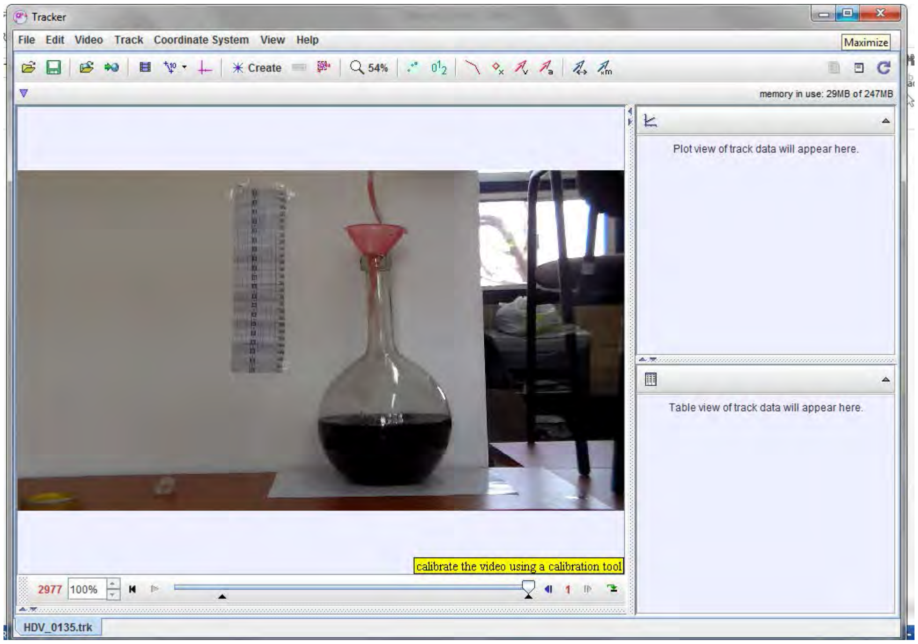


Figura 6. Elementos de Tracker: Unidad de medida, ejes coordenados y video.

Para la edición del video, en la parte inferior aparece la barra de la figura 7, en la cual los alumnos seleccionaron los cuadros de inicio y final del video, que les interesaba analizar de acuerdo al video que ellos seleccionaron.

Figura 7. Segmento de video para examinar con el Tracker

También se les dijo a los alumnos que otra manera de recortar el video, es dar clic derecho en la imagen y seleccionar la opción ***ajuste del corte*** (Figura 8). Ahí los alumnos escriben el número del cuadro inicial, tamaño de paso y cuadro final para analizar de acuerdo a su video.

Figura 8. Opción del corte

Después de hacer el ajuste, se sitúan los ejes sobre el video con el botón, , como se muestra en la figura 9. Para el caso de los recipientes se les informó que el origen de los ejes coordenados era en el fondo del recipiente de tal manera que el eje y, cortara al objeto en dos partes iguales.

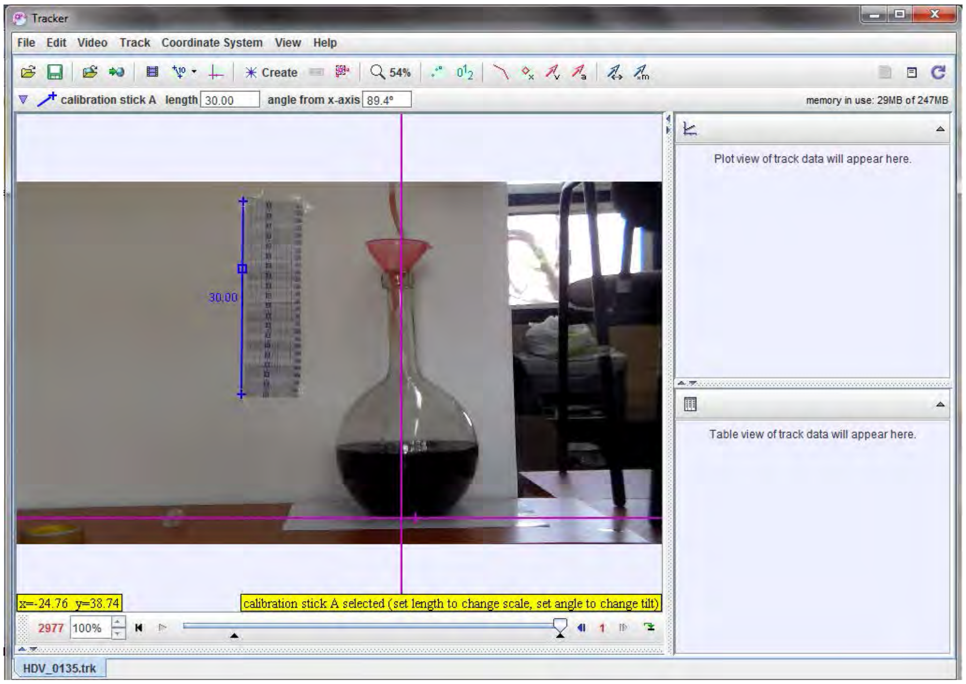
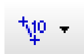


Figura 9. Llenado de recipientes

Después de situados los ejes coordenados, se posiciona la ***vara de calibración*** al dar clic en el icono , luego seleccionar ***Nuevo➔Vara de Calibración***. (Ver figura 10)

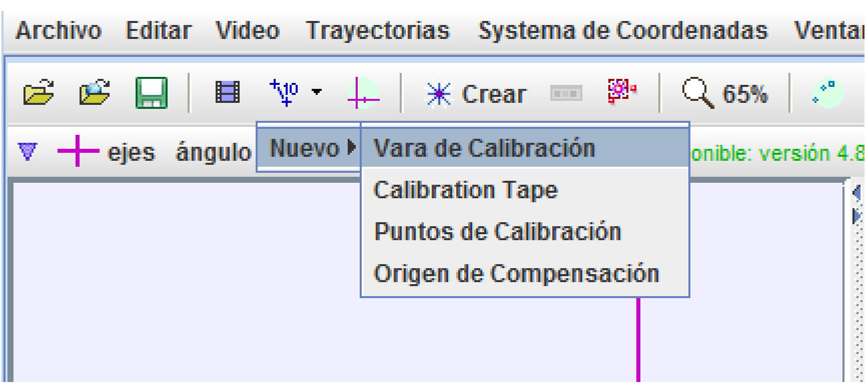


Figura 10. Selección de la vara de calibración

Se les explicó a los alumnos que cuando apareciera una línea azul, esta se coloca en la referencia que se tiene en el video como relación entre la medida real y los pixeles que *Tracker* debe tomar en cuenta (la vara se puede alargar tanto como se quiera al arrastrar el mouse. (Figura 9).

Como último paso se selecciona la trayectoria que ayuda a tomar medidas conforme el recipiente se llena, para esto se selecciona ***Trayectoria➔Nuevo➔Masa Puntual.***

Una vez creada la masa puntual, enseguida se marcará la trayectoria del objeto (para este ejemplo es el llenado del recipiente), se sitúa el mouse sobre el borde izquierdo del recipiente (en el cuadro inicial) y oprimimos la tecla ***shift + clic derecho*** y se marcará un rombo en color rojo, el programa Tracker mandará al siguiente cuadro y repetimos ***shift + clic derecho*** y se marcará otro rombo en color rojo y así hasta que se marquen todos los cuadros, conforme se marquen los cuadros en la pantalla del computador, la gráfica se modificará y aparecerán los datos en la tabla, como se muestra en la figura 11.

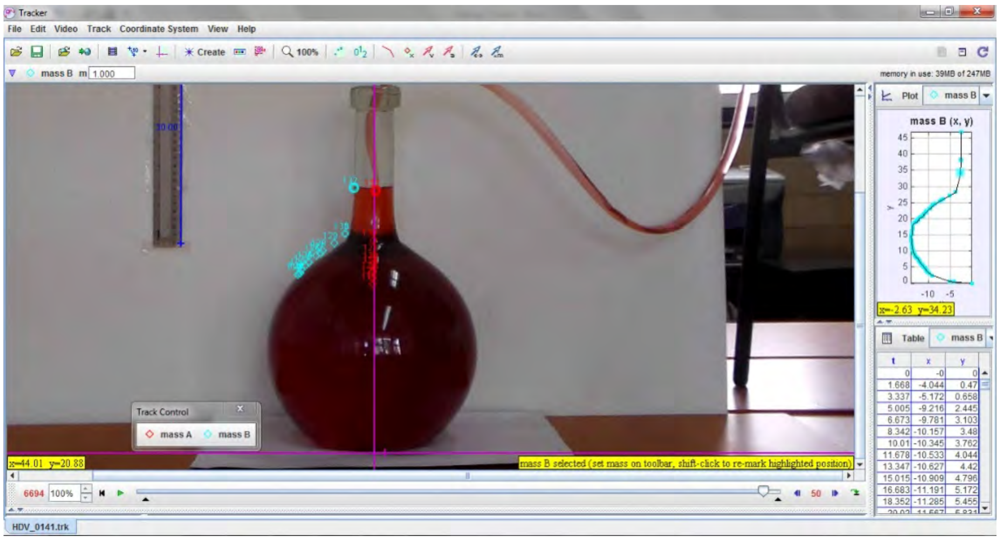


Figura 11. Llenado de recipientes

Del lado derecho de la pantalla (Figura 11), *Tracker* presenta las distintas gráficas del análisis de la situación problema, por ejemplo, el tiempo de llenado con respecto de la posición, posición en x con respecto de la posición en y, etc.

Sin embargo, aquí los alumnos tuvieron algunas dudas en las que fueron asesorados, como las siguientes: cómo cortar el video para analizar sólo la parte que les interesaba, como usar la herramienta ***vara de calibración***, cómo elegir el número de paso, cómo crear la masa puntual y cómo comenzar a marcar los puntos para iniciar el registro en *Tracker*.

También se presentaron otros contratiempos, como por ejemplo algunas máquinas eran muy lentas, no funcionaba *Tracker* y algunas máquinas se bloquearon mientras trabajaban (Figura 12).

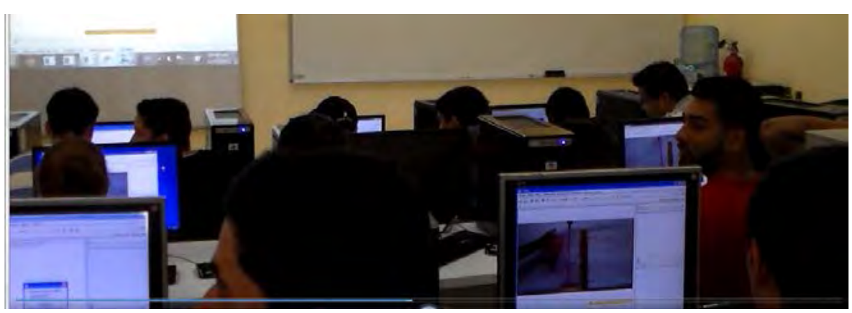


Figura 12. Manipulación del video con Tracker

Una vez que se obtuvieron las gráficas, se les mostró a los alumnos cómo realizar ajustes con *Tracker*, para así obtener el volumen del sólido de revolución de acuerdo al recipiente analizado. Al final del primer día de taller se les dejo como tarea a los alumnos, que grabaran un video sobre el llenado de algún recipiente, lo analizaran con *Tracker* y al día siguiente se presentarían los resultados obtenidos.

Al finalizar del taller, se diseñaron las actividades para el siguiente día, para lo cual se decidió iniciar con la presentación de los resultados obtenidos de la tarea, resolver dudas, dar un breve repaso acerca de la manipulación del software *Tracker*, hacer la presentación del uso de GeoGebra y como última actividad, encontrar el volumen de una sandía, por lo que se hizo una hoja de trabajo de acuerdo a dicha actividad, además de una encuesta para que cada alumno individualmente diera su opinión sobre el desarrollo del taller.

Antes de entregar la actividad de la sandía a los alumnos, en actividad previa se encontró el peso de la sandía con una báscula para hacer una aproximación analítica de su volumen, el cual dio como resultado 7.6 kg, también se utilizó el principio de Arquímedes al colocar agua en un bote (Figuras 13 y 14) de 21 litros y al sumergir la sandía en el agua dio como resultado alrededor de 8 litros agua, equivalentes a 8 kg.

Figura 13. Uso del Principio de Arquímedes

Figura 14. Peso de la sandía

Al inicio del segundo día del taller se mostraron algunos de los videos realizados por los alumnos, a los cuales se les hicieron las siguientes observaciones: había mucho movimiento en el video, el líquido entrante al recipiente no era constante, no tenían medida de referencia, el set de grabación no era el adecuado, etc.

Enseguida, se hizo un repaso de la manipulación de *Tracker* y se mostró como exportar los datos obtenidos del análisis del video de Tracker a GeoGebra, esto se hace porque algunas veces el programa *Tracker* no logra un ajuste adecuado para determinar el volumen del sólido de revolución, así que los datos obtenidos son exportados a GeoGebra y se encuentra el ajuste más adecuado.

Luego se les planteó la situación problema: Encontrar el volumen de una sandía, en la cual se les entregó una hoja de trabajo para dicha actividad, el video previamente grabado de la situación problema a resolver y además se utilizaron los softwares Tracker y GeoGebra.

Las interacciones y discusiones entre los asistentes y los investigadores, fueron grabadas para posteriormente ser analizadas, además de las hojas de trabajo que se les proporcionaron y la encuesta realizada al final del taller.

Experimentación

En el desarrollo de la labor docente del área de matemáticas, el profesor se da cuenta de que un porcentaje muy elevado de los alumnos presentan dificultades en su rendimiento académico, situación que se debe a diversas causas, entre ellas: el empleo de estrategias instruccionales inadecuadas, la organización de los contenidos no es la correcta, el docente no logra la atención del alumno, faltan actividades interesantes que permitan el intercambio de ideas entre los estudiantes, no les gusta trabajar en equipo y valores como la honestidad, la motivación, la puntualidad y el respeto se promueven poco en el aula.

Por este motivo, este trabajo utiliza las ventajas que ofrece el software GeoGebra, los videos explicativos y *Tracker*, para promover las prácticas de modelación de situaciones problema de la vida cotidiana, con el propósito de que el alumno aprenda a calcular el volumen de un sólido de revolución, además de que relacione la matemática escolar con su contexto.

Las actividades implementadas por los alumnos fueron diseñadas para llevarlas a cabo en equipos colaborativos y con el uso del software GeoGebra y Tracker se validaron los resultados obtenidos de manera analítica.

Resultados

Los estudiantes realizaron el análisis del video con Tracker, hicieron los ajustes adecuados y encontraron el volumen de la sandía, algunos resultados fueron los siguientes:

Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
8.168 litros	6.985 litros	7.587 litros	5.110 litros

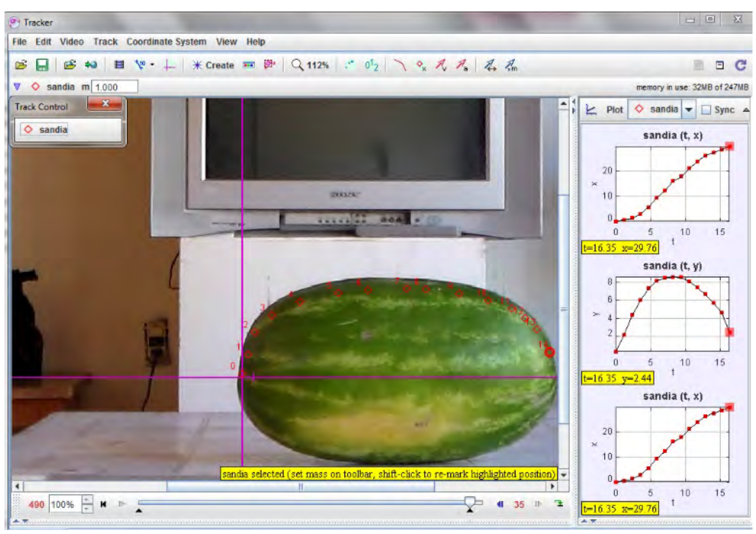


Figura 15. Análisis realizado por los alumnos del video de la sandía con Tracker.

Otra manera de encontrar el volumen de la sandía es al relacionarla geométricamente con una elipse, por lo que algunas de las alumnas tomaron las medidas de largo y ancho (Figura 16), las sustituyeron en la ecuación de una elipse y encontraron la aproximación al volumen de la sandía. Sin embargo, es importante señalar que algunos alumnos no le llamaron elipse sino ovalo.

Figura 16. Cálculo de las medidas de una sandía.

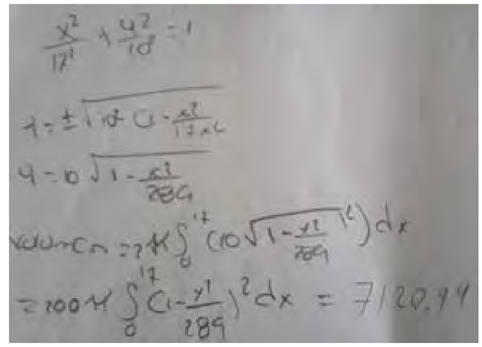


Figura 17. Volumen de la sandía de manera analítica, realizado por un alumno.

Conclusiones

Los alumnos se enfrentaron a diversos contratiempos, como las siguientes: las computadoras eran lentas, los programas de Tracker y GeoGebra no funcionaban bien, etc., sin embargo los resultados obtenidos durante el taller fueron buenos, el uso de situaciones de la vida cotidiana fortalecieron su aprendizaje del concepto de sólidos de revolución, les interesaron los programas computacionales *Tracker* y GeoGebra, uno es la interfaz de la vida cotidiana a la computadora y el otro ayuda a manejar los datos más adecuadamente.

Los alumnos estuvieron muy motivados, porque vieron las relaciones que hay entre problemas cotidianos y la matemática escolar, además de que este tipo de trabajo no se realiza así que es aquí donde intervienen las competencias genéricas, hay que enseñarse a trabajar en equipo, lo cual les gustó mucho a los estudiantes.

Estos son algunos de los puntos de vista que ellos mismos expresaron en la encuesta que se les aplicó el segundo día de actividades.

Referencias bibliográfícas

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafios para enseñar matemática. *Educación Matemática Journals Collection, 16*(2), 105-125. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516206

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W. & Niss, M. (2007). *Modelling and aplications in Mathematics Education.* New York: Springer.

Cardill, R. (2009). *Matemáticas Visuales*. Obtenido de http://www.matematicasvisuales.com/html/historia/kepler/doliometria.html

Cervantes, A. F. (2012). Enseñanza de Sólidos de Revolución a Través de Entornos Computacionales. *REVISTA SIMIYÁ ULSA CHIHUAHUA(5)*, 14-19.

Heck, A. (2008). Mathematical Brooding over an egg. Recuperado el 5 de septiembre del 2014 de http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume8/Heck/Measurements.html.

Hitt, F., y Cortés, J. C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital matemática, 10*(1), 2-30.

Hitt, F., y González, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics,88(2)*, 201-219.

Lucero, M. (2003). Entre el trabajo colaborativo y el aprendizaje colaborativo. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1-15.

Martínez, E., Arrieta, J., y Canul, A. (2005). Laboratorio virtual de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*(18), 785-790.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016*). Modeling in problem situations of daily life. Journal of Education and Human Development,* Vol. 5, No. 1, pp. 62-76. IS**SN**: 2334-2978 (Electronic Version). DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. Published by American Research Institute. Recuperado el 23 de Mayo de 2016 de http://jehdnet.com/.

Pantoja, R., Ulloa, R., Nesterova, E. (2013). La modelación Matemática en situaciones cotidianas con los software AVIMECA y MATHCAD. Revista Virtual *Góndola*, revista de Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias. 8(1), pp. 8-22. ISSN 2145-4981. Recuperado de http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/GDLA/article/view/5020.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

LA PDI COMO APOYO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Wendolyn Elizabeth Aguilar Salinas, Ruth Elba Rivera Castellón, Maximiliano de las Fuentes Lara, Ana Dolores Martínez Molina

Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California, México.

aguilar.wendolyn@uabc.edu.mx, rrivera@uabc.edu.mx, maximilianofuentes@uabc.edu.mx, ana.dolores.martinez.molina@uabc.edu.mx

Para citar este artículo:

Aguilar, W. E., Rivera, R. E., De las Fuentes, M. y Martínez, A. D. (2016). La PDI como apoyo en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

LA PDI COMO APOYO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Wendolyn Elizabeth Aguilar Salinas, Ruth Elba Rivera Castellón, Maximiliano de las Fuentes Lara, Ana Dolores Martínez Molina

Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California, México.

aguilar.wendolyn@uabc.edu.mx, rrivera@uabc.edu.mx, maximilianofuentes@uabc.edu.mx, ana.dolores.martinez.molina@uabc.edu.mx

Palabras clave: Enseñanza, Matemáticas, PDI.

Resumen

Esta investigación se enfoca en el punto de vista de los docentes de una escuela de educación superior sobre el uso de la pizarra digital interactiva (PDI) como herramienta instruccional en el salón de clases. Para ello se elaboró un instrumento el cual fue aplicado al 100% de los docentes del área de matemáticas que utilizan la PDI para el desarrollo de sus clases. Dicho instrumento fue utilizado para conocer su aprovechamiento en la preparación de clases, funcionalidades, modelos de aplicación didáctica, ventajas obtenidas, aprovechamiento de los alumnos, problemáticas y preferencias de uso que le dan a la PDI. Los resultados mostraron que la mayoría de los docentes que utilizan la PDI como proyector, dejando por un lado sus grandes potencialidades y que la resistencia del docente a su uso, es simplemente por la falta de capacitación y conocimiento limitado sobre esta tecnología, por lo que se recomienda que los docentes que cuenten con la PDI, se sometan a cursos de capacitación para que sean conscientes de cómo optimizar su uso.

Introducción

La ampliación de recursos dentro del aula, es primordial para mejorar la motivación del alumnado y por supuesto para la resolución de problemas de aprendizaje. Por ello, se requiere que los docentes se actualicen constantemente y adquieran permanentemente conocimientos sobre la aplicación de las nuevas tecnologías (Noda, 2009). Ante la gran cantidad de adelantos tecnológicos, metodológicos y de innovación pedagógica, la Pizarra Digital Interactiva (PDI) se ha convertido en una herramienta útil que permite aprovechar al máximo su eficacia didáctica (Ortiz, M., 2012), y que al trabajar con softwares especializados muestran una gran variedad de funcionalidades (Tataroğlu y Erduran, 2010).

La pizarra interactiva o PDI, posee un número de aplicaciones integradas y de funciones diseñadas para mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje en el aula. Por ejemplo, permite al profesor realizar videoclips y animaciones para mejorar la comprensión de los estudiantes de conceptos, incorporan recursos basados en web, demuestran una pieza de software, mostrar los proyectos de los alumnos durante la presentación de clase, editar fuentes textuales, supervisar ejercicios de caligrafía y guardar notas escritas en la pantalla para uso futuro (Bakadam y Asiri, 2012).

Se han realizado gran cantidad de estudios sobre el uso de las TIC (Kennewell y Beauchamp, 2007; Lewin, Somekh y Steadman, 2008; Wood, Ashfield, 2008), y de aquellos relacionados con la PDI, en los cuales se indica que la tecnología PDI tiene el potencial de apoyar la enseñanza y el aprendizaje (Kennewell y Beauchamp, 2007; Smith y cols, 2005; Wall, Higgins y Smith, 2005), y que en el caso de las matemáticas, es importante reflexionar sobre aquellos factores que afectan un buen desarrollo de su proceso de enseñanza-aprendizaje (Ruíz, 2008).

Sus beneficios académicos y sociales son muchos, Blue y Tirotta (2011) informaron que la pizarra crea una clase interactiva y motiva a los estudiantes a seguir participando en la misma, también ayuda a aumentar el nivel motivacional de los alumnos, particularmente aquellos con problemas de aprendizaje. Además, permite a los estudiantes a aprender de maneras diferentes de sus pares, ayuda a los alumnos más sensibles al estilo de aprendizaje a aprender más eficazmente (Bell, 2002).

En el área matemática, Thompson y Flecknoe (2003) realizaron un estudio que evaluó la motivación del estudiante utilizando métodos de observación en el aula, centrándose en lecciones que utilizan software de matemáticas junto con la PDI. Los observadores informaron que los estudiantes estaban muy atentos en clases asistida con la PDI y que las interrupciones de los alumnos en las clases fueron menos frecuentes. Las afirmaciones sobre los efectos en la mejora de la motivación de la PDI no carecen de fundamentos, pero parecen ser algo exageradas, se necesita una mayor investigación para determinar cómo la PDI y su uso se asocia con el rendimiento académico en esta área (Torff y Tirotta, 2010).

Marco teórico

La PDI es una pantalla interactiva sensible al tacto, que normalmente está montada sobre la pared, que simultáneamente está conectada a una computadora y a un proyector digital. Cualquier software o archivo que este disponibles en el equipo, pueden accederse a través de la pantalla con el simple hecho de tocar sobre ella el documento o archivo. El proyector muestra lo contenido en la computadora sobre la superficie de la pantalla, permitiendo a profesores y alumnos trabajar el contenido de la escritura, dibujo, movimiento de objetos, entre otras aplicaciones (Coyle, Yañez y Vérdul, 2010).

La PDI ha sido considerada como una tecnología útil que mejora el aprendizaje y la motivación de los estudiantes, así como la técnica docente (Slay, Siebörger y Hodgkinson-Williams, 2008; Wall, Higgins y Smith, 2005). La mayoría de los países incluyendo España, Italia, México, Holanda, Nueva Zelanda, Turquía, el Reino Unido y los Estados Unidos han desarrollado proyectos de gran escala y asignan grandes cantidades de dinero para equipar instituciones educativas para que utilicen esta tecnología (BECTA, 2004; Greenberg, 2009; Holmes, 2009; Lee, 2010; Smith, Higgins, Wall y Miller, 2005; Türel, 2010). La tabla 1 muestra los porcentajes asociados a la introducción de la PDI en las aulas de clase (Türel, 2011).

Tabla 1. *Porcentajes de introducción de las PDI.*

País	Porcentaje
Reino Unido	73%
Dinamarca	50%
Países Bajos	47%

Australia	45%
Estados Unidos	35%

Además, Lee (2010) prevé que el número de la PDI habrá aumentado con nuevos proyectos, particularmente, en Europa y Asia Oriental durante los próximos tres años. Italia y Turquía han embarcado recientemente nuevos proyectos, para equipar a primaria y secundaria con las PDI (Türel, 2010). Además, los países en desarrollo como Sudáfrica (Slay et al., 2008) han iniciado proyectos piloto para difundir rápidamente el uso de la PDI en contextos escolares.

A pesar del enorme interés educativo que se le ha otorgado a la PDI, los estudios publicados sobre está son limitados. En este momento, la investigación sobre pizarras interactivas puede contribuir realmente a la enseñanza y a los procesos de aprendizaje, los cuales se han centrado en su impacto en el campo de la enseñanza y aprendizaje de la segunda lengua (Coyle, Yañez y Vérdul, 2010).

En los últimos años se han documentado los beneficios académicos y sociales de usar la PDI en el aula (Tertemiz, Sahin y Can, 2015, Bakadam y Asiri, 2012, Türel, 2011, Taylor, Harlow y Forret, 2010), cuyos resultados registrados hasta ahora, han puesto de relieve áreas tales como aumento de los niveles de motivación, mejor atención, un mayor compromiso con el aprendizaje, ya que crea una clase interactiva y motiva a los estudiantes a seguir participando, especialmente a aquellos con discapacidades de aprendizaje, permitiendo a los estudiantes a aprender de maneras diferentes junto con sus compañeros.

Metodología

El desarrollo de esta investigación, fue llevado a cabo en la facultad de ingeniería de una escuela de educación superior en la ciudad de Mexicali, Baja California, México, por medio de un instrumento que recababa información correspondiente a la uso de los PDI en la preparación de clases, funcionalidades, modelos de aplicación didáctica, ventajas obtenidas, aprovechamiento de los alumnos, problemáticas, preferencias de uso, entre otras, sobre el 100% de los docentes que utilizan el PDI para la enseñanza de las matemáticas. En la figura 1, se muestran los porcentajes asociados a cada una de las materias del área de las matemáticas en las cuales se utiliza la PDI como recurso docente.

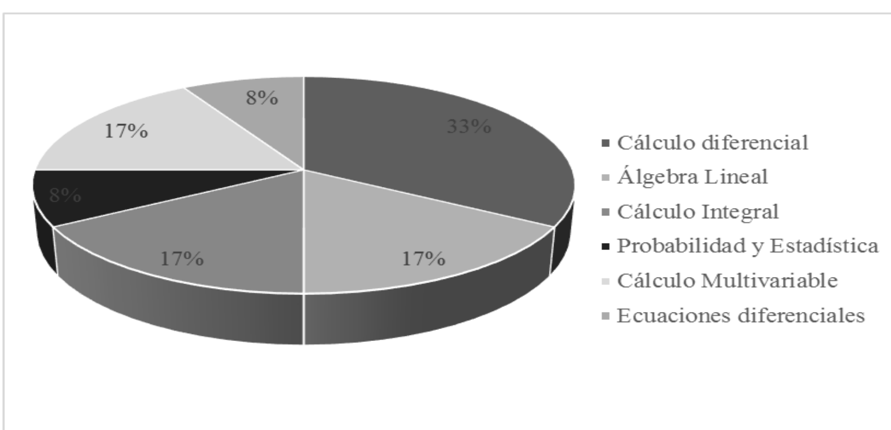


Figura 1. Porcentaje asociados a las materias del área de matemáticas en las cuales se utiliza la PDI.

El centrarnos en el estudio de la PDI en la enseñanza de las matemáticas, no sólo es porque las matemáticas es un tema de considerable importancia en las escuelas modernas, sino que también, es un tema en el que tecnologías educativas son frecuentemente empleadas, en parte debido a la naturaleza técnica de la materia y en parte porque se ha comercializado una gran cantidad de software para la instrucción de las matemáticas (Torff y Tirotta, 2010).

Exposición de la propuesta

Apoyar a los docentes a estudiar los efectos de los PDI para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, haciendo un seguimiento de los usos que los profesores hagan del PDI con sus alumnos en clase, con la intención de identificar las prácticas docentes más eficaces e innovadoras.

Resultados

Al analizar las respuestas al instrumento, se encontró que las herramientas más utilizadas de la PDI a nivel personal y docente son la navegación por internet y el procesador de textos en un 88%, seguida por el correo electrónico y el editor gráfico.

En cuanto a las herramientas que el docente pretende que utilicen sus alumnos el 24% es el uso de la PDI (figura 2).

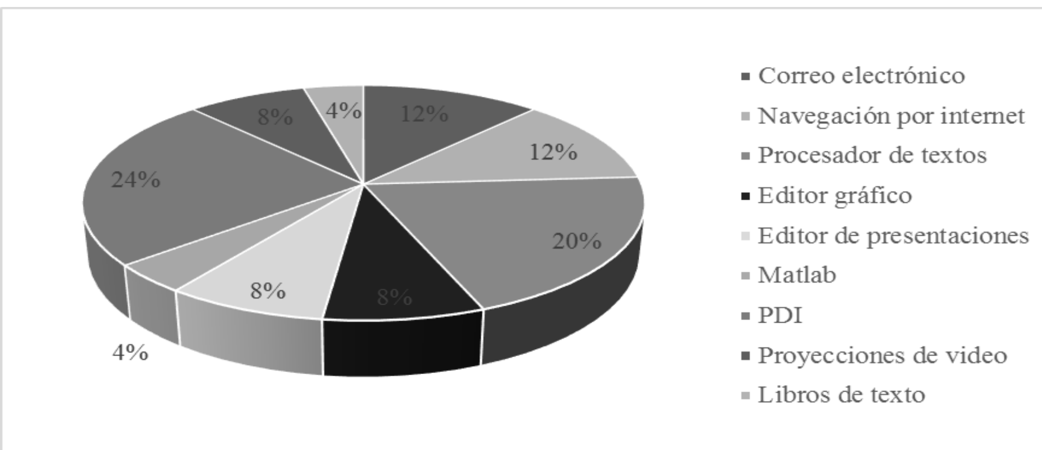


Figura 2. Utilización de la PDI por parte del alumnado.

Dentro de las funcionalidades que el docente ha utilizado en sus clases, encontramos: escribir, subrayar con el lápiz en la pantalla interactiva, proyección de información (texto, imagen, sonido) de la computadora o la navegación por internet, almacenamiento de las pantallas para utilizarlas en otra ocasión y uso del software Smart. La figura 3, muestra la preparación del docente sobre las nuevas herramientas tecnológicas, cuya ponderación máxima fue de 8.5 en un intervalo de [0, 10].

En cuanto a la apreciación de los alumnos con respecto al uso de la PDI, el 87% comentaron que es de mayor eficiencia, debido a que permite a los alumnos interactuar y participar más en clase, se ahorra tiempo y con las estrategias didácticas adecuadas se puede lograr un aprendizaje significativo, se ven más claramente los temas gráficos y la visualización de simulaciones. De forma contraria, el 13% encontraron algunos aspectos negativos como: la conexión a internet, la luminosidad del pizarrón y problemas con el uso del equipo por falta de capacitación docente.

Con respecto al aprendizaje de los alumnos con la PDI, el 100% de los docentes consideran que los alumnos han aprendido más y mejor. Esto debido a que el apoyo visual les ha ayudado a comprender los contenidos, mejorando el seguimiento de las explicaciones de los profesores y de los mismos estudiantes, han integrado más las TIC en sus procesos de aprendizaje, aprendiendo a usar programas y mejorando sus habilidades en buscar y seleccionar información en internet, han realizado más actividades colaborativas, elaborando trabajos en grupo y presentándolos en clase, ha mejorado su motivación y participación.

Por tal motivo se consideró que con estas mejoras en los aprendizajes, se reduciría el fracaso escolar dentro del área de las matemáticas, ya que fortalece el conocimiento con una retroalimentación visual que ayuda a la asimilación del mismo, y ya que cualquier apoyo o herramienta que mejore las condiciones de trabajo dentro del salón de clases, tiene potencial de aumentar los índices de aprobación. Sin embargo el 13% consideró que no, ya que la deserción escolar y el bajo rendimiento de los alumnos, no obedece exclusivamente a la falta de motivación con tecnologías nuevas.

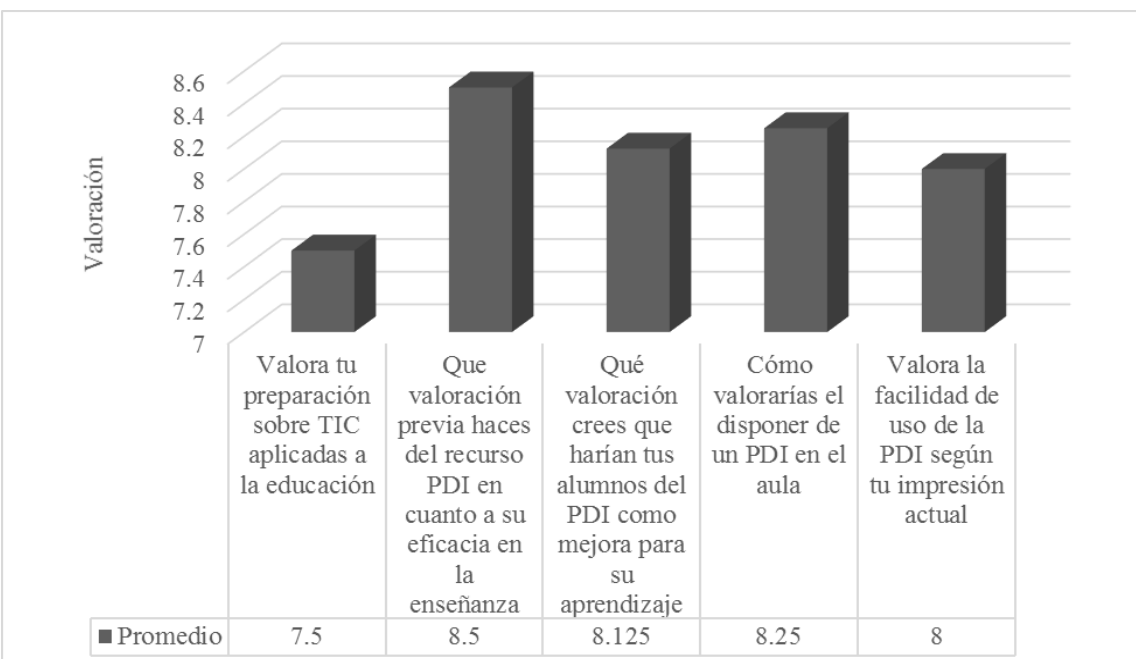


Figura 3. Preparación del docente a las TIC.

Se encontró que la PDI mejora los métodos docentes en un 87% por ser una herramienta nueva, que permite hacer la clase más dinámica e interactiva, por su apoyo digital, almacén de apuntes y grabado de pantallas. Las herramientas que más han ayudado a los docentes con su labor fueron: la graficadora, la cámara de grabación, el autoformas, el proyector y sobre todo el tener las clases preparadas con anterioridad.

Uno de los métodos utilizados por los docentes, fue el desarrollo de clases interactivas como retroalimentación para el aprendizaje de diversos temas de la materia de cálculo diferencial, entre los cuales se manejaron las funciones de una variable (Figura 4). La actividad se enfocaba en revisar los tipos de gráficas vistas en clase, donde el alumno seleccionaba de una imagen en particular la respuesta correcta, y que según el resultado elegido mostrará si fue correcto o incorrecto.

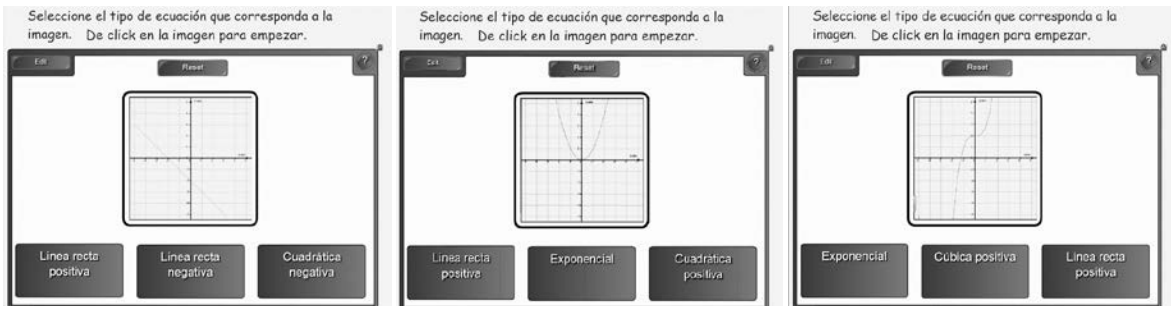


Figura 4. Actividad de retroalimentación para el tema de funciones de una sola variable.

Conclusiones

Los resultados obtenidos en este estudio muestran la buena disposición del docente a la utilización de nuevas tecnologías que faciliten el aprendizaje de las matemáticas, utilizando como estrategias de preparación de clases, el procesador de textos, editor gráfico, editor de presentaciones, el correo electrónico y la navegación por internet. Al igual que Schut (2007) que encontró que el PDI es una valiosa herramienta educativa en el aula y que tiene varios beneficios tales como el enfoque, la atención en el tema, lo que aumenta el interés de los estudiantes y su interacción, y el desarrollo de efectos visuales, mostrando un aumento en la participación e interacción de los alumnos en clase, utilizando herramientas como: graficadoras de funciones, tablas, actividades y videojuegos didácticos, así como las más comunes proyección de información, escribir, subrayar, almacenamiento de las pantallas, entre otras. Se ha considerado que el apoyo visual ha ayudado a comprender los contenidos, mejorando el seguimiento de las explicaciones de los profesores y de los mismos estudiantes.

La PDI es una herramienta que favorece el aprendizaje colectivo sobre el aprendizaje individual. Para ello, requiere que el profesor diseñe tareas adecuadas para las capacidades del alumnado motivando la colaboración y participación del mismo, convirtiéndose en un facilitador, mediador y moderador de las actividades propuestas, seleccionando aquellas respuestas o soluciones que deben de analizarse con mayor profundidad de manera que este aprendizaje sea significativo.

Los resultados de este estudio sugieren y concordando con Bakadam y Asiri (2012) que las mejoras en el aprovechamiento de los alumnos se logra a través de una compleja red de interacciones entre las herramientas de la PDI, el papel mediador del profesor (lo que incluye el diseño de las actividades de la clase), la colaboración y comunicación dentro del aula, el espacio físico y el aprendizaje de los alumnos. Y que el uso de la PDI proporciona una mejora en la actitud de aprendizaje que se traduce en el logro académico de los alumnos.

Al igual que Hadadi, Abassi y Goodarzi (2014) se considera que el uso de la tecnología probablemente no es el factor clave para el desarrollo de una colaboración productiva entre el docente y el alumnado, sin embargo, promueve un entorno en el que las posibilidades aumentan. Por lo que la PDI se convierte en una herramienta de enseñanza efectiva que tiene el poder de involucrar y motivar al estudiante en el proceso de aprendizaje.

Bibliografía

Bakadam, E., & Asiri, M. J. S. (2012). Teachers' Perceptions Regarding the Benefits of using the Interactive Whiteboard (IWB): The Case of a Saudi Intermediate School. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *64*, 179–185.

BECTA. (2004). Getting the most from your interactive whiteboard: A guide for secondary schools. November 8, 2009. Retrieved, from. http://publications.teachernet.gov.uk/eOrderingDownload/15091.pdf.

Beeland,Cuthell,Bell. M. (2002). Why use an Interactive Whiteboard? A baker's dozen reasons! Teachers. *Net Gazette*, 3(1) January 2002. Retrieved March 11, 2010 from: http://teachers.net/gazette/Jan02/mabell.html

Coyle, Y., Yañez, L., & Verdú, M. (2010). The impact of the interactive whiteboard on the teacher and children's language use in an ESL immersion classroom. *System*, *38*(4), 614–625.

Elfreda Blue, Rose Tirotta. *TechTrends*. Washington: May 2011. Vol. 55, Iss. 3; p. 31 (8 pages)

Greenberg, A. D. (2009). The distance education and e-learning landscape V3: Interactive whiteboards, web conferencing, and synchronous web tools: Executive summary. Wainhouse Research, LLC.

Hadadi, A., Abbasi, H., & Goodarzi, A. (2014). Developing Competencies for Using the Interactive Whiteboard to Implement Communicative Language Teaching in the English (Foreign Language) Classroom. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *98*, 618–620.

Hair, Kennewell, S. & Beauchamp, G. (2007). The features of interactive whiteboards and their influence on learning. Learning, Media and Technology. 32(3), 227–241.Noda, A. (2009). Pizarra digital interactiva en aulas de matemáticas, *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, 72, pp. 121-127.

Holmes, K. (2009). Planning to teach with digital tools: introducing the interactive whiteboard to pre-service secondary mathematics teachers. *Australasian Journal of Educational Technology*, 25(3), 351–365.

Lee, M. (2010). Interactive whiteboards and schooling: the context. *Technology, Pedagogy and Education*, 19(2), 133–141.

Lewin, C., Somekh, B. & Steadman, S. (2008). Embedding interactive whiteboards in teaching and learning: The process of change in pedagogic practice. *Education and Information Technologies*. 13: 291-303.

Noda, A. (2009). Pizarra digital interactiva en aulas de matemáticas. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, 72, pp. 121-127.

Ortiz, M., (2012). "La PDI como herramienta optimizadora para la clase de ELE: potencialidades y creación de recursos didácticos", Centro Virtual Cervantes, pp. 85-94. Recuperado de: http://cvc.cervantes.es/ensenanza/biblioteca_ele/publicaciones_centros/PDF/manchester_2012/10_ortiz.pdf

Ruíz, J.M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática, *Revista iberoamericana de educación*, 47 (3), pp. 1-8.

Schut, C. R. (2007). *Student Perceptions of Interactive Whiteboards in a Biology Classroom*. Master Thesis, Cedarville University, B.A. Life Science Education.

Slay, H., Siebörger, I., & Hodgkinson-Williams, C. (2008). Interactive whiteboards: Real beauty or just lipstick? *Computers and Education*, 51, 1321–1341

Smith, H. J., Higgins, S., Wall, K. & Miller, J. (2005). Interactive whiteboards: boon or bandwagon? A critical review of the literature. *Journal of Computer Assisted Learning*. 21, 91-101.

Tataroğlu, B., Erduran, A. (2010). "Examining students' attitudes and views towards usage an interactive whiteboard in mathematics lessons", *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2, pp. 2533–2538.

Taylor, M., Harlow, A., & Forret, M. (2010). Using a computer programming environment and an interactive whiteboard to investigate some mathematical thinking. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *8*(5), 561–570.

Tertemiz, N. (Isık), Sahin, D., Can, B., & Duzgun, S. (2015). Views of Primary School Teachers and Students about the Interactive Whiteboard. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *186*, 1289–1297.

Thompson, J., & Flecknoe, M. (2003). Raising attainment with an interactive whiteboard in key stage 2. *Management in Education*, 17, 29–33.

Türel, Y. K. (2010). Developing teachers' utilization of interactive witeboards. In D. Gibson, & B. Dodge (Eds.), *Proceedings of society for information technology & teacher education international conference* 2010 (pp. 3049–3054). Chesapeake, VA: AACE.

Türel, Y. K. (2011). An interactive whiteboard student survey: Development, validity and reliability. *Computers and Education*, *57*(4), 2441–2450.

Wall, K., Higgins, S. & Smith, H. (2005). 'The visual helps me understand the complicated things': pupil views of teaching and learning with interactive whiteboards. *British Journal of Educational Technology*. 36(5), 851–867.

Wood, R. & Ashfield, J. (2008). The use of the interactive whiteboard for creative teaching and learning in literacy and mathematics: a case study. *British Journal of Educational Technology*. 39 (1), 84-96.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE VARIACIÓN A TRAVÉS DE LA MEDICIÓN DEL PH DEL SUELO

[1]Alicia López Betancourt, [2]Martha Leticia García Rodríguez, [1]Nora Edna Reyes García

[1]Universidad Juárez del Estado de Durango, [2]Instituto Politécnico Nacional, México

ablopez@ujed.mx, *martha.garcia@gmail.com*, *eddna.reyes@outlook.com*

Para citar este artículo:

López, A., García, M. L. y Reyes, N. E. (2016). Acercamiento al concepto de variación a través de la medición del PH del suelo. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE VARIACIÓN A TRAVÉS DE LA MEDICIÓN DEL PH DEL SUELO

[1]Alicia López Betancourt, [2]Martha Leticia García Rodríguez, [1]Nora Edna Reyes García

[1]Universidad Juárez del Estado de Durango, [2]Instituto Politécnico Nacional, México

ablopez@ujed.mx, martha.garcia@gmail.com, eddna.reyes@outlook.com

Palabras clave: Representaciones, semióticas, variación, PH, sensor.

Resumen

La presente investigación se centra en tener un acercamiento al concepto de variación, a través de la medición del Ph del suelo con un sensor. La práctica se exploró en estudiantes de bachillerato. Se circunscribe este trabajo en generar un ambiente de aprendizaje colaborativo, dinámico y motivacional para que los estudiantes accedan con mayor disposición a los contenidos matemáticos. Los resultados muestran que la toma de datos del PH por parte de los estudiantes, fue un detonante para generar un ambiente de aprendizaje propicio. Por su parte, los estudiantes mostraron poca conexión en las representaciones tabulares y gráficas de los datos recolectados así como dificultades para identificar la variable dependiente e independiente.

Introducción

A partir de la incorporación de los recursos tecnológicos en el aula matemática, diferentes autores tales como Hitt (2003), han propuesto que éstos se usen de una forma reflexiva para que apoyen la aprehensión de conceptos matemáticos. Estos recursos, se pretende que los estudiantes aprendan de manera dinámica, asimismo que trabajen con diferentes representaciones y logren una articulación de estas para acceder al concepto (Duval, 2003). El concepto de variación resulta fundamental para acceder a conceptos de cálculo (Hitt 2003), ya que si no se atienden los problemas en el pre-cálculo, a medida que se avance en los cursos, será más difícil comprender los conceptos del cálculo. Además, se considera que muy probablemente los estudiantes trabajarán los temas de cálculo más, como procesos algorítmicos dejando de lado la adquisición de los conceptos.

Aunado a lo anterior, se considera importante que el profesor genere un ambiente de aprendizaje que le posibilite la creatividad, motivación y la interacción social. En este sentido en la presente investigación se propuso el siguiente problema en contexto: Medir el PH del suelo, en diferentes zonas de la ciudad de Durango, con un sensor. El objetivo general fue: analizar y documentar las representaciones semióticas del concepto de variación, en estudiantes de la Preparatoria Diurna de la Universidad Juárez del Estado de Durango, (UJED), al solucionar un problema en contexto usando un sensor.

Además de lo expresado, se tomó el referente de la Reforma Integral del Bachillerato (RIB) de la Secretaría de Educación Pública. En la cual señala que los estudiantes de este nivel deben desarrollar diferentes competencias matemáticas. Una de estas es la de emplear modelos matemáticos para representar adecuadamente situaciones y problemas. En este sentido, se introdujo el siguiente problema en contexto: Medir el Ph del suelo variando la profundidad de la ciudad de Durango, en diferentes zonas y a partir de esto, acceder al concepto de variación. Es así como se determinó el siguiente objetivo: analizar y documentar las representaciones semióticas del concepto de variación, en estudiantes de la preparatoria mencionada, al medir el Ph del suelo a diferente profundidad usando un sensor. Enseguida se comentan los referentes teóricos que sustentaron la investigación.

Marco teórico

La variación es uno de los conceptos más importantes en el estudio del cálculo y García Rodríguez (2009) nos concede un muy acertado concepto de ella: *"analiza la forma en que varía o cambia una función a partir de la relación entre las variables que la describen"*. Cuando dos cantidades son interdependientes, los cambios en el valor de una tendrán un efecto predecible sobre el valor de la otra. Variación es el nombre que se da al estudio de los efectos de los cambios entre cantidades relacionadas. Por su parte, Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003), trabajan el razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos en el cual: se desarrolla la noción de razonamiento covariacional y se propone un marco conceptual para describir las acciones mentales involucradas al aplicar razonamiento covariacional cuando se interpretan y representan funciones asociadas a eventos dinámicos. Se reporta la habilidad para razonar sobre cantidades covariantes en situaciones dinámicas, de estudiantes de alto desempeño en un curso de cálculo.

El estudio reveló, que ellos eran capaces de construir imágenes de la variable dependiente de una función, que cambia simultáneamente con el cambio imaginado de la variable independiente, y en algunas ocasiones, eran capaces de construir imágenes de la razón de cambio para intervalos contiguos del dominio de una función. Sin embargo, al parecer, tuvieron dificultad para formar imágenes de una razón cambiante de manera continua, y no pudieron representar con exactitud o interpretar los puntos de inflexión, ni la razón creciente y decreciente para funciones asociadas a situaciones dinámicas. Estos hallazgos sugieren que el currículo y la instrucción, deberían aumentar el énfasis en el cambio que debe darse en los alumnos, de una imagen coordinada de dos variables que cambian simultáneamente, a una imagen coordinada de razón de cambio instantánea con cambios continuos en la variable independiente para funciones asociadas a situaciones dinámicas.

También se apoyó en la teoría de Duval (2003) para precisar el manejo de las representaciones tabulares y gráficas. López y Espinoza (2012) presentaron un trabajo relativo a las representaciones semióticas del concepto de función usando como recurso tecnológico la hoja de cálculo. Si bien, los estudiantes logran trabajar de forma separada las representaciones, no consiguieron relacionarlas y tampoco articularlas. Se había tenido una experiencia previa de uso de sensores en el nivel superior (López, García y Benítez, 2015) con resultados favorables, y tomando como referente las directrices que señala Lesh y Doerr (2003) de plantear situaciones problémicas, que eluciden el conocimiento matemático de los estudiantes al trabajar problemas que los lleven a reflexionar y conectar sus conocimientos previos y accedan de forma democrática a nuevo conocimiento matemático. Es así, como con base en estos referentes teóricos se sustenta la investigación.

Metodología

La metodología aplicada en esta investigación es de corte cualitativo. Se presenta una exposición narrativa de los resultados observados en el aula. También se incluyen fragmentos de testimonios expresados por los estudiantes, tanto en sus hojas de trabajo como en videos. Asimismo, se registró día a día una bitácora que permitió tomar momentos nodales para su análisis. Se gestionó con un profesor de la Preparatoria Diurna, la posibilidad de la exploración en su aula de matemáticas lo cual fue aprobado. La población en la cual se trabajó, fue un grupo de 40 estudiantes de cuarto semestre, la exploración duró seis días hábiles. A continuación se explica la propuesta.

Lo primero fue realizar una distribución de los 40 estudiantes del grupo en ocho equipos de cinco integrantes cada uno, tomando como criterio la zona en la que vivían. A cada estudiante se le entregó el siguiente material para la recolección de las muestras: cucharas, recipientes con tapa, los cuales tenían un pequeño recordatorio que mostraba el procedimiento de recolección de muestras y que profundidad deberían tomar la muestra. De tal manera que a un integrante del equipo le tocaba a 0 cm de profundidad, al siguiente a 10 cm y así hasta 40 cm.

Por su parte para la medición del PH se requirió el siguiente material: muestra de suelo, agua destilada, probeta graduada, sensor de Vernier para Ph, computadora y programa *Logger Lite*.

Con estas muestras posteriormente los estudiantes midieron el PH, registrando sus datos. Con esta recolección de datos se procedió a responder una hoja de trabajo (Anexo A). El diseñó de la hoja de trabajo tomó como referencia la propuesta de (Volz y Sapatka, 2007).

Experimentación

El primer día se les dio una explicación del PH del suelo, se conformaron los equipos, se les explicó cómo tomarían las muestras y se les entregó el material. Los estudiantes se integraron por equipo acorde con la zona en que se ubicaba su casa. Se les dio el fin de semana para que tomaran la muestra del suelo con la profundidad señalada en el frasco. El segundo día fue la toma del PH de las muestras, se llevó cerca de dos horas, debido a que sólo se contaba con un sensor.

El tercer y cuarto día debían resolver la hoja de trabajo (Ver Apéndice A). Cada estudiante debía entregar su hoja de trabajo pero estaban integrados por equipo, podían discutir, intercambiar ideas, de tal manera que, realizaran un análisis así como sus conclusiones. Finalmente, el último día exponer los resultados obtenidos, así como la lectura de una carta dirigida al presidente municipal de la ciudad de Durango, en la cual explicaban sus resultados matemáticos y cómo proponían mejorar el medio ambiente en la ciudad, a partir de conocer el PH del suelo y sus variaciones en la ciudad.

Resultados

Se presentan los resultados en tres aspectos: ambiente de aprendizaje, competencias matemáticas la construcción del concepto de variación.

Respecto al ambiente de aprendizaje, entendiendo por este, al espacio donde se desarrolla la comunicación y las interacciones que posibilitan el aprendizaje. Con esta perspectiva, se asume que en los ambientes de aprendizaje media la actuación del docente para construirlos y emplearlos como tales. En su construcción destacan los siguientes aspectos: La claridad respecto del aprendizaje que se espera logre el estudiante. El reconocimiento de los elementos del contexto: la historia del lugar, las prácticas y costumbres, las tradiciones, el carácter rural, o urbano del lugar, el clima, la flora y la fauna. La relevancia de los materiales educativos impresos, audiovisuales y digitales. Las interacciones entre los estudiantes y el maestro.

En cuanto a la creación del ambiente de aprendizaje se destacan los siguientes aspectos: El sensor de PH de Vernier fue un detonante para favorecer el ambiente de aprendizaje. El problema en contexto se centró en la medición de PH del suelo. El objetivo fue precisar datos en el sistema coordenado y analizar la variación del PH del suelo con respecto a la profundidad en una hoja de trabajo diseñada previamente. Al trabajar en forma colaborativa se favoreció la interacción social y la comunicación de ideas. Este ambiente de aprendizaje centrado en el espacio, denominado salón de clases, propició que se posibilitara la comunicación tanto del problema del PH del suelo, como de los puntos relacionados al concepto de variación y sus representaciones gráficas, así como la interpretación de éstas.

La actividad estimuló la curiosidad, ya que los estudiantes, desde las mediciones del PH con el sensor hacían preguntas acerca de éste, los datos de los demás equipos, entre otras, así como el diálogo, porque los estudiantes se comunicaban entre ellos, comparaban sus resultados, discutían acerca de ellos para responder a las preguntas. Así mismo, pudieron expresar libremente sus ideas, esto se precisó en la exposición donde expresaron: sus resultados matemáticos en diferentes representaciones, gráficas y tablas, así como reflexionar su problema en términos ecológicos y con compromiso a la sociedad, resaltando también la importancia de las matemáticas. El ambiente propició que en todo momento los estudiantes estuvieran motivados, con expectativas de trabajar y colaborar en la práctica.

Competencias matemáticas

La práctica se diseñó, de tal manera, que permitiera el desarrollo de las tres competencias:

1. Comunicar eficientemente los conceptos y procedimientos matemáticos utilizados en la resolución de problemas que se trabajan en este nivel educativo, así como sus resultados;
2. Transferir conceptos matemáticos para interpretar fenómenos y situaciones en el contexto de otras disciplinas así como en situaciones de la vida real;
3. Reflexionar acerca de cómo se ha construido y se construye el conocimiento matemático.

Al analizar tanto las hojas de trabajo como los videos tomados a lo largo de la exploración nos damos cuenta que, de manera general, se cumplió con cada una de estas competencias. Al responder las hojas de trabajo, los estudiantes fueron observando la manera en que se construye el conocimiento matemático, al realizar la gráfica pudieron interpretar los datos obtenidos sobre el PH del suelo al relacionarlo con el problema en contexto, el cual se planteó tomando datos reales y una situación de la vida real. Los estudiantes respondieron a preguntas que se plantearon ellos mismos en relación al problema presentado al inicio de la práctica. Todos los estudiantes lograron comunicar los procedimientos utilizados en la resolución del problema del PH, al igual que sus resultados al exponerlos frente al grupo. Sin embargo, consideramos sería demasiado optimista decir que las competencias se dominaron. Hay indicios que las competencias se pusieron en marcha durante esta práctica.

Construcción del concepto de variación

Para esta sección se retoma la hoja de trabajo (Anexo A), respecto al punto 2, llenado de la tabla con los valores de x y y, donde corresponden a la profundidad y el valor del PH respectivamente. Como se puede observar se les precisó ésta información en la tabla. Los estudiantes contaron con todos los datos necesarios y no tuvieron ninguna dificultad en completar la tabla.

Al analizar las gráficas de puntos, se observaron diferentes formas de graficar por parte de los estudiantes, 15 de ellos mostraron una carencia importante en este sentido. Lo nombramos como un caso especial y aclaramos este punto en seguida. Al retomar la hoja de trabajo, las abscisas de los puntos a graficar fueron: 0, 10, 20, 30, 40. Por ello, al primer punto le corresponde (0, y), de tal manera que éste se localiza sobre el eje y. La evidencia muestra que el 40 % de los estudiantes no relacionó que la primer muestra que fue a 0 cm. de profundidad coincidía en el origen. Esto llevó a que los estudiantes localizaron otro 0 sobre el eje x. (ver figura 1)

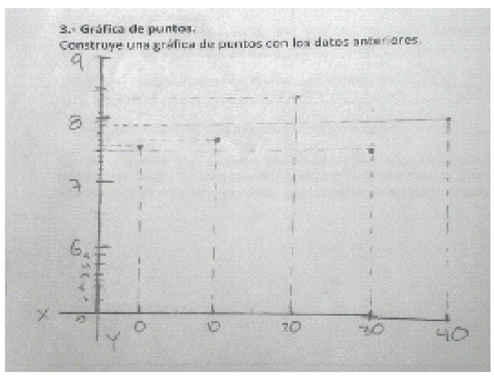


Figura 1. Caso especial.

Los estudiantes registraron sus datos correctamente en la tabla, sin embargo, al graficar el 40 % de ellos localizan otro cero para la primera coordenada del origen. Esto hace pensar que los estudiantes no conectan la información de los datos, de la variable dependiente e independiente. De modo que se presenta una pregunta, ¿qué hubiera pasado si en el llenado de la tabla no se les especifica profundidad y PH?

En lo que respecta a la parte cuatro de la hoja de trabajo, (ver anexo A), se clasificó en cinco niveles según los campos resueltos por los estudiantes (ver tabla 1). Para poder clasificar en un nivel, se debe cumplir con todos los niveles anteriores, es decir, un estudiante que está en el nivel 3 cumple con los criterios establecidos en los niveles 1, 2 y 3. De igual manera, se estará en cierto nivel, siempre que sus respuestas sean correctas. Ocho de los estudiantes no responden a ningún campo de la tabla; un estudiante sólo escribe las abscisas y ordenadas correctamente sin responder a más campos de la tabla; un estudiante escribe abscisas y ordenadas correctamente y logra construir las coordenadas, sin más; en el cambio vertical y cambio horizontal, 14 estudiantes sólo indican la operación que debe realizarse, sin resultado; ocho sólo indican la operación para obtener el cociente que indica la variación. De los estudiantes que realizan la operación para obtener el cociente que indica la variación, 14 de ellos obtienen una respuesta incorrecta. De éstos, podemos clasificarlos en dos razones por las que se generan estos resultados, que son:

Tabla 1. *Niveles y características para la representación tabular.*

Nivel	Características
1	Escribe las abscisas y ordenadas correctamente
2	Construye las coordenadas tomando las abscisas y las ordenadas
3	Distingue cada ordenada con su respectivo subíndice. Toma cada una de las ordenadas correspondientes para obtener el cambio vertical.
4	Distingue cada abscisa con su respectivo subíndice. Toma cada una de las abscisas correspondientes para obtener el cambio horizontal.
5	Toma correctamente el cambio vertical y el cambio horizontal

Se precisó carencia en la identificación de los números positivos y negativos.

En la columna que indica el cambio vertical en la tabla de puntos de la hoja de trabajo (Ver Apéndice A), deben realizarse las diferencias y_2-y_1, y_3-y_2, y_4-y_3 y y_5-y_4, por lo que, si tomamos como ejemplo que en el caso de y_3-y_2, $y_2>y_1$, la respuesta es un número negativo. Esto no es considerado por cuatro de los estudiantes, de tal manera que al llegar a la última columna de la tabla de puntos en la que realizan la división, el resultado que obtienen es incorrecto.

Asimismo se identifica que realizan de forma incorrecta la división entre 10.

Todos los resultados de la columna que indica el cambio horizontal de la tabla de puntos (Ver Apéndice A) son 10, de manera que el cociente que se obtiene en la última parte de la tabla será el resultado de una división sobre 10. Al ser una operación relativamente fácil, los estudiantes no utilizaron calculadora, y 9 de ellos obtienen respuestas incorrectas. Esto nos muestra las deficiencias que tienen en relación a las operaciones con números decimales.

Todos los integrantes de uno de los equipos (5 estudiantes) cometen este error. Al trabajar en equipo se presta a que todos sus miembros respondan de forma similar o copien. No podemos asegurar que copiaron, en este caso ninguno de los estudiantes del equipo se percató del error.

Cabe mencionar que sólo dos de los 25 estudiantes que respondieron por completo la tabla de puntos, obtuvieron todas sus respuestas aceptables y de manera correcta. Esto es un 5.4% de los alumnos que completaron la hoja de trabajo.

Después de completar la tabla de puntos, se hicieron las preguntas: ¿En cuáles profundidades son mayores los cocientes? ¿A qué crees que se deba esto? 16 de los estudiantes no respondieron; de los 21 restantes sólo dos lo hicieron de manera correcta.

Antes de terminar la clase, se les encargó la tarea de preparar en casa una exposición en la que mostraran los resultados obtenidos con una conclusión del problema en contexto, al igual que la última parte de la hoja de trabajo: "Escribe una carta al presidente municipal en la que le expliques como la práctica te enseñó cuáles plantas puedes sembrar en la zona en la que vives, qué tipo de plantas deben ser y la importancia que tendría plantarlas en esta zona debido al Ph que predomina en este lugar".

Esta fase fue el último día de la exploración. Los estudiantes llevaron sus carteles preparados para la exposición de resultados y conclusiones por equipo. Los carteles fueron diseñados de manera simple, en los que incluyeron una pequeña conclusión, acompañada sólo de la gráfica de puntos, apoyándose en sus hojas de trabajo.

Al analizar los videos, pudimos darnos cuenta de la gran importancia que tuvo la realización de la práctica, tuvo impacto en los estudiantes en cuanto a motivación y en el cómo las matemáticas están presentes en su vida diaria.

Al terminar cada exposición, uno de los integrantes del equipo leyó la carta escrita al presidente municipal. Describieron la forma en que realizaron la práctica, lo que aprendieron de ésta y pedían se les tomara en cuenta la petición de plantar árboles de acuerdo al PH del suelo de la zona en la que viven. Además de tener la satisfacción de descubrir otra manera de abordar un problema y conectarlo con la asignatura en matemáticas. En este sentido, en una de las cartas, los estudiantes expresan "nos da gusto saber que las matemáticas no son aburridas como todos suelen decir, también son dinámicas y podemos hacer prácticas divertidas con ellas".

Para finalizar esta fase, se les pidió a los estudiantes escribieran en el pizarrón una palabra que describiera lo que les había parecido la práctica en general. Algunas de las palabras fueron: "investigación", "PH", "matemáticas".

Ese mismo día los estudiantes comenzaron a expresar comentarios por WhatsApp sobre la experiencia de haber trabajado de esta manera y lo contentos que estaban, así como mensajes de agradecimiento, querían volver a trabajar así y que regresáramos a dar clases en su institución.

Conclusiones

En esta investigación se documentó el proceso de recolección de datos del PH del suelo a través de un sensor, en diferentes zonas de la ciudad de Durango. Esto fue realizado por los estudiantes de cuarto semestre de la Preparatoria Diurna de la UJED, quienes analizaron estos datos y expusieron sus resultados, aplicándolos a una situación de ámbito ecológico y de su medio ambiente. Esta documentación precisó lo siguiente:

El efecto que tuvo la medición del PH del suelo por parte de los estudiantes, en el ambiente del aula. En este sentido se trató un problema real. En este proceso, resolver este problema en el contexto de los propios estudiantes.

Es así como la medición del PH propició un ambiente con estudiantes motivados, participativos, comprometidos y alertas a la tarea emprendida. De este modo, esta experiencia se centró en una interacción social con un objetivo como guía. A partir de esto, los estudiantes tuvieron que relacionar diferentes representaciones semióticas para abordar el concepto de variación. El aula real, generada principalmente porque los estudiantes jugaron el rol de protagonistas, ayudó para continuar con la tarea de responder a su hoja de trabajo. En esta parte de la exploración, la interacción social continuó en el equipo. Los estudiantes respondieron a sus hojas de trabajo. Los estudiantes conectaron sus datos recabados del PH en representaciones tabulares. Lograron dar interpretaciones correctas. Asimismo, conectaron los datos en representaciones gráficas. Algunas de estas representaciones presentaron errores, sobre todo al no ubicar 0 cm. de profundidad con el origen del plano cartesiano. En la parte de introducir el concepto de variación, de nuevo los estudiantes presentaron logros, pero también se precisan dificultades tales como:

- Manejo incorrecto de signos.
- Dificultad para entender el lenguaje algebraico, por ejemplo: $P(x_1,y_1)$.
- Falta de conexión entre las representaciones tabulares y gráficas.
- Dificultad para identificar la variable dependiente e independiente

Esta experiencia matemática, centrada en la medición del PH del suelo, comprometió a la enseñanza y al aprendizaje a una aportación social derivada del análisis de los datos. Esto se evidenció en las cartas escritas por parte de los estudiantes al presidente municipal. Es así como la solución de problemas en contexto impacta en el desarrollo de competencias, que en esta experiencia se centraron en que los estudiantes logran comunicar sus resultados, si consiguieron transferir sus conocimientos matemáticos pero en un nivel básico no logran profundizar, en la parte de reflexionar, se queda en un nivel de dominio de competencias inicial.

Se considera, que a los estudiantes a lo largo de su vida escolar, no se les ha enseñado a resolver problemas reales; además arrastran deficiencias aritméticas y algebraicas. También se precisó resistencia al empezar a contestar la hoja de trabajo, los estudiantes al ver la tabla de llenado le daban la vuelta a la hoja. Esta transferencia al lenguaje algebraico les cuesta mucho trabajo. Si bien el sensor, la toma de muestras, la interacción entre el grupo, la medición del PH, todas estas acciones estuvieron cargadas de motivación y disposición por parte del grupo, al llegar a la parte medular de pensar, reflexionar, identificar variables, conectar representaciones, las dificultades persisten. También la hoja de trabajo se puede mejorar y se deja a criterio de cambios por parte de profesores que deseen replicar esta práctica. Asimismo, se observa la necesidad que los profesores integren más la resolución de problemas reales en el aula de matemáticas; de tal manera que las propuestas de la RIB se puedan concretar en el aula.

Referencias

Carlson M., Jacobs S., Coe E., Larsen S. y Hsu E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. En *Revista EMA*, Vol. 8, No. 2, 121-156.

Duval, R. (2003). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

García Rodriguez, M. L. (2009). Construcción del concepto de variación con apoyo de una herramienta computacional. En *Innovación Educativa*, Vol 9, núm 48, pp19-25. México: Instituto Politécnico Nacional.

Hitt, F. (2003). “Una Reflexión sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología”. *Boletín de la Asociación Matemáticas Venezolana*, X, 2. 213-224. Venezuela.

López, A., García, M, y Benítez, A. (2015). Competencias Matemáticas: una aplicación con sensores en un ambiente colaborativo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 28. pp. 1741-1748. México.

Lesh, R. y Doerr. H. (2003). *Beyond Constructivism.Models and modeling perpectives on mathematics problema solving, learning and teaching.* LEA. USA.

López, A. y Espinoza de los Monteros, B. J. (2012). Representaciones semióticas del concepto de función en ambiente Excel. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 25, pp. 1399-1406. México.

Volz, D. y Sapatka, S. (2007). *Middle School Science with Vernier*. USA: Ed. Vernier.

Anexo A

Estudio del PH del suelo

Hoja de trabajo

Nombre ____________________________ Fecha ____________ Grupo ______ Equipo ____

Zona en que fueron tomadas las muestras ____

1.- Descripción de las muestras.

Muestra 1 (0 cm de profundidad)		
Características		Dibujo
Muestra 2 (10 cm de profundidad)		
Características		Dibujo
Muestra 3 (20 cm de profundidad)		
Características		Dibujo
Muestra 4 (30 cm de profundidad)		
Características		Dibujo

Muestra 5 (40 cm de profundidad)	
Características	Dibujo

2.- Toma de muestra y medición.

Describe cómo realizaste la toma de tu muestra y la medición del pH de ésta. ________________

____
____
____
____
____

3.- Medición de PH de las muestras.

Llena la tabla con las profundidades y las cantidades obtenidas en las mediciones de cada muestra.

	Profundidad (x)	pH (y)
Muestra 1		
Muestra 2		
Muestra 3		
Muestra 4		
Muestra 5		
Promedio		

4.- Gráfica de puntos.

Construye una gráfica de puntos con los datos anteriores

¿Qué punto está más cercano al origen? ____________________________

¿Qué punto está más alejado del origen? ____________________________

5.- Tabla de puntos.

Completa la siguiente tabla.

Abscisas (x)	**Ordenadas (y)**	**Coordenadas (x,y)**	**Cambio vertical**	**Cambio Horizontal**	**Cociente** $\frac{\textbf{Cambio vertical}}{\textbf{Cambio horizontal}}$

		P(x_1,y_1)=(,)			
		P(x_2,y_2)=(,)	**(y_2-y_1)= (,)**	**(x_2-x_1)= (,)**	$\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = —$
		P(x_3,y_3)=(,)	**(y_3-y_2)= (,)**	**(x_3-x_2)= (,)**	
		P(x_4,y_4)=(,)	**(y_4-y_3)= (,)**	**(x_4-x_3)= (,)**	
		P(x_5,y_5)=(,)	**(y_5-y_4)= (,)**	**(x_5-x_4)= (,)**	

¿En cuáles profundidades son mayores los cocientes?
____

¿A qué crees que se deba esto?
____

5.- Conclusiones finales.

De acuerdo con el promedio del PH, ¿las muestras son ácidas, neutras o alcalinas? ___________________ ¿Por qué?
____

¿Qué tipo de plantas recomiendas plantar en esta zona?
____
_____

¿A qué profundidad es más adecuado realizar las plantaciones? ¿Por qué?
____
_____

Escribe una carta al presidente municipal en la que le expliques cómo la práctica te enseñó cuáles plantas puedes sembrar en la zona en la que vives, qué tipo de plantas deben ser y la importancia que tendría plantarlas en esta zona debido al pH que predomina en este lugar.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

LABORATORIO DE CÁLCULO VECTORIAL USANDO GEOGEBRA

Clara Regina Moncada Andino, Deyanira Ochoa Vásquez, Enrique López Durán, Faustino Espín González, Norma Rocío Gómez Rivera

Instituto Tecnológico de Zacatepec, México.

clara.moncada@gmail.com, *deyamx2002@yahoo.com.mx*, *elopezd@gmail.com*, *fespinbolton@hotmail.com*, *nrgomezr@gmail.com*

Para citar este artículo:

Moncada, C. R., Ochoa, D., López, E., Espín, F. y Gómez, N. R. (2016). Laboratorio de cálculo vectorial usando geogebra. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

LABORATORIO DE CÁLCULO VECTORIAL USANDO GEOGEBRA

Clara Regina Moncada Andino, Deyanira Ochoa Vásquez, Enrique López Durán,

Faustino Espín González, Norma Rocío Gómez Rivera

Instituto Tecnológico de Zacatepec, México.

clara.moncada@gmail.com, *deyamx2002@yahoo.com.mx*, *elopezd@gmail.com*, *fespinbolton@hotmail.com*, *nrgomezr@gmail.com*

Palabras claves: funciones multivariables, GeoGebra, gráficas en el plano, gráficas en 3D.

Resumen

La importancia de incorporar el laboratorio de cómputo en los procesos didácticos de la educación, no se centra solo en las áreas de informática, sistemas computacionales o diseño gráfico, mencionando algunas, sino que es necesario la incorporación de este recurso en otras áreas del conocimiento, principalmente en las matemáticas, puesto que permite la visualización dinámicas de conceptos, muchos de ellos abstractos, pero que con la ayuda de software, particularmente como el de GeoGebra, hace posible que el estudiante explore diversos casos que en el pizarrón, rotafolio o retroproyector no es posible. Este trabajo muestra una experiencia implementando el laboratorio presencial con GeoGebra en la práctica docente del Cálculo Vectorial, en estudiantes del nivel superior, de las carreras de ingeniería industrial y sistemas computacionales, en el Instituto Tecnológico de Zacatepec del Tecnológico Nacional de México.

Introducción

El programa de la asignatura de Cálculo Vectorial en los Institutos Tecnológicos del Tecnológico Nacional de México (TNM), sugiere, entre otros, utilizar software como uno de los recursos didácticos para la enseñanza y el aprendizaje de esta materia, que es impartida a estudiantes del tercer semestre que estudian ingeniería.

Aprovechando que el Instituto GeoGebra de Zacatepec (IGZ), está adscrito en el Instituto Tecnológico de Zacatepec (ITZ), durante el período Enero-Junio del 2015 se realizó como prueba piloto la incorporación del laboratorio de Cálculo Vectorial en dos grupos de estudiantes de las carreras de Ingeniería Industrial e Ingeniería en Sistemas Computacionales.

La asignatura está constituida por cinco unidades temáticas, en las que se abordan los contenidos generales siguientes: Álgebra de vectores, Curvas planas y ecuaciones paramétricas, Funciones vectoriales de una variable real, Funciones reales de varias variables, Integración.

Dando una breve descripción, el laboratorio se dio una hora, una vez por semana, realizando una o dos prácticas por unidad, de manera presencial, sobre temas de mayor relevancia del contenido y que permitiera a los estudiantes, la visualización dinámica de los temas en estudio; para ello se diseñaron en total diez guías de práctica, distribuidas en: tres, tres, dos, una y una, para las unidades 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente, expuestas en forma resumida en la exposición de la propuesta de este trabajo.

En la primera sesión de laboratorio, el docente moderó la actividad, considerando que era el primer acercamiento que tenían los estudiantes con el software dinámico de GeoGebra. En las subsiguientes sesiones los estudiantes fueron capaces de seguir las indicaciones de la guía de práctica de laboratorio, en las que el rol del docente fue más de asesor. Al concluir cada sesión, los estudiantes entregan vía correo electrónico el archivo ggb resultado de la práctica de laboratorio.

El carácter que se le dio a la evaluación del laboratorio fue formativo, permitiendo realimentar contenidos y dudas que pudieran tener los estudiantes, de manera individual, en equipos o grupal, considerando las formas de trabajo generado.

Marco Teórico

El aprendizaje de las ciencias naturales y exactas, se complica debido a que involucra la aplicación de operaciones matemáticas en fenómenos físicos, sin embargo, en un entorno virtual se facilita al utilizar recursos didácticos interactivos que el estudiante puede manejar, tales como simuladores que incluyen fórmulas, tablas de datos, gráficas y animaciones, donde se puedan manipular los parámetros que intervienen en dichos fenómenos.

La enseñanza de las matemáticas en entornos virtuales, a través de simuladores virtuales, permite a los alumnos modificar parámetros y observar el comportamiento de gráficas y ecuaciones, dando sentido a las relaciones entre las variables, la construcción de modelos mentales y a proporcionar experiencias de aprendizaje activas y estimulantes. “Utilizando simuladores se espera que los alumnos sean capaces de interactuar con ellas modificando ciertos parámetros. […]. Es decir, podemos involucrar a los alumnos en un proceso de indagación, los alumnos pueden explorar el papel de cada uno de los parámetros” (Caamaño, 2011, p.180).

Una de las primeras formas de estudiar vectores en entornos virtuales se realizó a través del uso de hojas de cálculo, dado que tienen un gran potencial en los campos de la enseñanza y el aprendizaje. Las situaciones que se proponen, su estilo pedagógico, su concepción de aprendizaje, su conocimiento y relación con la disciplina que se enseña son factores determinantes de la efectividad de toda estrategia didáctica. Se tiene una herramienta que estimula a enseñar soluciones y a asumir la responsabilidad de verificar los resultados. “Es importante tener en cuenta que algunas de estas tareas pueden solicitarse para ser realizadas en los hogares. […] las hojas de cálculo están disponibles tanto en versiones de paga como en versiones gratuitas” (Petrosino, 2013, p.120).

Debido al crecimiento de la infraestructura de cómputo y ancho de banda en Internet, es posible acceder a recursos ahora llamado computación en la nube, es decir, “se accede a través de un navegador Web utilizando estándares abiertos […]. Se puede acceder desde cualquier lugar y desde cualquier dispositivo y en cualquier momento” (Joyanes, 2013, p.229). En la actualidad existen diversos software que apoyan la comprensión de los conceptos matemáticos como son: Derive, MatLab, Regla y Compás, Dr. Geo o Kig y por supuesto GeoGebra, etc.

GeoGebra es un software libre, que convierte el contexto matemático en un escenario dinámico, que da vida a los conceptos ante los ojos del estudiante que aprende matemáticas. Además de ser gratuito, su interfaz es accesible a casi todos los dispositivos y sistemas operativos, pudiendo instituciones educativas, docentes y estudiantes gozar de su fácil accesibilidad.

Metodología

Como parte de la planeación e instrumentación didáctica de la asignatura de Cálculo Vectorial, se diseñaron diez guías de práctica para el laboratorio de una hora semanal, tomando en cuenta las competencias genéricas y las específicas de cada unidad temática, y la general de la materia, con base en el programa oficial del plan de estudio de las carreras de ingeniería vigentes.

Las guías de práctica de laboratorio son probadas antes de que ser implementadas de manera presencial por los estudiantes, sea de manera individual, en pares o en equipos de cuatro a seis integrantes.

Cada guía de práctica cuenta con cuestionamientos, cuyas respuestas junto con el archivo ggb resultante, son enviados por correo electrónico al docente, quien valora los resultados. Las frecuencias de mala interpretación de los conceptos, son realimentadas posteriormente en el aula y a la hora de clase.

La intención didáctica esencial, es que el estudiante aprenda mejor los conceptos del cálculo vectorial y sus aplicaciones, al visualizar aplicaciones, usando las herramientas y comandos de GeoGebra, en el plano –Vista Gráfica, Vista Gráfica 2- y el espacio –Vista 3D-.

Exposición de la propuesta

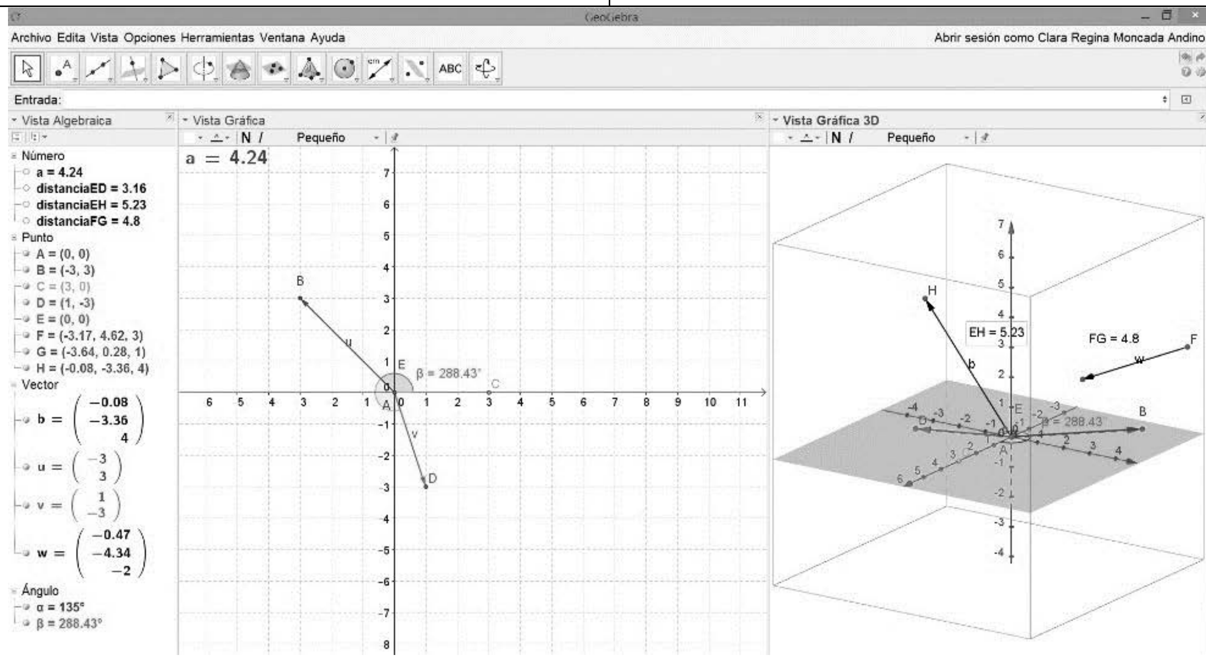
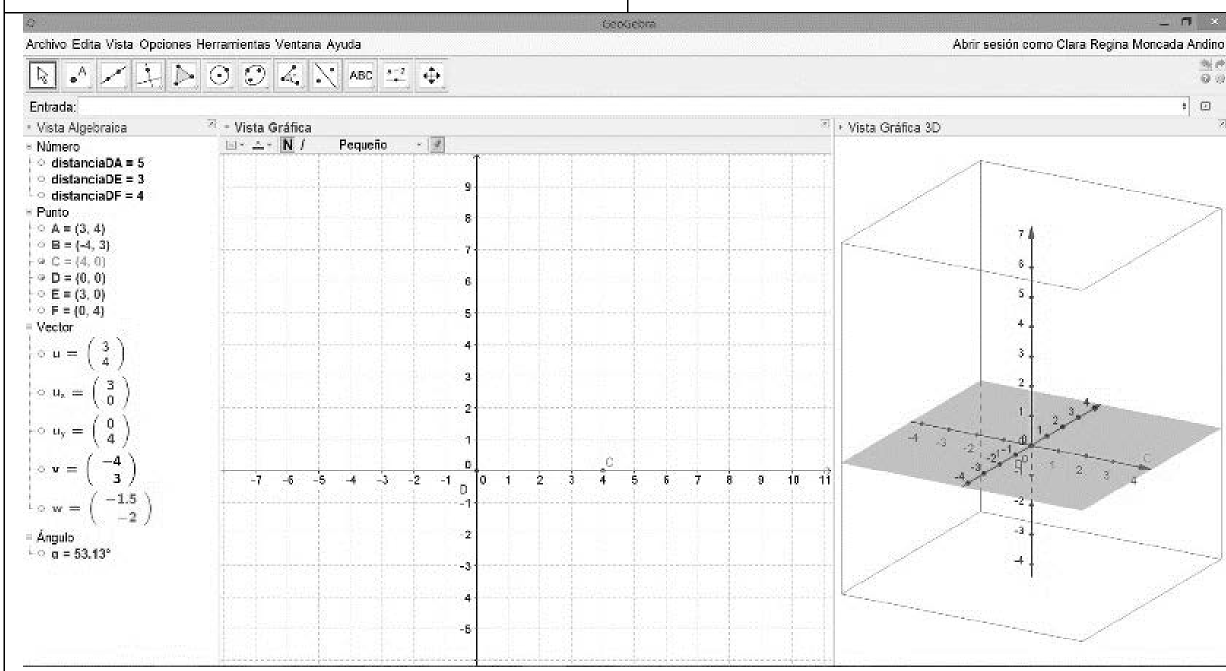
En este apartado se concentra el proceso para la gestión e implementación de la estrategia de enseñanza y aprendizaje, sobre las siguientes tablas, con los contenidos y competencias, de todas las unidades temáticas, que específicamente se tomaron en cuenta, como propósito de esta experiencia piloto.

De acuerdo al programa oficial de la asignatura, la competencia general de la materia es: Interpretar, reconstruir y aplicar modelos que representan fenómenos de la naturaleza en los cuales interviene más de una variable continua, en diferentes contextos de la ingeniería. Para el logro de esta competencia, las guías de práctica abordan diversas herramientas y comandos de GeoGebra para que el estudiante logre la competencia, a través de las competencias específicas de cada unidad.

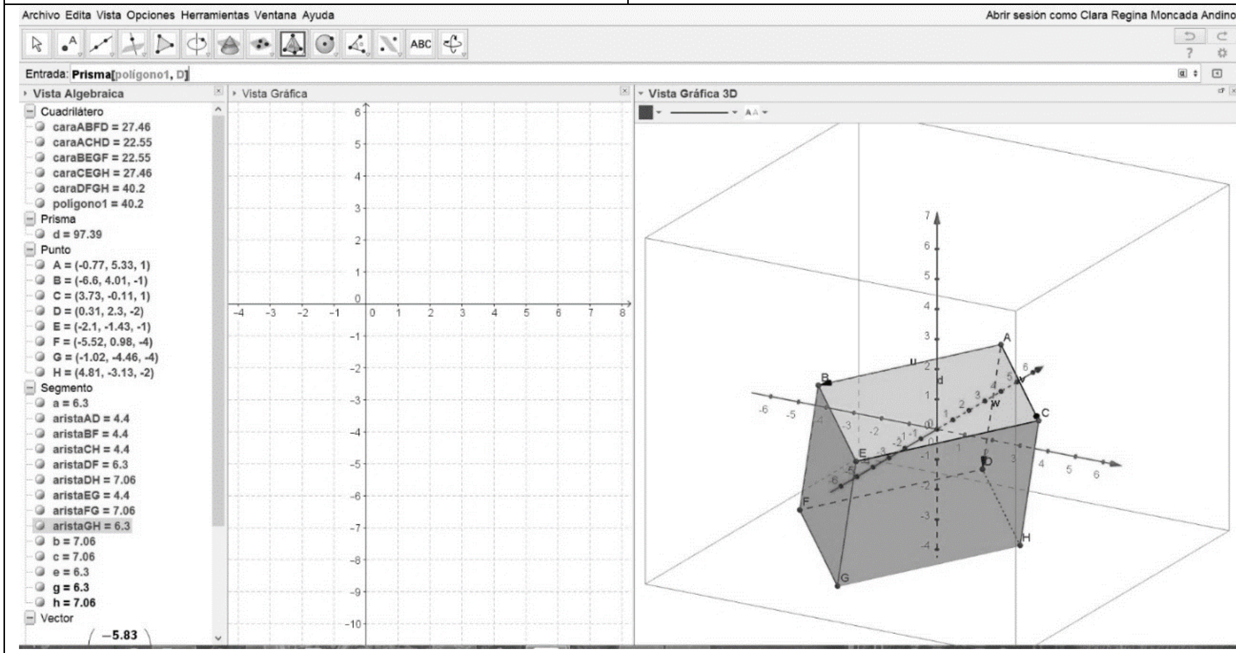
La unidad 1, sobre el Álgebra de Vectores, las consideraciones hechas se describen en la Tabla 1.

Tabla 1. *Contenidos, competencias objetivo y resultados en GeoGebra, para la Unidad 1.*

Unidad 1	Competencia objetivo
a) Herramientas y áreas de trabajo de GeoGebra. b) Edición de puntos, segmentos, mediatriz de un segmento, rectas, vectores, magnitud de un vector, dirección de un vector en el plano.	▪ Familiarizarse con GeoGebra, herramientas y comandos de construcción. ▪ Se explore la construcción de vectores en el plano y el espacio. ▪ Se calcule la magnitud y dirección de un

<table>
<tr><td>c) Vectores en el espacio.</td><td>vector.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>d) Operaciones vectoriales en el plano y el espacio.</td><td>▪ Construcción, en el plano y el espacio de la resultante, vector o escalar, de las operaciones entre elementos vectoriales y escalares.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>e) Aplicaciones de los vectores.</td><td>▪ Aplicaciones del álgebra de vectores en la construcción de rectas paramétricas, la ecuación del plano, áreas de paralelogramos y el volumen de un</td></tr>
</table>

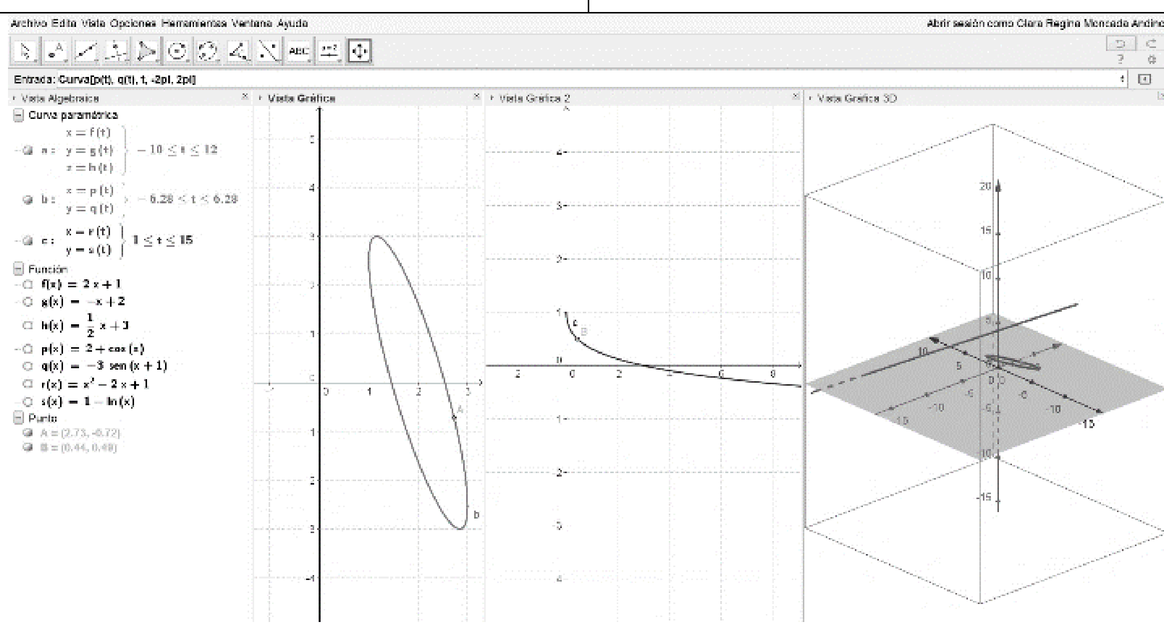
	paralelepípedo.



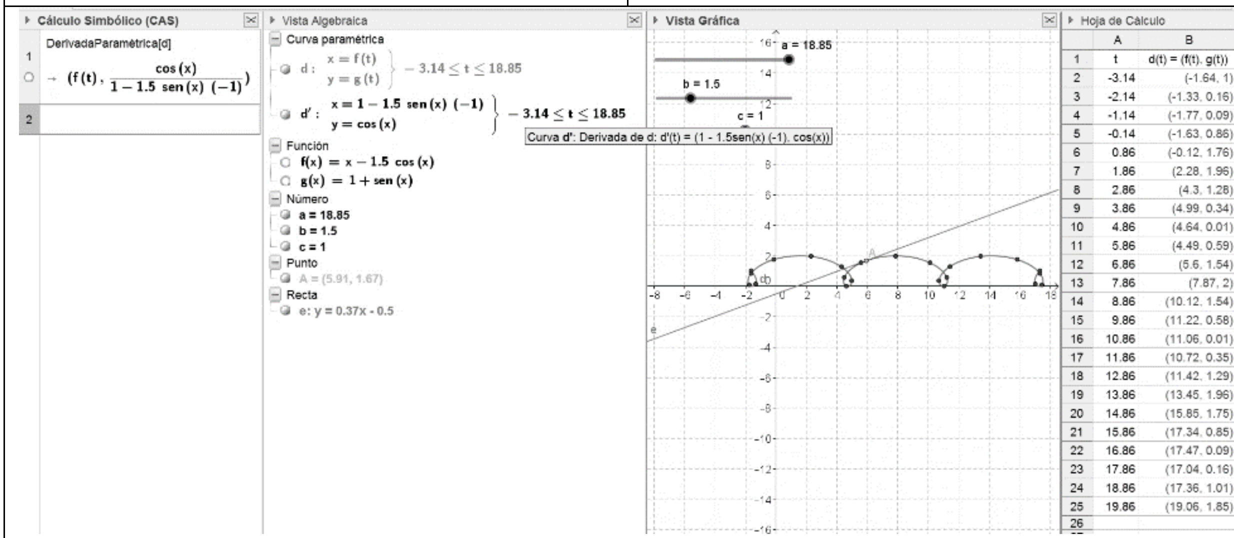
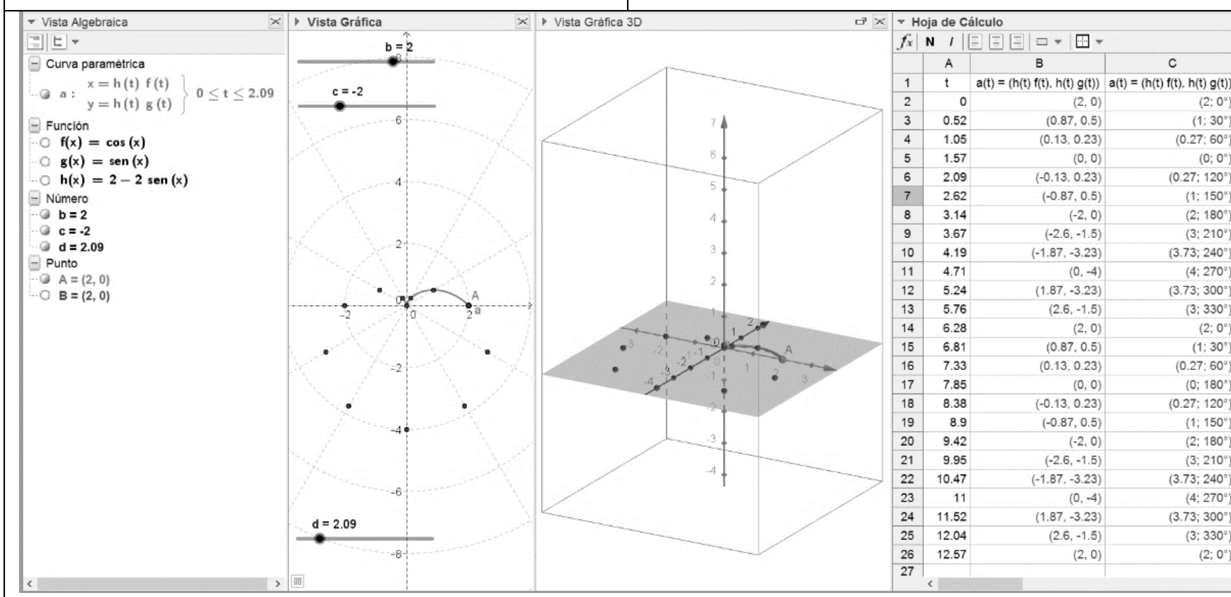
La unidad 2, sobre las Curvas en R^2 y Ecuaciones Paramétricas, cuyas consideraciones se describen en la Tabla 2.

Tabla 2. *Contenidos, competencias objetivo y resultados en GeoGebra, para la Unidad 2.*

Unidad 2	Competencia objetivo
a) Representación gráfica de algunas curvas paramétricas.	▪ Construye el trazado de diversas curvas paramétricas.



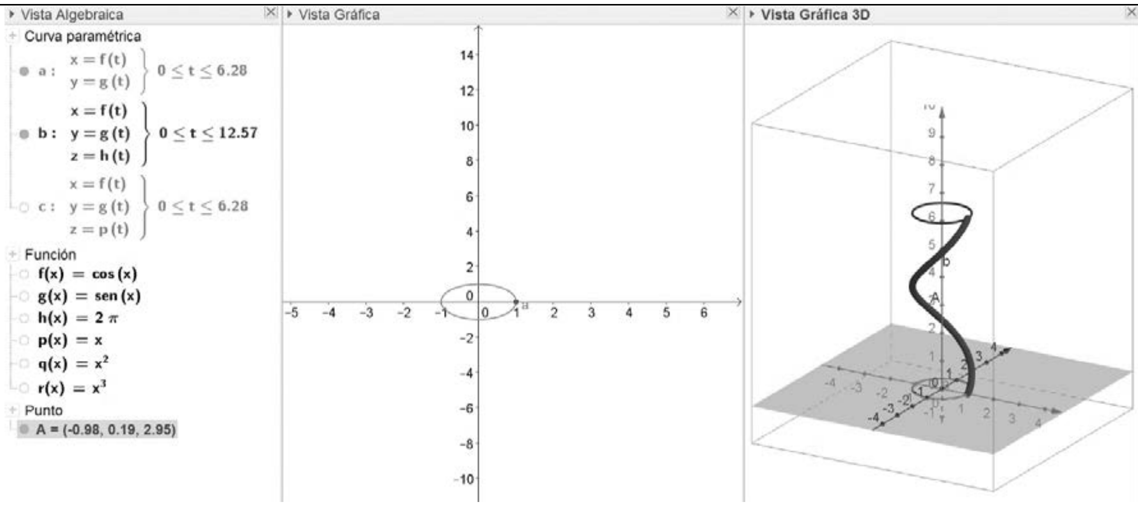
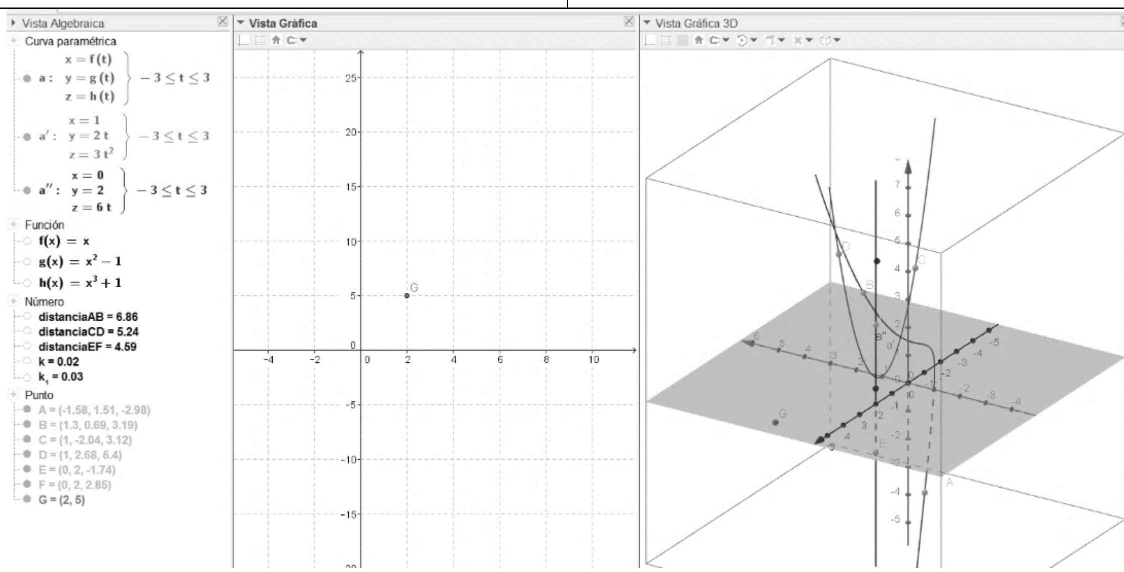
b) Representación gráfica de algunas curvas	▪ Construye el trazado de diversas curvas

<table>
<tr><td>paramétricas, tabulación y de su derivada.</td><td>paramétricas, puntos coordenados, calcula su derivada y la recta tangente en un punto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>c) Representación gráfica de curvas en forma polar.</td><td>▪ Construye el trazado de diversas curvas polares.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

La unidad 3, sobre Funciones Vectoriales de una Variable Real, bajo las consideraciones descritas en la Tabla 3.

Tabla 3. *Contenidos, competencias objetivo y resultados en GeoGebra, para la Unidad 3.*

Unidad 3	Competencia objetivo
a) Gráfica de curvas en función de un parámetro.	▪ Traza la gráfica relativa a funciones vectoriales.

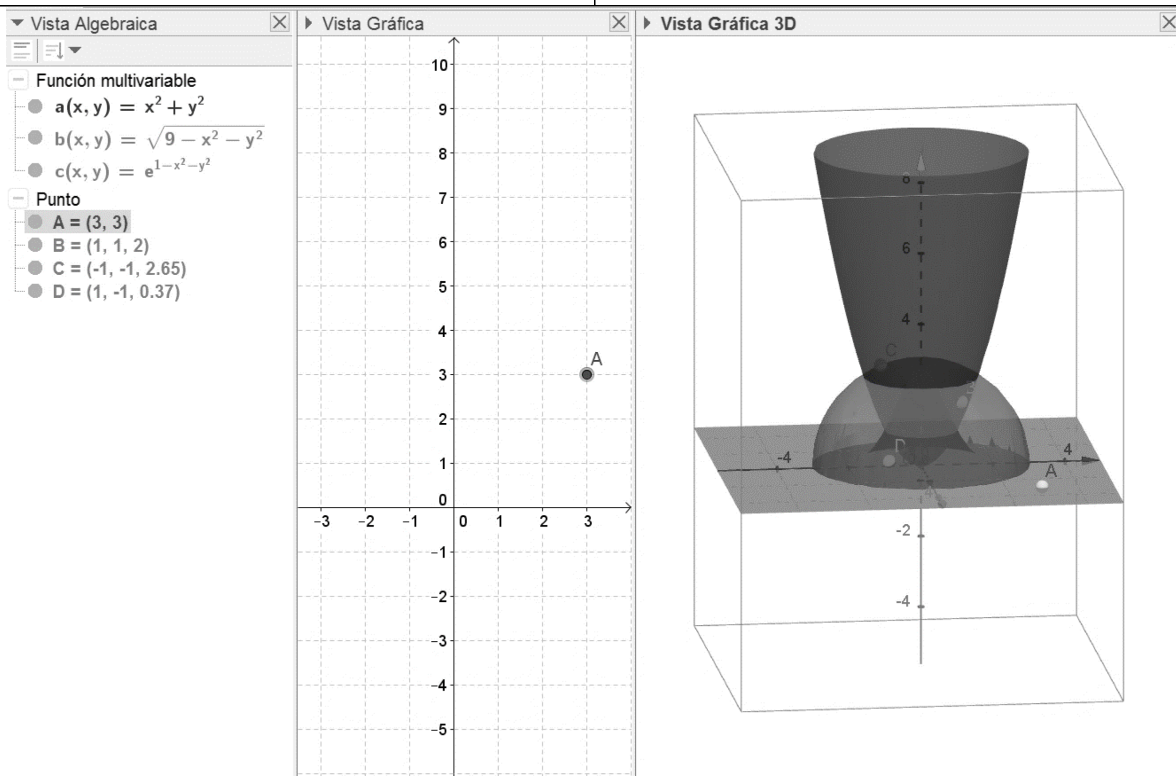
	
b) Derivación, longitud de arco y curvatura de una función vectorial en una variable real.	▪ Visualiza analítica y gráficamente la derivada, la longitud de arco entre dos puntos y la curvatura de una función vectorial en una variable real.
	

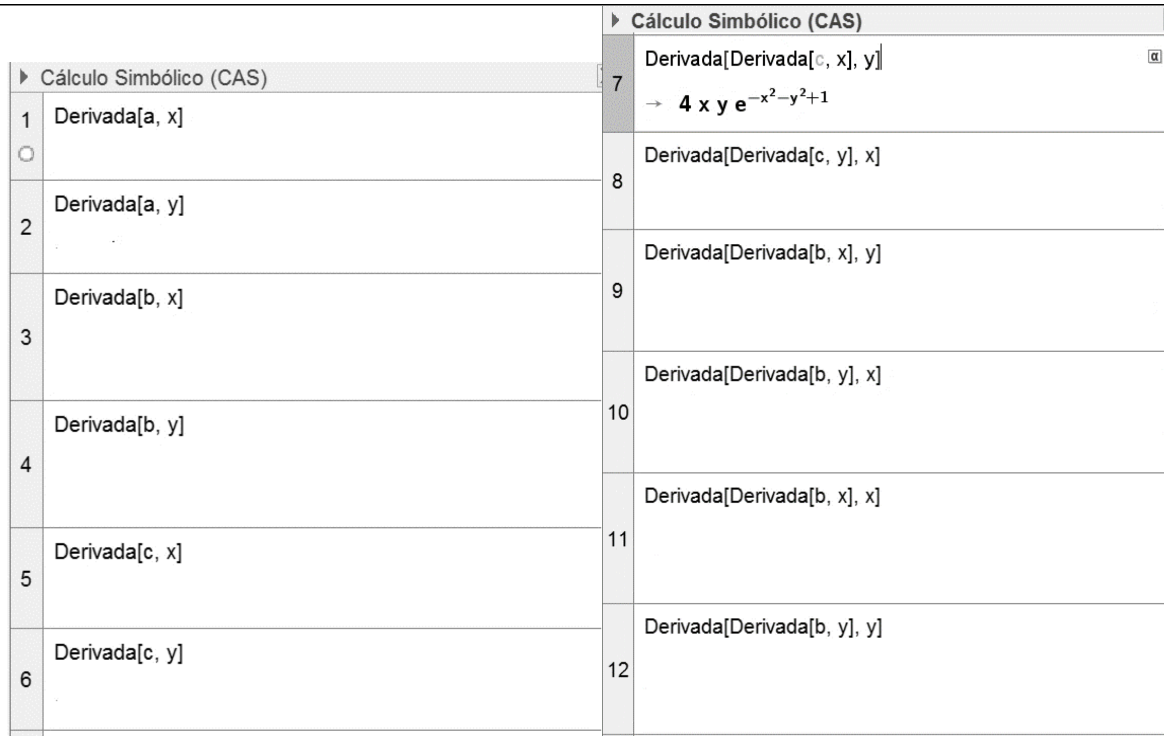
La unidad 4, sobre Funciones Reales de Varias Variables, y se consideró lo descrito en la Tabla 4.

Tabla 4. *Contenidos, competencias objetivo y resultados en GeoGebra, para la Unidad 4.*

Unidad 4	Competencia objetivo
a) Analizar la gráfica de funciones multivariables y sus derivadas.	▪ Construye la gráfica de funciones reales de varias variables. ▪ Representa puntos de coordenadas sobre la gráfica de funciones multivariables

	▪ Opera y representa operaciones entre funciones multivariables. ▪ Calcula derivadas parciales de diversos órdenes.

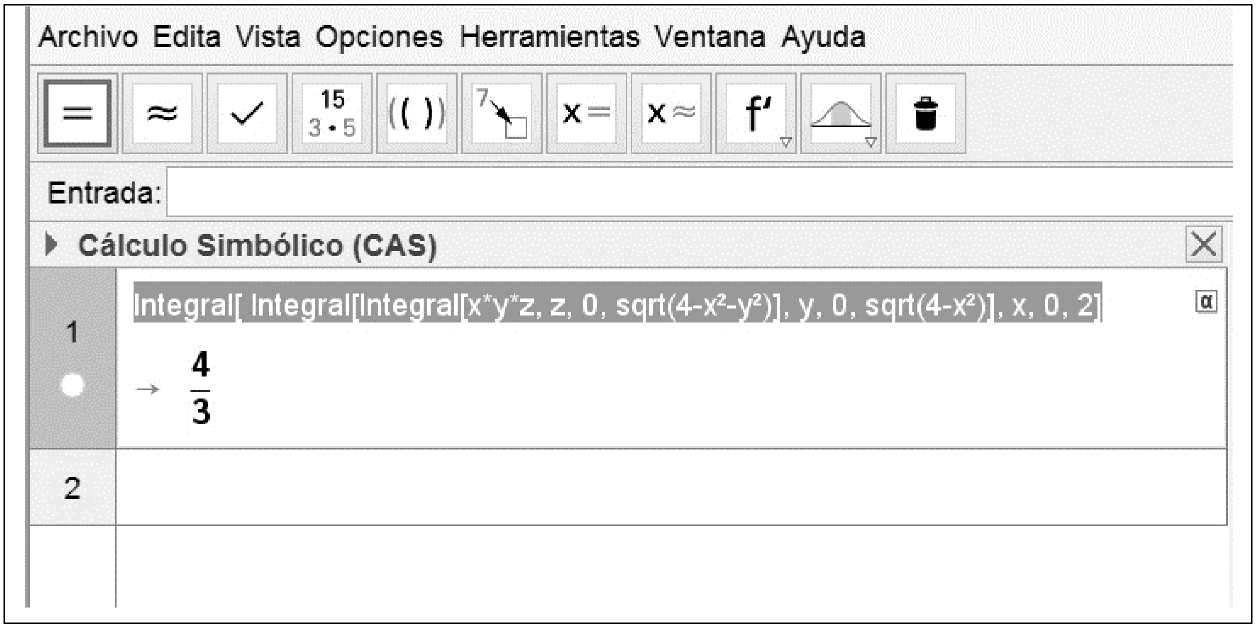




La unidad 5, sobre Integración múltiple, con las consideraciones que se describen en la Tabla 5.

Tabla 5. *Contenidos, competencias objetivo y resultados en GeoGebra, para la Unidad 5.*

Unidad 5	Competencia objetivo
a) Integración de funciones multivariables.	▪ Evalúa la integral doble y triple de funciones multivariables, a partir de un ejemplo dado.
$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz \, dz \, dy \, dx$	



Experimentación

Se ha seleccionado una de las guías de práctica de laboratorio relativa a la unidad 3, la número 8, muestra la experiencia que los estudiantes tuvieron en este escenario de aprendizaje, y se concentra en la tabla 6.

Tabla 6. *Descripción de la Guía de Práctica de Laboratorio 8, utilizando GeoGebra, para la Unidad 3.*

Indicaciones

1. Abre GeoGebra, habilitando la Vista Algebraica, Vista Gráfica y Vista Gráfica 3D (figura 1)… Guardar como apellido1apellido2_guia07funcionvectorial.

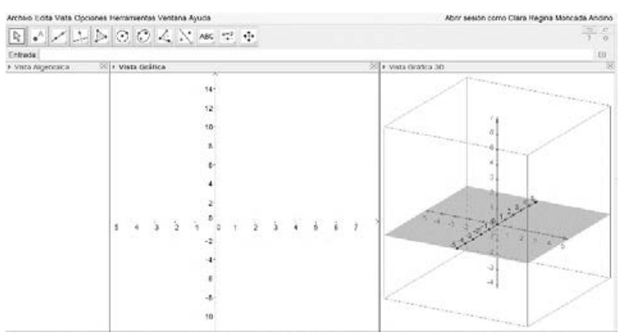


Figura 1. Apariencia de las Vistas

2. Hacer los siguientes en el plano de la Vista Gráfica, la Vista Gráfica 3D es solo para apreciar la gráfica de la función vectorial en ambos escenarios:

a) En la Entrada escribir las funciones f(x) = cos(x); g(x) = sen(x); h(x) = 5; p(x) = x; q(x) = x^2: r(x) = x^3… como se muestra en la figura 2, y que se utilizarán para definir las funciones vectoriales… ocultar las gráficas.

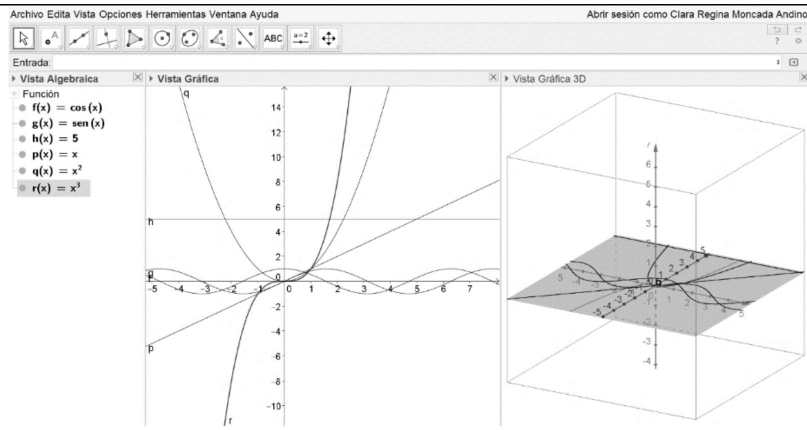


Figura 2. Curvas de las funciones en referencia, dadas en forma explícita.

b) Usando el comando Curva[<Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>], escribir en Entrada, Curva[f(t),g(t), t, 0, 2pi] y enter… cambiar color –rojo- y estilo -4-…(figura 3).

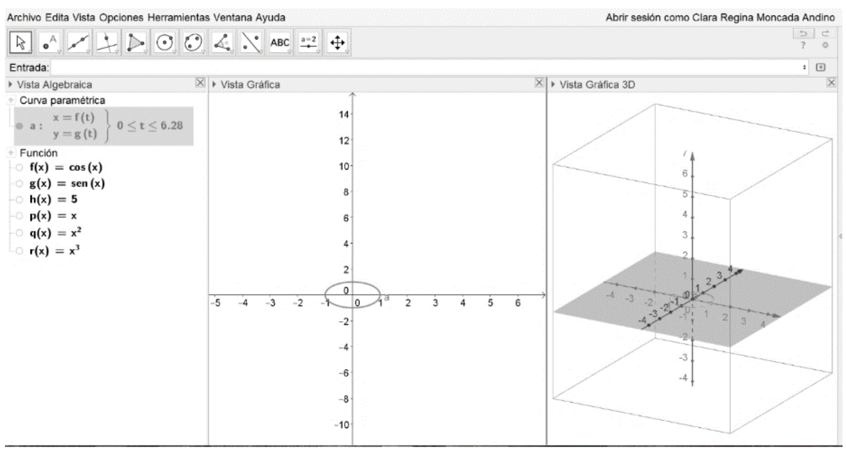


Figura 3. Gráfica de una función vectorial de R en R^2.

c) Usando el comando Curva[<Expresión>, <Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>], escribir en Entrada, Curva[f(t), g(t), h(t), t, 0, 4pi] y enter… cambiar color –azul- y estilo -4-…(figura 4).

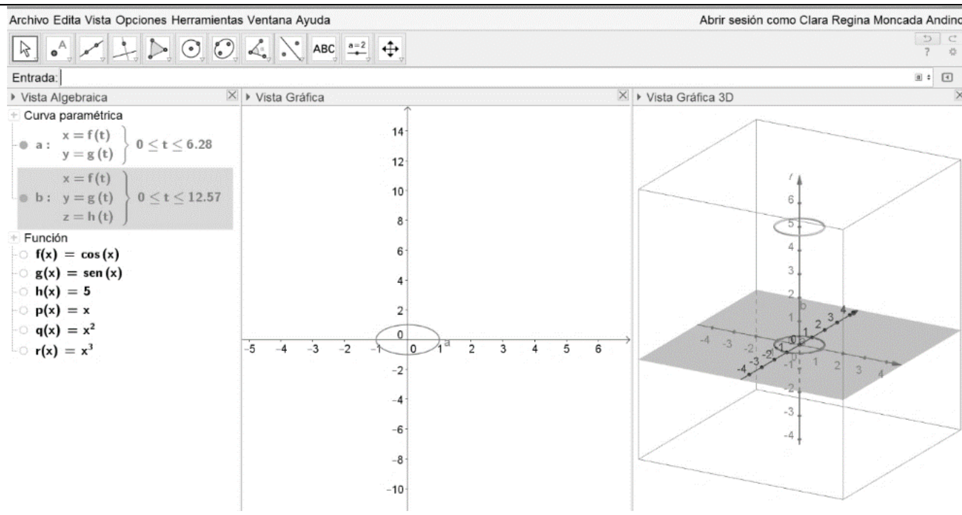


Figura 4. Gráfica de una función vectorial de R en R^3.

d) Modificar h(x) = 2pi, enter… nuevamente, usando el comando Curva[<Expresión>, <Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>], escribir en Entrada, Curva[f(t), g(t), p(t), t, 0, 2pi] y enter… cambiar color –verde- y estilo -4-…(figura 5).

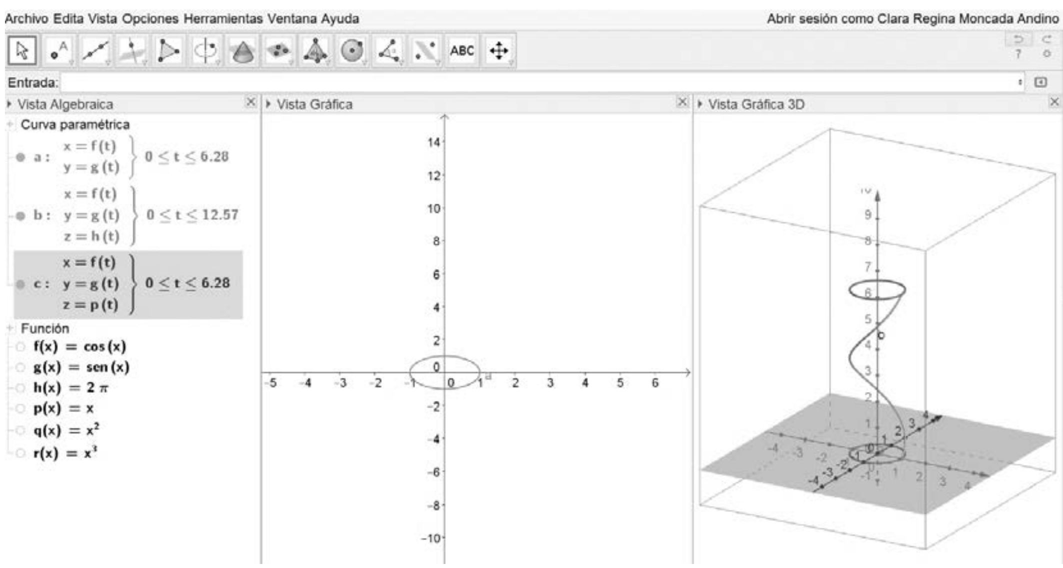


Figura 5. Otra representación de una gráfica de r en R^3.

e) Insertar un punto sobre la curva “c”, teniendo el cuidado de que al hacerlo, en la Vista Algebraica, se resalte la curva seleccionada, evitando con esto que el punto no quede sobre el plano XY pero sí en la curva “c”… con Elige y Mueve desplaza el punto, para verificar que su trayectoria esté sobre la curva “c” (figura 6)… dar color morado y estilo 4 al punto “A”… cambiar las Preferencias de color y estilo de las gráficas de las curvas de las funciones vectoriales “b” y “c”, tal cual se muestra en la figura 6.

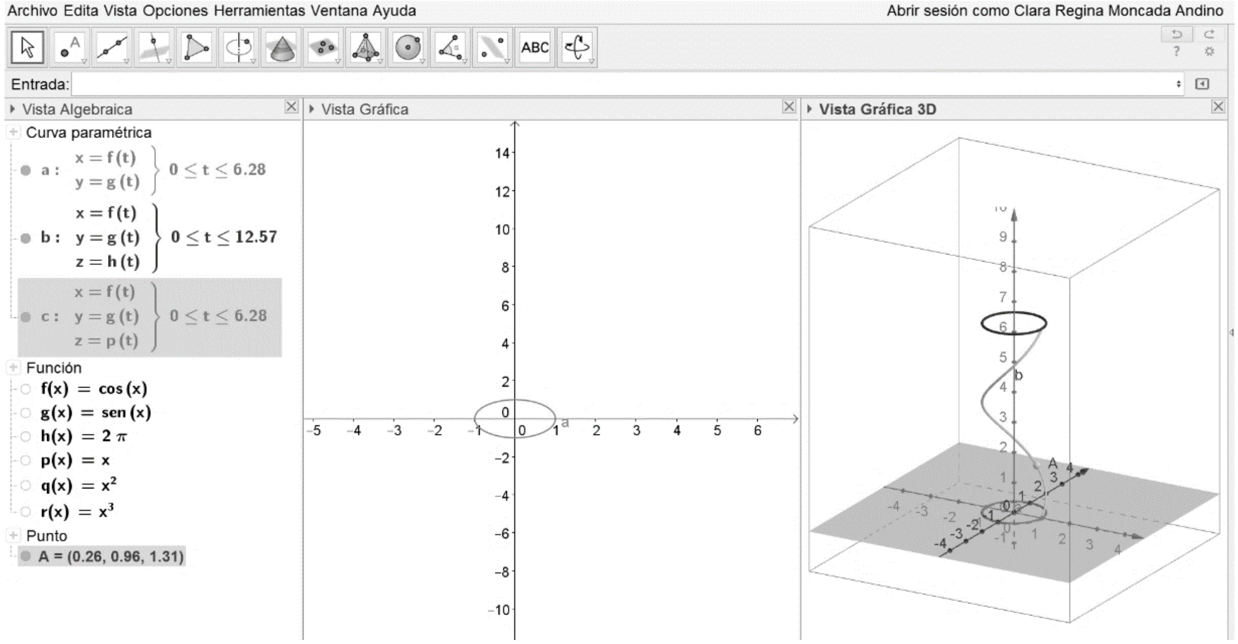


Figura 6. Punto A insertado en la gráfica de la curva "c" y cambio de Preferencias.

f) Con Elige y Mueve, ubicar el punto A al borde de la gráfica de "a" (figura 7)… seguidamente ocultar la gráfica de la curva de la función vectorial "c"… posteriormente dar CLIC derecho sobre el punto A, y seleccionar Rastro y Animación (figura 8)…¿qué observas?...para detener la Animación, seleccionar nuevamente Animación, y para borrar el Rastro, dar CLIC sobre la Vista Gráfica 3D, y con Desplaza Vista Gráfica, ubicarse sobre la Vista 3D y al mover se borrará el rastro dejado por el punto A…¿qué recorrido sigue el punto A al desplazarlo con Elige y Mueve sin Rastro ni Animación?

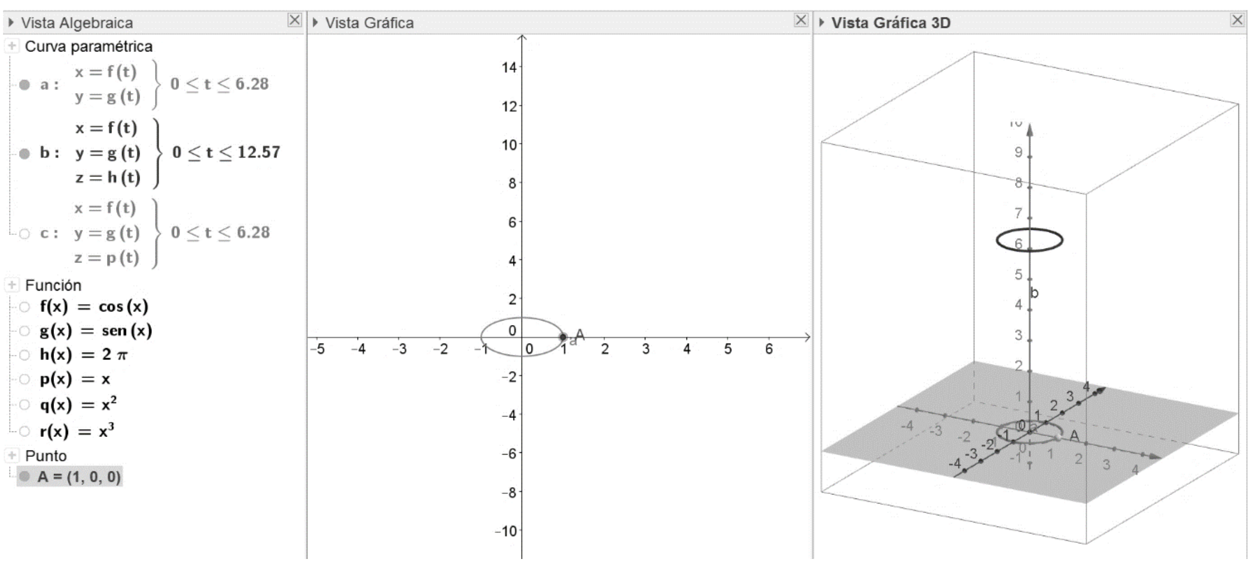


Figura 7. Reubicación del punto A.

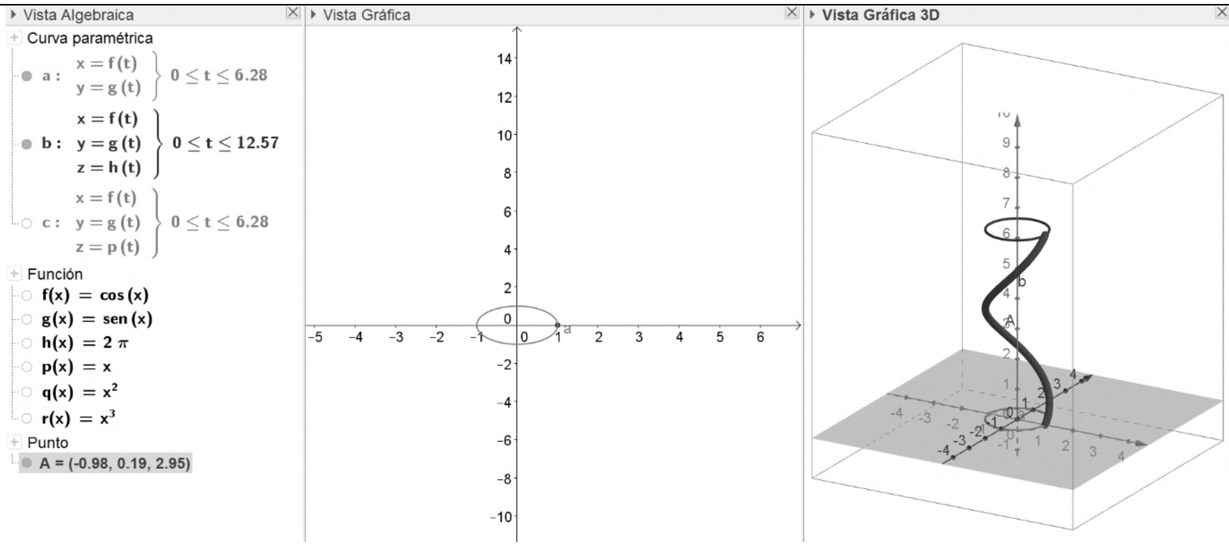


Figura 8. Rastro resultado de la Animación del punto A.

g) Tomando en cuenta los valores permitidos del parámetro, habilitar la Hoja de Cálculo e introducir en ella los valores en los que el parámetro está definido para la curva “c”… recuerda el procedimiento de la Hoja de Cálculo estudiado en guías anteriores… al enviar la evidencia por correo electrónico, además de las conclusiones derivadas de esta actividad, incorpora también la imagen de la figura correspondiente a GeoGebra con la Hoja de Cálculo que hayas realizado… Guardar.

h) Ocultar la Hoja de Cálculo, todas las gráficas y puntos…explora con las siguientes definiciones de funciones vectoriales:

i. Curva[p(t), q(t), t, -1, 3]

ii. Curva[p(t), q(t), r(t), t, -1, 2]

iii. Explora con otras combinaciones, utilizando las mismas funciones, y otras funciones, tales como exponenciales, racionales, logarítmicas, etc., pudiéndote apoyar en las funciones que están en el material de apoyo de la unidad 3.

3. ¿Cuál ha sido tu experiencia de ésta práctica de laboratorio?... en el contenido del mensaje del correo que envíes, dar respuesta a todos cuestionamientos planteados en esta guía, serán de mucha utilidad para la realimentación… también se aceptan sugerencias y recomendaciones para la mejora de las guías… recuerda SIEMPRE, incluir en el mensaje del correo que envías con las evidencias adjuntas, las respuestas a los cuestionamientos que se hacen a través del contenido de la guía de laboratorio. Gracias.

Resultados

Entre los resultados generales, el laboratorio fue un detonante motivacional entre los estudiantes, al permitir la mejor comprensión de los contenidos, la visualización de los mismos, tanto en el plano como el espacio, gracias a los ambientes de visualizaciones gráficas que el software dinámico de GeoGebra tiene, además de un mejor logro en los resultados obtenidos en la acreditación de la asignatura, del 60% y 80%, en relación a otros semestres y estudiantes de las mismas carreras, que solo acreditaban entre el 40% y 52%.

Sumado a ello, los estudiantes externaron su satisfacción por el laboratorio, porque se les hizo más fácil aprender, como también atractiva, novedosa e innovadora, la presentación de los contenidos de la materia de Cálculo Vectorial; para ellos se muestran dos respuestas a una hoja de trabajo.

En ambiente de GeoGebra se ha concentrado, en la tabla 7, una de las actividades integradora de las guías de laboratorio de la Unidad 1, seguido de respuestas de diferentes estudiantes relativos a la misma situación planteados por resolver, que en general han sido contestadas en forma parecida.

Tabla 7. *Algunas respuestas a la hoja de trabajo de la actividad integradora, para la Unidad* 1.

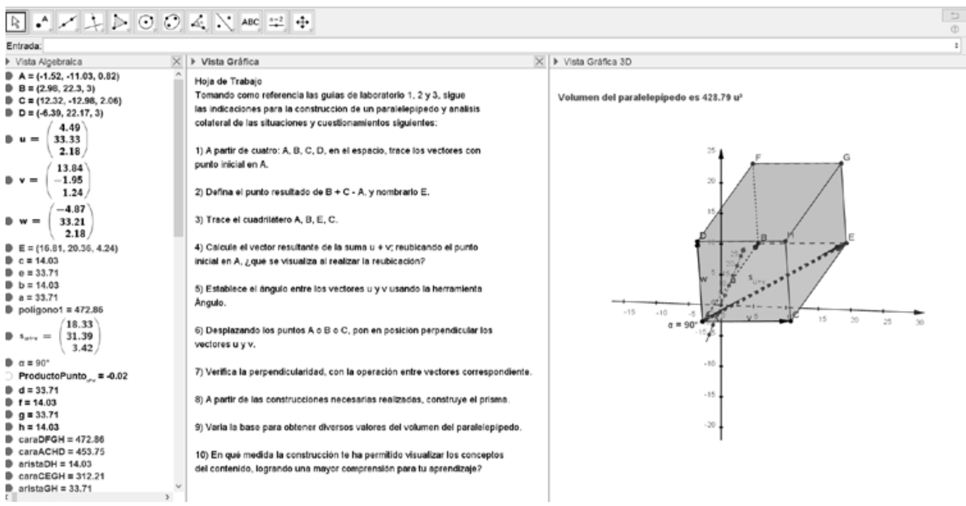


Figura 9. Concentrado en Vistas de GeoGebra de actividad integradora para hoja de trabajo.

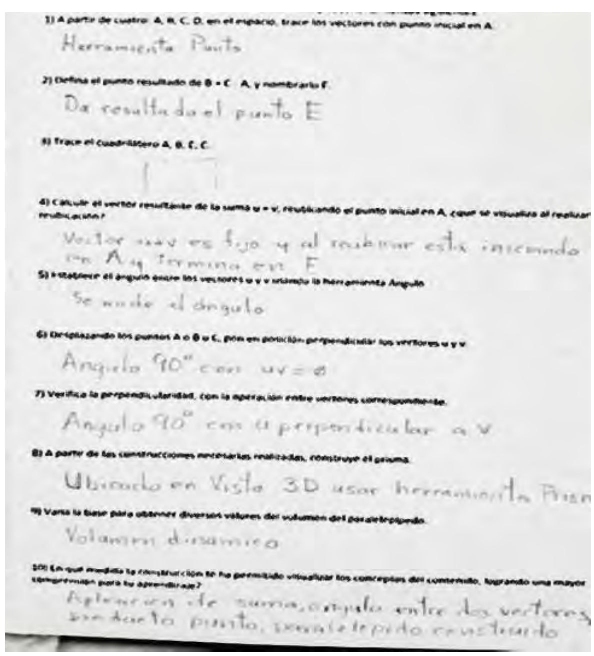


Figura 10. Respuestas del Estudiante 1.

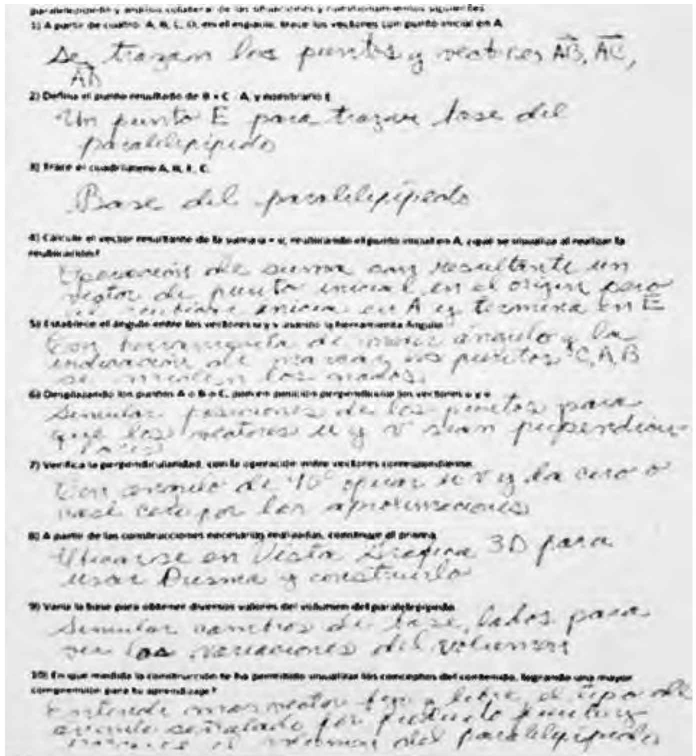

1) A partir de cuatro A, B, C, D, en el espacio, trace los vectores con punto inicial en A.
Se trazan los puntos y vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$
2) Defina el punto resultado de B + C - A, y nombrarlo E.
Un punto E para trazar base del paralelepípedo
3) Trace el cuadrilátero A, B, E, C.
Base del paralelepípedo
4) Calcule el vector resultante de la suma u + v, reubicando el punto inicial en A, ¿qué se visualiza al realizar la reubicación?
Operación de suma con resultante un vector de punto inicial en el origen pero se cambia inicia en A y termina en E
5) Establece el ángulo entre los vectores u y v usando la herramienta Ángulo.
Con herramienta de mover ángulo y la indicación de marcar los puntos C, A, B se miden los grados
6) Desplazando los puntos A o B o C, pon en posición perpendicular los vectores u y v.
Simular posiciones de los puntos para que los vectores u y v sean perpendiculares
7) Verifica la perpendicularidad, con la operación entre vectores correspondiente.
Con ángulo de 90° opera u·v y da cero o real cero por las aproximaciones
8) A partir de las construcciones necesarias realizadas, construye el prisma.
Ubicarse en Vista Gráfica 3D para usar Prisma y construirlo
9) Varía la base para obtener diversos valores del volumen del paralelepípedo.
Simular cambios de base, lados para ver las variaciones del volumen
10) En qué medida la construcción te ha permitido visualizar los conceptos del contenido, logrando una mayor comprensión para tu aprendizaje?
Entiendo cómo un vector fijo a libre, el tipo de ángulo señalado por producto punto y [illegible] el volumen del paralelepípedo

Figura 11. Respuestas del Estudiante 2.

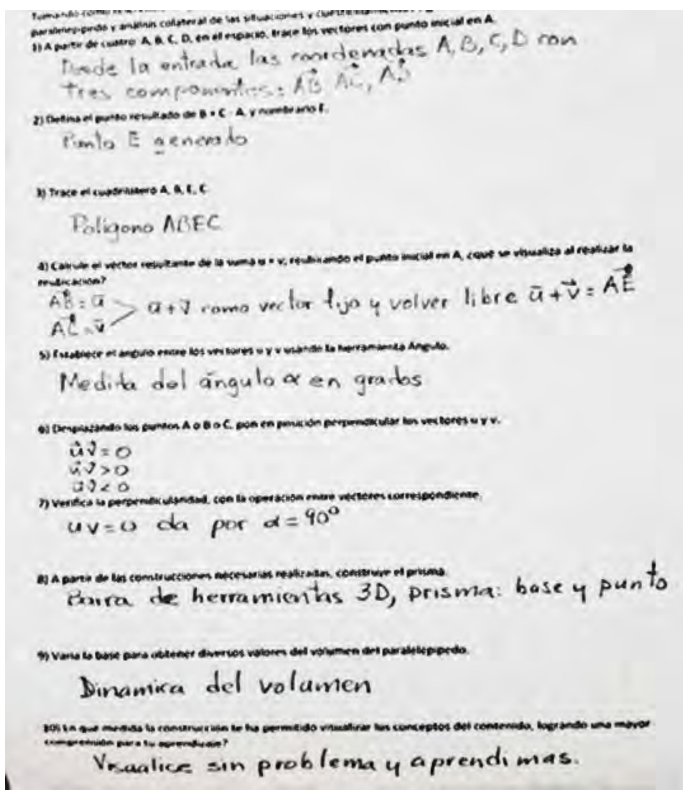
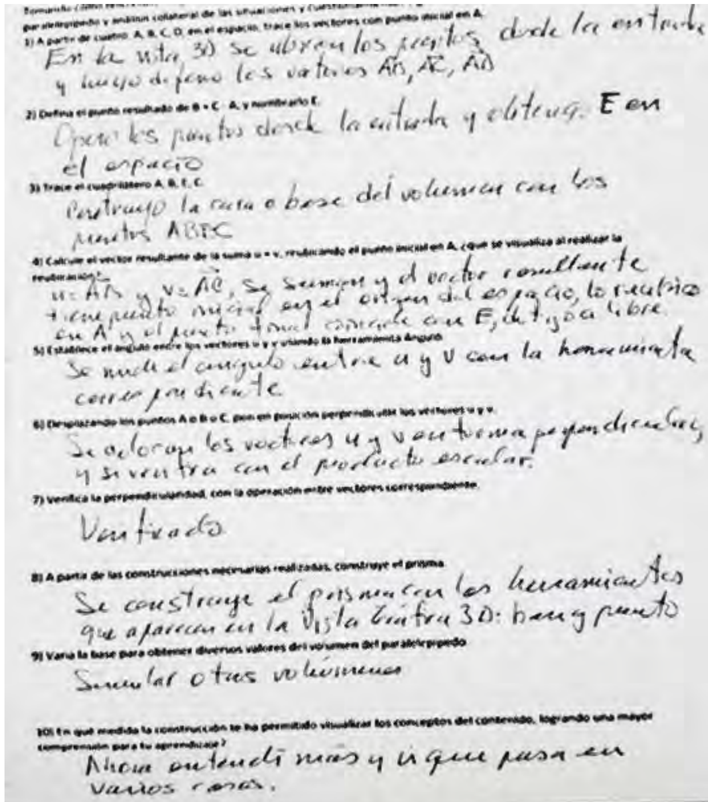

paralelepípedo y análisis colateral de las situaciones y cuestionamientos siguientes.
1) A partir de cuatro A, B, C, D, en el espacio, trace los vectores con punto inicial en A.
Desde la entrada las coordenadas A, B, C, D con tres componentes: $\vec{AB}$ $\vec{AC}$, $\vec{AD}$
2) Defina el punto resultado de B + C - A, y nombrarlo E.
Punto E generado
3) Trace el cuadrilátero A, B, E, C
Polígono ABEC
4) Calcule el vector resultante de la suma u + v, reubicando el punto inicial en A, ¿qué se visualiza al realizar la reubicación?
$\vec{AB} = \bar{a}$, $\vec{AC} = \vec{v}$ > $a + \vec{v}$ como vector fijo y volver libre $\bar{a} + \vec{v} = \vec{AE}$
5) Establece el ángulo entre los vectores u y v usando la herramienta Ángulo.
Medida del ángulo α en grados
6) Desplazando los puntos A o B o C, pon en posición perpendicular los vectores u y v.
$\hat{u}\vec{v} = 0$
$\hat{u}\vec{v} > 0$
$\hat{u}\vec{v} < 0$
7) Verifica la perpendicularidad, con la operación entre vectores correspondiente.
$uv = 0$ da por $\alpha = 90^o$
8) A partir de las construcciones necesarias realizadas, construye el prisma.
Barra de herramientas 3D, prisma: base y punto
9) Varía la base para obtener diversos valores del volumen del paralelepípedo.
Dinamica del volumen
10) En qué medida la construcción te ha permitido visualizar los conceptos del contenido, logrando una mayor comprensión para tu aprendizaje?
Visualice sin problema y aprendi mas.

Figura 12. Respuestas del Estudiante 3.



1) A partir de cuatro A, B, C, D, en el espacio, trace los vectores con punto inicial en A.

En la vista 3D se abren los puntos desde la entrada y luego defino los vectores AB, AC, AD

2) Defina el punto resultado de B + C - A, y nombrarlo E.

Opero los puntos desde la entrada y obtengo E en el espacio

3) Trace el cuadrilátero A, B, E, C

Construyo la cara o base del volumen con los puntos ABEC

4) Calcule el vector resultante de la suma u + v, reubicando el punto inicial en A, ¿qué se visualiza al realizar la reubicación?

u=AB y v=AC, se suman y el vector resultante tiene punto inicial en el origen del espacio, lo reubico en A y el punto final coincide con E, de fijo a libre

5) Establece el ángulo entre los vectores u y v usando la herramienta Ángulo

Se mide el ángulo entre u y v con la herramienta correspondiente

6) Desplazando los puntos A o B o C, pon en posición perpendicular los vectores u y v.

Se colocan los vectores u y v en forma perpendicular, y se muestra con el producto escalar.

7) Verifica la perpendicularidad, con la operación entre vectores correspondiente.

Verificado

8) A partir de las construcciones necesarias realizadas, construye el prisma

Se construye el prisma con las herramientas que aparecen en la Vista Gráfica 3D: barra punto

9) Varía la base para obtener diversos valores del volumen del paralelepípedo

Simular otros volúmenes

10) En qué medida la construcción te ha permitido visualizar los conceptos del contenido, logrando una mayor comprensión para tu aprendizaje?

Ahora entendí más y lo que pasa en varios casos.

Figura 13. Respuestas del Estudiante 4.

Las hojas de respuesta anteriores, muestran el registro que va haciendo el estudiante en la medida que avanza al realizar la actividad integradora en GeoGebra, y culmina con la construcción del paralelepípedo.

Todos los estudiantes fueron respondiendo y concluyeron de manera apropiada y aceptable a la actividad en GeoGebra; cada uno utilizó diferentes valores de coordenadas, pero con la construcción del paralelepípedo, las simulaciones para visualizar la resultante de la suma, la igualdad del vector resultante como fijo o libre, la consistencia del ángulo recto entre vectores perpendiculares, la variante del valor del volumen del paralelepípedo para base diferentes, las vistas laterales, desde arriba o abajo y en los distintos planos del volumen resultante proyectado, el estudiante manipuló las variantes y aclaró dudas, además de confirmar la comprensión del contenido de esta otra y primera unidad temática.

En la figura 14 se muestra un protocolo de construcción resultante de uno de los archivos ggb recibidos, como evidencia a la hoja de trabajo en cuestión.

Este escenario de aprendizaje tuvo una cobertura de aproximadamente doscientos cincuenta estudiantes, que por limitaciones del extenso se muestran dos respuestas, ya que las restantes hojas de trabajo guardan diferencias principalmente de redacción pero en esencia se logra la construcción del paralelepípedo, el reforzamiento del aprendizaje y respuesta a los cuestionamientos, sin alejarse del contexto de este trabajo.

Se ha seleccionado una unidad temática diferente al apartado de experimentación, para dar una visión más amplia de la estrategia, diseño y ambiente de aprendizaje llevado a cabo.

Esta experiencia, es parte del trabajo de campo realizado para constituir elementos base que oriente el trabajo de investigación del Cuerpo Académico: Competencias y Nuevas Tecnologías, que impacte en la formación integral del estudiante, ya que hay un aumento notable motivacional del estudiante hacia el aprendizaje de las matemáticas y un cambio positivo en las actitudes hacia la materia al utilizar tecnología, según Rojano (2005, pp.25) y Ursini (2004).

Conclusiones

Esta experiencia piloto llevó a concluir la importancia de la incorporación de estrategias integrales en el proceso educativo, y la urgente necesidad del uso e incorporación de las tecnologías de la información, que en este trabajo se centró en el software dinámico de GeoGebra, que ha destacado por su versatilidad para enseñar y aprender matemáticas, siendo además software libre y compatible en diferentes sistemas operativos, adaptable a diversas plataformas.

Además, los estudiantes de la prueba piloto se involucraron más en cuanto a su participación en el aula y entrega de actividades, pudiendo resolver problemas de aplicación, de mayor grado de dificultad, logrando los resultados expuestos en el apartado anterior.

La estrategia del uso de recursos tecnológicos, como GeoGebra, en el proceso educativo, soporta a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas, sin que implique inversión alguna que adelgace el presupuesto de las instituciones educativas, y al alcance de docentes y los estudiantes.

Los logros en el aprendizaje de la asignatura, Cálculo Vectorial, tuvieron un incremento sustancial a bien de los estudiantes, repercutiendo favorablemente en los indicadores institucionales.

Utilizar GeoGebra como recurso, dio impulso a diversificar actividades dinámicas e innovar la práctica docente, lo que dio al estudiante la posibilidad y opciones para manipular objetos generados por los conceptos en estudio para realizar construcciones que le permitieron visualizar perspectivas desde diversos ángulos, logrando una mayor comprensión y aprendizaje de la materia más allá de las expectativas y competencias de las intenciones del programa oficial.

Referencias bibliográficas

Caamaño, A. (2011). *Didáctica de la Física y la Química*. España: Grao.

Instituto GeoGebra Internacional. (2015). GeoGebra. Matemáticas dinámica para aprender a enseñar. (2015). Recuperado entre Enero y Junio, 2015; de http://www.geogebra.org/.

Instituto Tecnológico de Zacatepec. (2015). Programa Institucional de Innovación y Desarrollo. México. Recuperado en Octubre, 2015; de http://www.itzacatepec.edu.mx/archivos/temas_interes/DocRectoresITZ/PIID-2013-2018-itz-n.pdf.

Joyanes, A. L. (2013). *Computación en la nube. Estrategias de cloud computing en las empresas*. México: Alfaguara.

Moncada, C., Ochoa, D. y Coronel, J. (2014). Implementar tecnologías emergentes como recursos para la mejora del desempeño docente en su formación continua. Enero-Junio, 2014, 2, 2. Junio, 2014, de CIFID-2014 ISSN: 2007-7963 Base de datos.

Moncada, C.; Ochoa, D.; López, E., et al. (2014). Mejora del desempeño docente a través del uso de tecnologías emergentes. Investigación, aplicación y tendencias educativas en instituciones de educación superior en Iberoamérica. Editorial Umbral Digital. (276-281). México: Umbral.

Petrosino, J. (2013). *Integración de la tecnología educativa en el aula: enseñando física con las TIC*. Argentina: Cengage Learning.

Rojano, Ma. T. (2004-2005). *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelo de Transformación de las prácticas y la interacción social en el aula*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados CINVESTAV-IPN. Departamento de Matemáticas Educativa. Dirección General de Materiales de la Subsecretaría de Educación Básica, de la Secretaría de Educación Pública. Capítulo 2 (pp.25-41). México. Recuperado en julio, 2015, del sitio web http://www.matedu.cinvestav.mx/~asacristan/EFIT-EMAT_RojanoEd_06.pdf.

Tecnológico Nacional de México. (2010). Planes de estudio 2008-2015. Recuperado en enero, 2015, del sitio web http://www.tecnm.mx/academica/normateca-de-la-direccion-de-docencia. México.

Ursini, S., Sánchez, G., Butto, C., Orendain, M. (2004). *El uso de la tecnología en el aula de matemáticas: diferencias de género desde la perspectiva de los docentes*. Enseñanza de las Ciencias, Vol. 22(3), (pp. 409-424); Barcelona, España. Recuperado en julio, 2015, del sitio web http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21991

Nº	Nombre	Descripción	Valor	Definición
1	Punto A		A = (-1.52, -11.03, 0.82)	
2	Punto B		B = (2.98, 22.3, 3)	
3	Punto C		C = (12.32, -12.98, 2.06)	
4	Punto D		D = (-6.39, 22.17, 3)	
5	**Vector u**	**Vector[A, B]**	**u = (4.49, 33.33, 2.18)**	**Vector[A, B]**
6	**Vector v**	**Vector[A, C]**	**v = (13.84, -1.95, 1.24)**	**Vector[A, C]**
7	**Vector w**	**Vector[A, D]**	**w = (-4.87, 33.21, 2.18)**	**Vector[A, D]**
8	Punto E	B + C - A	E = (16.81, 20.36, 4.24)	B + C - A
9	Cuadrilátero polígono1	Polígono A, B, E, C	polígono1 = 472.86	Polígono[A, B, E, C]
9	Segmento a	Segmento [A, B] de Cuadrilátero polígono1	a = 33.71	Segmento[A, B, polígono1]
9	Segmento b	Segmento [B, E] de Cuadrilátero polígono1	b = 14.03	Segmento[B, E, polígono1]
9	Segmento e	Segmento [E, C] de Cuadrilátero polígono1	e = 33.71	Segmento[E, C, polígono1]
9	Segmento c	Segmento [C, A] de Cuadrilátero polígono1	c = 14.03	Segmento[C, A, polígono1]
10	Vector s_{u+v}	u + v	s_{u+v} = (18.33, 31.39, 3.42)	u + v
11	Ángulo α	Ángulo entre C, A, B	α = 90°	Ángulo[C, A, B]
12	**Número ProductoPunto$_{u \cdot v}$**	**u v**	**ProductoPunto$_{u \cdot v}$ = -0.02**	**u v**
13	**Segmento d**	**Segmento [A, B]**	**d = 33.71**	**Segmento[A, B]**
14	**Segmento f**	**Segmento [B, E]**	**f = 14.03**	**Segmento[B, E]**
15	**Segmento g**	**Segmento [E, C]**	**g = 33.71**	**Segmento[E, C]**
16	**Segmento h**	**Segmento [C, A]**	**h = 14.03**	**Segmento[C, A]**

1

Nº	Nombre	Descripción	Valor	Definición
17	Prisma i	Prisma[polígono1, D]	i = 428.79	Prisma[polígono1, D]
17	Punto F	Prisma[polígono1, D]	F = (-1.9, 55.51, 5.18)	Prisma[polígono1, D]
17	Punto G	Prisma[polígono1, D]	G = (11.94, 53.56, 6.42)	Prisma[polígono1, D]
17	Punto H	Prisma[polígono1, D]	H = (7.45, 20.23, 4.24)	Prisma[polígono1, D]
17	Segmento aristaBF	Segmento [B, F] de Prisma i	aristaBF = 33.63	Segmento[B, F, i]
17	Segmento aristaDF	Segmento [F, D] de Prisma i	aristaDF = 33.71	Segmento[F, D, i]
17	Segmento aristaAD	Segmento [D, A] de Prisma i	aristaAD = 33.63	Segmento[D, A, i]
17	Cuadrilátero caraABFD	Polígono A, B, F, D	caraABFD = 312.21	Polígono[A, B, F, D, i]
17	Segmento aristaEG	Segmento [E, G] de Prisma i	aristaEG = 33.63	Segmento[E, G, i]
17	Segmento aristaFG	Segmento [G, F] de Prisma i	aristaFG = 14.03	Segmento[G, F, i]
17	Cuadrilátero caraBEGF	Polígono B, E, G, F	caraBEGF = 453.75	Polígono[B, E, G, F, i]
17	Segmento aristaCH	Segmento [C, H] de Prisma i	aristaCH = 33.63	Segmento[C, H, i]
17	Segmento aristaGH	Segmento [H, G] de Prisma i	aristaGH = 33.71	Segmento[H, G, i]
17	Cuadrilátero caraCEGH	Polígono E, C, H, G	caraCEGH = 312.21	Polígono[E, C, H, G, i]
17	Segmento aristaDH	Segmento [D, H] de Prisma i	aristaDH = 14.03	Segmento[D, H, i]
17	Cuadrilátero caraACHD	Polígono C, A, D, H	caraACHD = 453.75	Polígono[C, A, D, H, i]
17	Cuadrilátero caraDFGH	Polígono D, F, G, H	caraDFGH = 472.86	Polígono[D, F, G, H, i]
18	**Segmento j**	**Segmento [B, F]**	**j = 33.63**	**Segmento[B, F]**
19	**Segmento k**	**Segmento [F, D]**	**k = 33.71**	**Segmento[F, D]**
20	**Segmento l**	**Segmento [D, A]**	**l = 33.63**	**Segmento[D, A]**
21	Cuadrilátero polígono2	Polígono A, B, F, D	polígono2 = 312.21	Polígono[A, B, F, D]
21	Segmento a_1	Segmento [A, B] de Cuadrilátero polígono2	a_1 = 33.71	Segmento[A, B, polígono2]
21	Segmento b_1	Segmento [B, F] de Cuadrilátero polígono2	b_1 = 33.63	Segmento[B, F, polígono2]
21	Segmento f_1	Segmento [F, D] de Cuadrilátero polígono2	f_1 = 33.71	Segmento[F, D, polígono2]
21	Segmento d_1	Segmento [D, A] de Cuadrilátero polígono2	d_1 = 33.63	Segmento[D, A, polígono2]
22	**Segmento m**	**Segmento [E, G]**	**m = 33.63**	**Segmento[E, G]**
23	**Segmento n**	**Segmento [G, F]**	**n = 14.03**	**Segmento[G, F]**

2

Nº	Nombre	Descripción	Valor	Definición
24	Cuadrilátero polígono3	Polígono B, E, G, F	polígono3 = 453.75	Polígono[B, E, G, F]
24	Segmento b_2	Segmento [B, E] de Cuadrilátero polígono3	b_2 = 14.03	Segmento[B, E, polígono3]
24	Segmento e_1	Segmento [E, G] de Cuadrilátero polígono3	e_1 = 33.63	Segmento[E, G, polígono3]
24	Segmento g_1	Segmento [G, F] de Cuadrilátero polígono3	g_1 = 14.03	Segmento[G, F, polígono3]
24	Segmento f_2	Segmento [F, B] de Cuadrilátero polígono3	f_2 = 33.63	Segmento[F, B, polígono3]
25	Segmento p	Segmento [C, H]	p = 33.63	Segmento[C, H]
26	Segmento q	Segmento [H, G]	q = 33.71	Segmento[H, G]
27	Cuadrilátero polígono4	Polígono E, C, H, G	polígono4 = 312.21	Polígono[E, C, H, G]
27	Segmento e_2	Segmento [E, C] de Cuadrilátero polígono4	e_2 = 33.71	Segmento[E, C, polígono4]
27	Segmento c_1	Segmento [C, H] de Cuadrilátero polígono4	c_1 = 33.63	Segmento[C, H, polígono4]
27	Segmento h_1	Segmento [H, G] de Cuadrilátero polígono4	h_1 = 33.71	Segmento[H, G, polígono4]
27	Segmento g_2	Segmento [G, E] de Cuadrilátero polígono4	g_2 = 33.63	Segmento[G, E, polígono4]
28	Segmento r	Segmento [D, H]	r = 14.03	Segmento[D, H]
29	Cuadrilátero polígono5	Polígono C, A, D, H	polígono5 = 453.75	Polígono[C, A, D, H]
29	Segmento c_2	Segmento [C, A] de Cuadrilátero polígono5	c_2 = 14.03	Segmento[C, A, polígono5]
29	Segmento a_2	Segmento [A, D] de Cuadrilátero polígono5	a_2 = 33.63	Segmento[A, D, polígono5]
29	Segmento d_2	Segmento [D, H] de Cuadrilátero polígono5	d_2 = 14.03	Segmento[D, H, polígono5]
29	Segmento h_2	Segmento [H, C] de Cuadrilátero polígono5	h_2 = 33.63	Segmento[H, C, polígono5]
30	Cuadrilátero polígono6	Polígono D, F, G, H	polígono6 = 472.86	Polígono[D, F, G, H]
30	Segmento d_3	Segmento [D, F] de Cuadrilátero polígono6	d_3 = 33.71	Segmento[D, F, polígono6]
30	Segmento f_3	Segmento [F, G] de Cuadrilátero polígono6	f_3 = 14.03	Segmento[F, G, polígono6]
30	Segmento g_3	Segmento [G, H] de Cuadrilátero polígono6	g_3 = 33.71	Segmento[G, H, polígono6]
30	Segmento h_3	Segmento [H, D] de Cuadrilátero polígono6	h_3 = 14.03	Segmento[H, D, polígono6]
31	Número volumeni	Volumen[i]	volumeni = 428.79	Volumen[i]
32	Texto Textoi	"Volumen de " + (Nombre[i]) + " = " + volumeni	"Volumen de i = 428.79"	"Volumen de " + (Nombre[i]) + " = " + volumeni
33	Punto Puntoi	Punto sobre i	Puntoi = (7.45, 20.23, 4.24)	Punto[i]
34	Texto texto1	"Volumen del paralelepípedo es " + i + " u^3"	"Volumen del paralelepípedo es 428.79 u^3"	"Volumen del paralelepípedo es " + i + " u^3"
35	Texto texto2		"Hoja de TrabajoTomando como referencia la...	

3

Figura 14. Respuestas del Estudiante 2.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

EL USO DE LA CALCULADORA EN PROBLEMAS DE JERARQUÍA DE OPERACIONES EN EL NIVEL SUPERIOR

[1]María de la Luz Núñez Orta, [2]Elvira Borjón Robles, [1]Nancy Janeth Calvillo Guevara.

[1]Instituto Tecnológico Superior de Jerez, [2]Universidad Autónoma de Zacatecas, México

luznunez1@hotmail.com, *eborjon@matematicas.reduaz.mx*, *nancycalvillo@gmail.com*

Para citar este artículo:

Núñez, M. L., Borjón, E. y Calvillo, N. J. (2016). El uso de la calculadora en problemas de jerarquía de operaciones en el nivel superior. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

EL USO DE LA CALCULADORA EN PROBLEMAS DE JERARQUÍA

DE OPERACIONES EN EL NIVEL SUPERIOR

[1]María de la Luz Núñez Orta, [2]Elvira Borjón Robles, [1]Nancy Janeth Calvillo Guevara
[1]Instituto Tecnológico Superior de Jerez, [2]Universidad Autónoma de Zacatecas, México
luznunez1@hotmail.com, eborjon@matematicas.reduaz.mx, nancycalvillo@gmail.com

Palabras clave: jerarquía de operaciones, signos de agrupación.

Resumen

Se ha observado que los alumnos llegan a la Licenciatura en Administración del Instituto Tecnológico Superior de Jerez, cometiendo errores cuando trabajan problemas que requieren utilizar la jerarquía de operaciones y los signos de agrupación, hecho que los lleva a tener dificultades durante el transcurso de la carrera. Por esta razón, el propósito de este trabajo fue aplicar una herramienta didáctica que ayudará a los estudiantes del nivel superior con dicho problema. La investigación fue realizada en dos sesiones de 50 minutos, con 15 alumnos de esta institución. Como sustento se consideró lo propuesto por la teoría de situaciones didácticas y la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1998). Dentro de los resultados se logró que la mayoría de los estudiantes reflexionaran acerca del uso de la Jerarquía de Operaciones y los signos de agrupación, para evitar los errores en el resultado final.

Introducción

El tema de Jerarquía de Operaciones, es introducido a partir del segundo grado de secundaria, y es importante desde este momento, hacerle saber al alumno que si no respeta dicha Jerarquía al resolver operaciones compuestas, los resultados serán diferentes. Al inicio de cursos de la Licenciatura en Administración del Instituto Tecnológico Superior de Jerez, se presenta este tema con el fin de darle la utilidad necesaria en las diferentes materias donde el alumno requiere aplicarla.

La importancia de la Jerarquía de Operaciones y el uso de los signos de agrupación, no radica únicamente en que son reglas básicas para resolver problemas aritméticos, sino que es indispensable conocerlas en los cursos de álgebra, pues en los semestres subsecuentes llevarán materias donde seguirán usándolas.

Unas de las primeras materias son: Estadística, Métodos cuantitativos, Matemáticas financieras, entre otras. Un ejemplo de lo anterior se encuentra en Estadística, en la unidad tres, medidas de posición y variación para datos agrupados, se utiliza la siguiente fórmula para determinar la mediana ($Xmed$), que es el valor del término medio que divide una distribución de datos en dos partes iguales:

$$Xmed = Li + \left[\frac{\left(\frac{n}{2}\right) - Fme - 1}{fme}\right](A)$$

dónde:

Li = Límite inferior de la clase que contiene la mediana.

n = Número de datos de la muestra.

$Fme - 1$ = Sumatoria de las frecuencias anteriores a la clase en donde se encuentra la mediana.

$fme =$ Frecuencia de la clase en donde se encuentra la mediana.

$A =$ Amplitud de clase

Cuando utilizan la fórmula anterior, la mayoría de los alumnos realizan las operaciones de izquierda a derecha, olvidando que primero deberían realizar los procedimientos que están dentro de los paréntesis cuadrados, luego el producto y al final la suma. Es decir, efectuar la operación $\left(\frac{n}{2}\right)$ y restar lo obtenido al valor que se obtiene de $(Fme - 1)$. Este resultado se dividiría entre fme, posteriormente se multiplicaría por (A). Por último se sumaría al valor de Li.

Marco teórico

La reducción de operaciones compuestas requiere saber la regla para operar la Jerarquía de Operaciones. Así, las operaciones siempre se realizan en el orden siguiente:

1. Se efectúan todos los cálculos dentro de los símbolos de agrupación como paréntesis ( ), corchetes [ ] o llaves { }, comenzando con los más internos.
2. Se evalúan todos los exponentes.
3. Se hacen las multiplicaciones y divisiones a medida que se presenten, de izquierda a derecha.
4. Se practican las sumas y restas a medida que se presenten, de izquierda a derecha, (Bello 1999, p. 58).

Esta investigación se sustentó en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, por su aportación a la didáctica de las matemáticas, ya que se basa en el estudio que se da de las interacciones entre el alumno, el profesor y el saber. Con esta teoría, se estudian y modelan fenómenos didácticos que ocurren cuando un profesor se propone enseñar una noción, un teorema o un procedimiento a sus estudiantes. A decir de Brousseau (1982, en Gálvez, 1994, p. 44) una situación didáctica se refiere a:

> *Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno, un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.*

La Teoría de Situaciones está sustentada en una concepción constructivista en un sentido piagetiano del aprendizaje, concepción que es caracterizada por Brousseau (1986, págs. 33-115) de esta manera: El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje."

Por otro lado, los diferentes tipos de situaciones didácticas que propone Brousseau son:

- *Las situaciones de acción*, donde el alumno debe actuar sobre un medio (material, o simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos (Panizza, 2004). En esta situación el alumno trabaja individualmente con un problema, aplica sus conocimientos previos y desarrolla un saber e interactúa con el medio didáctico.
- *Las situaciones de formulación***,** en las que un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor, que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) con base en el conocimiento contenido en el mensaje (Panizza, 2004). En esta situación, los alumnos trabajan en grupo y se requiere que los estudiantes compartan experiencias con el fin de construir un conocimiento.
- *Las situaciones de validación*, en las cuales dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo, son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de "sancionarlas", es decir, ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, oponer otras aserciones (Panizza, 2004). Para esta situación, los alumnos discuten y ponen en juicio los resultados obtenidos y lo presentan al docente, para que se cerciore que el trabajo es correcto.
- Y las *situaciones de institucionalización*, que son destinadas a establecer *convenciones sociales*. Se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber. (Panizza, 2004).

Otro concepto que se retoma es el de "Devolución", que según Panizza (2004), éste se da en distintos momentos: el primero se da cuando el profesor se asegura que el problema que ha presentado a los alumnos ha sido entendido por ellos.

El segundo momento, se da en el momento que el alumno se interesa por el problema presentado, utilizando sus conocimientos y estrategias para darle solución.

Y el tercer momento, el maestro debe tomar en consideración que el alumno puede presentar diferentes alternativas de solución, y que el alumno decidirá cual es el procedimiento que considera el más adecuado.

Elementos metodológicos

La experimentación se llevó a cabo en el Instituto Tecnológico Superior de Jerez, los días 13 y 14 de mayo de 2015. Se aplicó el instrumento con el grupo de 2° Semestre de la Licenciatura en Administración, con 15 alumnos para la actividad (de un total de 32 que conforman el grupo). La forma de recopilar las evidencias fue a través de hojas de trabajo que contestaron los alumnos, una videograbación de la experimentación de las dos actividades, además de fotografías. Para la transcripción de los diálogos se codificó a la maestra con la letra M y a los alumnos con la A y un número, además, para añadir comentarios se utilizó el símbolo // //.

Para el desarrollo de esta investigación se optó por utilizar la ingeniería didáctica (Artigue, 1998, p. 48):

> *El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un*

> *profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase.*

Las fases de la ingeniería didáctica son: Análisis preliminares, Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas, Experimentación y Análisis *a posteriori* y *validación.* En nuestra investigación se ha optado por omitir los análisis preliminares, puesto que se seleccionó la situación didáctica propuesta por Maciel (2015), con la modificación de algunas variables didácticas. En esta oportunidad presentaremos la situación didáctica elegida así como algunos de los principales resultados.

Situación didáctica

Se retomaron dos problemas de la situación didáctica que, como se ha mencionado, fue propuesta por Maciel (2015). En esta oportunidad se comparten los resultados de la experimentación del primero de ellos.

Problema de los gastos

El año pasado estuve ahorrando con el objetivo de comprar un celular moderno, ahorre $12,700.00, con esta cantidad compré dos celulares, uno para mi novia y otro para mí pues no podíamos estar juntos todo el tiempo, cada uno me costó $3,850.00. También, mis 5 hermanos me pidieron que comprara unos audífonos para cada uno de ellos con el objetivo de que ya no hubiese tanto ruido en la casa, cada uno me costó $76.00 pero luego, por accidente uno se me tiró y tuve que comprar otro para reponer los audífonos perdidos, dos de mis hermanos me dieron $43.00 pesos cada uno y mis otros tres hermanos me dieron $35.00 cada uno.

Además como mi hermano menor de 13 años quería un juego de video, mi novia y yo decidimos poner cada quien la mitad del costo del juego de video, para regalarle uno que estaba en oferta, nos costó $3,854.00 porque incluía dos videojuegos gratuitos.

Instrucciones.

1) Describan detalladamente cuál fue el procedimiento que siguió el equipo para resolver el problema.
2) Escriban en <u>una sola expresión aritmética</u> las operaciones que necesitan realizar para calcular ¿cuánto dinero le quedó después de las compras?
3) Resuelvan paso a paso l<u>a expresión aritmética</u> que propusieron.
4) En caso de utilizar calculadora, escriban paso a paso las operaciones que realizarían para encontrar el resultado a partir de la expresión aritmética.
5) ¿Coinciden las respuestas encontradas en los puntos 1, 3 y 4 que encontraron? ¿por qué?

En la sesión del 13 de mayo se programó trabajar con el problema anterior, organizado en situaciones de acción, formulación y validación. Para la experimentación se organizó a los jóvenes en equipos de tres personas.

Resultados

En este apartado presentamos algunos de los principales resultados que encontramos a partir de la experimentación. La organización de ellos corresponde con las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización.

Situación de acción

La maestra entregó a los equipos las hojas de trabajo, que incluían el problema, les pide que lean con ella las instrucciones para que, en caso de tener alguna pregunta referente a la actividad, la puedan resolver antes de iniciar. Parte del inicio de la actividad se describe a continuación:

Ma: Hola buenas tardes chicos, les pido de favor que colaboren en esta actividad conmigo (…) entonces les pido que en equipos de tres lean la actividad conmigo y después en equipo contesten las preguntas que se les pide

En este momento yo no les voy a decir si está bien o mal (…) por equipo seleccionen a una persona para que sea la encargada de leer el problema y ustedes se ponen de acuerdo.

Figura 1. Presentación de la actividad

La maestra se cerciora de que los alumnos lean el problema, para así saber que existe una devolución y asegurarse de que los alumnos se están comprometiendo a realizar la actividad.

Inmediatamente los alumnos comienzan a leer el problema y a intercambiar ideas entre ellos, por lo cual sabemos efectivamente que se obtiene la devolución, ya que sí se interesaron en darle solución al problema. Por ejemplo, en los equipos 3 y 4 se dieron los siguientes diálogos:

Equipo: 3 A13. Espérense muchachos ya sé cómo lo vamos a resolver, a la cantidad inicial le vamos a descontar los gastos que se van haciendo.

A23. Sí pero comienza a leer bien el texto y podamos ir restando las cantidades. //A13. Se ríe y comenta//

A13. Es que me pone de nervios la cámara. //A23 le quita las hojas y él comienza a escribir//

Equipo: 4 //A14 comenta//

A14. ¿Qué les parece que de la cantidad inicial que son $12,700 le vamos a restar el costo de los dos celulares que es 7,700?

A34. Desglosemos todos los artículos que compraron en una columna.

//A24 comienza a realizar las operaciones pertinentes//

Figura 2. Distribución de equipos de trabajo

*Figura **3.*** Integrantes del equipo 5.

La maestra interviene para indicarles que para cada uno de los incisos, traten de describir lo más sencillo posible sus procedimientos, además les indica que en caso de utilizar hojas adicionales las tendrán que entregar al final de la actividad y algo muy importante que les menciona es que no borren nada, que en caso de tener varias ideas las plasmen todas en sus hojas de trabajo. A partir de los fragmentos de diálogo que rescatamos de la grabación, notamos que los estudiantes comenzaron a tomar las decisiones necesarias para resolver la actividad; es decir, estando en situación de acción aceptaron la devolución.

Equipo 5: //A15 lee en voz alta el problema y A25 comienza a desglosar las operaciones.

A35. De los 12,700 que es el dinero que tenía originalmente y de ahí vamos descontando lo que se va comprando. Dice los audífonos cuestan $ 76.00 y multiplícalos por los cinco hermanos//

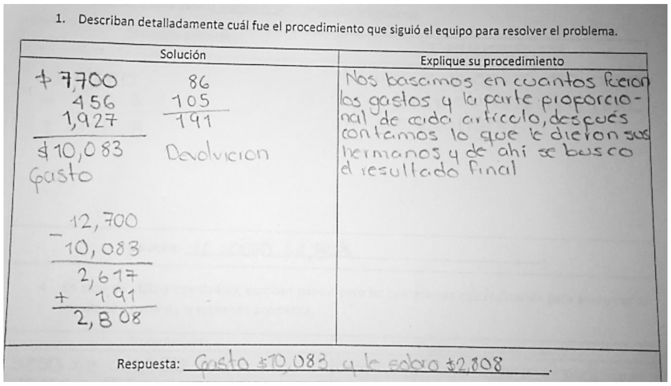
Situación de Formulación (Actividad 1)

En esta fase se describe la situación de formulación, que es donde los alumnos comienzan a trabajar con sus conocimientos previos sobre el tema, e inician a plantear diferentes estrategias y procedimientos para la posible solución del problema, tanto de manera verbal como en sus hojas de trabajo.

Para el inciso 1, en el que se pedía describir el procedimiento que se siguió para resolver el problema, tenemos dos tipos de estrategias.

a) Estrategia de hacer los gastos por separado y luego ir restando del total.

Esta estrategia la siguieron el equipo 2, 4 y 5, y consiste en ir desglosando los artículos del problema y realizando las operaciones por separado, luego, de la cantidad inicial restan los gastos y les da un total de $2,808.00. Esta estrategia es adecuada.

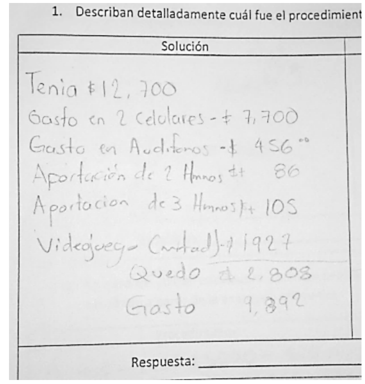


1. Describan detalladamente cuál fue el procedimiento que siguió el equipo para resolver el problema.

Solución	Explique su procedimiento
$ 7700 / 456 / 1,927 / $10,083 Gasto / 86 / 105 / 191 Devolucion / 12,700 − 10,083 = 2,617 + 191 = 2,808	Nos basamos en cuantos fueron los gastos y la parte proporcional de cada articulo, después contamos lo que le dieron sus hermanos y de ahí se busco el resultado final

Respuesta: Gasto $10,083 y le sobro $2,808.

Figura 4. Respuesta a la pregunta uno del equipo 2



1. Describan detalladamente cuál fue el procedimient

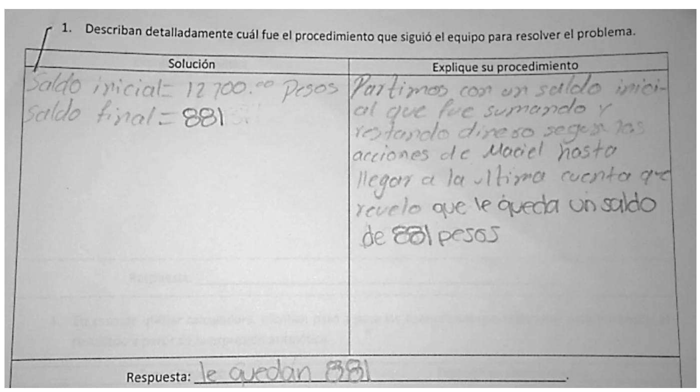
Solución
Tenia $12,700 / Gasto en 2 Celulares - $ 7,700 / Gasto en Audifonos - $ 456 / Aportación de 2 Hmnos $+ 86 / Aportacion de 3 Hmnos $+ 105 / Videojuego (mitad) - $ 1927 / Quedo $ 2,808 / Gasto 9,892

Respuesta:

Figura 5. Respuesta a la pregunta uno del equipo 5

b) Estrategia de hacer los gastos por separado y luego ir restando del total, pero con equivocaciones.

Los equipos 1 y 3 siguieron una estrategia similar; sin embargo el equipo 1 realiza las operaciones por separado, pero al final cuando compran el videojuego entre la novia y el novio, en vez de dividirlo entre dos, restan la cantidad de $3,854.00 y por eso llegan a un resultado erróneo de $881.00. En el equipo 3 se equivocaron al plantear los gastos y realizaron sus operaciones pero no llegaron al resultado correcto.

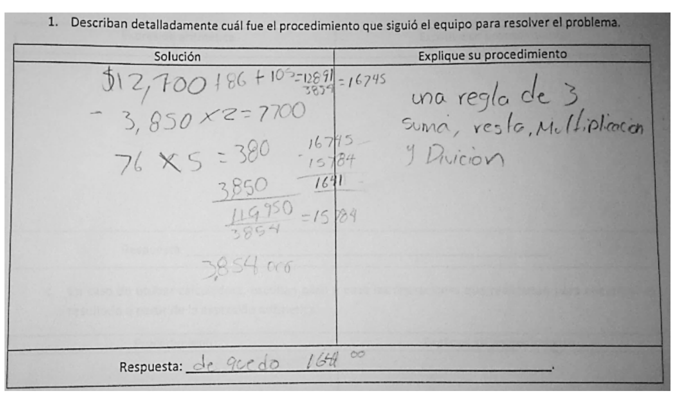


1. Describan detalladamente cuál fue el procedimiento que siguió el equipo para resolver el problema.

Solución	Explique su procedimiento
Saldo inicial = 12 700.00 pesos / Saldo final = 881	Partimos con un saldo inicial que fue sumando y restando dinero según las acciones de Maciel hasta llegar a la ultima cuenta que revelo que le queda un saldo de 881 pesos

Respuesta: le quedan 881.

Figura 6. Respuesta a la pregunta 1 del equipo 1



1. Describan detalladamente cuál fue el procedimiento que siguió el equipo para resolver el problema.

Solución	Explique su procedimiento
$12,700 − 3,850 × 2 = 7700 / 76 × 5 = 380 / 3850 / 16745 − 15784 = 1691 / 3854.00	una regla de 3 suma, resta, Multiplicacion y Divicion

Respuesta: le quedo 1691.00

Figura 7. Respuesta a la pregunta uno del equipo 3

En el inciso 2, que pedía escribir en una sola expresión aritmética las operaciones que necesitaban realizar para calcular ¿cuánto dinero le quedó después de las compras?, se encontraron dos tipos de estrategias.

a) La estrategia es representar una sola expresión matemática.

Esta estrategia la siguieron el equipo 1, 2, 3, 4. El equipo 1sí representa la expresión pero en su caso no utilizan signos de agrupación, ellos representan en la expresión las cantidades después de hacer operaciones que les desglosa algunos totales. En el equipo 2 no tienen claro lo que es una expresión aritmética, lo confunden con una igualdad. En el equipo 3 sí pueden representar la expresión, pero de la misma forma que el equipo 1, lo hacen sin utilizar signos de agrupación y realizan operaciones por separado. El equipo 4 sí logra representar la expresión aritmética, utilizando correctamente los signos de agrupación, solo comete un error en un signo (Ver Tabla 1).

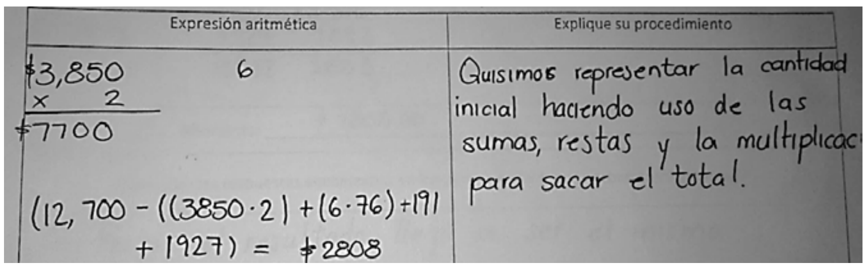


Figura 8. Respuesta a la pregunta dos del equipo 4

Tabla 1. *Resultados de los 5 equipos en el inciso 2*

	Expresión aritmética	
Equipo 1	$12700 - 7700 - 380 - 76 + 86 + 105$	
Equipo 2	$12{,}891 = a, -10{,}083 = b$ a =Dinero con el que se contaba,	b = Cantidad que se gastó
Equipo 3	$12{,}700 - 7{,}700 + 380 - 76 + 86 + 105 - 3{,}854 = 1{,}641$	
Equipo 4	$(12{,}700 - ((3{,}850 \times 2) + (6 \times 76) + 191 + 1{,}927) = \$2{,}808$	
Equipo 5	$12{,}700 - 7{,}700 = 5{,}000$ $4{,}544 + 86 + 105 = 4{,}735$	$5{,}000 - 456 = 4{,}544$ $4{,}735 - 1{,}927 = 2{,}808$

b) No representar la expresión aritmética.

Como se observa en la figura 9, el equipo 5 no representa la expresión, lo que ellos realizan es las operaciones de los gastos y van sumando o restando a la cantidad inicial.

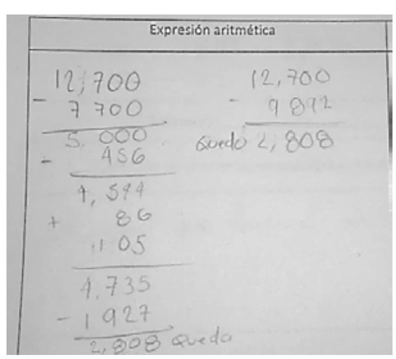


Figura 9. Respuesta a la pregunta 2 del equipo 5

Podemos observar que solo un equipo utilizó los signos de agrupación para distinguir entre productos y sumas, al parecer los otros equipos no distinguen la importancia de los signos de agrupación y de esta manera puedan aplicar la Jerarquía de Operaciones, donde nos dice que los productos tienen prioridad con respecto a las sumas y restas, para algunos de ellos es mejor hacer las operaciones por separado para llegar al resultado solo a través de las sumas y restas, como lo plantean.

En el inciso 3, que debían resolver la expresión que propusieron, se encontró solo una estrategia:

a) Utilizar la Jerarquía de Operaciones.

El único equipo que utilizó la Jerarquía de Operaciones y llegó al resultado correcto es el equipo 2, los otros dos hicieron las operaciones por separado y ambos llegaron a la solución, como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. *Resultados de los equipos 2, 4 y 5, inciso 3.*

Expresión aritmética y solución	
Equipo 2	$12{,}891 - 10{,}083 = 2{,}808$
Equipo 4	$(12{,}700 - \big((3{,}850 \times 2) + (6 \times 76) + 191 + 1{,}927\big) =$ $(12{,}700 - (7.700 + 456 - 191 + 1{,}927) =$ $12{,}700 - 9{,}892 = 2{,}808$
Equipo 5	$12{,}700 - 7{,}700 = 5{,}000$ $5{,}000 - 456 = 4{,}544$ $4{,}544 + 86 + 105 = 4{,}735$ $4{,}735 - 1{,}927 = 2{,}808$

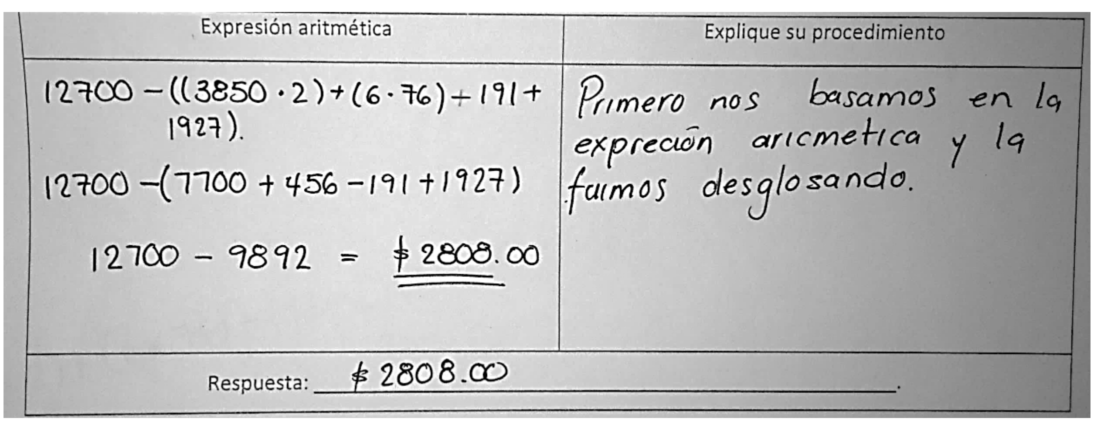


Figura 1. Respuesta a la pregunta 3 del equipo 4

Los equipos 1 y 3 dejaron ese inciso en blanco ya que ellos anteriormente ya habían realizado las operaciones y había llegado a un resultado incorrecto.

En el inciso 4 se les pedía utilizar la calculadora, y escribir paso a paso las operaciones que realizarían para encontrar el resultado a partir de la expresión aritmética. Aunque tres de los equipos utilizaron esta herramienta, solo se tiene la siguiente estrategia.

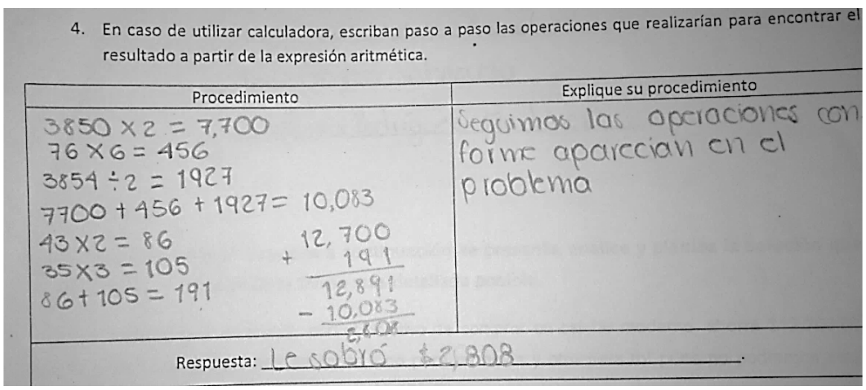
a) Utilizar la calculadora solo para realizar operaciones de suma y resta.

Los equipos 2, 4 y 5 se apoyaron de la calculadora solo para realizar operaciones de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones y obtener el resultado correcto como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 3. *Operaciones que realizaron en calculadora.*

Equipo 2	$3{,}850 \text{ x } 2 = 7{,}700$ $3{,}854 \div 2 = 1{,}927$ $43 \times 2 = 86$ $86 \times 105 = 191$	$76\text{x}6 = 456$ $7{,}700 + 456 + 1{,}927 = 10{,}083$ $35 \times 3 = 105$ $12{,}891 - 10083 = 2{,}808$
Equipo 4	$3{,}850 \ \times 2 = 7{,}700$ $86 \times 105 = 191$ $3{,}854 \div 2 = 1{,}927$ $12{,}700 - 9{,}892 = 2{,}808$	$76\text{x}6 = 456$ $456 - 191 = 265$ $7{,}700 + 226 + 1{,}927 = 9{,}892$
Equipo 5	$12{,}700 - 7{,}700 = 5{,}000$ $4{,}544 + 86 + 105 = 4{,}735$	$5{,}000 - 456 = 4{,}544$ $4{,}735 - 1{,}927 = 2{,}808$

Estos tres equipos llegan al resultado correcto y cada uno realizó las operaciones en diferente orden.


4. En caso de utilizar calculadora, escriban paso a paso las operaciones que realizarían para encontrar el resultado a partir de la expresión aritmética.

Procedimiento	Explique su procedimiento
3850 x 2 = 7,700 76 x 6 = 456 3854 ÷ 2 = 1927 7700 + 456 + 1927 = 10,083 43 x 2 = 86 35 x 3 = 105 86 + 105 = 191 12,700 + 191 = 12,891 − 10,083 = 2,808	Seguimos las operaciones como forme aparecían en el problema

Respuesta: Le sobró $2,808.

Figura 2. Respuesta a la pregunta cuatro del equipo 2

Los demás equipos en esta opción dejaron el recuadro en blanco ya que ellos no utilizaron calculadora.

En el inciso 5, los equipo 2, 4 y 5 dicen que sus respuestas sí coinciden porque los procedimientos son los mismos.

Situación de validación

Para esta fase, la profesora eligió a propósito un alumno del equipo 1, cuya respuesta era incorrecta. La joven pasó a exponer cuál cantidad les daba como resultado de la actividad, y los demás alumnos comenzaron a cuestionarle su respuesta, y le hicieron ver el punto de vista de otros equipos. Al final aceptaron los integrantes del equipo 1 que efectivamente habían cometido errores, por no utilizar los signos de agrupación y la jerarquía de operaciones. A continuación se presentan fragmentos del diálogo de los equipos.

Ma. Jóvenes para terminar la primera actividad les pido que pase al pizarrón una persona del equipo 1 que guste exponernos, cuál fue su procedimiento para llegar al resultado, además, cómo escribieron su expresión matemática y cómo la resolvieron.

Equipo 1: Yo paso maestra //comenta A11//

A11: Bueno para la pregunta 1, lo que nosotros hicimos fue que partimos de un saldo inicial de 12,700 que nos lo da el problema y le fuimos sumando y restando dinero según las acciones, hasta llegar a la última cuenta que reveló que le queda un saldo de $881.00.

Equipo 4: A14: A11, tu resultado está mal porque nosotros también lo hicimos así, pero a nosotros nos da $2808.

Equipo 3: A23: A nosotros nos da un resultado de 1641

Entonces comienza la discusión entre ellos ya que 3 equipos daban su resultado y eran cantidades diferentes. Por lo que le piden a la integrante del equipo uno que escriba su expresión matemática para verificar si las operaciones que estaban realizando estaban correctas.

A11: Maestra, nosotros escribimos la expresión así: Tenía $12{,}700 - 7700 - 380 - 76 + 86 + 105 = 4{,}353$
pero a esto le restamos lo del videojuego que eran 3,854 y nos quedaron 881.

A14: A11, para empezar, en esa expresión no veo ningún paréntesis que agrupe los números y si te fijas al leer en texto claramente podemos plasmar los paréntesis y me llama la atención porque en ninguna parte del texto te da la cantidad de 3,854 ¿de dónde sacaron esa cantidad?

Luego de esto, los integrantes del equipo 1 se dieron cuenta que habían tomado un dato mal, pero aun así, les faltó incluir los signos de agrupación, hecho que les fue señalado por varios equipos, esto hizo que los integrantes del equipo 1 reflexionaran sobre la importancia de los signos de agrupación.

De esta manera se da la confrontación entre ellos hasta que al final escriben la expresión correcta en el pizarrón y todos quedan conformes con el resultado al que llegaron.

Figura 3. Equipo uno presenta sus resultados

Una vez que los alumnos llegan a un acuerdo, la maestra agradece la participación de todos y les pide que al día siguiente puedan continuar con la actividad dos.

En la segunda actividad, a diferencia de la primera, se solicitaba que eligieran de tres expresiones, aquélla que consideraban correcta para responder al problema. Posteriormente, que la resolvieran paso a paso y si usaban calculadora, que describieran las operaciones que realizarían para encontrar el resultado.

Se esperaba que con el uso de la calculadora los jóvenes se vieran forzados a escribir sus operaciones incluyendo los signos de agrupación. Sin embargo, se observó que, al igual que en la actividad 1, solamente la utilizaron para realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, según se requería, de manera separada. Por ejemplo, el equipo 3, que eligió una respuesta incorrecta (c) $7(70) - 25 + \left\{2\left[6(85) - \frac{500}{2}\right]\right\}$), al hacer las operaciones con la calculadora se observa que no tomaron en cuenta la jerarquía de operaciones. Pues, como se puede notar, no respetan el hecho de que el 2 que está antes del corchete, debe multiplicar a ambos miembros de la resta, y no solo al primero.

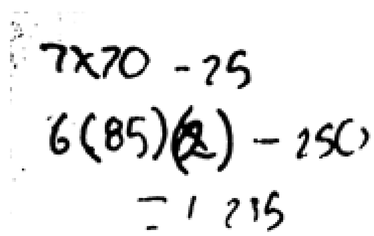


Figura 13. Equipo 3 presenta sus resultados

Un aspecto importante fue que a través de la fase de validación que se propone en la teoría de situaciones didácticas, fue que los alumnos de este equipo se dieron cuenta de que no habían considerado la jerarquía de operaciones y el uso de signos de agrupación, y que además, no habían elegido de manera adecuada la expresión para resolver el problema, por ejemplo, el alumno A14 se enfrenta al alumno A23 comentando:

A14: Yo creo que estás mal.

A23: ¿Por qué?

A14: Lee el problema bien y te darás cuenta que le pagan 75 menos 25 de comida por los siete días.

A23: Mmmm, maestra, tiene razón A14, es que yo me equivoqué porque no me había fijado que la comida es por siete días, yo pensé que solo era por un día.

Conclusiones

Es importante mencionar que nos damos cuenta del papel importante que tiene el permitir a los alumnos del nivel superior experimentar y argumentar entre ellos mismos sus soluciones, ya en nuestra propuesta, entre todo el grupo aportaron ideas al estudiante que se encontraba en el pizarrón, hasta que todos quedaron de acuerdo. De esto rescatamos que la manera en que estos estudiantes construyeron su conocimiento no es a través de darles la teoría directamente, si no que se apropiaron de éste conocimiento al enfrentarse con los problemas propuestos, por su puesto, con la guía del profesor.

Por otro lado podemos decir que después de haber realizado las dos actividades, la mayoría de los estudiantes reflexionaron acerca del uso de la Jerarquía de Operaciones y los signos de agrupación, al realizar las operaciones en las expresiones aritméticas y así evitar los errores en el resultado final.

Una de las sugerencias que se tiene para futuras experimentaciones es que se les permita usar la calculadora solamente para introducir toda la expresión que resuelva el problema. Esto les llevaría a reflexionar desde ese momento sobre la manera en que deberían introducir los datos para obtener el resultado adecuado.

Si bien es cierto, no podemos aplicar diariamente en clases Situaciones Didácticas, por el tiempo y programas a los que estamos sujetos como maestros, pero ésta nos brinda una herramienta muy importante para abordar posteriormente ciertos temas de interés. Es importante retomar este tipo de actividades y poderlo aplicar con los alumnos de nivel superior, porque al aplicar esta estrategia de enseñanza vemos cómo los alumnos se apropian del conocimiento y en ningún momento tuvieron miedo defender cada uno de ellos sus ideas, pero sí confirmamos que aprenden de una manera diferente, porque ellos son quien manejan la situación y no el docente como tradicionalmente se hace.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Colombia: Iberoamérica.

Bello, I. (1999). Álgebra elemental. Tampa, Florida: International Thomson Editores, S.A. de C.V.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 33-115.

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las Matemáticas, en C. Parra, e I. Saiz, *Didáctica de Matemáticas*, Aportes y Reflexiones 39-50. Paidós: Buenos Aires.

Maciel, C. I. (2015). *La jerarquía de operaciones en el nivel medio superior. Una experiencia con situación didáctica.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Zacatecas. México.

Panizza, M. (2004). Conceptos Básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. *En Enseñar Matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B.; análisis y propuesta*, 59-71. Buenos Aires: Paidós.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

USO DEL CAS PARA EL APRENDIZAJE DE TEMAS DE ÁLGEBRA DEL BACHILLERATO

Esteban Alonzo Castillo, José Carlos Cortés Zavala

Escuela Preparatoria Felipe Carrillo Puerto (México), Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México.

alonzo.tae@gmail.com, *jcortes@umich.mx*

chayogallardo@terra.com.mx, *erepalenius@hotmail.com*

Para citar este artículo:

Alonzo, E. y Cortés, J. C. (2016). Uso del CAS para el aprendizaje de temas de álgebra del bachillerato. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

USO DEL CAS PARA EL APRENDIZAJE DE TEMAS DE ÁLGEBRA DEL BACHILLERATO

[1]Esteban Alonzo Castillo, [2]José Carlos Cortés Zavala

[1]Escuela Preparatoria Felipe Carrillo Puerto, México. [2]Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. México

alonzo.tae@gmail.com, jcortes@umich.mx

Palabras Clave: TAD, ambiente CAS, génesis instrumental, aproximación instrumental.

Introducción

Actualmente nos encontramos inmersos en un mundo donde los términos tecnología y educación están estrechamente vinculados, así lo han indicado organismos internacionales como la UNESCO. La *National Council Of Teachers Of Mathematics* (NTCM) argumenta que la tecnología es esencial en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, ya que este medio puede influir positivamente en la matemática que se enseña e incrementar el aprendizaje de los estudiantes, para desarrollar un aprendizaje más profundo de las matemáticas, siempre y cuando se haga un uso apropiado de la tecnología. Dentro de esta investigación se pusieron en práctica diferentes actividades de algebra para estudiantes de bachillerato con el uso de la tecnología, en particular, el uso de calculadoras con *Sistema Algebraico Computacional* (CAS).

Marco teórico

En la última década, un grupo de investigadores franceses se ha encargado de trabajar e investigar, sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sobre un entorno con CAS, al cual ellos llaman "Ambientes CAS" estas investigaciones han reflejado cuestiones acerca de la "instrumentación" y la dialéctica entre los conceptos y las técnicas de trabajo.

Para que el alumno logre la visualización de los conceptos matemáticos para el aprendizaje de las matemáticas, el empleo de las nuevas tecnologías es una poderosa herramienta que nos puede ayudar a lograrlo.

El marco conceptual considerado en esta investigación es la aproximación instrumental; en particular la parte conocida como Tarea, Técnica, Teoría.

La **aproximación instrumental** (Artigue, 2002 y Lagrange, 2003,2005.) es un marco con elementos teóricos para analizar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas desde diferentes ambientes tecnológicos, por ejemplo, los CAS, aproximación instrumental reconocida dentro del medio de investigación.

Artigue (2002), hace mención que dentro de la aproximación instrumental para el uso de herramientas tecnológicas existen dos influencias a seguir: Una de éstas es la Ergonomía Cognitiva (Vérillon & Rabardel, 1995) y la otra, es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999).

Propuesta

Dentro de esta investigación trabajamos en un ambiente CAS, con las siguientes actividades:

- Actividad 1: Expresiones equivalentes.
- Actividad 2: Continuación de equivalencia de expresiones.
- Actividad 3: Transición de expresiones equivalentes.
- Actividad 4: Sistemas de ecuaciones.

Esto con el fin de promover el razonamiento algebraico de los estudiantes de bachillerato. En particular investigar sí el uso del CAS con la calculadora TI-nspire CAS Texas Instruments, ayuda a los estudiantes en su proceso de desarrollo de conocimiento algebraico respecto a expresiones equivalentes y a sistemas de ecuaciones.

Resultados

Análisis de Resultados: Expresiones equivalentes

El propósito de esta actividad es que los estudiantes de bachillerato tengan como base un enfoque numérico, para la discusión en la equivalencia de expresiones. A continuación se mostraran fragmentos de las actividades puestas en marcha dentro de esta investigación.

La parte IV de la actividad, consistió en tres preguntas en base a una ecuación formada por dos expresiones:

(A) Introduce, directamente, en la línea de entrada de tu calculadora las ecuaciones formadas por las expresiones 3 y 5:

$$(3x-1)(x^2-x-2)(x+5) = \frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$$

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

True
(Verdadera)

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

Es verdadera la ecuación

3. Usa el operador "tal que" (|) de tu calculadora, y reemplaza x por -2 en la ecuación precedente. Interpreta el resultado mostrado por la calculadora.

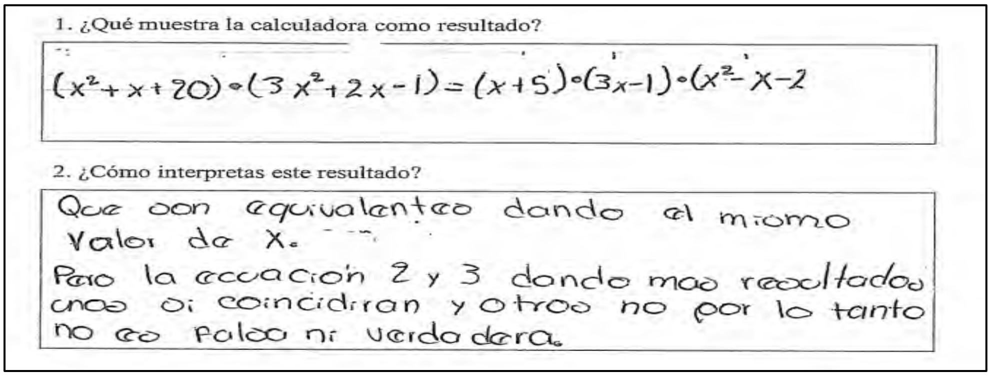
False
(falsa)

Imagen 1.7: Resultados de Guadalupe

En esta parte de la actividad, lo que se quería lograr es que verificaran la equivalencia usando una prueba de igualdad, sin reescribir las expresiones dadas.

Analizando los resultados de Guadalupe, ella solamente tradujo los resultados de la calculadora, diciendo que es verdadera la ecuación para el primer caso, así como falsa una vez que introduces el valor de -2, pero no dio una explicación del porqué sucedió eso.

Para la parte IV B, nuevamente se dieron dos expresiones en forma de ecuación para verificar la equivalencia, dentro de ésta se hicieron dos preguntas las cuales consistían en lo siguiente:


1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

$(x^2+x+20)\cdot(3x^2+2x-1)=(x+5)\cdot(3x-1)\cdot(x^2-x-2$

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

Que son equivalentes dando el mismo valor de x.
Para la ecuación 2 y 3 dando mas resultados unos si coincidiran y otros no por lo tanto no es falsa ni verdadera.

(B) Introduce, directamente, en la línea de entrada de tu calculadora la ecuación formada por las expresiones dadas 2 y 3:

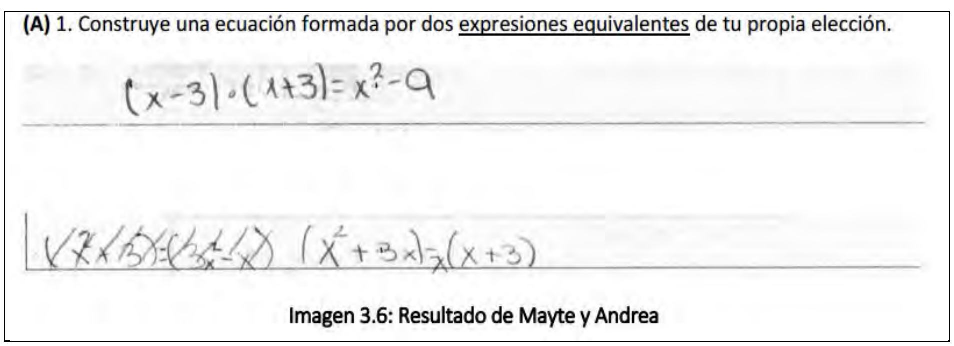
$$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1) = (3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$$

Podemos observar que Guadalupe reafirmó su teoría una vez terminado la discusión anterior, ya que ahora las dos preguntas las contestó adecuadamente.

Análisis de Resultados: Transición de Expresiones a Ecuaciones

El objetivo de esta actividad, consiste en usar la CAS para encontrar los valores de x que producen resultados iguales. Enseguida se mostrarán fragmentos de algunos estudiantes dentro de esta actividad.

Dentro de la parte III, se formuló una serie de preguntas las cuales se contestaron a papel y lápiz. Se muestran a continuación las respuestas de varias alumnas.


(A) 1. Construye una ecuación formada por dos expresiones equivalentes de tu propia elección.

$(x-3)\cdot(x+3)=x^2-9$

$(x^2)(3x)=(3x^2)(x) \quad (x^2+3x)=x(x+3)$

Imagen 3.6: Resultado de Mayte y Andrea

Como vemos las respuestas de Mayte y Andrea son correctas, similares a las que dieron los demás alumnos.

2. Explica tus razones de porqué elegiste esas dos expresiones en particular

Por que buscamos varias para ver cuales eran equivalentes

porque fueron las primeras que seme ocurrieron

Imagen 3.7: Resultado de Mayte y Andrea

En general las respuestas a esta pregunta fueron similares a las de Mayte y Andrea; si observamos, la primera respuesta menciona que buscaron varias expresiones hasta llegar a un par, llegando a esto haciendo pasos algebraicos, pero no los muestran. Por otra parte Andrea no menciona ninguna razón algebraica.

La parte B de esta actividad, consistió nuevamente en 4 preguntas, las cuales se muestran a continuación:

(B) 1. Construye una ecuación formada por <u>dos expresiones no equivalentes</u> de tu propia elección

$x^2(x+4)+2x = x^3-6x$ $\qquad$ $2x(x^2-6)+8x=5x+1$

$(x+2)(x+1)\cdot(x-5)(x+8)-3x-3$

$(4x-5)(5x-4)$

Imagen 3.9: Resultado de Guadalupe, Karla y Andrea

Mostramos los resultados de Guadalupe, Karla y Andrea como podemos observar las tres alumnas pudieron construir la ecuación requerida.

2. Explica tus razones de porqué elegiste esas dos expresiones en particular.

Fueron los dos primeras que se nos ocurrieron

Porque no son equivalentes

Fue lo primero que pense

Imagen 3.10: Resultado de Guadalupe, Karla y Andrea

Para esta pregunta, todas las alumnas dieron razones muy superficiales, ninguna dio alguna razón algebraica.

3. ¿Qué puedes decir en torno a las soluciones de esta ecuación?

Que con cualquier valor de x siempre va a dar el mismo

Que son muy similares

Imagen 3.8: Resultado de Mayte y Andrea

De igual manera, para esta pregunta sus respuestas fueron muy superficiales, ya que de nuevo ninguna pudo demostrar que solo existen algunos valores o soluciones o ninguna solución.

4. ¿Cómo usarías la CAS para apoyar tu respuesta a la Pregunta A3 anterior?

$(x-3)(x+3) = x^2 - 9 \,) = x - 1$

Pues solo la introduceo y compare resultado

Imagen 3.9: Resultado de Mayte y Andrea

En general como en las 4 preguntas anteriores, podemos observar que hubo una gran mejoría en cuanto a saber cómo formar una ecuación equivalente y no equivalente.

Pero aún existe la confusión de cómo encontrar o mostrar los valores de esas ecuaciones usando el comando SOLVE, o en su caso, poder especificar qué significado tiene la palabra TRUE o FALSE.

Para la parte IV y última de esta actividad constó de dos preguntas, en la primera se les pidió que llenaran una tabla de acuerdo a la siguiente información:

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, usando el comando SOLVE de la CAS.

Ecuación dada	Qué muestra la CAS
1. $(2-x)^2 = x(2x-4)$	x = -2 or x = 2
2. $(x-5)(3x+7) - 5 = 3x^2-8x-40$	true
3. $3x^2-x-1 = 2x+5$	x=-1 or x = 2
4. $-3x+7 = \dfrac{-6x+3}{3} - x+7$	False

Imagen 3.13: Resultado de Liliana

Para esta parte prácticamente todas las alumnas supieron cómo utilizar el comando SOLVE, para encontrar las soluciones de las ecuaciones como lo muestra la tabla. En esta pregunta se mostrarán los resultados de Liliana, Guadalupe y Karla

- que en la 1 solo es equivalente con -2 y 2
- y la dos es verdadera que es equivalente
- solo puede ser equivalente con valores de -1 y 2
- no esta correcta y no es equivalente

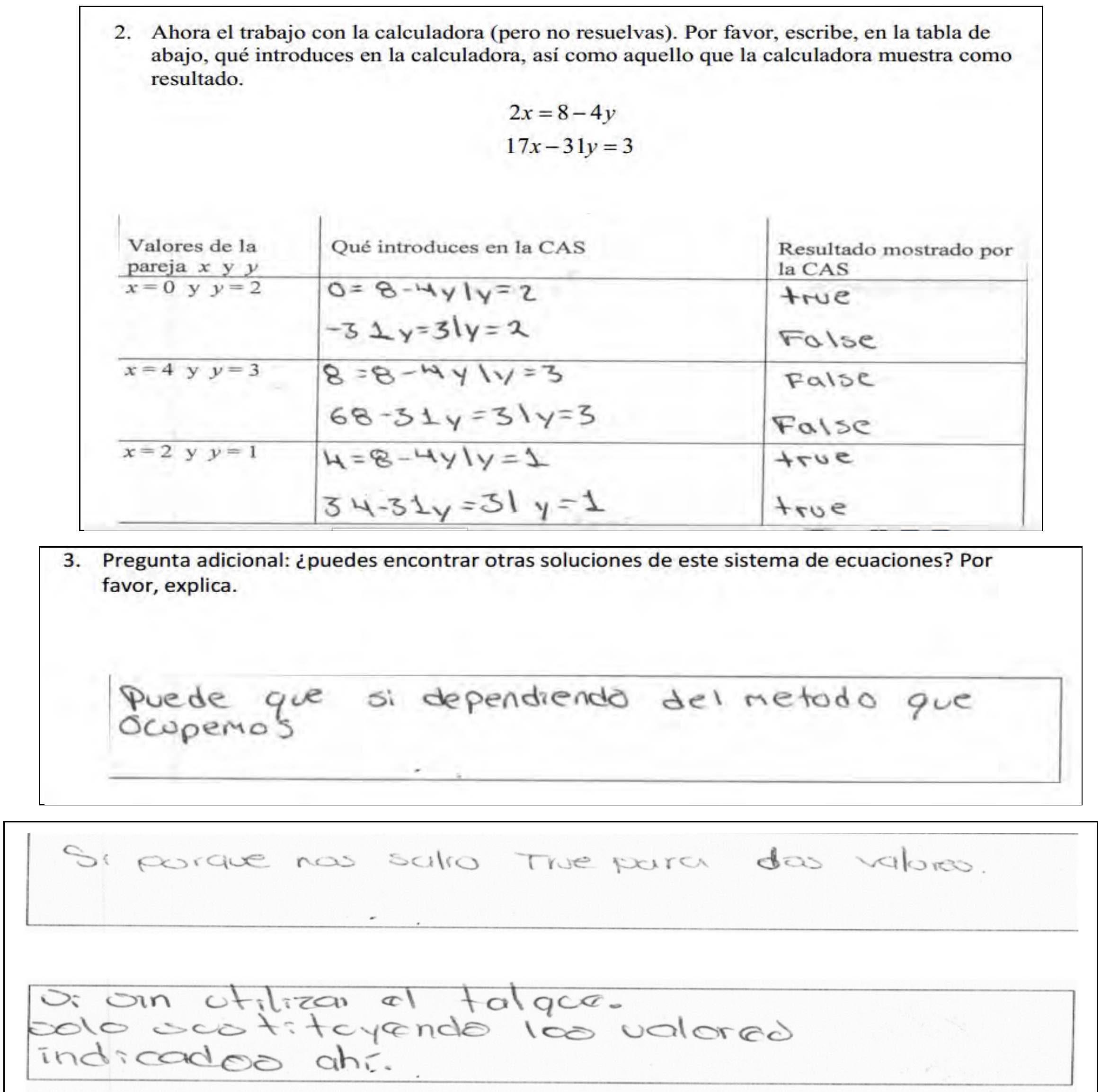
① Es equivalente solo para x = -2 o x = 2
② Es para algunos valores equivalentes para todos
③ Es equivalente solo para x = -1 o x = 2
④ En esta ecuacion no es equivalente para ningun valor.

1. Pues en la primera expresión nos muestra dos posibles resultados ya sea -2 o +2.
2.- En la segunda la CAS nos muestra que la expresion es real o verdadera, por ello sale TRUE.
3.- En la 3ª al igual que en la 1er expresión nos salen dos posibles resultados que serian x = -1 o x = 2.
4.- Nos muestra false (la expresión no podria ser real).

No perdemos de vista que para el cierre de esta actividad, tanto Liliana como Guadalupe, expresan de manera correcta que es lo que significa cada resultado que muestra la CAS. Por otra parte, a Karla le falto dar el verdadero significado de las expresiones, prácticamente fue la única que no definió bien el significado.

Análisis de Resultados: Sistemas de ecuaciones

El propósito de esta actividad es desarrollar en los estudiantes la comprensión de los métodos algebraicos de sustitución e igualación, utilizados para resolver sistemas de ecuaciones.



2. Ahora el trabajo con la calculadora (pero no resuelvas). Por favor, escribe, en la tabla de abajo, qué introduces en la calculadora, así como aquello que la calculadora muestra como resultado.

$$2x = 8 - 4y$$
$$17x - 31y = 3$$

Valores de la pareja x y y	Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS
$x=0$ y $y=2$	0= 8-4y|y=2	true
	-31y=3|y=2	False
$x=4$ y $y=3$	8 =8-4y |y=3	False
	68-31y=3|y=3	False
$x=2$ y $y=1$	4=8-4y|y=1	true
	34-31y=3| y=1	true

3. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de este sistema de ecuaciones? Por favor, explica.

Puede que si dependiendo del metodo que ocupemos

Si porque nos salio True para dos valores.

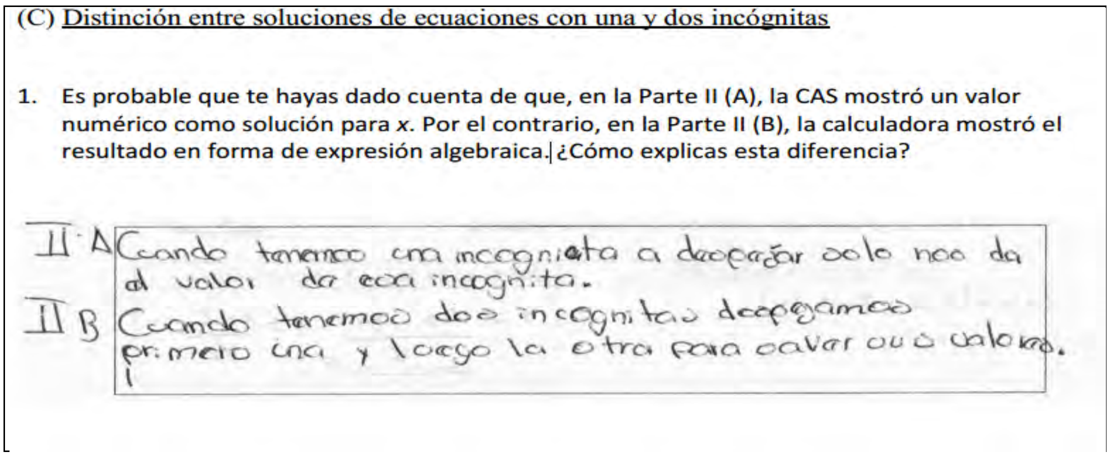
Si sin utilizar el talqce. solo sustituyendo los valores indicados ahí.

Imagen 4.7: Resultado de Liliana, Karla y Guadalupe

Acabando con esta parte, solo Guadalupe tuvo problemas para mostrar cuales valores eran soluciones. Para la última pregunta, de manera repetida ninguna estudiante pudo contestar de manera correcta, ya que ninguna puede mencionar que solo existe una sola solución para el sistema.

Como pudimos observar durante el trabajo con este tipo de ecuaciones, la mayoría de los alumnos pudieron sustituir los valores dados en cada una de las ecuaciones mostradas, pero, no están relacionados con el significado de estas, ya que en este último sistema todas mencionan que puede haber más soluciones.

Después de varias actividades similares y discusiones dentro de clase, obtuvimos los siguientes resultados:


(C) Distinción entre soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas

1. **Es probable que te hayas dado cuenta de que, en la Parte II (A), la CAS mostró un valor numérico como solución para *x*. Por el contrario, en la Parte II (B), la calculadora mostró el resultado en forma de expresión algebraica. ¿Cómo explicas esta diferencia?**

II A Cuando tenemos una incognita a despejar solo nos da el valor de esa incognita.
II B Cuando tenemos dos incognitas despejamos primero una y luego la otra para sacar sus valores.

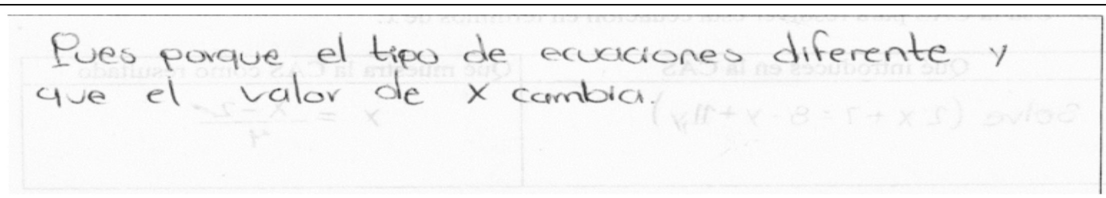

Pues porque el tipo de ecuaciones diferente y que el valor de x cambia.

Imagen 4.17: Resultado de Guadalupe y Karla

La primera respuesta, la cual es de Guadalupe, notamos que ahora le ha quedado claro el procedimiento para resolver una ecuación de una y dos incógnitas, las respuestas de los demás alumnos fueron similares. Para la respuesta de Karla, vemos que fue la única que no fue más explícita en su respuesta.

Una vez que reafirmaron cual es la diferencia entre las dos ecuaciones, se les pidió lo siguiente:

La parte III B se continuó con el método de igualación, pero, ahora el trabajo de las alumnas fue a través de CAS, solamente se presentara el trabajo de Karla, las alumnas restantes presentaron un trabajo similar.

He aquí un sistema de ecuaciones lineales:

$$x - 8 = 2y + 2$$
$$3x + 5y + 3 = 0$$

1. Con la CAS, usa el método de Igualación para resolver este sistema (registra todo aquello que introduces en la calculadora, mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que la calculadora muestra como resultado al usar sus comandos).

El método de Igualación consiste en:	Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS como resultado
1. Despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones y, de este modo, crear dos expresiones, las cuales tienen una sola variable;	Solve $(y-8=2y+2, x)$ Solve $(3x+5y+3=0, x)$	$x=2y+10$ $x=\frac{-5y+3}{3}$
2 y 3. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, para construir una ecuación con una variable; resolver la ecuación que resulta;	Solve $(2y+10=\frac{-5y+3}{3}, y)$	$y=-3$
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución.	$x=2\cdot-3+10$	$x=4$

Imagen 4.24: Resultado de Karla

Incluimos el mismo cuadro que cuando se les presentó cómo funciona el método, solamente cambia que el paso 2 y ahora están juntos y no separados. El manejo de CAS dentro de este método está muy bien definido.

Las siguientes preguntas van en relación al método anterior:

1. ¿Cómo verificas con la CAS que tu solución es correcta?

utilizando el metodo de igualación y resolver siste-
mas de ecuaciones para que salga $x=4$ and $y=-3$

Imagen 4.25: Resultado de Karla

De igual manera todas las alumnas mostraron el mismo método para comprobar la solución de este sistema de ecuaciones, el cual es una manera fácil y rápida de comprobar esto.

De acuerdo a los resultados mostrados dentro de la presente investigación, podemos concluir que el buen manejo del CAS, dentro de las clases de algebra, permiten al alumno de bachillerato la mejor comprensión de los conceptos algebraicos, así como su manipulación, ya que como pudimos observar dentro de nuestros resultados, los alumnos fueron de menos a más dentro de las actividades de trabajo.

Cabe mencionar que la CAS dentro de las clases de acuerdo a lo observado permite que emerjan técnicas nuevas para la solución de las tareas planteadas.

En particular, podemos mencionar algunas técnicas que emergieron dentro de esta investigación:

- Identificar cuando dos expresiones son equivalentes y no equivalentes.
- Distinguir entre la factorización y multiplicación de términos.
- Manipulación de expresiones algebraicas.
- Obtención del rango de valores o restricciones que pueden tener ciertas expresiones.
- Poder diferenciar los tipos de ecuaciones.
- El CAS permitió también elevar las técnicas que tenía para la resolución de un sistema de ecuaciones.

Conclusiones

Una vez finalizado el análisis de nuestras hojas de trabajo, logramos destacar los siguientes puntos:

1. Notamos que se necesita una buena planeación para realizar las hojas de trabajo, esto con el fin de que los alumnos, a la hora de contestar las tareas diseñadas, no les surja duda dentro de la misma.
2. Al comienzo de un tema nuevo, notamos que la mayoría de los alumnos estaba prácticamente en ceros de acuerdo al tema.
3. Las técnicas utilizadas para resolver las tareas no eran buenas o correctas en la mayoría de los alumnos, esto se apreciaba de manera más clara dentro de las primeras actividades.
4. Dentro de los temas en las tres primeras actividades, los alumnos muestran un aspecto muy mecanizado a la hora de resolver problemas, es decir, no intentaban razonar sus soluciones, únicamente encontraban lo que se les pedía dentro del problema.
5. Sin dejar de mencionar el interés de los alumnos por el uso del CAS, lo cual se observaba de manera muy clara al momento de trabajar en forma combinada el uso del papel, lápiz y la CAS.
6. En la última actividad se notó una gran mejoría en las técnicas de los alumnos en general, así como también un avance en el aspecto de mecanización ya que al momento de reflexionar sobre sus respuestas lo hacían de manera más concreta.
7. Para lograr un avance significativo en el punto número 5, fue de gran ayuda los debates científicos, es decir, las discusiones dentro del salón de clases, porque éstos ayudaron a librar dudas que tenían los alumnos.
8. Con base en el análisis y los datos recabados en el capítulo anterior, podemos concluir y afirmar que un ambiente CAS y las tareas diseñas para éste, influyen sobre el alumno de manera positiva para el desarrollo de su conocimiento algebraico.

Bibliografía

Artigue, M. (2002). Learning methematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning 7: 245-272, 2002. Netherlnads: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactiqu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 221-266.

Hitt, F. (2010). Construction of mathematical knowledge using calculators (CAS) in the mathematics classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 2011.

Lagrange, J. B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J. T. Fey (ed.), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (pp. 269-283). Reston, VA: Nationa Council of Teachers of Mathematics.

Lagrange, J. B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Ruthven, y L. Trouche (eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 113-135). New York: Springer.

NTCM (2002). Principles and Standards for School Mathematics. *National Council Of Teachers Of Mathematics*. 2002.

Socas. Martín M. (1996). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. *Universidad de La Laguna*.

Vérillon, P. Y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77-101.

UNESCO (2010). Engineering: issues, challenges and opportunities for development. *UNESCO report*. París.