REVISTA AMIUTEM

VOLUMEN XIII | NÚMERO 2

JULIO
DICIEMBRE

2025

ISSN 2395.955X

2025, Volúmen 13, Número 2

Índice

Editorial

En la portada…

Sección: Artículos de Investigación

2025, Volúmen 13, Número 2

Índice

2025, Volúmen 13, Número 2

Índice

Sección: Entre Docentes

REVISTA AMIUTEM

2025, Volúmen 13, Número 2

Índice

REVISTA AMIUTEM

VOLUMEN XIII | NÚMERO 2

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de
Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

2025, Volúmen 13, Número 2

Editorial

Matemáticas y tecnología: miradas desde la investigación y el aula

Mathematics and technology: perspectives from research and the classroom

Samantha Quiroz Rivera
Universidad Autónoma de Coahuila; México
samantha.quiroz@uadec.edu.mx
orcid.org/0000-0002-1332-8000

Ulises Saíd Landín Juárez
Centro de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México; México
ulandin@matmor.unam.mx
orcid.org/0000-0002-8955-2447

La Revista AMIUTEM reafirma en este número su compromiso con la consolidación de un espacio académico que articule investigación, práctica docente e innovación educativa en el campo de la educación matemática, con especial énfasis en el estudio del uso de la tecnología en el aula. Como revista semestral, buscamos no solo difundir resultados de investigación, sino también propiciar el diálogo entre quienes investigan y quienes enseñan matemáticas en contextos reales, reconociendo la diversidad de escenarios, niveles educativos y enfoques didácticos que configuran actualmente el campo.

Este número se organiza a partir de dos núcleos editoriales claramente diferenciados. El primero está conformado por tres artículos de investigación que analizan procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediados por tecnologías digitales. En ellos se abordan problemáticas relacionadas con la modelización matemática, la comprensión conceptual y la integración de enfoques como STEAM y la teoría de los registros de representación, aportando evidencia empírica y marcos de análisis que permiten profundizar en el papel de la tecnología como mediadora del pensamiento matemático en distintos niveles educativos.

El segundo núcleo corresponde a cuatro contribuciones de la sección *Entre docentes*, sección que en este número se consolida como un espacio propio para la sistematización de experiencias de aula y el diseño de actividades didácticas desarrolladas por profesoras y profesores de matemáticas en ejercicio. Resulta especialmente valioso destacar la participación de docentes de nivel bachillerato, cuyas contribuciones son producto, en varios casos, de su activa participación en el Congreso AMIUTEM llevado a cabo en Puerto Vallarta en septiembre de 2025. Estos trabajos reflejan la importancia de abrir espacios donde la voz del profesorado dialogue con la investigación académica, enriqueciendo el campo desde la práctica reflexiva.

Las propuestas reunidas en esta sección muestran el potencial de herramientas como GeoGebra, modelos tridimensionales, simulaciones y enfoques de aprendizaje basado en problemas para favorecer la alfabetización matemática, digital y la visualización espacial. Más allá de la descripción de actividades, los artículos evidencian procesos de análisis sobre la propia práctica docente y ofrecen insumos que pueden ser adaptados a otros contextos escolares.

Desde una perspectiva editorial, este número reafirma una postura central de la Revista AMIUTEM: la tecnología no se concibe como un fin en sí misma, sino como un medio para favorecer la comprensión conceptual, la modelización, la visualización y la construcción de significado matemático. La revista se posiciona, así, como un espacio que no solo promueve el uso de tecnologías en el aula de matemáticas, sino que impulsa su estudio crítico y situado, atendiendo a cómo estas herramientas transforman las prácticas de enseñanza y aprendizaje.

Finalmente, se anuncia que a partir del próximo número la revista incorporará una sección de divulgación, orientada a acercar ideas matemáticas, tecnológicas y educativas a públicos más amplios, sin renunciar al rigor conceptual propio de la matemática educativa. Esta decisión responde a la necesidad de diversificar los formatos de comunicación académica y fortalecer los vínculos entre investigación, docencia y sociedad.

Con este número, la Revista AMIUTEM continúa consolidándose como un espacio de encuentro para investigadores, investigadoras y docentes cuyo interés es comprender y transformar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediante el uso reflexivo de la tecnología, apostando por una comunidad académica plural, crítica y en constante construcción.

Cómo citar / How to cite: Quiroz, S., y Landín U. (2025). Matemáticas y tecnología: miradas desde la investigación y el aula. *Revista AMIUTEM*, *13*(2), 1–2. https://doi.org/10.65685/amiutem.v13i2.279

2025, Volúmen 13, Número 2

En la portada…

"Negro y violeta"
Vasili Kandinsky (1923), Óleo sobre tela
(Dominio público)

Alibeit Kakes Cruz[1]
Universidad Autónoma de Coahuila; México
alibeitkakes@uadec.edu.mx

Reflexión:

La obra sin necesidad de representar la realidad se destaca por su misterio y tensión. Hace uso simbólico del negro para profundidad y el violeta para serenidad, invitando a una experiencia sensorial y personal.

Kandinsky, aunque no era un matemático puro, integró conceptos matemáticos en su arte abstracto. Asignaba significados psicológicos y espirituales a elementos como el punto (el origen) y la línea (el movimiento), aplicando un rigor casi matemático. Relacionó colores primarios (amarillo, azul, rojo) con formas geométricas básicas (cuadrado, triángulo, círculo) y las vibraciones emocionales que provocaban, creando una ″matemática de la emoción″. Sus

[1] Profesor Investigador Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Editor en jefe de la Revista literaria "El Gancho"

REVISTA AMIUTEM

2025, Volúmen 13, Número 2

En la portada…

estudiosos afirman que no eran caprichos; sus obras aplicaban sistemas y criterios objetivos que, aunque no eran cálculos explícitos, se basaban en la estructura, la relación de los elementos y la búsqueda de la necesidad interior, un proceso casi científico.

Kandinsky se asocia con la tecnología a través de la influencia de sus teorías en el arte y diseño digital modernos, así como en proyectos tecnológicos contemporáneos que exploran sus ideas sobre el color y la sinestesia. La tecnología actual se ha utilizado para explorar y recrear sus conceptos. Google Arts & Culture, por ejemplo, ha desarrollado proyectos de *machine learning* para interpretar la sinestesia de Kandinsky (su capacidad de ″oír″ los colores) y traducir sus pinturas en experiencias sonoras digitales e interactivas, permitiendo al público ″escuchar″ sus obras.

Cómo citar / How to cite: Kakes Cruz, A. (2025). "Negro y violeta" Vasili Kandinsky (1923), Óleo sobre tela. *Revista AMIUTEM*, *13*(2), 3-4. https://doi.org/10.65685/amiutem.v13i2.281

2025, Volúmen 13, Número 2, pp. 5-14

Sección: Artículos de Investigación

Pensamiento matemático evidenciado a través de la modelización matemática mediada con tecnología

Mathematical thinking evidenced through technology-mediated mathematical modeling

Mónica del Rocío Torres Ibarra[a]
Universidad Autónoma de Zacatecas; México
mtorres@matematicas.reduaz.mx
orcid.org/0000-0003-4038-7038

Edgar Esaúl Saucedo Becerra
Tecnológico Nacional de México; México
esaul.saucedo.itz.edu.mx
orcid.org/0000-0002-3114-2197

Elvira Borjón Robles
Universidad Autónoma de Zacatecas; México
elvirabr@uaz.edu.mx
orcid.org/0000-0003-2155-6342

Resumen:
El pensamiento matemático va más de resolver problemas de aritmética y álgebra, este constituye un enfoque analítico que permite comprender la realidad a través de estrategias que permitan comprender, analizar y resolver problemas utilizando las formas de razonar propias de la matemática, tales como la lógica y búsqueda de patrones. Este trabajo presenta una caracterización y comparación del pensamiento matemático que se promueve en dos diferentes grupos de estudiantes del nivel superior, en donde se les plantea una situación problema que tiene como base la Serie de Fibonacci; se espera que los estudiantes formulen modelos matemáticos que les permita dar sentido a tres situaciones problema, involucrando para ello el uso de herramientas tecnológicas como un simulador virtual, además de aquellas que habitualmente utilizan: GeoGebra (grupo A) y Programación en Java (grupo B). La propuesta es implementada mediante la modelización matemática, entendida como un proceso cíclico. Los resultados revelan que el pensamiento numérico es el pilar que prevalece en mayor medida en ambos grupos, además de que es posible identificar que en el grupo A mayoritariamente basa sus estrategias en el pilar algebraico, mientras que en el grupo B predomina fuertemente el pilar variacional.

Palabras clave: Pensamiento Matemático, Modelación Matemática, Simuladores, GeoGebra, Java

[a] Autora de correspondencia

Abstract:
Mathematical thinking goes beyond solving arithmetic and algebra problems; it constitutes an analytical approach that allows us to understand reality through strategies that enable us to comprehend, analyze, and solve problems using mathematical reasoning methods, such as logic and pattern recognition. This work presents a characterization and comparison of the mathematical thinking fostered in two different groups of higher education students. These students are presented with a problem situation based on the Fibonacci sequence. They are expected to formulate mathematical models that allow them to make sense of three problem situations, involving the use of technological tools such as a virtual simulator, in addition to those they typically use: GeoGebra (group A) and Java programming (group B). The proposal is implemented through mathematical modeling, understood as a cyclical process. The results reveal that numerical thinking is the most prevalent pillar in both groups, and it is also possible to identify that in group A, the strategies are mostly based on the algebraic pillar, while in group B, the variational pillar strongly predominates.

Keywords: Mathematical Thinking, Mathematical Modeling, Simulators, GeoGebra, Java

Cómo citar / How to cite: Torres Ibarra, M., Saucedo Becerril, E., y Borjón Robles, E. (2025). Pensamiento matemático evidenciado a través de la modelización matemática mediada con tecnología. *Revista AMIUTEM*, *13*(2), 5–14. https://doi.org/10.65685/amiutem.v13i2.269

Introducción

El pensamiento matemático es ese tipo de pensamiento que se pone en juego al hacer matemáticas, a su vez permite aumentar la complejidad de las ideas que se pueden manejar y extiende la capacidad de comprensión; es parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas (Cantoral, et al., 2005, citados en Mendoza, et al., 2020).

Así pues, este trabajo tiene el objetivo de presentar una caracterización de formas de desarrollar el pensamiento matemático, mediante la modelización matemática, para lograrlo se hace una comparativa de dos diferentes grupos de estudiantes, a los cuales se les presenta una misma situación problema, de forma que en la búsqueda de la solución implementen sus modelos matemáticos y los validen utilizando las herramientas digitales como un simulador común (PhET, 2024), GeoGebra para el grupo A y el lenguaje de programación Java en el grupo B, que en conjunto potenciarán la capacidad de realizar cambios simultáneos entre variables, la visualización de estos cambios, las simulaciones, los cálculos inmediatos, entre otros aspectos (Martínez, et al., 2025) que permitirán contribuir en la comprensión de las situaciones planteadas.

Se trata de un estudio descriptivo de carácter mixto, que fue implementado a través de las etapas incluidas en la modelización matemática como un proceso cíclico bidireccional (Borromeo-Ferri, 2018; Hitt y Quiroz, 2017; Ledezma, et al., 2024). Los resultados revelan que en la formulación de modelos propuestos, predomina de manera común un pensamiento numérico; sin embargo, se identifican competencias que involucran el desarrollo del pensamiento aleatorio, variacional, algebraico y espacial, de mayor a menor medida.

Referente teórico

En este trabajo se considera el pensamiento matemático robusto, como un ente integral, que se consigue a través de la conjunción de dos o más pilares del pensamiento matemático (ver figura 1, adaptada con IA a partir de Shinguay, et al., 2022) que permiten analizar, sistematizar, inferir, abstraer e interpretar información para llegar a la solución de problemas (Shiguay et al., 2022), es una parte esencial en el desarrollo de competencias cognitivas en la formación de los estudiantes y, como consecuencia, piedra angular en la resolución de problemas en diversas áreas del conocimiento, dando sentido y significado a los conceptos matemáticos.

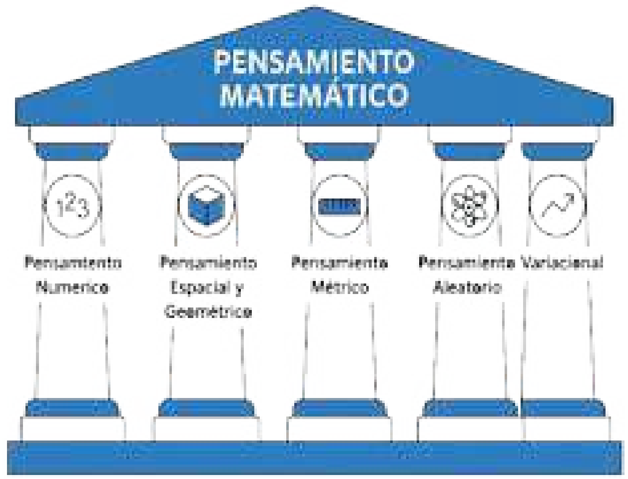


Figura 1. Pilares del Pensamiento Matemático

Estos pilares se manifiestan en las tareas matemáticas mediante competencias que, de manera articulada, contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático. Para distinguir cada uno de ellos, en la Tabla 1 se concentra una descripción que servirá como referencia para caracterizar aquellos elementos que se ponen en juego en los procesos de modelización utilizados por los alumnos para la búsqueda de la solución de los problemas planteados.

Shiguay, et al., (2022) mencionan que considerar estos pilares permite observar la riqueza y diversidad de situaciones problemáticas, que se deben dominar y resolver para la construcción del conocimiento desarrollando el pensamiento matemático del estudiante.

En contraparte, las lecciones en las que los alumnos repiten algún algoritmo, propician la memorización, lo cual es válido y necesario para el aprendizaje, pero con ello se debe dar pie al pensamiento matemático, por ejemplo, Blanco, et al., (2020) comenta: Si le pregunta a un niño de nueve años ¿Cuánto es $3 \cdot 7$? contestará 21, si después le preguntamos ¿y cuánto es $7 \cdot 3$? Responderá "la tabla del 7 no la hemos visto". Esto nos demuestra que el niño está memorizando las tablas de multiplicar, pero no tiene idea de lo que éstas implican, ante esta situación, cabe preguntarse si ¿realmente estos métodos de enseñanza permiten a los alumnos aprender matemáticas?

PILAR	DESCRIPCIÓN
Numérico	Es el primer pilar que se adquiere, implica el desarrollo de técnicas de cálculo y estimación, manejo de cantidades exactas o proporciones
Espacial	Ayuda a desarrollar un sentido de orientación y percepción de los objetos, permite controlar información a partir de la manipulación de objetos concretos destacando rasgos como la interpretación de gráficas y/o expresarse con imágenes
Métrico	Considerar cantidades muy grandes o pequeñas con cifras significativas o desarrollo de notación científica
Aleatorio	Uno de los que más se ha incrementado, dota de técnicas para la recolección, análisis y tratamiento de datos y construcción de modelos a partir de acciones como intuir, analizar, deducir y elaborar conjeturas
Variacional	Hace uso de variables para establecer relaciones entre ellas. Representar y modelar situaciones teniendo conciencia sobre lo que varía, identificar variables

Tabla 1. Descripción de los pilares del pensamiento basados en Shiguay et al. (2022) y SEP (2024)

Así pues, de acuerdo con Ramírez, et al., (2018), el pensamiento matemático es fundamental en todos los niveles educativos; específicamente en el nivel superior, ellos comentan que "las dificultades presentes los estudiantes universitarios para enfrentarse al pensamiento lógicomatemático formal afectan su aprendizaje y actitudes hacia el proceso de enseñanzaaprendizaje", por lo que la capacidad de emplearlo va más allá de la solución de operaciones complejas y descontextualizadas.

Consecuentemente, es necesario incorporar en la enseñanza de las matemáticas, en todos los niveles, el planteamiento de situaciones problema que conduzcan a los estudiantes a plantear algún modelo para llegar a la solución en diferentes formas.

Proceso metodológico

Este trabajo es de carácter mixto, se analizan datos cualitativos y los resultados se presentan en concentrados cuantitativos, además tiene un enfoque descriptivo, ya que busca documentar de manera rigurosa las características observables del fenómeno y de los participantes involucrados (Hernández et al., 2006).

Como estrategia didáctica y referente metodológico se emplea la Modelización Matemática, para ello, se parte de un análisis epistemológico del término, encontrando que a lo largo del tiempo ha predominado el uso de la modelización como un proceso de conversión entre lo real y lo matemático.

Otros elementos que se rescatan del análisis son los primeros acercamientos, planteados por Fibonacci en su libro de 1202, donde la modelización se ejemplifica a través del crecimiento de una población de conejos (Bacaër, et al., 2008).

Blum y Niss (1991) por su parte, describen a la modelización como proceso completo de transitar desde un problema planteado en una situación real hasta un modelo matemático; en el mismo sentido Trigueros, (2006, citado en Zaldívar et al., 2017) lo articulan como un proceso cíclico donde se proporciona a los alumnos problemas abiertos y complejos, en los que se ponen en juego conocimientos previos y habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el comportamiento del fenómeno en términos matemáticos.

Borromeo-Ferri (2018) lo percibe como un proceso que involucra el tránsito bidireccional entre el mundo real y el de las matemáticas y Ledezma et al., (2024) proponen además una adaptación en la que integran en este proceso seis etapas que deben desarrollarse en el aula de clases para completar el proceso (ver figura 2). Esta es la postura de modelización que se adopta en este trabajo.

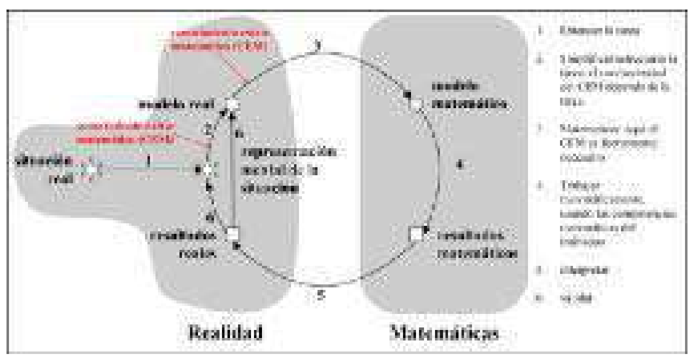


Figura 2. Ciclo de Modelización Matemática (Ledezma, 2024)

En este proceso se contempla a la matemática como una herramienta y al profesor en un mediador entre el conocimiento y el estudiante, favoreciendo de esta forma la comprensión y aplicación de los conceptos matemáticos.

Así pues, este trabajo plantea como objetivo caracterizar y comparar el pensamiento matemático que se manifiesta al resolver una situación real que tiene como base la Serie de Fibonacci, contextualizada en el crecimiento de una población de conejos en 3 diferentes momentos.

La propuesta se implementó en una sesión de 90 minutos en dos diferentes grupos (como se describe en la tabla 2), con un total de 19 estudiantes de nivel superior; la elección de estos grupos responde a la necesidad de analizar las similitudes y diferencias presentes en las competencias relacionadas con los pilares del pensamiento matemático. Cabe mencionar que como escenario se utilizaron aulas con equipo de cómputo en las que cada alumno podía trabajar en una computadora con acceso a internet. Es necesario aclarar que en ambos grupos las materias en que cursaban tenían en común que la dinámica de trabajo estaba basada en el uso de la tecnología específica para la solución de problemas.

CARACTERÍSTICA	GRUPO A	GRUPO B
Carrera	Licenciatura en Matemáticas	Ingeniería en Sistemas Computacionales
Semestre	1°	5°
Participantes	10	9
Materia	Laboratorio de Cálculo	Lenguajes y autómatas
Tecnología	GeoGebra	Programación en Java
Instrumento	Digital	Impreso

Tabla 2. Características de los grupos participantes

Para la puesta en marcha, se desarrollaron las etapas propuestas en el ciclo de la modelización matemática (Ledezma, et al., 2024), las cuales se describen a continuación:

Etapa 1. Entender la tarea.

Primeramente se presentó a los estudiantes una situación problema de crecimiento de una población de conejos, esta etapa es fundamental, pues implica que los participantes identifiquen las variables en la situación; para ello, se utilizó un simulador llamado "selección natural" (PhET, 2024), cuya característica principal es que los usuarios pueden manipular las variables involucradas en la situación y visualizar el comportamiento de una población de conejos específica (ver figura 3).

El simulador, fue proyectado como dinámica de inicio en cada el grupo, mostrando una representación gráfica y animada de la situación. Con la guía del docente, en un primer momento se incluyeron factores como la cantidad de alimento disponible o la aparición de depredadores. En esta etapa surgieron en mayor medida estrategias de cálculo y estimación, lo que evidencia el uso del pilar numérico del pensamiento matemático.

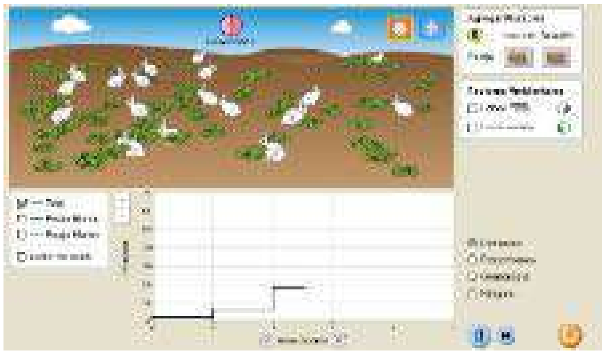


Figura 3. Pantalla del Simulador PhET al paso de 2 generaciones

Etapa 2. Representación mental de la situación.

Posteriormente, se entregó a los estudiantes un instrumento diseñado ah doc, con la finalidad de recabar las respuestas a preguntas planteadas y una guía de observación, en formato digital mediante para el grupo A y de forma impresa para el grupo B, (esta dinámica es la que se trabaja habitualmente en cada grupo).

Se solicitó leer el primer problema, presentando para ello el simulador y analizando de manera grupal el comportamiento de la población de conejos de generación a generación, haciendo una pausa en cada una para dar la posibilidad de que se formularan estrategias para estimar la cantidad que habría en la siguiente generación; repitiendo el proceso con las 4 primeras generaciones.

La dinámica fue que primero anotaran su predicción y posteriormente corroboraran la respuesta con el uso del simulador, mientras que simultáneamente respondían las preguntas planteadas (ver figuras 4 y 5, respectivamente) describiendo con sus propias palabras el comportamiento.

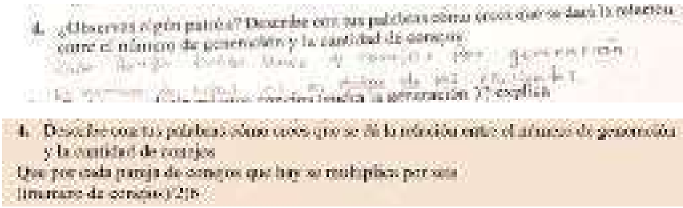


Figura 4. Descripción del proceso, alumnos 3B y 2ª

La totalidad de los participantes completaron esta segunda fase, sus respuestas permitieron identificar que lograron una representación mental y la externaron verbalmente de manera coherente con la propuesta del problema.

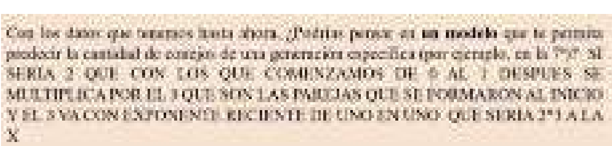
Adicionalmente, es posible inferir que esta tecnología permitió que los alumnos pudieran estimar el comportamiento, pues conforme se avanzó en la propuesta y se analizó la variación de generación en generación, se intuyó el crecimiento esperado y se hicieron conjeturas de las cantidades de crecimiento, coincidiendo en las cantidades de conejos para las primeras cuatro generaciones, con ello se evidenció el uso del pensamiento aleatorio, al establecer estrategias de variación, identificación y relación entre las variables involucradas.

Etapa 3.Matematización.

Esta etapa se esperaba la creación de un modelo matemático que predijera el comportamiento la situación, para ello los estudiantes se percataron de un suceso, las cifras previstas para la 5ª generación no coincidieron, hubo una diferencia entre su predicción y lo que arrojó el simulador. Este momento se aprovechó para que los estudiantes hicieran inferencias del factor asociado, llegando, después de una lluvia de ideas, a que el factor involucrado era la muerte de los integrantes de las primeras generaciones de conejos.

Con este antecedente, se planteó a los estudiantes que buscaran alguna una forma de predecir la cantidad de conejos que se tendrán para una n generación, es decir, buscar un modelo. Algunos consideraron únicamente el crecimiento que habían visualizado en un primer momento y otros indicaron que existía otra variable involucrada, sin embargo, todos propusieron un modelo que esperaban se acercara a la realidad, la figura 5 muestra como a partir de aproximaciones numéricas el alumno formuló un modelo algebraico, estableciendo además relaciones funcionales, mientras que la respuesta en la figura 6 permite observar estrategias de estimación y conteo, lo que evidencia la presencia arraigada del pensamiento numérico y que sin embargo de manera verbal describe una forma algebraica para su modelo.

Figura 5. Planteamiento de un Modelo algebraico



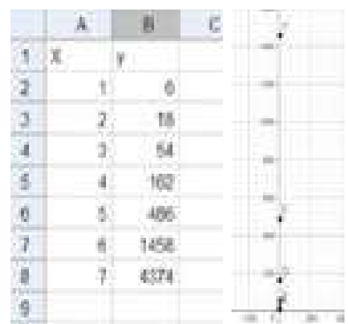
Con los datos que tenemos hasta ahora, ¿Podrías pensar en **un modelo** que te permita predecir la cantidad de conejos de una generación específica (por ejemplo, en la 7ª)? SI SERIA 2 QUE CON LOS QUE COMENZAMOS DE 0 AL 1 DESPUES SE MULTIPLICA POR EL 3 QUE SON LAS PAREJAS QUE SE FORMARON AL INICIO Y EL 3 VA CON EXPONENTE RECIENTE DE UNO EN UNO QUE SERIA 2*3 A LA X

Figura 6. Planteamiento de un modelo verbal

Etapa 4. Trabajar matemáticamente.

En esta etapa pretende hacer una verificación del modelo planteado, por lo que entran en juego las siguientes herramientas tecnológicas que diferenciaron las formas de trabajo de ambos grupos; el grupo A con GeoGebra y el grupo B con programación en Java. En ambos, la consigna fue poner en juego el modelo propuesto y contrarrestar la cantidad obtenida con la generada por el simulador.

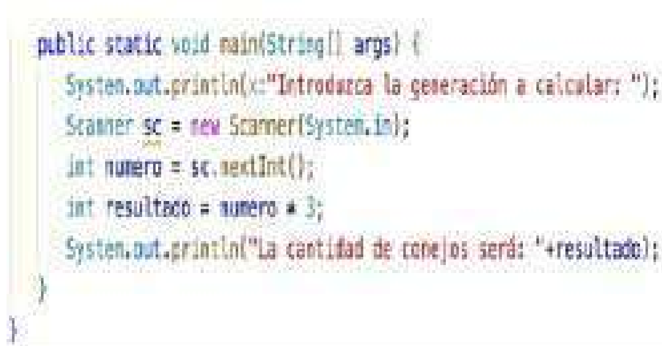
En ambos grupos se manifestó el uso de algún pilar específico del pensamiento matemático, por ejemplo, en el grupo A se manifestó el pensamiento variacional cuando los alumnos mediante la representación tabular en la hoja de cálculo, establecían la relación entre generación y cantidad de conejos, pasando al abordaje espacial a hacer una conversión a una gráfica de puntos, y variando cantidades de manera manual mientras progresivamente se iban formando los puntos como ellos esperaban (ver figura 7).



	A	B
1	x	y
2	1	6
3	2	18
4	3	54
5	4	162
6	5	486
7	6	1458
8	7	4374
9		

Figura 7. Uso del pensamiento espacial y aleatorio

En esta actividad se manifestaron también estrategias de conteo, base del pensamiento numérico, al visualizar que la cantidad buscada se podía determinar al multiplicar el número de generación por 3, y sumando a la cantidad obtenida la acumulada de las generaciones anteriores (ver figura 8).



```
public static void main(String[] args) {
    System.out.println(x:"Introduzca la generación a calcular: ");
    Scanner sc = new Scanner(System.in);
    int numero = sc.nextInt();
    int resultado = numero * 3;
    System.out.println("La cantidad de conejos será: "+resultado);
  }
}
```

Figura 8. Uso del pensamiento numérico

Por otra parte, en ambos grupos se evidencia también el uso del pensamiento aleatorio, al formular en ambas herramientas un modelo algebraico que describiera la situación (ver figura 9), con la principal diferencia de la representación, pues mientras GeoGebra presenta una gráfica al introducir la expresión, Java calcula valores numéricos y relacionales.

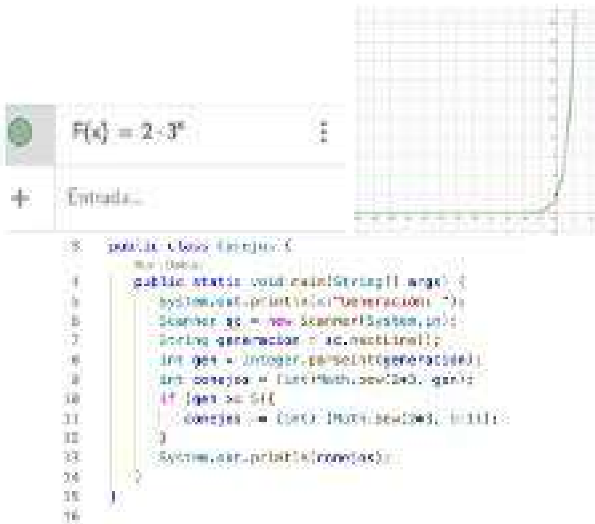


Figura 9. Uso del pensamiento aleatorio

Fase 5. Interpretación de los resultados.

En ambos grupos, el modelo desarrollado permitió determinar la cantidad de conejos correspondiente a la n-ésima generación. Este resultado brindó la oportunidad de volver al contexto del problema, por lo que el instrumento incluyó preguntas orientadas a que los participantes interpretaran y dieran significado a las cifras obtenidas mediante sus respectivas herramientas (ver figuras 10 y 11, respectivamente).

En esta etapa se presentó una mayor dispersión en el uso de los pilares del pensamiento matemático que se pusieron en juego, destacando en mayor medida el variacional y el aleatorio, aunque aparece también, en menor medida, el pensamiento espacial.

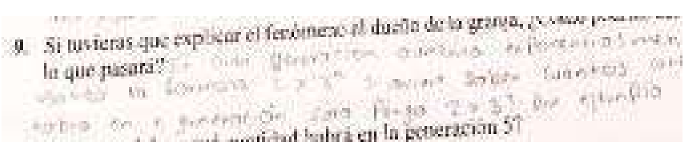


Figura 10. Interpretación de resultados, grupo B

Figura 11. Interpretación de resultados, grupo A

Fase 6. Validación.

Finalmente se pidió a los estudiantes que regresaran a la situación real e hicieran una comparación del modelo creado y la situación planteada, así mediante una discusión de los resultados obtenidos, se llegó a la conclusión de que no se consideraron todos los factores (ver figura 12), lo que creó una discrepancia a partir de la 5ª generación.

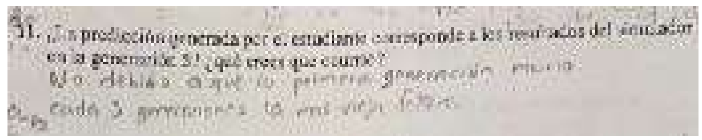


Figura 12. Validación del modelo propuesto

Este tipo de respuestas era la esperada y con ello en el instrumento se propuso la creación de dos nuevos modelos: el segundo, les pedía considerar la variable "muertes" y hacer una variación usando como base el modelo 1; mientras que para el tercero, se presentó la representación gráfica de una nueva situación (ver figura 13), con la esperanza de que se pusieran en juego competencias del ámbito espacial, aunque el tiempo de la sesión no fue suficiente para abordarlos en su totalidad.

Figura 13. Problema planteado para la formulación del 3er modelo

Resultados

El instrumento propuesto se diseñó con la intención de identificar las competencias que evidencian los cinco pilares del pensamiento matemático. El primer modelo consideró el comportamiento del crecimiento de la población de conejos entre la 1ª y 4ª generación; el segundo modelo toma al primero como base e incluye una variable adicional, el factor de las muertes que se producían cada 5 generaciones; y el 3 er modelo se propone una situación similar, cambiando la forma en que se presentó el problema a una representación gráfica. La tabla 3 describe los pensamientos que se esperaba identificar en cada uno de ellos.

Concerniente a las fases propuestas por la Modelización Matemática, la primera fase, referida a entender el problema, se vio beneficiada con el uso del simulador para que los alumnos pudieran hacer estimaciones referentes a la solución del problema, lo que fomentó el uso del pilar numérico; en la segunda fase, la representación mental, se destaca fuertemente el uso del pilar aleatorio, pues es aquí donde se analiza la situación y se hacen conjeturas sobre las variables y su comportamiento.

	MODELO	NUM.	ESP.	ALEA.	VAR.	MÉT.
1	Crecimiento inicial de las 4 primeras generaciones	*	*	*	*	
2	Crecimiento considerando el factor "muertes"	*		*	*	*
3	Crecimiento de una población diferente planteado gráficamente	*	*	*	*	

Tabla 3. Pilares del pensamiento esperados en cada modelo

La fase 3, llamada matematización, evidenció el uso del pilar variacional, pues es aquí donde los alumnos crearon sus primeros modelos para generalizar el comportamiento e identificar las variables involucradas, aquí apareció por primera vez, aunque en menor medida, el pensamiento espacial, cuando algunos alumnos describieron que el crecimiento tenía forma exponencial. Mientras en la fase 4, para trabajar matemáticamente, utilizaron las estrategias necesarias para que la tecnología que usaron les produjera los resultados que se estaban buscando, poniendo de manifiesto en mayor medida el pilar variacional. Mientras que las etapas 5 y 6, de interpretar y validar, potenciaron el uso de los pilares espacial y métrico, y dieron sentido al uso de elementos matemáticos involucrados en la solución.

En cuanto a la forma de matematizar el problema, poniendo en juego los modelos, en los integrantes del grupo A, se evidenció por un lado el pensamiento variacional, al plantear el uso de tablas y relación entre variables (ver figura 14) en un 50% de los participantes, por otra parte trataron también de establecer funciones para predecir el comportamiento, manifestando con ello pensamiento espacial, al llevar los valores al plano 40% y posteriormente dar paso al modelo algebraico (como se evidenció en la figura 9) en un 85% de ellos.

Por su parte, en el grupo B, quienes validaron sus modelos mediante programación en Java, un 70% programaron basados en un modelo algebraico, en el que identificaron correctamente el comportamiento a través del tiempo, incluso uno de ellos identificó que el trasfondo del problema estaba dado por la serie de Fibonacci (ver figura 15), establece sus variables como una lista de elementos, donde establece un valor inicial de 1 para los elementos 1 y 2 y el resto los calcula considerando el valor en determinada posición de la serie, poniendo de manifiesto con ello un pensamiento variacional.

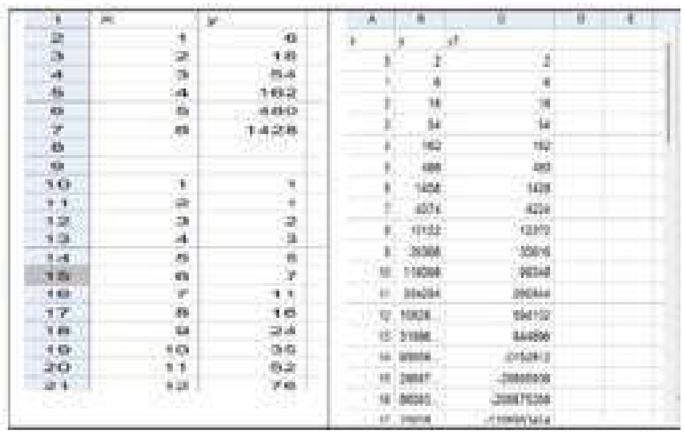


Figura 14. Estrategias basadas en el uso de tablas de variación

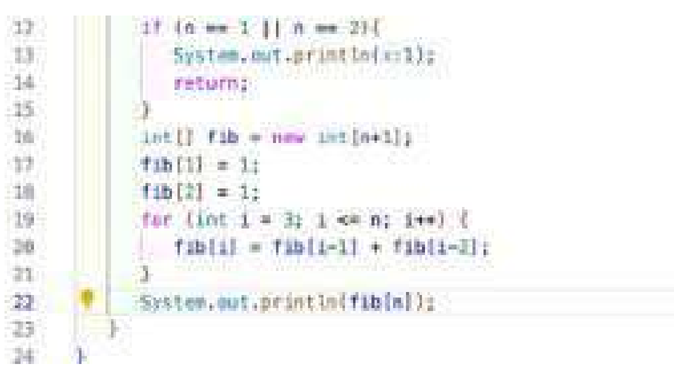


Figura 15. Identificación de la serie de Fibonacci en el proceso

Una vez concluida la intervención en el aula, se procedió a recoger los instrumentos que utilizaron los estudiantes; el grupo A guardó y subió a Moodle sus archivos y en el grupo B se recogieron los instrumentos impresos. Finalmente se procedió a clasificar las respuestas (como se puede ver en la figura 17) basados en las competencias descritas en la tabla 1.

Finalmente se cuantificaron los resultados con la finalidad de presentar los resultados de manera global y diferenciar los resultados de cada grupo. Con este concentrado, es posible determinar, que en el primer modelo (ver figura 19) fue posible identificar los 5 pensamientos; respecto a la diferenciación se puede notar el manejo variacional más marcado en el grupo A y el numérico en el grupo B, el resto son muy similares, diferenciándolos únicamente por algunos errores presentes en las propuestas.

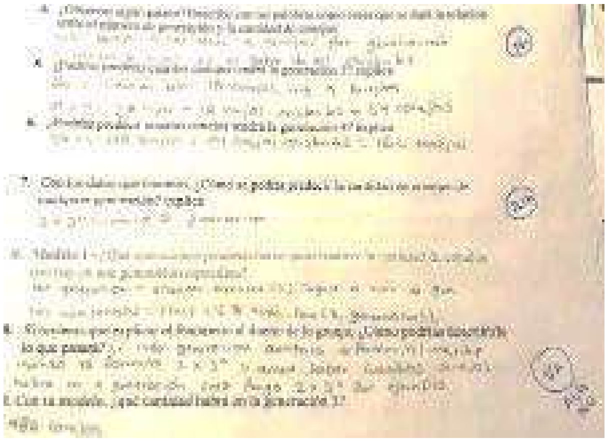


Figura 17. Clasificación de pensamientos con base en la respuesta al instrumento

Figura 18. Pensamientos identificados en el modelo 1

Una diferencia significativa se evidenció en la manera de interpretar el segundo modelo, pues aunque de manera similar se identifica el pensamiento aleatorio, al formular modelos, en el grupo B prevalece en mayor medida el pensamiento numérico, mientras que para el grupo A, aunque en menor medida prevalece el pensamiento variacional, al identificar y relacionar las variables involucradas.

Figura 19. Pensamientos identificados en el segundo modelo

Cabe destacar que en la aplicación de este modelo no hubo indicios de las competencias del pensamiento métrico y espacial, pues al considerar el modelo 1 como base, la actividad centró la atención en la modificación del modelo propuesto previamente.

En el modelo 3, los resultados reflejan que los estudiantes son capaces de interpretar información presentada gráficamente, pues infirieron de manera verbal descripciones respecto a la representación presentada, no fue posible valorarlas de manera global, por lo que se recomienda que en futuras investigaciones se acorte el tiempo de trabajo del primer modelo, sobre todo en lo relacionado con la comprensión del problema.

Conclusiones

Estos resultados evidencian la importancia de identificar la presencia del pensamiento matemático en problemáticas de la vida cotidiana, sin embargo, promover un pensamiento matemático robusto, en el que quede de manifiesto las competencias descritas en cada uno de los pilares que lo componen, no es una tarea fácil. Adicionalmente, incorporar la modelización matemática mediada con la tecnología, propicia que paulatinamente vayan emergiendo los pilares del pensamiento matemático.

Al caracterizar los elementos que hacen evidente la presencia de cada uno de los pilares puestos en juego, se destacan diferencias entre los grupos de estudiantes participantes, pues si bien en ambos grupos el modelo más acercado a la realidad y que permitió en mayor medida una validación de los modelos en la situación fue el aleatorio, al comprender que el crecimiento es exponencial, y proponer modelos en diversas representaciones, es en los pensamientos variacional y numérico en los que se observan diferencias más significativas. Cabe destacar que, en concordancia con

Martínez, et al., (2025), las herramientas tecnológicas utilizadas potencializaron la manipulación de los modelos propuestos.

Finalmente, se destaca que utilizar situaciones problema guiados por las etapas del ciclo de Modelización Matemática permiten a los alumnos desarrollar los diferentes pilares del pensamiento matemático, pues coincidiendo con Shiguay, et al. (2022) para lograrlo es necesario que intervengan técnicas, estrategias y métodos integradores, cimentados en la comprensión de los problemas planteados, lo cual fomenta el empleo y validación de modelos.

Referencias

1. Bacaër, N., Bravo, R. y Ripoll, J. (2008). Breve historia de los modelos matemáticos en dinámica de poblaciones. Ed. Cassini, Paris.
2. Blanco, R., Castillo, J. y Delgado, C. (2020). Estrategias académicas para la introducción al pensamiento matemático. https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=pHtPEAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT3 &dq=pensamiento+matem%C3%A1tico+educaci%C3%B3n+superior&ots=93PrcE Wkhi&sig=BZAUID7ilZLDztpXwXq4zNakpa8#v=onepage&q=pensamiento%20m atem%C3%A1tico%20educaci%C3%B3n%20superior&f=false
3. Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 37-68 https://link.springer.com/article/10.1007/bf00302716
4. Borromeo-Ferri, R. (2010). On the influence of learners' modeling behavior. J. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8
5. Ma-thematical Thinking Style son Math Didakt, 31, 99-118.
6. Hitt, F. y Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. Revista Colombiana de Educación, (73), 151-175. https://www.redalyc.org/pdf/4136/413651843008.pdf
7. Ledezma, C., Morales-Maure, L., y Font, V. (2024). Experiencia educativa en modelización para docentes de matemática en Panamá. Alteridad. Revista de educación, 19(1), 5870. https://doi.org/10.17163/alt.v19n1.2024.05
8. Mancera, G. y Camilo, F. (2022). Decantando las posibilidades de la modelación matemática desde nuestras prácticas pedagógicas e investigativas. Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias, vol. 18, núm. 1. https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/GDLA/article/view/18338
9. Martínez, M., García-Cuellar, D., Tejera, M. y Curo, A. (2025). Modelización matemática en temas de cálculo: Dos aproximaciones tecnológicas a un problema de optimización. Uniciencia, vol. 39, núm. 1. https://dx.doi.org/10.15359/ru.39-1.18 Mendoza, S., González, R, y Gallardo, H. (2020). Desarrollo del pensamiento matemático en jóvenes con discapacidad visual. https://www.fesc.edu.co/Revistas/OJS/index.php/mundofesc/article/view/555/579
10. Ramírez, P., Hernández, C. y Prada, R. (2018). Elementos asociados al nivel de desarrollo del pensamiento lógico matemático en la formación inicial de docentes. Revista Espacios, vol. 39, núm. 49. https://www.revistaespacios.com/a18v39n49/a18v39n49p11.pdf
11. Shiguay, G., Hu, G. y De la Cruz, R. (2022). El Pensamiento Matemático: los 5 pilares de la formación docente en ciencias. Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación. https://revistahorizontes.org/index.php/revistahorizontes/article/view/509
12. Secretaria de Educación Pública [SEP]. (2024). Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo de Pensamiento Matemático. https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13516/1/im ages/Documento%20progresiones%20%20Pensamiento%20matem%C3%83%C2%A1tico.pdf
13. PhET Interactive Simulations (2024, Mayo). Selección Natural. University of Colorado Boulder, bajo licencia CC- BY-4.0 CC-BY-4.0. https://phet.colorado.edu/es/simulations/natural-selection
14. Zaldívar, J., Quiroz, S., & Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, 8(15), 87-110. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2448855020170002000087.

Artículo recibido: 5 septiembre 2025
Dictaminado: 1 diciembre 2025
Aceptado: 30 diciembre 2025

2025, Volúmen 13, Número 2, pp. 15-23

Sección: Artículos de Investigación

El concepto de integral con uso de software didáctico Geogebra

The concept of the integral using GeoGebra educational software

Héctor Jesús Portillo Lara
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez; México
hector.portillo@uacj.mx
orcid.org/0000-0001-6446-5235

Lucero Saénz Coronado[a]
Centro de Estudios Tecnológicos industrial y de servicios (CBTis) No. 128; México
lucero.saenz.cb128@dgeti.sems.gob.mx
orcid.org/0009-0001-6339-4882

María de los Ángeles Cruz Quiñones
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez; México
maria.cruz@uacj.mx
orcid.org/0000-0003-2107-6568

Fabiola Lom Monárrez
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez; México
fabiola.lom@uacj.mx
orcid.org/0000-0002-2062-7068

Resumen:
En los cursos de cálculo integral se prioriza el uso de fórmulas y técnicas de integración. El siguiente trabajo propone actividades dinámicas para dar otro enfoque a la integral como acumulación, utilizando el programa Geogebra. Este programa nos permite trabajar los distintos registros de representación semiótica propuestos por Duval. Con ayuda de las actividades propuestas y el Geogebra se pretende analizar: ¿cómo es la comprensión de los alumnos del concepto de integral como acumulación?, ¿cómo es la interacción de los alumnos en los registros de representación con ayuda del Geogebra? y ¿cómo los estudiantes perciben el uso del programa Geogebra en el curso de cálculo integral? Se propusieron dos problemas y una entrevista semiestructurada, siguiendo una investigación cualitativa fenomenológica. Se exploró por medio de una entrevista semiestructura la percepción de los alumnos al usar el Geogebra. Los resultados obtenidos muestran que los alumnos realizaron conversión entre los registros semióticos para resolver los problemas planteados. La percepción de los estudiantes sobre el uso del Geogebra fue que les ayudó en generar confianza, verificar y resolver los problemas planteados.

Palabras clave: Integración, Acumulación, Geogebra, Teoría de Representaciones Semióticas.

[a] Autora de correspondencia

Abstract:

In integral calculus, the use of formulas and integration techniques is very often implemented. This study presents dynamic activities to teach the integral as accumulation using GeoGebra software. This software allows to work with the different semiotic representations proposed by Duval. Implementing the proposed activities using GeoGebra, we analyzed: ¿how is the students´ understanding of the concept of integral as accumulation? Also, we focused on how is the students´ interaction with the different semiotic representations using GeoGebra? And how students perceive the use of GeoGebra during their integral calculus course? Based on the qualitative methodology, two mathematical problems were asked to solve for identifying the students' understanding and their use of GeoGebra. In addition to explore the students´ perceptions, a semi structured interview was conducted. We found that proposed activities supported the students' understanding of the concept of integral as accumulation. Using GeoGebra, students were capable of shifting among the different semiotic representations of the problems and their perceptions of the use of GeoGebra were the efficacy to verify solutions and the confidence gained by the students.

Keywords: Integration, Accumaltion, Geogebra, Semiotic Representations Theory

Cómo citar / How to cite: Portillo Lara, H., Saénz Coronado, L., Cruz Quiñones, M., y Lom Monárrez, F. (2025). El concepto de integral con uso de software didáctico GeoGebra. *Revista AMIUTEM*, *13*(2), 15–23. https://doi.org/10.65685/amiutem.v13i2.273

Introducción

En la enseñanza y aprendizaje del cálculo surgen problemas relacionados a la comprensión de conceptos importantes como son: función, límite, derivada e integral. Principalmente son abordados por los docentes desde el registro de representación semiótica algebraico (Artigue, 1995 y Hitt, 2003). Dicho registro simbólico limita la conversión entre los registros de representación gráfica y numérica, por lo tanto, la comprensión de los conceptos antes mencionados.

Mayormente los cursos de cálculo integral se resumen en la aplicación de técnicas de integración y uso de fórmulas, dejando de lado el concepto de integral como una acumulación, Cabañas y Cantoral (2007) comentan al respecto:

"El método de enseñanza tradicional, por el contrario, tiende a desarrollar habilidades en los estudiantes para el uso de fórmulas y técnicas de integración en el cálculo de áreas, olvidando el papel de las actividades de la vida cotidiana".

El concepto de la integral como acumulación, es importante para entender muchas de las aplicaciones del cálculo integral. Uno de los problemas identificados en la revisión bibliográfica es identificar lo que se quiere acumular, áreas de rectángulos y volúmenes de cilindros, entre otros. Algunas dificultades que se detectan en la idea de la integral como acumulación planteados por Thompson y Silverman (2008) son las siguientes:

a) La idea de la función como una integral de acumulación dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ involucra muchas variables que cambian (como $x, t, f(x)$) esto hace que sea difícil de entender y aplicar para los alumnos.
b) Los alumnos no encuentran relación entre F y f en el Teorema Fundamental del Cálculo (ver también Cordero, 2005).
c) Rara vez se enseña la integral de acumulación por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, con la intención de que los alumnos la entiendan, es decir se calcula la integral definida por medio del Teorema Fundamental del cálculo.
d) La idea de límite y el uso de la notación son complejos para entender la función de acumulación. Por ejemplo, en el caso del área, los alumnos comentan: como la base del rectángulo tiende a cero, es decir $\Delta x \to 0$ y el área del rectángulo es $f(x_i)\Delta x \to f(x_i)$ (ver Figura 1).

La problemática que se tiene para entender la integral como una acumulación es el problema del cambio, la relación entre F y f en el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Por ejemplo, en el concepto del límite, una pregunta que debemos plantear es: ¿Cómo se quiere entender un problema que involucra un cambio (aproximación de área y volumen) si la mayoría de sus definiciones son de forma estática? Por otro lado, para la explicación del TFC en los libros de texto, las explicaciones en el pizarrón y el planteamiento del problema de la integral es de una forma estática y poco visual para su comprensión.

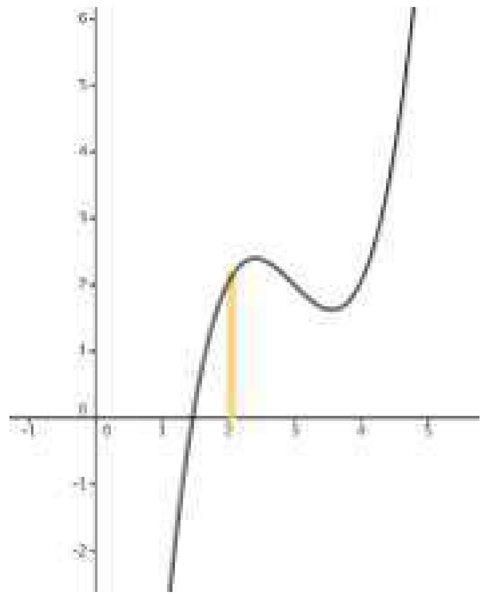


Figura 1. Área de un rectángulo

La problemática que se tiene para entender la integral como una acumulación es el problema del cambio, la relación entre F y f en el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Por ejemplo, en el concepto del límite, una pregunta que debemos plantear es: ¿Cómo se quiere entender un problema que involucra un cambio (aproximación de área y volumen) si la mayoría de sus definiciones son de forma estática? Por otro lado, para la explicación del TFC en los libros de texto, las explicaciones en el pizarrón y el planteamiento del problema de la integral es de una forma estática y poco visual para su comprensión.

Con respecto al problema del límite algunas preguntas que surgen a la hora de calcular la integral de acumulación son: ¿qué es lo que se está acumulando? ¿qué perspectiva visual y numérica tienen los alumnos conforme se hace más pequeño el incremento Δx? y ¿cómo se puede evitar la problemática del límite de forma visual, numérica y gráfica del concepto de la integral de acumulación? El uso del software Geogebra es de gran ayuda para la comprensión del concepto de integral, ya que se puede cambiar el enfoque de los cursos de cómo resolver una integral a saber que hago y por qué. El programa Geogebra permite reconocer y transitar entre los registros de representación algebraico, numérico y gráfico en una misma ventana (Hohenwarter, 2008). Por ello, se eligió Geogebra para proponer actividades que ayuden al estudiante a comprender el concepto de integral, además de ser un software de acceso libre.

El problema que se detecta en los cursos de cálculo integral es dejar de lado esta idea intuitiva de sumar áreas, volúmenes y sustituirla por métodos o técnicas de integración con sus fórmulas correspondientes, por ejemplo, para calcular el área entre $[a, b]$ la fórmula es:

$$\text{Área}=\int_a^b f(x)\,dx$$

Para calcular el volumen de un sólido de revolución en el eje x, utilizamos:

$$\text{V}=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Uno de los objetivos de la investigación es que el alumno calcule, aplique el teorema fundamental del cálculo y utilice la conversión de registros de representación semiótica con ayuda del programa Geogebra.

Las preguntas de investigación que se desean responder en este trabajo son las siguientes:

a) ¿Cómo es la comprensión del concepto de integral como acumulación por medio de situaciones de aprendizaje utilizando el programa Geogebra?
b) ¿Cómo los estudiantes interactúan en los distintos registros de representación matemática con la ayuda del Geogebra para abordar el concepto de la integral como acumulación?
c) ¿Cómo los estudiantes perciben el uso del programa Geogebra en el curso de cálculo integral?

Referente teórico

El marco teórico que se utilizó en esta investigación fue la teoría de registros de representaciones semióticas propuesto por Duval (1999). Dicha teoría es importante dentro del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, ya que nos permite acceder, comprender y trabajar los objetos matemáticos por medio de las representaciones semióticas (lenguaje natural, simbólico, gráfico y numérico). El uso de tratamientos (transformación de una representación semiótica dentro del mismo registro) y conversiones de representación semiótica (transformación de una representación de un registro a otro) es complicado para la mayoría de los estudiantes, dejando ver que, para ellos, la forma en que se presenta el contenido queda limitada por una primera representación (Duval, 1999). En el caso de la integral, si solo se trabajan fórmulas y técnicas de integración se queda limitado dicho concepto a la representación simbólica (algebraica).

Duval (1999) menciona dos conceptos importantes en el desarrollo de la teoría de Representación Semiótica:

- Semiósis. Es la actividad ligada a la producción de representaciones, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado, ésta se encuentra ligada a una representación.
- Noesis. Es la actividad ligada a la aprehensión de los objetos representados, incluyendo las actividades y procesos cognitivos desarrollados por los sujetos.

Una representación semiótica se despliega de dos maneras. Primero cumple con la función de comunicar los objetos matemáticos por medio de sistemas de signos (forma algebraica, numérica y gráfica). La segunda consiste en que una representación semiótica es un soporte para las representaciones mentales (las cuales son internas).

Una representación mental consiste en un conjunto de concepciones e imágenes que una persona forma con respecto a algo (Duval 1999). En esta teoría un registro de representación semiótica está conformado a partir de signos como símbolos, dibujos y dicha representación se hace entonces fundamental en cuanto toma forma, ya que su estructura puede ser descrita y tomada en cuenta en un sistema de representación.

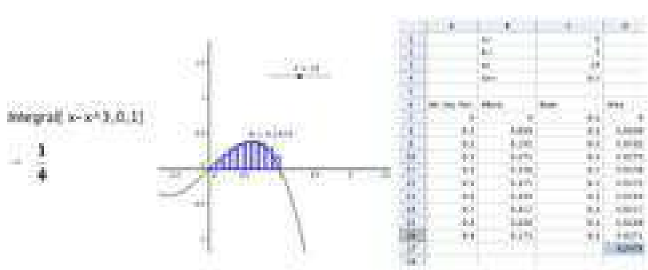


Figura 2. Representación de la integral en los registros algebraico, gráfico y numérico

Para Duval (1999) tener un aprendizaje significativo en matemáticas es reconocer y transitar de un registro de representación semiótico a otro, para enriquecer el objeto matemático desde múltiples perspectivas. Por ejemplo, al pensar en una integral definida, se tiene la forma algebraica utilizando el TFC, pero a su vez se puede pensar geométricamente en el área bajo la curva o realizar la aproximación del área de forma numérica por medio de rectángulos (ver Figura 2).

Metodología

El propósito fundamental de esta investigación es analizar la interacción del programa Geogebra con los alumnos en la resolución de problemas que involucren la integral y la conversión de los distintos registros de representación semiótica. El enfoque cualitativo fue utilizado en esta investigación. Este enfoque examina la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados. La investigación cualitativa se encarga de explorar y entender el fenómeno a estudiar. La investigación cualitativa se refiere "en su más amplio sentido a la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas y la conducta observable" (Taylor y Bogdan, 1987, p.20). Por estas características se consideró pertinente el enfoque cualitativo fenomenológico para esta investigación, el cual se centra en comprender las experiencias vividas por las personas.

La siguiente investigación se aplicó a veintidós alumnos que estaban inscritos en el mismo curso de cálculo integral en una Universidad al norte de México, todos los alumnos pertenecían a una carrera de ingeniería. Durante el curso de cálculo integral, se utilizó el programa Geogebra para verificar las integrales realizadas en la clase, así como para ilustrar los conceptos de suma por izquierda, suma por derecha (Figura 3) y aproximación de volumen de un sólido de revolución (Figura 4). En las actividades del programa Geogebra (Figura 3 y Figura 4) se utilizaron hojas de trabajo con actividades dirigidas a que los alumnos transitaran en los distintos registros de representación semiótica. Las actividades se les proporcionaron de manera electrónica e iban llenándolas en equipos y utilizando sus dispositivos electrónicos (celular, tablet o computadora).

Figura 3. Archivo de Geogebra que calcula aproximación de área.

Figura 4. Archivo de Geogebra que calcula aproximación de volumen.

Posterior al uso de las actividades con las hojas de trabajo y las actividades en Geogebra, se siguieron tres fases, que consistieron en: fase 1 problema de aproximar el área por medio de rectángulos, fase 2 problema de sólido de revolución y fase 3 aplicación de entrevista semiestructurada. Los dos problemas se aplicaron al grupo para identificar si utilizaban la conversión de las representaciones semióticas y la entrevista para obtener la perspectiva del estudiante con el uso del Geogebra.

Resultados

Fase 1, el primer problema que se planteó fue el siguiente: Aproximar el área por derecha (en algunos casos se pidió la aproximación de área por izquierda) con $n = 5$ rectángulos con la misma base en el intervalo $[0,1]$ y la función $f(x) = 2x + 1$ (en algunos casos se cambió la función por $f(x) = 2x$).

Este problema fue resuelto de manera correcta por diecinueve alumnos, los alumnos realizaron la representación algebraica y la conversión con la representación numérica (se muestra un ejemplo en la Figura 5). Esta actividad fue similar al trabajo que se realizó en la actividad propuesta en la Figura 3, cabe resaltar que no hicieron uso del registro de representación gráfico.

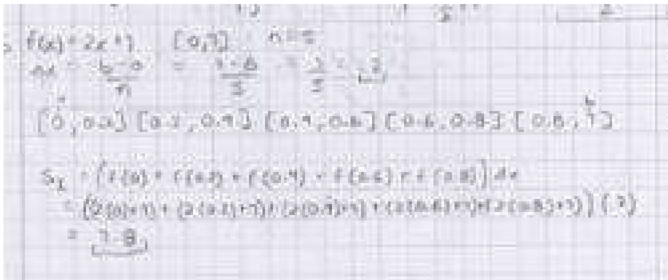


Figura 5. Respuesta de un alumno de la aproximación de área.

Por otro lado, tres alumnos (alumno A, B y C) acompañaron su respuesta de otro tipo de registro de representación semiótica. Por ejemplo, en la Figura 6, el alumno A, tabuló la función y realizó la gráfica del área que se solicitó en el registro de representación algebraico. El área la calculó por medio de la integral definida correctamente. Este mismo alumno, encontró el área total como el área de un triángulo y de un cuadrado, pero consideró la altura como tres y dicha altura es de dos unidades, por lo cual, el área que obtuvo fue de 2.5. Por otro lado, obtuvo erróneamente la aproximación del área por derecha, sin embargo, el resultado lo puso correcto, dado que utilizó el archivo que calcula aproximación de área (Figura 3).

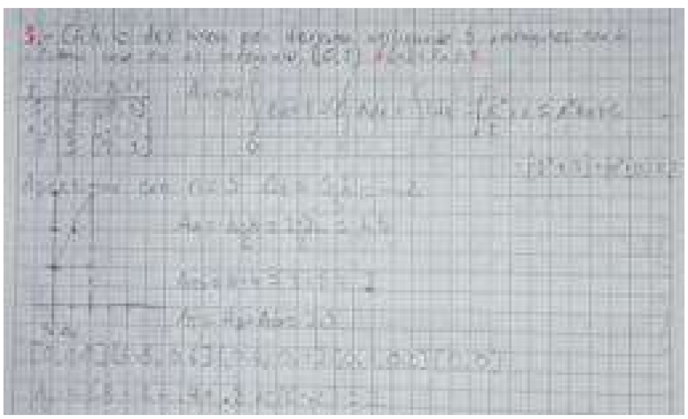


Figura 6. Alumno que acompaña su respuesta en los tres registros de representación.

En la Figura 7, se observa que el alumno B, resolvió el problema de forma gráfica acompañado del cálculo del área de cada uno de los rectángulos y obteniendo el área total con la suma de los rectángulos, haciendo uso de la conversión de los registros de representaciones gráfica y numérica.

La Figura 8 ilustra la respuesta del alumno C, cuyo trabajo fue que el área correspondía a dos ¨rectángulos¨ de área uno y cuya suma es dos. Llegó al resultado sin el uso de los rectángulos solicitados, solo por medio de fórmulas geométricas haciendo uso de un tratamiento en el registro de representación gráfico.

Figura 7. Alumno que resuelve el problema de forma gráfica.

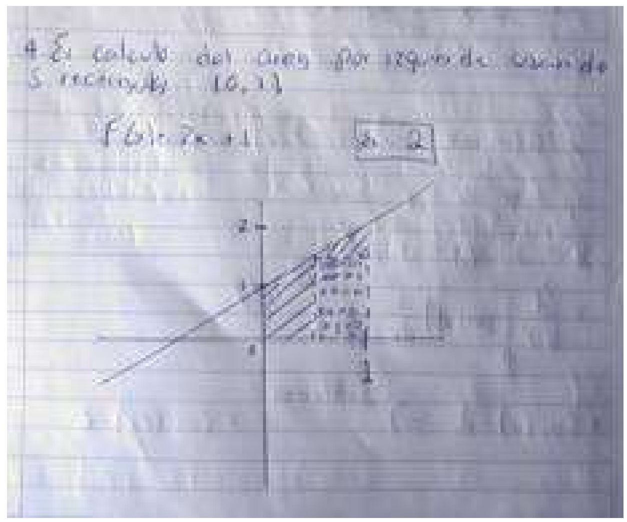


Figura 8. Alumno que resuelve el problema utilizando un tratamiento del registro de representación gráfico.

Fase 2, el segundo problema fue el siguiente: Encontrar el volumen del sólido de revolución $f(x) = x$, si se revoluciona en el eje x.

Este ejercicio arrojó que diez alumnos resolvieron de manera correcta el problema en el registro de representación algebraica, como lo ilustra la Figura 9. En los resultados de estos 10 alumnos no se vio evidencia del uso de algún otro registro de representación semiótica.

Los otros doce alumnos resolvieron su problema acompañado de una conversión entre los registros de representación algebraico, numérico y gráfico. Algunas complicaciones detectadas, fueron que no graficaron correctamente la función y no se evaluó correctamente la integral definida. La Figura 10, ilustra la respuesta del estudiante D, donde se evidencia estos obstáculos.

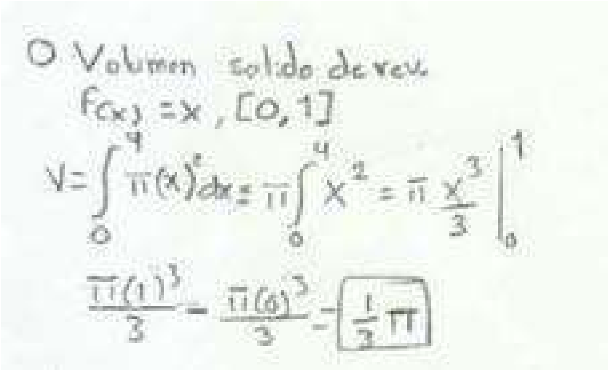


Figura 9. Alumno que resuelve el problema en registro de representación algebraica

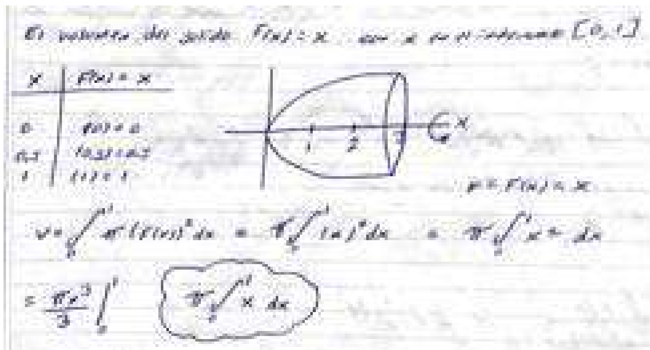


Figura 10. Alumno D que resuelve el problema, pero no evalúa la integral definida

En el caso de la Figura 11, el alumno E, realizó bien la tabulación, la gráfica y el cálculo de la integral definida coordinando bien los registros de representación semiótica, solo que el alumno revolucionó en el eje y.

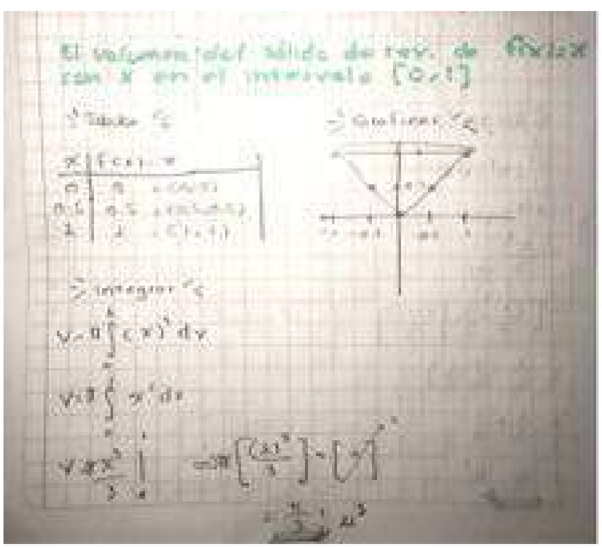


Figura 11. Alumno que resuelve el problema y revoluciona en el eje y.

En la Figura 12, se ejemplifica lo realizado por el alumno F, que contestó y coordinó de forma correcta los registros de representación semiótica.

Fase 3, se diseñó una entrevista semi-estructurada para explorar el uso del programa Geogebra en el aprendizaje de conceptos de cálculo integral desde la perspectiva del estudiante. La entrevista incluyó dos preguntas abiertas con el objetivo de explorar que beneficios o conflictos que causó el programa Geogebra en el concepto de la integral.

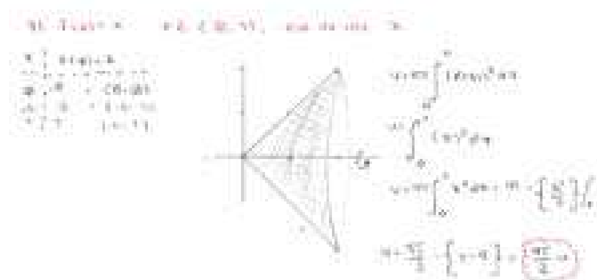


Figura 12. Alumno que resuelve el problema y coordina los registros de representación semióticas.

¿El programa (Geogebra) que se utilizó durante la clase te ayudó a comprender los temas? Explica

Tabla 1. Pregunta 1

RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS
1. Sí, me fueron muy útiles y prácticos para comprender procedimientos.
Los alumnos 2, 18 y 22 comentan algo similar.
3. Si, me ayudaron al momento en el cual quería comprobar respuestas.
Los alumnos 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 15 y 16 escriben algo similar.
7. Si ya que mostraba de mejor manera con gráficas para podernos realizar una idea.
El alumno 19 contesta algo similar.
9. Un poco.
Alumno 20 menciona que no le ayudó.
12. Si, me ayudan a reforzar algún tema.
14. Si, en el paso a paso si no entendía algo veía cual era el error.
El alumno 17 comenta algo similar.
21. Sí, en algunas ocasiones que era más complejo me facilitaban a comprender más fácil.

Los resultados arrojados en la Tabla 1, muestran que a la mayoría de los alumnos les ayudó el programa Geogebra, ya sea para verificar o reforzar sus respuestas, además de brindar confianza en los resultados que se tenían. En el caso del alumno 7 y 19 comentaron que el programa Geogebra les ayudó a darse una idea mejor al observar la gráfica. Lo cual muestra un indicio del uso de las distintas representaciones semióticas por parte de los estudiantes. Las respuestas muestran una percepción positiva por parte de los alumnos en el uso de Geogebra en el curso de cálculo, destacando su rol como verificador de resultados en las integrales y su apoyo visual para la comprensión de conceptos.

La segunda pregunta que se les planteó a los estudiantes fue la siguiente: Explica como resolviste algún tema con el uso del Geogebra.

Tabla 2 Pregunta 2

RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS
1. Para integrar funciones muy largas, era más práctico utilizar el software y así determinar el resultado.
El alumno 8 y 21 utilizaron Geogebra para resolver integrales.
4. Pues en si entendía los temas solo verificaba en problemas que no estaba seguro de mi resultado.
Los alumnos 2, 3, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19 y 20 comentan algo similar.
5. Pues son muy útiles para todo lo que conlleva gráficas y eso es una gran ventaja para hacer hasta los rectángulos de aproximación.
6. Cuando no entendía la tarea alguna integral recurría a este programa para ver cómo se empezaba a resolver y de ahí tener una idea.
10. Aplicaba las ecuaciones.
14. En los problemas que se requieren utilizaba el Geogebra para factorizar.
18. En ocasiones las propiedades ya vienen dentro de la respuesta del programa.

La Tabla 2 ilustra que los alumnos utilizaron la instrucción integral y que esencialmente el programa Geogebra fue utilizado para comprobar o verificar si las soluciones a los problemas que involucraban las integrales estaban en los correcto. Los alumnos perciben al programa como apoyo visual para comprender conceptos y sobre todo para la verificar las integrales, lo cual les genera confianza. Sin embargo, el Geogebra fue utilizado para ahorrar tiempo a la hora de resolver las integrales e identificar su método de integración.

Conclusiones

En el curso se diseñaron actividades que apoyaron de forma dinámica la comprensión del concepto de integral como acumulación, dichas actividades permitieron a los alumnos interactuar entre los distintos registros de representación semiótica: gráfico, numérico y algebraico. La conversión entre estos registros permitió que los alumnos tuvieran una noción de la integral como acumulación, los resultados obtenidos muestran que los alumnos se apoyaron en los registros de representación semiótica para dar solución a los problemas planteados.

Dentro de los resultados se observó que el programa Geogebra les ayudó a los estudiantes a comprobar resultados de los problemas planteados, siendo esta la mayor aplicación que se le da al programa Geogebra por parte de los estudiantes. Además de estas perspectivas de los estudiantes hacia el uso del programa Geogebra como herramienta para verificar procedimientos, también percibieron la seguridad que les generó en sus soluciones. Otra conclusión es que se utilizó el programa para conceptualizar el área y volumen por sólido de revolución, relacionado con sus distintas representaciones semióticas, facilitando un vínculo entre la función, su gráfica (ya se dé área o volumen) para que el alumno tenga una mejor comprensión.

Algunos retos que se enfrentaron durante la investigación fueron: una vez que el estudiante dominaba el uso de programa, mostraba dependencia para resolver una integral sin presentar algún tipo de procedimiento o análisis de la solución. En ocasiones los alumnos no tenían descargado el programa en su equipo y lo utilizaban en modo en línea, lo cual, dificultaba el uso por la falta de conexión a internet.

Para finalizar se recomienda que el diseño de actividades esté guiado al uso de los distintos registros de representación semiótica para que el alumno confronte y explore su trabajo manual con el que arroja el programa.

Referencias

1. Artigue, M. (1995), Una perspectiva Histórica sobre la enseñanza de los principios del cálculo. Ingeniería didáctica en educación matemática, Editorial Iberoamérica, Bogotá Colombia.
2. Cabañas, G. y Cantoral, R. (2007), La integral definida: Un enfoque socioepistemológico, Matemática Educativa: Algunos aspectos de la socioepistemología y visualización en el aula, Editorial Díaz Santos, México.
3. Cordero, F. (2005), El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, México.
4. Duval, R. (1999). Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Semiósis y pensamiento humano. Cali, Colombia: Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes.
5. Hitt, F. (2003), Dificultades *en el aprendizaje del cálculo*, Décimo primer encuentro de profesores de matemáticas del nivel medio superior, Morelia México.
6. Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., Lavicza, Z. (2008), *Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematicas Software Geogebra*, ICME 11, Monterrey, México.
7. Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación* (Vol. 1). Barcelona: Paidós.
8. Thompson, P.; Silverman, J. The concept of accumulation in calculus. In: M. P. CARLSON; C.; RASMUSSEN (Ed.). Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics. Washington: Ed. Mathematical Association of America, 2008. p. 43-52.

Artículo recibido: 2 septiembre 2025
Dictaminado: 3 diciembre 2025
Aceptado: 30 diciembre 2025

2025, Volúmen 13, Número 2, pp. 24-37

Sección: Artículos de Investigación

Análisis del uso de historietas educativas para fortalecer la comprensión de propiedades geométricas planas bajo un enfoque STEAM

Analysis of the use of educational comics to strengthen the understanding of planar geometric properties under a STEAM approach

Laura Yesenia Campos Miranda
Escuela Secundaria General "Melchor Ocampo"; México
laurayescammir@gmail.com
orcid.org/0009-0007-4378-9952

Diana Sarait Gómez Leal[1]
Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de San Luis Potosí; México
dgomez@beceneslp.edu.mx
orcid.org/0009-0003-3219-1534

Resumen
Esta propuesta surge ante las limitaciones de la enseñanza tradicional de la geometría, centrada en la memorización y con escasos recursos visuales significativos, lo que dificulta la comprensión de las propiedades de las figuras geométricas planas. Por ello, este estudio tuvo como objetivo diseñar e implementar historietas educativas para fortalecer dichos aprendizajes en estudiantes de segundo grado de secundaria. El diseño didáctico se basó en la teoría de Van Hiele, el enfoque STEAM (ciencia, tecnología, ingeniería, artes y matemáticas) y la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel. La metodología fue mixta, mediante pruebas diagnósticas, observaciones, entrevistas, diario de campo y evaluación pre-postest. Además, el grupo experimental creó sus propias historietas, permitiendo identificar su nivel de razonamiento antes de la evaluación final. Los resultados evidencian avances significativos en los niveles de razonamiento geométrico propuestos por Van Hiele, así como un aumento en la motivación, el interés por la geometría y la participación de los estudiantes. Esta propuesta responde a las necesidades actuales al integrar elementos narrativos y visuales que favorecen aprendizajes más significativos en el aula de matemáticas.

Palabras clave: Historieta educativa, modelo Van Hiele, figuras planas, propiedades geométricas, STEAM

[1] Autora de correspondencia

Abstract

This proposal emerges from the limitations of traditional geometry teaching, which relies heavily on memorization and offers few meaningful visual resources, hindering students' understanding of the properties of plane geometric figures. Therefore, this study aimed to design and implement educational comics to strengthen such learning in second-grade secondary students. The didactic design was based on Van Hiele's theory, the STEAM approach (Science, Technology, Engineering, Arts, and Mathematics), and Ausubel's theory of meaningful learning. A mixed methodology was adopted, incorporating diagnostic tests, observations, interviews, a field journal, and pre- and post-test evaluations. Additionally, the experimental group created their own comics, allowing the identification of their reasoning level prior to the final assessment. The results show significant progress in the geometric reasoning levels proposed by Van Hiele, as well as increased motivation, interest in geometry, and active student participation. This proposal addresses current educational needs by integrating narrative and visual elements that foster more meaningful learning in the mathematics classroom.

Keywords: Educational comic, Van Hiele, plane figures, understanding, STEAM

Cómo citar / How to cite: Campos Miranda, L., y Gómez Leal, D. (2025). Análisis del uso de historietas educativas para fortalecer la comprensión de propiedades geométricas planas bajo un enfoque STEAM. *Revista AMIUTEM*, *13*(2), 24–37. https://doi.org/10.65685/amiutem.v13i2.275

Introducción

La enseñanza de las matemáticas, particularmente en el área de geometría, ha enfrentado múltiples desafíos en el contexto educativo actual. Según Díaz Barriga y Hernández (2002), la falta de recursos didácticos innovadores y la prevalencia de prácticas centradas en la memorización dificultan que los estudiantes desarrollen una comprensión profunda de los contenidos. Esto provoca que la geometría sea percibida como un conocimiento abstracto, generando dificultades para identificar y aplicar las propiedades de las figuras geométricas planas.

Ante este panorama, surgió la necesidad de incorporar estrategias pedagógicas que favorecieran aprendizajes más significativos, motivadores y acordes con las necesidades de los adolescentes. En este sentido, el empleo de historietas educativas representa una alternativa innovadora para fortalecer la comprensión geométrica, pues integra elementos narrativos, gráficos y visuales que pueden facilitar el razonamiento y la visualización espacial. De acuerdo con Pastor (1993), la apropiación de conceptos geométricos puede potenciarse mediante experiencias que promuevan el análisis y la interpretación de situaciones contextualizadas, lo cual coincide con los fundamentos del modelo de Van Hiele.

En el presente estudio se da a conocer el análisis de la implementación de las historietas educativas diseñadas por la docente, como recurso para mejorar la comprensión de las propiedades de las figuras geométricas planas, las cuales se retomarán más adelante, en dos grupos de estudiantes de segundo grado de secundaria los cuales se clasificaron en dos: un grupo de control, que no utilizaría las historietas, y un grupo experimental, en el que se emplearían durante las sesiones de enseñanza-aprendizaje, ambos con la misma docente.

El objetivo fue diseñar e implementar historietas educativas para fortalecer la comprensión de las propiedades geométricas de las figuras planas en estudiantes de segundo año de secundaria. Para ello, se establecieron objetivos específicos que incluyeron la elaboración de un diagnóstico acorde al nivel cognitivo de los estudiantes, el diseño de las historietas, su implementación en clase y la evaluación de su efectividad.

Metodológicamente, se trabajó bajo un enfoque mixto. La fase cualitativa incluyó observaciones, entrevistas semiestructuradas y el uso de un diario de campo; la fase cuantitativa consideró una prueba diagnóstica, una evaluación final y la creación del proyecto de historieta por parte del grupo experimental. Según Creswell (2009), la combinación de métodos cualitativos y cuantitativos permite obtener una comprensión más completa del fenómeno educativo, integrando los resultados descriptivos con los numéricos.

El problema central que motivó esta investigación se relaciona con las dificultades que presentan los estudiantes para reconocer, clasificar y aplicar las propiedades geométricas. Como señalan Fourz y De-Donosti (2005), la enseñanza tradicional limita el desarrollo de razonamientos más complejos, afectando la transición entre los niveles cognitivos del modelo de Van Hiele. El empleo de historietas educativas, acompañado del enfoque STEAM, busca atender estas necesidades mediante experiencias significativas que fomenten el pensamiento crítico, la comprensión lectora, la creatividad, la visualización espacial y el interés por las matemáticas.

La relevancia de esta investigación radicó en su aporte educativo y social. Implementar recursos visuales accesibles y pertinentes puede mejorar la motivación de los estudiantes y generar un clima más positivo hacia la geometría. Además, las historietas educativas pueden convertirse en un puente entre el conocimiento abstracto y la experiencia cotidiana, favoreciendo aprendizajes más profundos y duraderos.

Referente teórico

Modelo Van Hiele

Para describir el modelo de Van Hiele se retoma la interpretación expuesta por Pastor (1993), quien explica su estructura y aplicación en la enseñanza de la geometría. Este modelo plantea una progresión del razonamiento geométrico mediante niveles secuenciales que permiten identificar cómo evoluciona el pensamiento del estudiante.

El modelo indica que los estudiantes deben de pasar por cinco niveles para que se pueda reconocer si han logrado consolidar un aprendizaje referente a la geometría, van desde el reconocimiento visual hasta el análisis abstracto y la deducción rigurosa. Cada uno requiere el manejo de un lenguaje y forma de pensamiento, donde el avance a un nuevo nivel deberá ser a través de la enseñanza estructurada, lo que permite identificar las dificultades que los educandos van presentando.

Los aspectos que abarca el modelo de Van Hiele son dos, como indican Vargas y Araya (2013): descriptivo, ayuda a identificar las formas de razonamiento geométrico que tiene un individuo, lo que da lugar a su progreso; instructivo, es donde se presentan las pautas que el docente debe seguir para monitorear y guiar al estudiante a pasar de un nivel al siguiente.

El modelo de Van Hiele se caracteriza por contar con cinco niveles, no existe una unanimidad en su numeración, algunos autores lo presentan del 0 al 04 y otros del 01 al 05, para este documento se toma como en cuenta la primera numeración, se aclara para evitar confusión.

Según Vargas y Araya (2013), Mora y Rodríguez (2015) y Fouz y De-Donosti (2005), los niveles del razonamiento geométrico se presentan de manera secuencial. Las características de cada uno de los niveles de razonamiento geométrico:

- Nivel 0: Se reconocen las figuras geométricas como un todo sin diferenciar sus partes. Las descripciones son visuales y comparativas con elementos familiares, sin utilizar lenguaje geométrico específico.
- Nivel 01: Se presenta el reconocimiento y análisis de partes y propiedades de figuras geométricas, sin la capacidad para establecer relaciones entre propiedades de distintas figuras. Las definiciones se establecen empíricamente.
- Nivel 02: Se logra clasificar cada figura por sus propiedades y comprensión de cómo unas propiedades derivan de otras. Se construyen interrelaciones entre figuras y familias de figuras. Aunque se siguen las demostraciones, no se logra organizarlas en secuencias lógicas completas.
- Nivel 03: Se cuenta con la capacidad para realizar deducciones y demostraciones lógicas y formales, comprendiendo y manejando las relaciones entre propiedades en sistemas axiomáticos. Se entiende la naturaleza axiomática de las matemáticas y la posibilidad de múltiples demostraciones para un mismo resultado.
- Nivel 04: Se presenta el análisis del rigor de varios sistemas deductivos, comparando consistencia, independencia y completitud de los axiomas. Captación abstracta de la geometría, nivel que suele desarrollarse en estudiantes universitarios con buena preparación en geometría.

Dado que los estudiantes de este estudio pertenecen a nivel secundaria, no se espera que alcancen el nivel 4, sino promover su avance progresivo desde el nivel inicial que se detectó en el examen diagnóstico. El propósito es promover su progreso, comenzando desde el nivel en el que se encuentran.

Los niveles del modelo presentan cinco propiedades esenciales (Vargas y Araya, 2013):

- Secuencia fija: Un estudiante debe pasar por el nivel n-1 antes de alcanzar el nivel n.
- Adyacencia: Lo que era intrínseco en un nivel se vuelve extrínseco en el siguiente.
- Distinción: Cada nivel tiene su propio lenguaje y red de relaciones.
- Separación: Las personas en diferentes niveles no pueden entenderse entre sí.
- Logro: El aprendizaje hacia un entendimiento completo consta de cinco fases.

Empleo de la Teoría de los Van Hiele: Momentos a Utilizar en la Clase Basados en el Modelo de los Van Hiele

Las fases del proceso de enseñanza y aprendizaje propuestas por el modelo de Van Hiele son cinco, cada una con una función específica para favorecer el avance conceptual del estudiante. En esta investigación, dichas fases se utilizaron durante las sesiones del grupo experimental, asegurando que cada una contribuyera al desarrollo del razonamiento geométrico.

Para implementar la intervención, se retomaron los niveles y fases descritos en la teoría de Van Hiele, y cada sesión del grupo experimental incluyó actividades alineadas a las cinco fases, que se describen a continuación:

1. Información o Indagación. En esta fase, los estudiantes se familiarizaron con la geometría plana mediante discusiones, observaciones y la formulación de preguntas, incorporando vocabulario específico para expresar sus ideas con mayor precisión (Vargas y Araya, 2013). Como primer acercamiento al contenido, y a lo largo de siete sesiones, se les entregaron historietas distintas que abordaban desafíos geométricos, lo que permitió contextualizar los conceptos de manera narrativa y visual. Tras la lectura de cada historieta, los alumnos compartieron sus impresiones e identificaron las figuras y propiedades presentes en la historia, favoreciendo un ambiente inicial de exploración y diálogo matemático.
2. Orientación Guiada. Tomando como referencia a Fouz y De-Donosti (2005, citado en Vargas y Araya, 2013), en esta fase los estudiantes participaron en actividades estructuradas que guiaron la exploración del contenido geométrico. La docente acompañó el proceso para asegurar que los alumnos comprendieran los conceptos fundamentales. Los equipos analizaron la historieta con

mayor detalle y respondieron preguntas orientadas a identificar propiedades geométricas, recibiendo apoyo y aclaraciones cuando fue necesario para fortalecer la comprensión de las relaciones entre los conceptos.

3. Explicitación o Explicación. En esta fase, los estudiantes expresaron y discutieron las relaciones aprendidas utilizando un lenguaje técnico adecuado, aspecto clave para consolidar los conceptos (Vargas y Araya, 2013). Se aplicó una actividad de resolución de problemas basada en la historieta, en la que los alumnos emplearon las propiedades geométricas vistas para responder preguntas y justificar sus procedimientos. La docente supervisó el trabajo para asegurar el uso correcto del vocabulario y la coherencia en las explicaciones.
4. Orientación Libre. Esta fase promovió la exploración independiente, la creatividad y la formulación de conjeturas (Mora y Rodríguez, 2015). Los estudiantes aplicaron libremente los conceptos aprendidos para resolver tareas abiertas, trabajando de manera individual o en equipos y probando distintas estrategias. La docente intervino únicamente cuando fue necesario, orientando sin limitar la experimentación y observando las dinámicas de trabajo para acompañar el proceso cuando se requería.
5. Integración. En esta última fase, los alumnos sintetizaron y reflexionaron sobre lo aprendido, con apoyo de la docente, lo que permitió consolidar conocimientos y favorecer el avance en su razonamiento geométrico (Vargas y Araya, 2013). Al cierre de la sesión, se realizó una discusión grupal donde los estudiantes compartieron sus respuestas y explicaron cómo aplicaron los conceptos trabajados en la actividad, lo cual fortaleció la comprensión obtenida a partir de la historieta.

Evaluación según el modelo de Van Hiele

Según Fouz y De-Donosti (2005, citado en Vargas y Araya, 2013), la evaluación dentro del modelo debe centrarse en las razones que sustentan las respuestas de los estudiantes. Plantean las siguientes recomendaciones:

1. El nivel de razonamiento depende del área matemática trabajada.
2. Es necesario evaluar cómo responden los estudiantes y por qué responden así, más que si la respuesta es correcta.
3. El nivel del alumno se identifica en sus explicaciones, no en las preguntas.
4. Un estudiante puede situarse en distintos niveles según el contenido.
5. Resulta complejo determinar el nivel exacto cuando el alumno se encuentra en transición entre niveles.

Empleo de STEAM

El enfoque STEAM es una metodología interdisciplinaria derivada de los campos de la Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemáticas. Su propósito es integrar estos saberes para resolver problemas concretos de la vida real, favoreciendo que los estudiantes desarrollen competencias mediante experiencias significativas (Ortiz-Carranza et al., 2024). Este enfoque promueve: el aprendizaje activo y el trabajo colaborativo; habilidades artísticas y tecnológicas; al tiempo que fomenta la creatividad, la innovación y el pensamiento crítico.

Empleando las palabras de Ortiz-Carranza, Ortiz-Barre, Trejo-Márquez y Martínez-Satizabal (2024), la metodología STEAM fomenta una enseñanza activa y experiencial en educación básica, incentivando a los estudiantes a establecer conexiones prácticas entre diferentes áreas del conocimiento. Por su parte, Toma y García-Carmona (2021) destacan la relevancia del enfoque STEAM en la enseñanza de las matemáticas al propiciar aprendizajes interdisciplinarios con sentido y aplicaciones reales.

En este estudio, el diseño y empleo de historietas educativas se relaciona directamente con el enfoque STEAM, pues mediante la narrativa gráfica los estudiantes pueden visualizar conceptos abstractos de la geometría. Esto permite construir una conexión entre el componente artístico de la historieta y el análisis geométrico, integrando elementos visuales, tecnológicos y matemáticos en una misma actividad didáctica.

Además, según Ortiz-Carranza et al. (2024), quienes retoman aportaciones de diversos autores, el enfoque STEAM presenta beneficios específicos en cada uno de sus componentes, los cuales se describen a continuación:

- Ciencia: Fomenta la exploración del entorno natural, el análisis crítico y la capacidad de formular hipótesis. También impulsa la cooperación interdisciplinaria, contribuyendo a que los estudiantes construyan una base sólida para futuras trayectorias académicas en ciencia y tecnología (Ortiz-Carranza et al., 2024).

- Tecnología: Promueve el desarrollo de habilidades prácticas y la resolución de problemas al permitir que los estudiantes empleen herramientas digitales para enfrentar desafíos, preparándolos para un mundo en constante cambio tecnológico (Ortiz-Carranza et al., 2024).
- Ingeniería: Favorece el diseño y mejora de soluciones mediante el uso de conocimientos matemáticos y científicos, fortaleciendo el pensamiento crítico y las habilidades analíticas (Ortiz-Carranza et al., 2024).
- Arte: Estimula la creatividad y la expresión visual, permitiendo que los estudiantes representen ideas científicas y tecnológicas de manera clara, atractiva y significativa (Ortiz-Carranza et al., 2024).
- Matemáticas: Desarrolla el razonamiento lógico y analítico, esencial para la solución de problemas cuantitativos y el aprendizaje avanzado en áreas científicas y tecnológicas (Ortiz-Carranza et al., 2024).

En este estudio, el enfoque STEAM se complementó con la integración de valores (V), debido a la problemática detectada en la escuela relacionada con el acoso escolar.

Las historietas utilizadas incluyeron escenas y situaciones que promovían, de forma implícita, valores como: respeto, empatía, colaboración, honestidad, y resolución pacífica de conflictos. Por ejemplo, en los diálogos se presentaban historias donde una figura era descalificada por no parecerse a las demás (como el círculo, se decía que no tenía ángulos), pero luego al descubrirse sus propiedades, se daban cuenta de que, aunque no era igual a los demás, sus propiedades lo hacían sentirse especial e importante. Esto permitió que, mientras analizaban propiedades geométricas, los estudiantes también reflexionaran sobre su conducta y convivencia escolar. La integración de valores fortaleció tanto el aprendizaje académico como el desarrollo socioemocional.

Según establece la SEP (Secretaría de Educación Pública, 2022) las fases en las que se debe de llevar el enfoque STEAM, son las siguientes:

Fase 1: Introducción al Tema

- Se presenta el tema y se utilizan conocimientos previos para generar disonancia cognitiva, lo que orienta el aprendizaje.
- Se identifica una problemática general y se establecen preguntas específicas de indagación relacionadas con la comunidad.

Fase 2: Diseño de Investigación

- Se define el enfoque para cada pregunta específica: qué, quién, cómo, cuándo, dónde y con qué se abordará la indagación.
- Se realiza la indagación en el aula, respondiendo a cada pregunta mediante la recopilación de datos, considerando aspectos como descripción, comparación, identificación de cambios y patrones, y elaboración de explicaciones.

Fase 3: Organización de Respuestas

- Se analizan, organizan e interpretan los datos recopilados.
- Se sintetizan ideas y se clarifican conceptos y explicaciones.

Fase 4: Presentación de Resultados

- Se presentan los resultados de la indagación y se elaboran propuestas de acción para abordar la problemática identificada.

Fase 5: Metacognición

- Se reflexiona sobre el proceso realizado, evaluando planes de trabajo, actuaciones, logros, dificultades y fracasos.

La historieta y cómic como Estrategia para la Enseñanza y Aprendizaje

La historieta, a diferencia del cómic tradicional, presenta una narrativa breve y estructurada que facilita la exposición de conceptos sin apoyarse en elementos humorísticos. Esta característica la convierte en un recurso adecuado para la enseñanza de las figuras geométricas planas, especialmente en estudiantes de secundaria que aún se encuentran en una transición cognitiva entre el pensamiento concreto y el formal.

Desde la perspectiva de Jean Piaget (s.f., citado en Molina, 2024) en sus estudios sobre el desarrollo cognitivo, indica que los adolescentes se encuentran en una fase de transición entre la niñez y la adultez. En este periodo, ingresan en la etapa de las operaciones formales, donde se desarrolla la capacidad de pensar de manera abstracta y lógica. En esta fase, el uso de herramientas visuales como las historietas puede facilitar la comprensión de conceptos complejos, como los geométricos, ya que ayudan a los estudiantes a representar mentalmente los polígonos.

Diversos estudios respaldan el uso educativo del cómic y la narrativa gráfica. Entre ellos, el estudio de Sánchez-Barbero, Cáceres, Chamoso, Rodríguez y Rodríguez (2020) concluye que el cómic es una herramienta educativa efectiva para abordar problemas matemáticos de forma menos estructurada, permitiendo a los estudiantes interpretar y extraer información relevante, que sirve en el mundo real. Además, los personajes crean una conexión con los educandos, logrando una mejor comprensión.

Por su parte, Urbina et al. (2020, citado en Tandayamo et al. 2023) manifiestan que el uso de los recursos de narración gráfica, como la historieta, es una herramienta de comunicación que ayuda a interpretar situaciones complejas, debido a que es visual, atractiva, cuenta una historia, existe una secuencia en los sucesos y tiene un impacto significativo en los lectores, lo que les ayuda a conectar y comprender mejor el contenido matemático a través de un enfoque más atractivo y contextualizado.

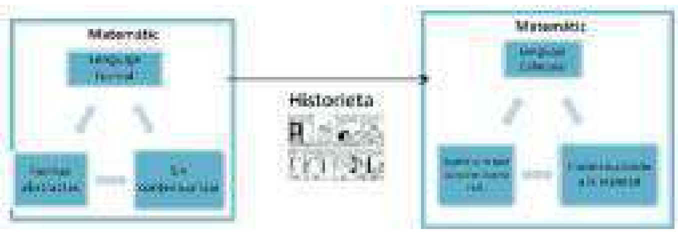


Figura 1. Relación entre el lenguaje matemático y las historietas en el aprendizaje. Tomada de Tandayamo et al. (2023, p. 3486).

La Figura 1 da a conocer dos enfoques de enseñanza de las matemáticas: uno tradicional con lenguaje formal, formas abstractas y contenido sin contextualizar; y otro más accesible que utiliza lenguaje coloquial y contextualizado a la realidad, relacionado con lo que los estudiantes ya conocen. La historieta actúa como un puente entre ambos enfoques, transformando el contenido abstracto en uno más comprensible y relevante para los estudiantes.

Estas ventajas son especialmente útiles para la enseñanza de contenidos geométricos, ya que la historieta permite introducir, representar y relacionar:

- Las propiedades de las figuras planas (número de lados, ángulos, vértices).
- La clasificación de polígonos (regulares, irregulares, convexos y cóncavos).
- Las relaciones entre las figuras (similitudes, diferencias, subclasificaciones).
- Conceptos básicos de áreas, perímetros y formas compuestas.
- El lenguaje geométrico necesario para describir y justificar propiedades.

En la Figura 1, tomada de Tandayamo et al. (2023), se muestra cómo la narrativa gráfica puede funcionar como un puente entre el lenguaje matemático formal y un lenguaje más cercano para los estudiantes. Mientras la enseñanza tradicional tiende a presentar conceptos de manera abstracta, la historieta contextualiza las situaciones, lo que facilita la interpretación, comprensión y aplicación de los contenidos geométricos.

Metodología

En este apartado se describe el enfoque metodológico, el tipo de estudio, así como la población y muestra que formaron parte del presente trabajo.

Enfoque de la Investigación

La presente investigación se desarrolló bajo el enfoque de investigación-acción, también conocida como investigación participante. De acuerdo con Latorre (2005), este enfoque metodológico busca la mejora de las prácticas educativas mediante un proceso cíclico que incluye la reflexión, la acción y la evaluación. Se caracteriza por identificar áreas de oportunidad dentro del ámbito académico del docente, diseñar acciones para intervenir en ellas, implementarlas y, finalmente, reflexionar sobre los resultados obtenidos.

Además, Latorre (2005) enfatiza que la investigación-acción se caracteriza principalmente por un ciclo reflexivo, en el que se planifica, se actúa, se observa y se reflexiona sobre lo realizado. Implica una participación activa, ya que el docente se convierte en protagonista de su propio proceso de aprendizaje y mejora, asumiéndose como investigador de su práctica. También destaca su contextualización, pues se desarrolla en la realidad concreta del aula y se adapta a las necesidades y características de los estudiantes. Este enfoque promueve la mejora continua, al buscar cambios significativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y favorece la generación de conocimiento, que puede compartirse y ser útil para otros educadores.

Asimismo, este proyecto adoptó un enfoque mixto, integrando datos cualitativos (cualidades observables) y cuantitativos (datos numéricos) con el propósito de obtener una comprensión más completa sobre la influencia de las historietas educativas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En particular, este enfoque permitió analizar cómo se fortaleció la comprensión de las propiedades de las figuras geométricas planas en los estudiantes de segundo año de la Escuela Secundaria General Potosinos Ilustres.

Según Creswell (2009), el enfoque mixto se caracteriza por combinar elementos de los enfoques cualitativo y cuantitativo, permitiendo un análisis más amplio y complementario. Esta integración posibilita la triangulación de datos, lo que fortalece la validez y la confiabilidad de los resultados obtenidos.

Flick (2015) argumenta que el enfoque cualitativo se centra en interpretar los fenómenos desde la perspectiva de los estudiantes, explorando significados subjetivos y las interacciones que emergen en el contexto. Esto resultó especialmente relevante para el presente proyecto, ya que el empleo de historietas educativas buscó analizar cómo los estudiantes interpretaban y reaccionaban ante esta nueva forma de aprendizaje. Para ello, se recurrió a la observación participante, lo que permitió obtener una comprensión más profunda sobre los comportamientos, actitudes y procesos de construcción de significado relacionados con las propiedades de las figuras geométricas planas.

Por otro lado, Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (2010) señalan que el enfoque cuantitativo permite medir variables de manera objetiva y sistemática, empleando herramientas estadísticas para validar hipótesis y establecer relaciones entre los datos. En este estudio, este enfoque permitió evaluar los resultados en términos numéricos, comparando el desempeño del grupo experimental con el del grupo de control, con el fin de identificar con mayor precisión la utilidad de las historietas educativas en la comprensión de las propiedades de las figuras geométricas planas.

Asimismo, Yin (2018) señala que el enfoque mixto fortalece la validez y la confiabilidad de los resultados al integrar datos descriptivos con datos numéricos. En este estudio, este enfoque resultó especialmente útil, ya que permitió analizar de manera conjunta los aspectos cualitativos y cuantitativos previamente mencionados, ofreciendo una visión más completa y equilibrada del proceso de enseñanza-aprendizaje a través de historietas educativas.

En síntesis, se empleó el enfoque mixto porque permitió observar los comportamientos de los estudiantes durante la implementación de las historietas, realizar entrevistas para conocer sus opiniones y utilizar el diario de campo como instrumento de registro cualitativo. Paralelamente, el análisis cuantitativo permitió comparar los resultados obtenidos entre el grupo experimental y el grupo de control, midiendo de manera objetiva la influencia de las historietas en la comprensión de las propiedades geométricas.

El estudio adoptó un diseño cuasi-experimental, ya que se trabajó con grupos preexistentes (grupo experimental y grupo de control) que no fueron asignados de manera aleatoria. Según Hernández Sampieri et al. (2010), este tipo de diseño permite evaluar el impacto de una variable independiente, en este caso, las historietas educativas, sobre una variable dependiente, la comprensión de las propiedades geométricas. Este diseño facilitó la comparación de resultados entre ambos grupos mediante el uso de herramientas cualitativas y cuantitativas, garantizando un análisis integral y representativo.

Muestra y Población de Estudio

La muestra estuvo conformada por dos grupos de segundo grado de secundaria, los cuales presentaban características similares entre sí. El grupo experimental estuvo integrado por 38 estudiantes (21 mujeres y 17 hombres), mientras que el grupo de control contó con 40 estudiantes (23 mujeres y 17 hombres).

En el grupo experimental se implementó la intervención basada en historietas educativas, mientras que el grupo de control continuó con clases de geometría bajo el enfoque tradicional. Esta organización permitió comparar ambos métodos de enseñanza y evaluar el impacto del uso de historietas en la comprensión de las propiedades geométricas por parte de los estudiantes.

Como parte del enfoque metodológico, la formulación de una hipótesis permitió anticipar una posible respuesta al problema planteado. Esta se construyó a partir de la revisión de antecedentes, del análisis de la problemática y de los objetivos del estudio, estableciendo la relación entre el uso de historietas educativas y la comprensión de las propiedades de las figuras geométricas planas.

Hipótesis: El diseño y empleo de historietas educativas fortalecerá significativamente la comprensión de las propiedades de las figuras geométricas planas en los estudiantes de segundo año de la Escuela Secundaria General Potosinos Ilustres, al facilitar la visualización, la interpretación y la comprensión lectora de estos conceptos matemáticos.

"Plan de Acción de la Intervención Didáctica"

La intervención se estructuró a partir de siete historietas educativas diseñadas específicamente para este proyecto, orientadas al análisis de propiedades como: punto e intersección, líneas y vértices, tipos de triángulos, propiedades de cuadriláteros, elementos del círculo, ángulos internos y externos, ejes de simetría, diagonales, y teselados. Estas propiedades fueron integradas en narrativas que vinculan la geometría con situaciones sociales, favoreciendo la comprensión conceptual y el pensamiento geométrico.

El plan de acción se desarrolló durante 12 sesiones con el grupo experimental, integrando el enfoque STEAM+V, las fases del modelo Van Hiele y el empleo de historietas educativas como recurso central para fortalecer la comprensión de las propiedades de las figuras geométricas planas. Cada sesión fue diseñada para favorecer la visualización, el análisis y la clasificación de figuras, así como la reflexión sobre valores como respeto, inclusión, empatía y colaboración, estas son:

1. Introducción al tema. Se presentó el proyecto, se leyó la primera historieta y se reflexionó sobre la importancia del punto. Los estudiantes elaboraron la portada del proyecto. (Van Hiele: Información)
2. Triángulos. Identificación y clasificación de triángulos mediante la historieta correspondiente. Los estudiantes trazaron y recortaron figuras. (Van Hiele: Orientación guiada)
3. Cuadriláteros. Exploración de propiedades de cuadriláteros a partir de una historieta. Se dibujaron y compararon rectángulos, cuadrados y rombos. (Van Hiele: Orientación guiada)
4. Círculo y rectas notables. Construcción de círculos e identificación de radio, diámetro y circunferencia. Se analizó el valor de la igualdad y la resolución de conflictos. (Van Hiele: Explicitación)
5. Polígonos regulares. Construcción y análisis de polígonos regulares: diagonales, suma de ángulos internos y propiedades relevantes. (Van Hiele: Explicitación)
6. Simetría en polígonos. Identificación de ejes de simetría, ángulo central y equilibrio geométrico mediante la historieta correspondiente. (Van Hiele: Orientación libre)
7. Teselados geométricos. Creación de teselados y análisis de sus propiedades matemáticas, vinculando valores como cooperación y respeto. (Van Hiele: Orientación libre)
8. Creación del guion. Los estudiantes elaboraron el guion de su historieta aplicando conceptos geométricos y una problemática de acoso escolar. (Van Hiele: Integración)
9. Bocetos y estructura de la historieta. Trabajo en equipos para la estructura visual y narrativa de la historieta, integrando conceptos geométricos. (Van Hiele: Integración)
10. Elaboración final. Construcción de la historieta en cartulina y presentación parcial de avances, explicando conceptos geométricos aplicados.
11. Evaluación final. Aplicación de una prueba escrita para valorar la comprensión de las propiedades geométricas.
12. Metacognición y retroalimentación. Revisión del examen, vaciado de calificaciones y reflexión sobre el aprendizaje y el uso de historietas.

El enfoque STEAM se involucró en cada una de las sesiones, que si bien se pone énfasis en alguna(s) de las disciplinas más que en otras en las historietas o en las actividades, todas son contempladas y se complementan al hacer la revisión del contenido en cada historieta y al resolver las actividades indicadas, haciendo uso de esta metodología.

El grupo de control trabajó los mismos contenidos geométricos, pero sin historietas. Se emplearon actividades prácticas basadas en el enfoque STEAM, como trazos, mediciones y ejercicios de identificación de propiedades. Esto permitió analizar la diferencia en desempeño entre ambos grupos y evaluar la eficacia de las historietas en la comprensión geométrica.

Resultados

En este apartado se presenta el análisis e interpretación de los resultados obtenidos durante el desarrollo del proyecto. Se evaluó la historieta creada y expuesta por los estudiantes, considerando su integración de conocimientos y la explicación verbal que compartieron con el grupo y con la docente en formación. El análisis se realizó mediante un enfoque mixto, integrando datos cualitativos (diarios de campo, entrevistas y observación participante) y cuantitativos (pruebas estadísticas aplicadas a los exámenes y productos finales).

Interpretación Cualitativa

La intervención se organizó conforme a los niveles del modelo Van Hiele, el cual estructura el aprendizaje geométrico a partir de niveles progresivos de razonamiento (Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991). Las historietas diseñadas representaron situaciones cotidianas vinculadas con conceptos geométricos, facilitando la conexión entre lo visual y lo conceptual. La Figura 2 muestra un ejemplo de las historietas empleadas.

Figura 2. Historietas empleadas

Además, las historietas incorporaron valores como unión, amistad, inclusión y prevención del acoso escolar. De este modo, al enfoque STEAM se añadió la dimensión V (Valores), convirtiéndose en STEAM+V.

Antes de la implementación, el grupo experimental mostraba un desconocimiento general sobre conceptos geométricos básicos y dificultades para relacionar figuras con sus propiedades. En la primera sesión no lograban identificar la importancia del punto en geometría. Tras la implementación de las historietas, se observó una mejora notable en la comprensión de las propiedades de las figuras geométricas, lo cual se reflejó en las opiniones de los estudiantes respecto del punto, las diagonales, los ángulos y otras propiedades fundamentales.

Después de la implementación de las historietas educativas se observó que hubo una mejora significativa en la comprensión de las propiedades de las figuras geométricas planas, lo que se reflejaba en las opiniones de los estudiantes, como del punto, la diagonal y otros conceptos.

Los argumentos utilizados por los estudiantes evolucionaron de respuestas simples a explicaciones más profundas y analíticas. Por ejemplo:

- Docente: "¿Cuál es la diferencia entre una diagonal y un eje de simetría?"
- Estudiante A: "La diagonal es una línea que parte de un vértice y llega a otro".
- Estudiante B: "Los ejes de simetría dividen una figura en partes iguales". (Comunicación directa entre Docente, Estudiante A y Estudiante B, enero de 2025).

Además, en las últimas sesiones de la intervención, las historietas creadas por los estudiantes como evidencia del proceso creativo y de la apropiación progresiva del lenguaje geométrico (véase Figura 2). En los primeros acercamientos, los estudiantes expresaban ideas de forma cotidiana y sin vocabulario matemático, por ejemplo:

- A1: "No maestra, yo sí terminé, pero no entendí bien". Comunicación directa (A1, 23 de octubre de 2024)
- A2: "Es un cuadrado porque sí, es como una caja". Comunicación directa (A2, 6 de noviembre de 2024)

Sin embargo, conforme avanzó la intervención, comenzaron a emplear conceptos formales derivados de la narrativa de las historietas, tal como se observa en diálogos posteriores:

- A2: "Una diagonal es aquella recta que está inclinada y va desde un vértice a otro vértice"
- A3: "El radio es una línea que va del centro a cualquier parte del círculo". Comunicación directa (A2 y A3, 25 de febrero de 2025).

El uso de historietas permitió a los estudiantes relacionar visualmente los conceptos geométricos, favoreciendo su aplicación. Esto coincide con la teoría de Van Hiele, ya que se observó una transición desde la identificación visual hacia un análisis más estructurado de las figuras planas.

Los estudiantes del grupo experimental avanzaron al nivel 2 del modelo (análisis y clasificación): comenzaron a identificar figuras no solo por su forma, sino por sus propiedades internas (lados, ángulos, diagonales, ejes de simetría). Este progreso se evidenció en actividades de clasificación, medición con transportador y verbalizaciones durante las puestas en común.

Figura 2. Historieta elaborada por el grupo experimental

Inicialmente, los estudiantes se encontraban en el nivel 0 (visualización). Sin embargo, después de la intervención se notó un cambio significativo en varios educandos. Tres casos destacan:

1. Un estudiante tímido que se volvió participativo,
2. Otro desinteresado que comenzó a involucrarse activamente,
3. Un alumno inquieto que se convirtió en uno de los participantes más constantes, utilizando correctamente conceptos matemáticos.

En general, el grupo experimental mostró avance hacia el nivel 2 (análisis y clasificación), identificando propiedades específicas y clasificando triángulos y cuadriláteros. En contraste, el grupo control permaneció en el nivel 0 (visualización), ya que continuó reconociendo figuras únicamente por su apariencia, sin establecer relaciones entre sus propiedades. Esto se reflejó en las evidencias de cada sesión del grupo experimental.

Interpretación Cuantitativa

A ambos grupos se les aplicó el mismo diagnóstico inicial (pre-test), alcanzando un total de 78 estudiantes: 40 en el grupo 2°A (control) y 38 en el 2°E (experimental). La evaluación se aplicó el 23 de octubre de 2023, con una duración de 45 minutos y formato impreso para asegurar equidad en el acceso.

Para el análisis estadístico se empleó JAMOVI (versión 2.6.26). Se obtuvo una prueba estadística W de 0.831 y un valor de $p < .001$, indicando que los datos del grupo experimental no siguen una distribución normal. En consecuencia, fue necesario utilizar pruebas no paramétricas (Mann-Whitney U, Wilcoxon y Levene).

El grupo experimental obtuvo un promedio significativamente más alto (31.9) que el grupo control (13.5). La mediana también fue superior (33.0 vs. 13.0), mostrando que una mayor cantidad de estudiantes alcanzó puntajes elevados. Asimismo, la desviación estándar fue menor en el grupo experimental (3.59 vs. 5.22), mostrando mayor consistencia probablemente asociada al impacto de las historietas. La prueba Mann-Whitney U ($p < .001$) confirmó que la diferencia entre grupos es estadísticamente significativa.

La Figura 3 (gráfica) evidencia que el grupo experimental tuvo un puntaje central más elevado, sugiriendo que la actividad de creación de historietas facilitó la aplicación de conocimientos geométricos, especialmente considerando que el proyecto tenía un valor del 40%.

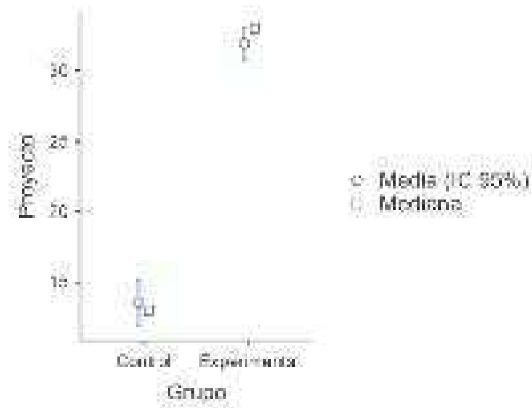


Figura 3. Gráfica de Comparación de Puntajes en el Proyecto.

Se aplicó también una prueba post-test a ambos grupos para evaluar el impacto de la intervención basada en STEAM, Van Hiele y materiales visuales. En el pre-test, los grupos presentaron promedios similares (3.7 vs. 3.8), con una diferencia mínima de 0.1 puntos.

En el examen final, el grupo experimental obtuvo un promedio de 8.19, significativamente mayor que el del grupo control (5.00). La moda también aumentó de 7.24 (control) a 8.96 (experimental), evidenciando un desempeño más sólido.

En el grupo experimental obtuvo un promedio de 8.19, notablemente superior al del grupo de control, que fue de 5.00. Esto muestra una mejora significativa en la comprensión de los conceptos geométricos en los estudiantes que trabajaron con historietas educativas.

Interpretación del resultado: el grupo experimental tuvo un mejor desempeño en la prueba final, teniendo en cuenta que son 29 reactivos, de manera altamente significativa:

- Si $p < 0.05$, la diferencia entre los grupos no es aleatoria y se considera significativa.
- Si $p < 0.001$, la probabilidad de que esta diferencia sea casual es menor al 0.1%.

Es decir, la prueba se aplicó con una variable dependiente correspondiente al número total de aciertos obtenidos (sobre 29 reactivos) y una variable independiente con los dos grupos (experimental y control). El análisis arrojó un estadístico $U = 257$, con un valor $p < .001$, lo cual indica que la diferencia entre los grupos es altamente significativa.

Prueba de Wilcoxon (comparación final)

Objetivo: Comparar los puntajes obtenidos en el diagnóstico inicial y en la prueba final dentro de cada grupo. Evaluar si hubo mejoras significativas en cada grupo tras la intervención.

Resultados obtenidos:

- Grupo Experimental: Se observó una mejora significativa entre el diagnóstico inicial y la prueba final ($p < .001$), lo cual indica un avance claro en el desempeño tras la intervención con historietas educativas.
- Grupo Control: También se encontró una diferencia significativa entre el diagnóstico y la prueba final ($p = .013$), aunque de menor magnitud. Esto sugiere que, si bien hubo mejora, esta fue más modesta y con mayor dispersión en los resultados.

Con base en los resultados obtenidos a lo largo del presente proyecto, tanto en el análisis cualitativo como cuantitativo, se concluye que el grupo experimental avanzó del nivel 0 (visualización) al nivel 2 (clasificación) de la teoría de Van Hiele, siendo este un avance significativo en el desarrollo del pensamiento geométrico. Además, se detectaron indicios de que algunos estudiantes comenzaron a desarrollar habilidades propias del nivel 3 (deducción informal).

Conclusiones

El diseño de historietas que presentan los conceptos matemáticos de forma indirecta contribuye de manera notable a mantener el interés de los estudiantes. A diferencia de una sección tradicional con ejercicios y definiciones, la narrativa con personajes y diálogos genera mayor atención y participación. Durante su implementación, se observó que los estudiantes permanecían concentrados y, al ser cuestionados sobre los temas, lograban explicarlos con sus propias palabras, utilizando vocabulario matemático pertinente para describir conceptos específicos.

De acuerdo con el objetivo general, se logró diseñar historietas con personajes geométricos que representan figuras planas, con una narrativa accesible, estructura gráfica coherente e integración implícita de contenidos matemáticos. Su aplicación en el aula permitió valorar su eficacia didáctica en el desarrollo conceptual de los estudiantes, quienes mostraron avances significativos en la identificación, análisis y clasificación de propiedades geométricas.

Respecto a los objetivos específicos, cada etapa del proceso investigativo se cumplió satisfactoriamente: el diagnóstico inicial evidenció que la mayoría del alumnado se encontraba en el nivel 0 (visualización) de Van Hiele; las historietas se diseñaron de acuerdo con este nivel cognitivo y la problemática del acoso escolar, incorporando elementos visuales, narrativos y pedagógicos que facilitaron la comprensión; la implementación se desarrolló con actividades de refuezo, observación participante y acompañamiento docente; y la evaluación final, cualitativa y cuantitativa, permitió valorar la eficacia del recurso mediante pruebas estandarizadas y análisis estadísticos pertinentes.

Al finalizar la intervención, se identificó que el grupo experimental, anteriormente ubicado en el nivel 0 (visualización), avanzó mayoritariamente al nivel 2 (análisis y clasificación) de la teoría de Van Hiele, mostrando incluso indicios del nivel 3 (deducción informal). Este avance refleja un progreso significativo en el razonamiento geométrico.

En contraste, el grupo de control permaneció en el nivel 0 (visualización), manteniendo dificultades para identificar propiedades específicas de las figuras geométricas. Sus respuestas siguieron basándose en la apariencia general y no lograron establecer relaciones formales entre características, lo cual evidenció un menor progreso en su razonamiento geométrico.

La hipótesis de este trabajo se confirmó al comprobar que el diseño y uso de historietas educativas fortaleció la comprensión de las figuras geométricas planas mediante la visualización, interpretación y comprensión lectora. Los métodos cualitativos y el análisis cuantitativo respaldaron esta afirmación con datos concluyentes.

En el proyecto final, el grupo experimental obtuvo un promedio de 3.48/10 frente al 2.51/10 del grupo de control, con un valor p de 0.00071, lo que muestra una diferencia estadísticamente significativa. En el examen final, el grupo experimental alcanzó un promedio de 8.19/10, mientras que el control obtuvo 5.00/10; asimismo, la moda fue de 8.96 frente a 7.24, respectivamente. Las pruebas estadísticas (Mann-Whitney U, Wilcoxon y Levene) confirmaron mejoras internas y diferencias significativas entre ambos grupos ($p < 0.001$).

El principal aporte de esta investigación consiste en demostrar que las historietas educativas no solo vuelven accesibles los contenidos matemáticos mediante elementos narrativos y visuales, sino que también favorecen el pensamiento geométrico, la comprensión lectora, la reflexión y la formación de valores como respeto, empatía e inclusión, cuando forman parte de una planeación didáctica estructurada.

A partir de los resultados obtenidos, se identifican posibles líneas futuras de investigación:

- Implementar historietas educativas en otros contenidos matemáticos (como cuerpos geométricos, proporcionalidad o estadística).

- Aplicarlas en otros niveles educativos: primaria o bachillerato.
- Desarrollar versiones digitales, animadas o interactivas para su uso con tecnología.
- Evaluar su uso con estudiantes que presentan necesidades educativas específicas.
- Explorar su efecto en el desarrollo de la comprensión lectora en contextos matemáticos.
- Las recomendaciones que se sugieren son:
- Fomentar el uso de historietas educativas en la enseñanza de la geometría en secundaria.
- Diseñar materiales visuales y narrativos acordes al nivel cognitivo de los estudiantes.
- Capacitar a los docentes en metodologías que integren STEAM, narrativa y pensamiento visual.
- Evaluar continuamente el nivel de razonamiento geométrico con base en la teoría de Van Hiele.
- Promover estrategias que incluyan valores escolares dentro del contenido matemático.
- Difundir y adaptar esta propuesta a otros contextos escolares y áreas del conocimiento.

El diseño y empleo de historietas educativas para fortalecer la comprensión de las propiedades de las figuras geométricas planas constituye una alternativa didáctica eficaz, innovadora y cercana a la realidad estudiantil. Su integración en el aula promueve un aprendizaje significativo, visual y reflexivo, permitiendo crear historias reales o ficticias según el nivel cognitivo y los intereses de los educandos. Además, favorece su desarrollo integral y transforma la manera de enseñar y aprender geometría en la educación básica.

Este recurso impulsa la interdisciplinariedad al integrar áreas como matemáticas, arte, tecnología, ciencia e ingeniería, en consonancia con la metodología STEAM y los principios de la Nueva Escuela Mexicana (NEM).

Aunque la narrativa gráfica ha perdido presencia entre los hábitos de lectura estudiantil, los resultados de esta investigación muestran que las historietas pueden ser recursos didácticos valiosos al diseñarse de acuerdo con los intereses y contextos de los estudiantes. Más allá del aprendizaje matemático, fortalecen habilidades de lectura y comprensión, áreas en las que aún existen desafíos significativos.

Finalmente, este proyecto representa una innovación en la didáctica de la geometría mediante historietas educativas y constituye un aporte temprano al enfoque STEAM con valores (STEAM+V). La integración de elementos gráficos y narrativos que promueven empatía, inclusión y respeto contribuye a la construcción de propuestas alineadas con la Nueva Escuela Mexicana. Por ello, este estudio puede considerarse como una de las primeras experiencias que exploran el potencial del enfoque STEAM+V en la educación secundaria.

Referencias

1. Creswell, J. W. (2009). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches* (3rd ed.). SAGE Publications. Recuperado de https://idoc.pub/documents/cresswel-2009-diseo-de-investigacion-metodos-cualitativo-cuantitativo-y-mixto-d4pqk8qw56np
2. Díaz Barriga, F., y Hernández, G. (2002). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista. McGraw-Hill.
3. Flick, U. (2015). *El diseño de la investigación cualitativa*. Ediciones Morata. Recuperado de https://books.google.es/books?hl=esylr=yid=b50jEAAAQBAJyoi=fndypg=PT30ydq=Flick,+U.+(2015).+El+diseño+de+la+investigación+cualitativa.+Ediciones+Morata.yots=fCFulaExDfysig=S7B-rsCh34N1VyJmVs98E0oCjDE#v=onepageyq=Flick%2C%20U.%20(2015).%20El%20diseño%20de%20la%20investigación%20cualitativa.%20Ediciones%20Morata.yf=false
4. Fouz, F., y De-Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. *Un paseo por la geometría*, 16, 67-81. Recuperado de https://www.recursosep.com/wp-content/uploads/2017/04/artículo-niveles-van-hiele-didáctica-geometría.pdf
5. Gutiérrez, A., Jaime, A., y Fortuny, J. M. (1991). Análisis del razonamiento geométrico en estudiantes de secundaria según el modelo de Van Hiele. *Educación Matemática*, *3*(2), 49–65.

https://www.researchgate.net/publication/367304437_El_modelo_de_Razonamiento_de_Van_Hiele_como_marco_para_el_aprendizaje_comprensivo_de_la_Geometria_Un_ejemplo_Los_Giros

6. Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación* (6.ª ed.). McGraw-Hill. Recuperado de: https://drive.google.com/file/d/1FjufmiooGY4Zs8EajFiAJYNT2qoecH4k/view

7. Latorre, A. (2005). *La investigación-acción: Conocer y cambiar la práctica educativa* (3.ª ed., Vol. 2) [Academia.edu]. Editorial Graó, de IRIF, S.L. Francesc Tarrega. Recuperado de https://www.academia.edu/43461818/Antonio_Latorre_La_investigacion_acción_Conocer_y_cambiar_la_práctica_educativa

8. Molina, X. (2024, 1 marzo). Etapa de operaciones formales: qué es y cuáles son sus características. *Portal Psicología y Mente*. Recuperado el 05 de octubre del 2024, de https://psicologiaymente.com/desarrollo/etapa-operaciones-formales

9. Mora, F. B., y Rodríguez, A. R. (2015). La teoría de Van Hiele: Niveles de pensamiento Geométrico The Van Hiele Theory: Levels of Geometric Thinking. *Universidad Autónoma Del Estado de México UAEH.* Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Aaron_Reyes2/publication/321961183_La_teoria_de_Van_Hiele_Niveles_de_pensamiento_Geometrico/links/5a81d19945851504fb354a25/La-teoria-de-Van-Hiele-Niveles-de-pensamiento-Geometrico.pdf

10. Ortiz-Carranza, G., Ortiz-Barre, J., Trejo-Márquez, G., y Martínez-Satizabal, E. (2024). Metodología STEAM. Aplicaciones en la educación básica. *593 Digital Publisher CEIT, 9*(3), 1154-1166. https://doi.org/10.33386/593dp.2024.3.2501
11. Pastor, J. A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele*. Universidad de Valencia. https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf
12. Sánchez-Barbero, B., Cáceres, M. J., Chamoso, J. M., Rodríguez, M., y Rodríguez, D. (2020). Elaborando cómics en tiempo de confinamiento para aprender matemáticas en Educación Infantil y Primaria. *Magister, 32*(1), 97-101. https://doi.org/10.17811/msg.32.1.2020.97-101
13. Secretaría de Educación Pública (SEP). (2022). *Sugerencias metodológicas para el desarrollo de los proyectos educativos: Ciclo Escolar 2022-2023. Segunda sesión ordinaria. Consejo Técnico Escolar.* Secretaría de Educación Pública. Recuperado de https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2022/12/C3_1-Sugerencias-Metodologicas-proyectos.pdf
14. Tandayamo, R. C. G., Tigse, M. E. M., Sánchez, G. M. A., Tacuri, E. A. M., y Díaz, S. V. M. M. (2023). Las historietas como recurso para mejorar el aprendizaje de la matemática en el nivel secundario. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 7*(2), 3482–3493. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i2.5585
15. Toma, R. B., y García-Carmona, A. (2021). «De STEM nos gusta todo menos STEM». Análisis crítico de una tendencia educativa de moda. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 39*(1), 65–80. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3093
16. Vargas, G. V., y Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría*. Uniciencia*, 27(1), 74-94. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4945319
17. Yin, R. K. (2018). *Case Study Research and Applications: Design and Methods* (6th ed.). SAGE Publications. Recuperado de https://ebooks.umu.ac.ug/librarian/books-file/Case%20Study%20Research%20and%20Applications.pdf

Artículo recibido: 5 julio 2025
Dictaminado: 10 diciembre 2025
Aceptado: 30 diciembre 2025

2025, Volúmen 13, Número 2, pp. 38-45

Sección: Entre Docentes

Toroide, Modelo 3D primitivo como propuesta innovadora en la alfabetización matemática, digital y visualización espacial

Torus, a primitive 3D model as an innovative proposal for mathematical, digital, and spatial visualization literacy

Miguel Ángel Martínez Martínez[a]
Universidad Autónoma de Nuevo León; México
miguel.martinezmrt@uanl.edu.mx
orcid.org/0009-0003-5894-9665

Gricelda Patricia Vargas López
Universidad Autónoma de Nuevo León; México
gricelda.vargaslpz@uanl.edu.mx
orcid.org/0009-0002-6109-9916

Elizabeth Guajardo García
Universidad Autónoma de Nuevo León; México
elizabeth.guajardogr@uanl.edu.mx
orcid.org/0009-0002-8089-9636

Resumen:
La presente investigación se realizó en la consecución de los objetivos del Proyecto Realidad Virtual para el aprendizaje de la Matemática (MATHVR UANL), en el marco de la Red Temática de Cuerpos Académicos "Innovación Educativa para el Aprendizaje de las Matemáticas mediado con Tecnología" Se investiga sobre innovación metodológica, alfabetización digital y el diseño de actividades didácticas en diferentes entornos educativos. A partir de lo anterior, se propone la evaluación del impacto de la semiótica 3D de manera interactiva para el desarrollo de competencias para el análisis de ubicación espacial y desarrollo de pensamiento crítico a nivel universitario. El enfoque de estudio se centra en el toroide, como actividad para la creación de un pensamiento estructurado en modelos 3D y su ubicación espacial, y visualizar aplicaciones prácticas con fundamento geométrico y matemático. Mediante un diseño causi-experimental se compara el rendimiento académico a partir de las habilidades de visualización en grupos experimentales. Tomando como perspectivas en el marco teórico la semiótica visual, cognición espacial y pedagogía digital.

Palabras clave: Innovación, Modelo3D, Ubicación espacial, Cognitivo

[a] Autor de correspondencia

Abstract:

This research was conducted to achieve the objectives of the Virtual Reality for Mathematics Learning Project (MATHVR UANL), within the framework of the Thematic Network of Academic Groups "Educational Innovation for Technology-Mediated Mathematics Learning." The research investigates methodological innovation, digital literacy, and the design of didactic activities in different educational environments. Based on this, the study proposes an evaluation of the impact of interactive 3D semiotics on developing competencies for spatial location analysis and critical thinking at the university level. The study focuses on the torus as an activity for creating structured thinking in 3D models and their spatial location, and for visualizing practical applications with geometric and mathematical foundations. Through a quasi-experimental design, academic performance is compared based on the visualization skills developed by students in experimental groups. The theoretical framework incorporates visual semiotics, spatial cognition, and digital pedagogy.

Keywords: Innovation, 3D Model, Spatial location, Cognitive

Cómo citar / How to cite: Martínez Martínez, M., Vargas López, G., y Guajardo García, E. (2025). Toroide, modelo 3D primitivo como propuesta innovadora en la alfabetización matemática, digital y visualización espacial. *Revista AMIUTEM*, *13*(2), 38–45. https://doi.org/10.65685/amiutem.v13i2.264

Introducción

La implementación de modelos 3D como apoyo académico o como material didáctico de autoría propia a partir de plataformas como BLENDER, Autodesk MAYA, 3DMAX, AutoCAD, es considerado como una innovación en la metodología para la enseñanza aprendizaje y la alfabetización en temas digitales en el área de ciencias exactas, particularmente en este caso como actividades didácticas en la geometría analítica y ubicación espacial, centrándose en toroide como figura primitiva básica, donde el análisis de la visualización tridimensional en tiempo real enfatiza la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados para estudiantes de los dos primeros niveles universitarios. El apoyo visual como semiótica (Peirce, 1931; Duval, 1999), es parte fundamental para mantener el interés del alumno en clase hoy en día, donde toda la información se maneja apoyada con imágenes o gráficas, y las gráficas 3D son el puente entre el concepto matemático abstracto y poco llamativo para estudiantes, y el gráfico llamativo que impacta la curiosidad y estimule la concentración, análisis y estudio de la geometría analítica, esencial en muchas disciplinas como la física y procesos algorítmicos.

En instituciones como la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), entre el 30% al 50% perfilan a reprobar las unidades de aprendizaje, lo cual influye a considerar dejar la carrera profesional, según datos de la Secretaría de Educación Pública (SEP) y la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES, 2020). Y esto incita a la deserción entre 20% al 25% (ANUIES, 2020; SEP, 2019) dentro de los primeros dos semestres (los cuales involucran el tronco común dentro de las instituciones y sus respectivas carreras).

El uso de gráficos, modelos 3D, animaciones o incluso interactivos es de gran apoyo en la retención y comprensión de información donde los estudios en la cognición y educación educativa (Mayer, 2014; Höffler y Leutner, 2007) demuestran un diferencial ascendente entre un 30-40% si se compara con métodos tradicionales abstractos. La representación gráfica de los componentes de un toroide en función de sus variables más básicas permite exponer el vínculo entre cada una de las variables y las oportunidades que ofrecen al interactuar de manera dinámica, oportunidades como la visualización de algoritmos básicos de programación (Python, UnrealEnggine, entre otros). Sin mencionar que el desarrollo de este tipo de materiales didácticos fomenta el "Aprendizaje Basado en Problemas" (ABP), relacionados con la ubicación espacial STEM (Wai et al., 2009), donde el estudiante, al verse inspirado por la gráfica comienza a tener mayor interacción en clase y levantando la curva de atención (Tomé, C. 2018) y también extendiendo el tiempo de esta.

Los modelos 3D aplicados de manera experimental en clase activa procesos cognitivos como la rotación mental (Shepard & Metzler, 1971) así como el control del proceso cognitivo (Sweller, 2011), manteniendo un interés (aunque sea indirecto) y alargando la curva de atención, bajando frustración y apatía por el aprendizaje de la geometría analítica. Estudiantes expuestos a materiales didácticos apoyados con gráficas 3D confirman una disminución de alrededor de un 20% en el índice de reprobación en matemáticas y amplía la capacidad del estudiante de llevar conceptos teóricos a entornos prácticos (en este caso posicionamiento de coordenadas y ubicación espacial).

El objetivo general de la investigación fue establecer puentes entre docente, aula y alumno mediante el desarrollo e impulso de actividades que fomenten el pensamiento crítico y el análisis cognitivo, con el fin de mantener la atención hora clase (Tomé, C., 2018). Además, se buscó crear mecanismos que acompañen al estudiante extra-aula y ofrezca acompañamiento académico y emocional, dando seguridad, disciplina y autonomía al estudiante.

Referente teórico

A nivel internacional, encontramos que Gamo (2015), investigó sobre una aproximación didáctico-tecnológica a los laboratorios virtuales en aulas universitarias. Identificó las expectativas y necesidades de los profesores y estudiantes de ciencias e ingenierías, respecto al desarrollo de plataformas de laboratorios virtuales remotos, como complemento a la enseñanza experimental realizada en los laboratorios presenciales, para el desarrollo de las competencias de conocimiento, socio-comunicativo y colaborativo que el estudiante debe adquirir. Gómez (2015) investigo las relaciones entre presencia social y satisfacción del estudiante en "Entornos Virtuales de Aprendizaje Colaborativo" con el propósito de establecer una relación positiva entre el nivel de satisfacción, el valor de los procesos de aprendizaje colaborativo y la presencia social de los estudiantes en base a estrategias colaborativas.

En relación con sólidos de revolución, la visualización matemática del eje de rotación y la curva generatriz del toroide se realizó a través de las gráficas obtenidas con las plataformas

3D (antes mencionadas). Con la orientación del profesor facilitador, se recurrió al octágono como la forma geométrica que representa en este caso al círculo y donde el número de lados del polígono puede aumentar o disminuir en función de comprender cuál es la variable que interviene para lograr ese objetivo.

La IA en la creación de resultados y sus consideraciones.

Es realista que inicialmente estemos tentados a buscar la forma de trabajar y crear apoyo gráfico a partir de IAs para la creación de material didáctico, más, sin embargo, contrario a lo que se cree, hay que hacer una inversión significativa, ya sea económica, de redacción en prompts (preferentemente en inglés), tener una buena imagen de referencia (ya sea de internet o propia para crear otra), entre otros, y los más importante es que no se puede tener autoría sobre la gráfica resultante, esto, de manera inicial, pudiera parecer algo banal, pero si logra uno crear un documento de importancia relevante, podría tener una situación incómoda al momento de querer publicar, registrarlo como autoría propia o manipularlo sin correr riesgo de algún detalle.

No se trata de minimizar el aporte de la IA en situaciones específicas, y siendo realistas hay retos que se tendrían que evaluar si vale la pena hacerlo con IA o de autoría propia. En la Figura 1, se expone el resultado después de redactar un prompt, mas, sin embargo, dista mucho de un toroide y por consiguiente no aporta mucho como material académico, salvo las divisiones radiales que se muestran.

Figura 1. El desarrollo de imágenes a partir de prompts tiene una mecánica. En este caso se redactó en español (no recomendable), con el objetivo de tener un toroide, y este fue el resultado.

Lo que se busca, es dar a conocer los retos que ofrecen objetivos específicos en gráficas, cuya finalidad de un material didáctico es que el concepto teórico esté bien representado. Entonces como alternativa buscar plataformas que me den un resultado específico a lo que, como maestro y conocedor del tema busco, y es una alternativa. Son figuras "primitivas" (vienen por default en las plataformas), lo cual podría dejar como tema a debate la forma en como exponerlo: pudiera ser muy elaborado, o relativamente sencillo. El nivel de impacto visual es a criterio de cada maestro en función de las habilidades, recursos e interés específico.

Figura 2. Existen IAs donde ofrecen la opción de tener un "boceto" o "idea" de lo que uno está buscando. El resultado ni siquiera se asemeja al original.

En la Figura 3, se muestran un ejemplo de que el toroide de manera sencilla (y primitiva) puede ser expuesto gráficamente con distintas propiedades (vértices, caras, aristas, radios), mas, sin embargo, se limita solamente a conceptos gráficos, pero para un ojo y mente preparada, son evidentes los conceptos geométricos involucrados.

Figura 3. Área del Toroide generada con planos en secciones (fases) en diferentes unidades, los datos para generar cada toroide en diferente plataforma son muy similares, es decir, sus algoritmos, los cuales se basan en conceptos básicos de algebra y geometría.

Esta presentación pudiera aparentar ser una simple opción, mas no la única. Las plataformas ofrecen una diversidad de opciones, que en primera instancia fue creado con finalidades gráficas, pero también puede ser orientado con un objetivo geométrico y matemático.

En las siguientes figuras se exponen gráficas de autoría propia relativamente sencillas desarrolladas en Maya, 3DMAX, Cinema4D e incluso BLENDER. Este último de libre acceso, y relativa facilidad para desarrollar materiales como muestran las siguientes figuras.

Retomando la Figura.3. En las dos primeras plataformas (3DMAX, Maya, respectivamente) tenemos que cada una de ellas tiene su manera particular de "organizar" la "información" (algoritmos, que está representado por lo que llaman: CHANNEL BOX) y que el resultado es el mismo: planos en secciones axiales de ángulos $\theta = \pi/4$ y en secciones de ángulos $\theta = \pi/12$. En la plataforma de la derecha de la Figura 3 (CINEMA4D) presenta en secciones axiales de ángulos $\theta = \pi/4$ y $\theta = \pi/16$.

Estas primeras opciones no son lo más "elegante" como un material didáctico (aunque eso no quiere decir que no sean útiles), pero hay alternativas simples en las cuales puede ser descrito un proceso geométrico y las variables que lo representan, las cuales se presentan a continuación.

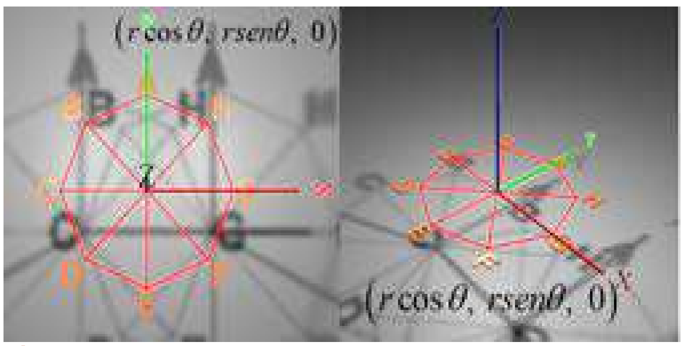


Figura 4. En una circunferencia por fases, en combinación con conceptos de "ciclos y condicionantes" es de apoyo para describir gráficamente la definición de "Lugar Geométrico"

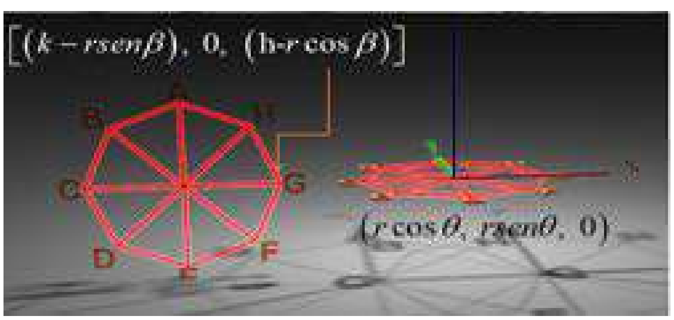


Figura 5. Establecer una comparación y las diferencias de geometrías (en este caso una circunferencia de 8 fases) que pueden entenderse iguales, más sin embargo los componentes que lo representan son distintos

Como se puede apreciar, ya no solo es una simple grafica de una circunferencia (de fases limitadas), es un conjunto bien organizado cuya finalidad no solo es el concepto teórico, también el "impacto visual" que genera en el estudiante y su consecuente interés de involucrarse (aunque sea de manera superficial), creando nuevos puentes de comunicación en el aula y alargando (aunque sea un poco) la "curva" de atención (Tomé, 2018).

Aprendizaje mediado (Vygotsky, 2000) de áreas de superficies, en laboratorios de uso de tecnología con el uso de plataformas, donde se puede ver cómo se pueden modificar las variables y utilizarlas como un ejemplo de las aplicaciones prácticas de la geometría analítica: algoritmos, cálculo de varias variables, interpretación de variables, geometría analítica, plana, álgebra, entre otras.

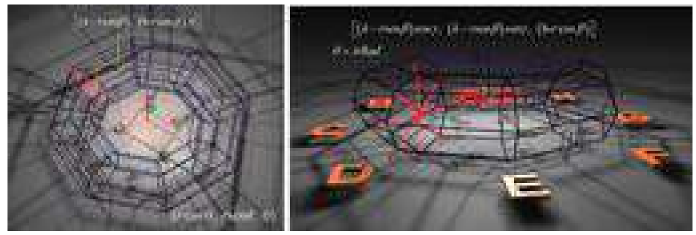


Figura 6. Al igual que en la figura previa, se entiende el proceso cognitivo y con un apoyo semítico (construcción de un toroide) y expone las aplicaciones y conexiones cognitivas para entender y exponer conceptos prácticos. (Gráficas de autoría propia)

El Profesor orientador, puede conducir el proceso de argumentación matemática para concebir la posible situación de aumentar el número de particiones regulares del intervalo de 0 a 2π, en la estructuración del concepto nuevo, al considerar al área del Toroide como la suma de Planos Tangentes a cada punto del Toroide

En la Figura 7 se presentan elementos del diseño de actividades en realidad virtual para la Visualización Matemática en el Proyecto MATHVR, como una estrategia motivadora en la que los alumnos interactúan en un entorno virtual de realidad aumentada. Dando un ambiente más profundo a la imagen.

Figura 7. El alumno puede trabajar elementos de videojuego para identificar propiedades matemáticas de los objetos geométricos tridimensionales

¿Las gráficas como apoyo son una herramienta útil, pero que pasaría si se pudiera animar esa gráfica Gamo (2015) y exponer los componentes que representan al toroide en función de una sintaxis relativamente simple y en tiempo real? Se está desarrollando un prototipo de APP interactiva, la cual pueda ser en Realidad Aumentada y/o Interactiva (esta en desarrollo en función de recursos) donde despliegue información en puntos clave y en tiempo real (Figura. 5). El uso de APPs como apoyo no solo al alumno, también al maestro, es de suma importancia, ya que abriría puentes entre alumnos, maestros y conocimiento cognitivo en tiempo real. Se plantea la idea de poderla trabajar en línea con chat directo, pero también MODO: OFFLINE, tratando de ser accesible a situaciones adversas que pueda tener el alumno. El diseño preliminar se puede visualizar en estos dos siguientes videos que se muestran en las Figuras 8 y 9.

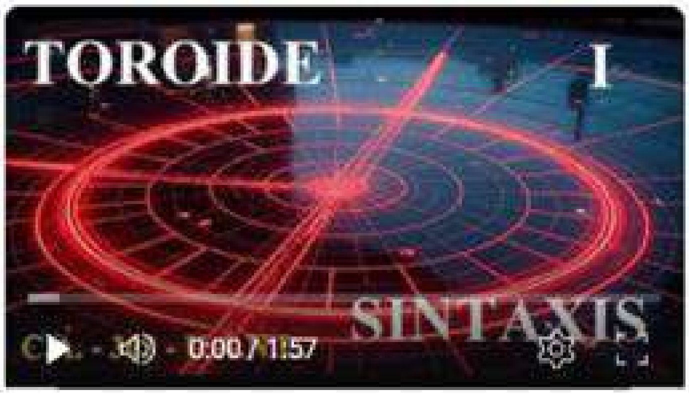


Figura 8. Enlace de video 1: https://youtu.be/bShXiRgjt6s

El vídeo 1 se muestra los conceptos de "lugar geométrico" el cual gráficamente puede aparentar ser el mismo, mas, sin embargo, los componentes que la representan dentro del plano cartesiano. Eso da pie a un debate de los procesos que ello implica

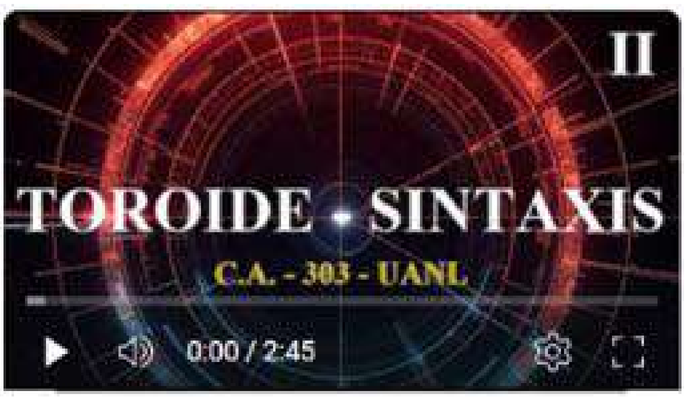


Figura 9. Enlace de video 2: https://youtu.be/2pyrlN11d-U

En el video 2 se exponen los objetivos a corto, mediano y largo alcance. Demostrando el abanico de oportunidades de exponer puntos enfáticos en función de las necesidades de cada grupo clase, apelando a la experiencia de cada maestro, buscará áreas de oportunidad y reforzar puntos críticos.

La interacción entre los conceptos teóricos y poder visualizar gráficamente y paso a paso en tiempo real (Vygotsky, 2000) es un apoyo de suma importancia como puente que parte de lo semiótico y llegar a un proceso cognitivo a través de un pensamiento crítico.

Proceso metodológico

Se realizó un estudio cuasi-experimental con grupos de control y experimental, tomando como muestra aulas de las facultades de Físico Matemáticas y Contaduría Pública, correspondientes a los períodos académicos de 2023 y 2024. En algunos casos, el alumnado estaba consciente de participar en un estudio académico, mientras que en otros no, con el propósito de analizar si existía un diferencial entre ambas condiciones. Se documentó la participación de 300 estudiantes por semestre, lo que representa un total de 1,200 alumnos.

Cabe mencionar, que el enfoque entre maestros es distinto (estadístico, matemática pura y matemática aplicada a gráficas 3D), lo cual ofrecerá diferentes perspectivas de la percepción del material.

Se enfoca en el uso de la enseñanza tradicional y para finalizar la clase se expuso la misma temática apoyada por el uso de modelos 3D que ayudaban a interpretar los conceptos teóricos. Como instrumentos de captura se tomó en cuenta la entrevista e interacción maestro y alumno.

Resultados

Dimensión 1: Recuperar comunicación entre maestro alumno.

Hay cambio en la curva (Tomé, 2018) de atención en el estudiante, dando oportunidad al maestro de profundizar en el tema. En primera instancia, el interés es por las gráficas, las dinámicas y la animación de esta, cuestionando la relación de los conceptos teóricos para lograr lo primero (Sagan, 1981). Se hace preguntas exploratorias en los temas involucrados, además contesta las preguntas que ayudan a involucrarse con disciplina de forma guiada.

Dimensión 2: Comprensión y documentación.

El docente da referencias en los cuales debe enfocarse el alumno para una mejor comprensión del tema en cuestión (en este caso geometría analítica, plana y algebra), cabe mencionar que es importante la referencia de libros recomendados por cada institución y el contexto en el cual se pueda estar aplicando (interpretación de variables, funciones lineales, cálculo de varias variables y/o geometría analítica aplicada a 3D entre otras), y la seriedad de esa información, para identificar los elementos y propiedades de cada tema involucrado (Godino y Batanero, 1994), y las fórmulas que involucran a cada componente, y no solo limitarse a decir que es una "forma geométrica" en sí. El estudiante reafirma conocimientos adquiridos siguiendo las indicaciones plasmadas en el libro y bajo la supervisión del maestro.

Dimensión 3: Análisis.

El docente, mediante una conversación heurística, ejemplifica los temas vistos en esta etapa para que, en equipo, el estudiante analice y proponga procesos de solución y realice una presentación frente a grupo; se espera que el docente refuerce sus conocimientos para llegar a una conclusión grupal. El docente sugiere problemas del libro de trabajo, enfocados ya directamente a la unidad de aprendizaje; en este caso se tomaron de referencia *Geometría analítica* (Lehmann, 1989a), *Álgebra* (Lehmann, 1989b), *Cálculo* (Swokowski, 1988) y *El cálculo con geometría analítica* (Leithold, 1988).

Al momento de presentar las propuestas, se obtuvieron resultados significativos donde se denota un punto de inflexión en la curva de atención del alumno promedio. Ya que los alumnos se sintieron atraídos por la innovación de las gráficas y notaron una nueva forma de presentaciones para entender el significado de las variables.

Algunas observaciones que fueron relevantes en el ejercicio son las siguientes:

- Existió un cambio significativo en el cambio de actitud de un porcentaje considerable de alumnos. De solo 15% de alumnos enfocados en la clase, sube a 49% que muestran interés en la clase.
- Un dato importante es que al menos un 34% de los alumnos comprendieron el significado de las variables a partir del apoyo gráfico.
- Visualiza las actividades o acciones en las cuales se involucran con las matemáticas (particularmente conceptos geométricos) expone un área de oportunidad: "¿cómo converger intuiciones y conceptos geométricos aplicados?" (Kant, 1781). La respuesta a este cuestionamiento y crear conocimiento se canaliza en función de la técnica particular de cada maestro. Es decir, no es una técnica "cerrada", se considera una herramienta que se usó a discreción.
- Comienza a tener mayor interés o al menos empieza a tener conciencia de la aplicación de los conceptos geométricos matemáticos y que puedan decidir con mayor uso de conciencia el rumbo de una carrera profesional. Deja de subestimar la necesidad de entender de fondo el análisis de los conceptos teóricos. Lo cual se complicaba enormemente por la falta de un contexto actual para los estudiantes.
- Uno de los cambios más impactantes después de esta dinámica es la cantidad de alumnos que interactúa y/o pone atención, comienza a incrementarse de manera radical, y por consecuencia, la probabilidad de mejorar el porcentaje aprobatorio también puede mejorar.
- El alumno toma interés en visualizar esta dinámica en temas relacionados como programación (desarrollo de algoritmos), donde el álgebra y la geometría están íntimamente involucrados.
- Una de las experiencias es que los temas pueden ser un poco más complejos, más, sin embargo, pueden explicarse de manera relativamente sencilla en función de los temas en boga del estudiante. Lo cual sugiere que el mismo maestro entiende las necesidades de los alumnos, generando una relación simbiótica donde el maestro ofrece conocimiento y experiencia y el alumno temas de actualidad para poder aplicar esa experiencia.

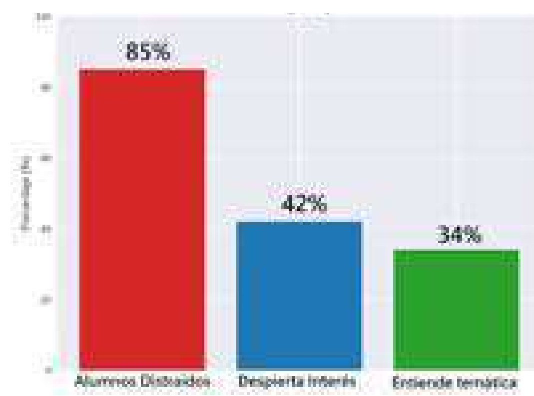


Figura 10. Distribución de la atención y comprensión de los alumnos

Retomar el proceso de estimulación de la intuición en el alumno es fundamental para revitalizar la interacción en clase y mejorar la atención (Tomé, 2018). La curva de atención tiende a la baja (Menárguez, 2017) debido a la proliferación de videos en dispositivos digitales, fenómeno intensificado durante la pandemia. Las clases en línea y el uso constante de dispositivos han erosionado la interacción Maestro–Alumno.

Este experimento muestra que revitalizar la atención estudiantil no depende del contenido o de políticas externas, sino de una metodología docente centrada en la conexión con intereses actuales de los estudiantes. Adaptar el análisis y construcción de cada tema permite que los alumnos perciban los conceptos como relevantes para sus inquietudes y para su desarrollo intelectual, revirtiendo así la baja atención.

El alumnado muestra mayor interés en la teoría (Vygotsky, 2000), aunque sea de manera indirecta, pues busca entender el comportamiento de las herramientas y sus alternativas. En ese proceso, los estudiantes formulan preguntas que implican conceptos matemáticos y geométricos aplicados. Aquí el maestro tiene la oportunidad de conducirlos hacia la ciencia teórica, complementando lo práctico con el análisis formal y la bibliografía correspondiente, lo que demuestra la importancia de conocer los fundamentos.

De manera práctica, se describieron aplicaciones del álgebra y la geometría analítica, "justificando" la necesidad del estudio teórico de la ciencia (Vygotsky, 2000). Esto responde a la percepción de los alumnos de que la teoría carece de interés porque no visualizan su aplicación ni logran relacionarla con necesidades directas del campo laboral.

Conclusiones

A partir de los resultados, se concluye que es necesario —y hasta cierto punto urgente— ajustar las técnicas de enseñanza para encaminar el aprendizaje. Existe una "brecha amplia" entre enseñanza y aprendizaje que, independientemente del sistema educativo, debe atenderse en el espacio de la clase.

No se trata de responsabilizar al maestro, catedrático, institución o sistema político, sino de reconocer que la versatilidad del mundo social, laboral y de las redes digitales exige a las nuevas generaciones "saber hacer… y lo que no sepas, averígualo rápido". El sistema educativo difícilmente podrá mantener el ritmo si no se generan alternativas que construyan puentes entre enseñanza y aprendizaje.

En este sentido, se reconoce la pertinencia de los planteamientos de Hiele (1986), al señalar que la enseñanza no debe detenerse, sino avanzar hacia el aprendizaje profundo. Prospectivamente, se requiere diseñar estrategias que integren intereses actuales del alumnado con fundamentos teóricos, de manera que se logre un aprendizaje significativo y sostenible.

Referencias

1. Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES). (2020). *La deserción escolar en educación superior en México*.
2. Gamo, F. (2015). *Aproximación didáctico-tecnológica a los laboratorios virtuales remotos en enseñanza universitaria*. Madrid: UNED.
3. Gómez, J. (2015). *Relaciones entre presencia social y satisfacción del estudiante en entornos virtuales de aprendizaje colaborativo (EVAC)*. Madrid, España: Universidad Autónoma de Madrid.
4. Kant, I. (1781). *Crítica de la razón pura*. Editorial Purrua.
5. Lehmann, C. H. (1989). *Álgebra*. Limusa.
6. Lehmann, C. H. (1989). *Geometría analítica*. Limusa.
7. Leithold, L. (1988). *Cálculo*. Grupo Mexicano MAPASA, S.A. de C.V.
8. Mayer, R. E. (2014). *Multimedia learning* (3rd ed.). Cambridge University Press.
9. Peirce, C. S. (1931). *Collected papers*. Harvard University Press.
10. Sagan, C. (1980–1981). *Cosmos*. Planeta.
11. Shepard, R. N. (1971). Mental rotation. *Science, 171*(3972), 701–703.
12. Sweller, J. (2011). *Cognitive load theory*. Springer.
13. Swokowski, E. W. (1988). *Cálculo y geometría analítica*. Editorial Iberoamericana, S.A. de C.V.
14. Tomé, C. (2018, abril 12). La curva de la atención, ¿una leyenda urbana? *Cuaderno de Cultura Científica*. https://culturacientifica.com/2018/04/12/la-curva-de-la-atencion-una-leyenda-urbana/
15. Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL). (2021). *Informe académico de reprobación en primer ingreso*.
16. Vygotsky, L. (2000). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Editorial Crítica.
17. Wai, J. (2009). Spatial ability for STEM. *Journal of Educational Psychology*.

Artículo recibido: 5 agosto 2025
Dictaminado: 8 noviembre 2025
Aceptado: 20 diciembre 2025

REVISTA AMIUTEM

2025, Volúmen 13, Número 2, pp. 46-54

Sección: Entre Docentes

Cómo modelar una cónica con cinco puntos: Una experiencia de aula

How to model a conic using five points: A classroom experience

Noelia Londoño Millán[a]
Universidad Autónoma de Coahuila; México
noelialondono@uadec.edu.mx
orcid.org/0009-0007-1026-9774

Mariem Mederos Madrazo
Universidad Autónoma de Coahuila; México
m.mederos@uadec.edu.mx
orcid.org/0009-0009-9656-6319

Alibeit Kakes Cruz
Universidad Autónoma de Coahuila; México
alibeitkakes@uadec.edu.mx

Resumen:
En este artículo se describe una experiencia didáctica implementada con seis estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, en la asignatura de Geometría Analítica de una universidad del norte de México. Con la intención de otorgar mayor significado a los contenidos relacionados con las secciones cónicas, se diseñó e implementó un proyecto cuyo propósito fue analizar cómo el uso combinado de tres métodos impacta en la comprensión de las cónicas. La propuesta se desarrolló bajo un enfoque de investigación-acción. Como parte de su labor formativa, los participantes debían modelar objetos con forma cónica empleando tres procedimientos distintos: el uso de herramientas del software GeoGebra, la aplicación del método del cuadrilátero y la utilización de técnicas propias del álgebra lineal. Entre los hallazgos más relevantes se identificó una transformación notable del modelo de clase tradicional, ya que el docente adoptó un papel centrado en la guía y la asesoría. De igual manera, se percibió un incremento en la motivación de los estudiantes y en su disposición para realizar las actividades propuestas. La interacción entre profesor y alumnos también se vio fortalecida, lo que favoreció una retroalimentación continua y más efectiva. En conjunto, estos elementos promovieron que los estudiantes reflexionaran sobre su propio aprendizaje y desarrollaran una mayor conciencia de sus necesidades académicas.

Palabras clave: Experiencia didáctica, Secciones cónicas, Gauss-Jordan, GeoGebra

[a] Autora de correspondencia

Abstract:
This paper presents a didactic experience involving six second-semester students enrolled in the Bachelor's Degree in Applied Mathematics program in the Analytical Geometry course at a university in northern Mexico. Aiming to give greater meaning to the topic of conic sections, the students were assigned a project that required them to develop a mathematical model representing a conic. The experience was framed within an action research methodological approach. As part of the assignment, studenwwts modeled objects with conic shapes using three different processes: one using GeoGebra software tools, another using the quadrilateral method, and a third based on linear algebra techniques. The main outcomes revealed a significant departure from the traditional classroom model: the instructor adopted a more supportive and advisory role, students showed increased interest in completing the tasks, and communication between teacher and students improved, enabling more continuous and effective feedback. Collectively, these actions encouraged students to reflect on their own learning processes and become more aware of their academic needs.

Keywords: Teaching experience, conic sections, Gauss–Jordan, GeoGebra

Cómo citar / How to cite: Londoño Millán, N., Mederos Madrazo, M., y Kakes Cruz, A. (2025). Cómo modelar una cónica con cinco puntos: Una experiencia de aula. *Revista AMIUTEM*, *13*(2), 46–54. https://doi.org/10.65685/amiutem.v13i2.272

Introducción

En la enseñanza tradicional de las secciones cónicas es común que se discutan los lugares geométricos desde los aspectos algebraico y geométrico, se estudien algunos teoremas, se resuelvan una gran variedad de ejercicios del libro de texto elegido como guía y allí concluye todo, con la esperanza de que haya un aprendizaje significativo y de que los alumnos queden capacitados para resolver problemas.

Estamos convencidos que el abordaje de las secciones cónicas desde una perspectiva interdisciplinaria y contextualizada permite a los estudiantes no solo adquirir conocimientos técnicos, sino también desarrollar una actitud más crítica y reflexiva frente a su aprendizaje, al identificar cómo los conceptos abstractos se traducen en soluciones prácticas. Por tanto, promover el estudio de las cónicas con un enfoque que combine lo teórico con lo aplicado puede ser una estrategia eficaz para mejorar tanto la motivación estudiantil como la comprensión profunda de los contenidos matemáticos.

A continuación, se presentan aspectos relacionados con la historia de las cónicas; algunos antecedentes que se revisaron para mostrar la pertinencia del estudio y una revisión de literatura acerca de la investigación-acción que se constituyó en el enfoque metodológico usado para la propuesta, consideramos que esta metodología resultó relevante porque provee varios recursos que ayudan a transformar la enseñanza de las secciones cónicas, en particular la reflexión continua sobre la práctica educativa.

Antecedentes y aspectos teóricos

El estudio de las secciones cónicas comenzó con los matemáticos griegos. Menaechmus (c. 380-320 a.C.) fue uno de los primeros en investigar las cónicas, él estudió las secciones cónicas como parte de sus intentos de resolver el problema de la duplicación del cubo. Años más tarde Apollonius de Perga (c. 262 - c. 190 a.C.): Conocido como el "Gran Geómetra", escribió un texto titulado *Cónicas*, que se considera como una de las obras más importantes en la historia de las matemáticas. En su trabajo Apolonio estudió las cónicas en detalle, incluyendo las elipses, parábolas e hipérbolas, también introdujo terminología y conceptos fundamentales que aún se utilizan hoy día.

Varios estudios han mostrado que la enseñanza de las secciones cónicas no solo forma una parte fundamental del currículo de matemáticas, sino que también son importantes para profundizar tanto en aspectos de la matemática pura como en su aplicabilidad en contextos reales (Chavarriaga y Torres, 2017; Costa, 2015; García, 2024; Torres y García, 2023). En el ámbito de la matemática pura y particularmente en una carrera de Matemáticas Aplicadas el estudio de las cónicas permite fortalecer conocimientos algebraicos y geométricos, lo que fortalece la base teórica del estudiante para el desarrollo de competencias más avanzadas en álgebra lineal, geometría analítica y cálculo multivariable.

Por otro lado, a las cónicas se le atribuye un alto valor didáctico si se abordan en contextos de aplicación, pues permiten conectar las matemáticas con otras disciplinas, por ejemplo, en arquitectura, se utilizan en el diseño de estructuras eficientes y estéticamente armónicas; en ingeniería, las trayectorias parabólicas son útiles para analizar movimientos de proyectiles y la hipérbola interviene en sistemas de localización satelital. Por lo que consideramos que al incluirlas en el aula ayudan a la comprensión de las cónicas y promueven una visión integrada del conocimiento.

La componente tecnológica juega un papel fundamental, Ulson (2024), reportó los efectos de usar GeoGebra para ilustrar las secciones cónicas en estudiantes de grado 11. Los resultados mostraron una correlación positiva, aunque débil, entre la percepción estudiantil y su desempeño, aunque si hubo una mejora significativa en el rendimiento tras utilizar el Software. Estos hallazgos sugieren incorporar GeoGebra en la enseñanza y sugieren explorar otras aplicaciones de gráficos para investigaciones posteriores.

Lo que se plantea en líneas anteriores permiten entrever un interés amplio y diverso en las distintas formas de abordar la enseñanza de las secciones cónicas. Por lo que consideramos que la propuesta que presentaremos como una experiencia didáctica no se encuentra aislada ni ajena a los enfoques promovidos por la comunidad de la educación matemática actual. Por el contrario, se inscribe en una línea que privilegia un enfoque centrado en el estudiante, donde se fomenta una pedagogía basada en la exploración y el descubrimiento. Y como valor agregado incorporamos el uso de herramientas digitales como mediadores del aprendizaje, entendidas no como un fin en sí mismas, sino como un recurso que refuerza la construcción del conocimiento.

Acerca de la investigación-acción

La investigación-acción es un enfoque metodológico que ha sido importante en el ámbito educativo, social y comunitario, porque involucra la participación, la reflexión y es transformador. Consideramos que esta orientación metodológica ofrece un ciclo sistemático apropiada de planificación, intervención y observación que ayuda al docente a evaluar y ajustar estrategias para la enseñanza de las cónicas, especialmente cuando se incluyen métodos combinados como el que se propone. Dos de los referentes teóricos más destacados de la investigación – acción son Stephen Kemmis y Robin McTaggart (1988), y el investigador español Latorre (2003), cuyas contribuciones permiten comprender su riqueza y profundidad.

Kemmis y McTaggart consideran la investigación-acción como un proceso crítico y colaborativo que transforma la práctica educativa y social. Proponen una organización en una espiral de ciclos (planificación, acción, observación y reflexión) que se repiten y ajustan continuamente, rompiendo con la lógica lineal de la investigación tradicional y promoviendo un conocimiento situado. Además, los autores destacan el carácter participativo: debe realizarse con quienes viven la problemática, no solo sobre ellos. Así, la investigación-acción no solo busca mejorar la práctica, sino también fortalecer a los sujetos y favorecer la comprensión y transformación de las estructuras que los afectan.

La investigación-acción se presenta como una herramienta importante para comprender y transformar la experiencia en el aula (Latorre, 2003), ya que conecta dimensiones prácticas, reflexivas y éticas, con el objetivo de mejorar la acción mediante una reflexión sistemática realizada por los propios implicados (docente y estudiantes), favoreciendo un conocimiento contextualizado y construido desde la realidad concreta. Este autor coincide con Kemmis y McTaggart en que la investigación-acción debe ser democrática y participativa, de modo que los sujetos investiguen su propia práctica y desarrollen una comprensión crítica que favorezca su transformación y la de su entorno.

Ambos enfoques, aunque con matices propios, coinciden en los elementos centrales que definen la investigación-acción: la participación de los sujetos, la reflexión crítica, la mejora de la práctica, el carácter cíclico del proceso, y la búsqueda de transformación social. Así, la investigación-acción se constituye no solo como una metodología de indagación, sino como un proceso de empoderamiento y cambio profundamente vinculado con la práctica cotidiana de los actores.

Estudios recientes (Guevara et al., 2020; Vigil, 2021) reconocen la importancia de la investigación-acción como una metodología que ofrece elementos fundamentales para su implementación en el aula. En esta misma línea, Giraldo (2025) la reconoce como adecuada porque implica a los participantes como co-investigadores dentro de un proceso continuo y repetitivo. Además, lo considera como un enfoque orientado principalmente a transformar las prácticas reales del entorno donde se desarrolla, más que a analizarlas desde la teoría, promoviendo así un aprendizaje que surge de la propia acción.

Para este estudio, este enfoque metodológico resultó especialmente útil, ya que permitió atender dos necesidades fundamentales. Por un lado, facilitó la transformación de la dinámica tradicional de clase, en la que el profesor expone y el alumno se limita a escuchar. Por otro lado, posibilitó que los estudiantes, mediante su propia experiencia y participación, exploraran diversas formas cónicas a partir de objetos externos a los libros, susceptibles de ser modelados matemáticamente.

Proceso metodológico

En la presenta experiencia de aula que se reporta participaron 6 estudiantes universitarios de primer año, que se encontraban cursando la asignatura Geometría Analítica, como requisito debieron haber aprobado la asignatura de Geometría Euclidiana en la cual habían recibido un curso sobre uso de las herramientas de GeoGebra. En sus estudios de preparatoria algunos alumnos habían desarrollado los temas de cónicas, desde una perspectiva muy básica.

Características de la propuesta.

Con el enfoque de investigación acción se procedió a desarrollar la propuesta tomando en cuenta la planificación, acción, observación y reflexión. A continuación, se describen los elementos que fueron considerados en cada etapa (Ver Figura 1).

Figura 1. Enfoque metodológico investigación – acción (Kemmis y McTaggart)

Etapa de planificación. En esta etapa, se identificó como problemática central la dificultad que presentaban los estudiantes de primer año de LMA para identificar, comprender y diferenciar las secciones cónicas (parábola, elipse, hipérbola y circunferencia), especialmente en cuanto a su construcción geométrica, propiedades, representación gráfica y algebraica. Por lo que se optó por incorporar GeoGebra como recurso didáctico para diseñar actividades interactivas que permitieran visualizar y manipular las cónicas de forma dinámica. Con el propósito de favorecer la comprensión conceptual de las cónicas y estimular el aprendizaje activo mediante el uso de TIC.

Así mismo se abordaron las ecuaciones de las cónicas en su forma cartesiana, estas se obtuvieron desde su definición como lugar geométrico. Diferenciando cada uno de los elementos geométricos implicados como recta directriz, focos, y distancias. Aunque el proceso de deducción implica el uso de métodos algebraicos, durante su desarrollo se rescató siempre el enfoque geométrico analítico.

Etapa de acción. Esta etapa estuvo conformada por varias actividades, la primera es el estudio previo de las cónicas a través de su definición, sus ecuaciones y la solución de ejercicios; esta parte también incluyó el estudio de las cónicas rotadas, se desarrolló de forma mixta (actividades con lápiz y papel y GeoGebra). Posteriormente los alumnos debían desarrollar tres tareas que se describen más adelante.

Se implementó una secuencia didáctica de varias sesiones en un aula de cómputo equipada con computadoras, internet y el software GeoGebra. Los estudiantes exploraron construcciones dinámicas de cónicas a partir de su definición y sus elementos clave como focos, rectas puntos y distancias, (por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un foco y una directriz en el caso de la parábola).

Se fomentó la formulación de conjeturas, el análisis de ecuaciones y la comparación entre representaciones algebraicas y gráficas. Estas prácticas, en consonancia con lo planteado por Duval (1999), permiten articular distintos registros de representación y favorecen de manera significativa la comprensión y apropiación de los conceptos matemáticos. El docente actuó como mediador de la actividad, promoviendo el trabajo colaborativo, la participación y la reflexión.

Una vez se estudiaron las definiciones, los elementos, las ecuaciones (canónicas, ordinarias y generales) de los 4 lugares geométricos de las cónicas. Se asignaron las tres actividades o tareas siguientes: tarea 1. Consistió en hallar una sección cónica en una imagen que ellos debían buscar, en una construcción, un dibujo o cualquier objeto real. Los alumnos exploraron puentes, un conejo, un estadio, un dibujo de un barco, etc. como se muestra en la figura 2. Los alumnos usaron las herramientas de GeoGebra para explorar el lugar geométrico que se construye además de la cónica por cinco puntos.

Esta parte se consideró fundamental porque el alumno no resolvió ejercicios planteados en el libro de texto, sino que se enfrentó a una situación diferente: una actividad en la que él mismo definió el ejercicio y reflexionó libremente sobre qué cónica desea para su modelo, qué objeto geométrico utilizará y cuáles serán sus características.

Para el desarrollo de esta actividad, los estudiantes debían saber cómo insertar imágenes en el entorno digital de GeoGebra y utilizar la herramienta de ″cónica por cinco puntos″. Esta fase les permitió explorar distintas configuraciones para ubicar los puntos, con el objetivo de lograr el mejor ajuste posible al objeto modelado. Se hizo especial énfasis en que, dado que las cónicas son curvas de extensión infinita, era necesario truncarlas adecuadamente para que el modelo resultara más representativo y realista. Por ejemplo, la estructura de un puente puede ser modelada eficazmente mediante una parábola finita.

Tarea 2. Esta tarea consistió en usar el método del cuadrilátero para encontrar la cónica por cinco puntos dadas sus coordenadas. Por lo que era necesario elegir 4 puntos sobre la curva para construir el cuadrilítero (estos cuatro puntos deben corresponder a los mismos utilizados en la tarea 1) y una vez obtenidas las ecuaciones de las cuatro rectas de los lados del cuadrilátero se debían realizar las operaciones apropiadas para construir la ecuación de la forma: $C_1 + kC_2 = 0$, que se convierte el cónica buscada, cuando se reemplace el quinto punto y se obtenga el valor de k. En la figura 2, parte izquierda se observa como Mariana construyó el cuadrilátero sobre la misma imagen usando GeoGebra.

La intencionalidad de esta acción fue que los alumnos reflexionaran sobre el modelo obtenido y establecieran una comparación entre el modelo generado por GeoGebra (utilizando los cinco puntos) y el segundo modelo construido mediante el cuadrilátero. Una pregunta que puede surgir de manera natural es si ya se tiene un modelo, ¿para qué elaborar otro? Lo importante en esta actividad es que los estudiantes no se conviertan en usuarios pasivos de la tecnología; es necesario que realicen también el trabajo manual, identifiquen posibles errores y, si los modelos no coinciden, revisen el procedimiento cuantas veces sea necesario y expliquen las diferencias entre los resultados.

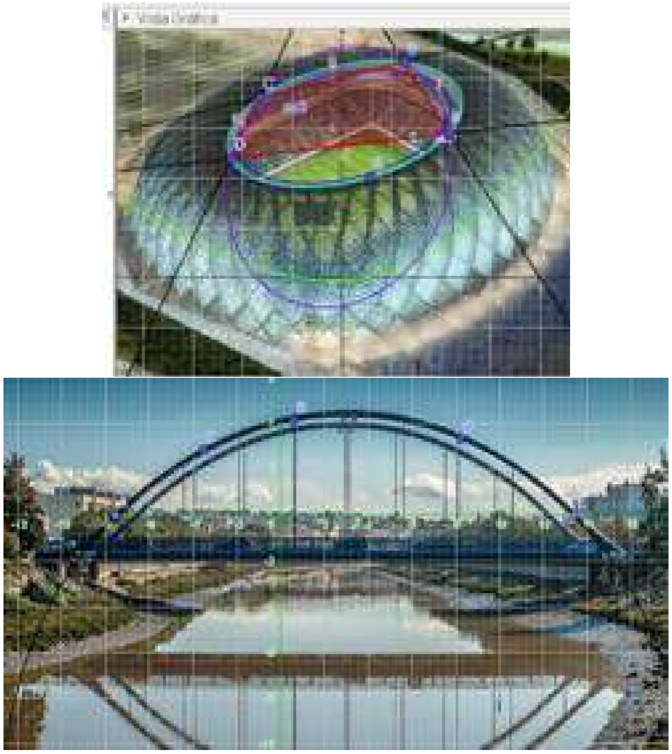


Figura 2. Estadio y puente, imágenes de los trabajos de Mariana y Aurelio

La tarea 3 consistió en hallar la ecuación del lugar geométrico usando los mismos puntos, usados en las dos tareas anteriores, por el método de Gauss-Jordan solucionando un sistema conformado por cinco ecuaciones lineales con seis variables con la forma $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Para desarrollar esta parte los alumnos tuvieron que consultar y explorar al menos dos formas de reducir variables, por ejemplo, hacer que uno de los puntos tuviera coordenadas (0,0), sin pérdida de generalidad; o también era posible dividir por A toda la expresión para que el primer coeficiente se hiciera uno.

La realización de esta tarea llevó a los alumnos a investigar por iniciativa propia las distintas formas de reducir variables mediante el método de Gauss-Jordan. Para ello recurrieron a videos y solicitaron asesoría, lo que implicó una transformación en el rol del docente: fueron los estudiantes quienes formularon preguntas y mostraron un interés activo. En consecuencia, el método de enseñanza se modificó y los alumnos lograron desarrollar una habilidad que antes no poseían.

Etapa de Observación. Durante la implementación se realizaron registros de clase y se recopilaron los manuscritos de los alumnos que evidencian el proceso llevado a cabo, utilizando la plataforma Microsoft Teams, figura 3. Se observó un mayor compromiso con las tareas, una mejor disposición para analizar propiedades y un cambio positivo en la actitud hacia el aprendizaje de la geometría. A lo largo del proceso, las clases evolucionaron hacia un formato de asesoría, en el que los estudiantes formulaban numerosas preguntas y contaban con la posibilidad de corregir sus errores cuando era necesario, con el fin de avanzar en sus proyectos. Mostraron interés genuino por los temas e iniciativa para profundizar en ellos.

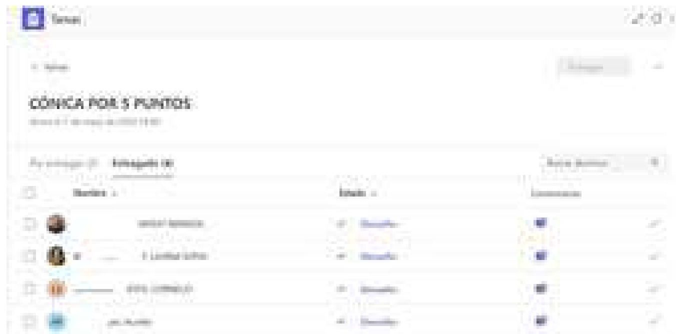


Figura 3. Uso de plataforma Microsoft Teams para recabar tareas.

Etapa de Reflexión. Esta etapa resultó ser especialmente significativa, ya que brindó a los estudiantes la oportunidad de presentar sus proyectos sin omitir detalles del proceso. Durante sus exposiciones, analizaron cada momento vivido, compartiendo sus experiencias individuales, las cuales resultaron enriquecedoras tanto para ellos mismos como para sus compañeros. En sus intervenciones, debían relatar su recorrido, incluyendo aquellos momentos en los que cometieron errores, lo que permitió una reflexión profunda y un valioso aprendizaje colectivo.

En particular, el uso del método de Gauss-Jordan representó un desafío, debido a la extensión y complejidad del procedimiento. En varios casos, los alumnos cometieron equivocaciones que los llevaron a repetir el proceso desde el inicio, se evidenciaron algunas confusiones al aplicar la eliminación gaussiana, especialmente al omitir operaciones en la última columna de la matriz.

Conclusiones

En este apartado más que conclusiones haremos un conjunto de reflexiones respecto a la actividad y lo que se logró con ella. La experiencia de aula que se presentó permitió explorar una forma innovadora y alternativa de organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, centrada fundamentalmente en el estudiante siendo protagonista activo de su propio conocimiento, como lo sugiere Giraldo (2025). La dinámica de la clase fomentó un ambiente en el que se incentivó a los estudiantes a formular preguntas, reflexionar críticamente sobre sus procedimientos e incluso a dudar de sus propios hallazgos, este aspecto resultó fundamental desde el enfoque la metodología de investigación-acción.

El cuestionamiento constante no solo fue valorado, sino que se promovió como parte esencial del aprendizaje. El propósito fue fortalecer la comprensión conceptual mediante un diálogo continuo entre el docente y los estudiantes, en el que la comunicación se convirtió en una herramienta clave para conseguir, construir y reafirmar saberes matemáticos que el alumno debía poner en uso de manera consciente.

Los tres métodos utilizados para modelar una cónica: los cinco puntos en GeoGebra, el método del cuadrilátero y el método de Gauss-Jordan no formaban parte de los conocimientos previos de los estudiantes. Sin embargo, a lo largo del desarrollo de las tareas y las asesorías lograron apropiarse de ellos de forma autónoma, apoyándose en la búsqueda de información en diversas fuentes y en la formulación de preguntas que les permitieron comprender los conceptos que estaban trabajando.

En el desarrollo de la propuesta didáctica se permitió el uso de herramientas digitales como mediadores del aprendizaje, destacando especialmente el empleo de GeoGebra. Este software resultó ser un recurso esencial para la visualización y comprensión de conceptos matemáticos complejos, como el modelado de cónicas. GeoGebra no solo facilitó la representación gráfica interactiva, sino que también promovió la exploración autónoma, ya los estudiantes pudieron manipular puntos, observar relaciones geométricas y validar sus conjeturas en tiempo real.

De esta manera, la tecnología se integró de forma significativa al aula, no como un elemento accesorio, sino como un medio activo para construir conocimiento, fomentar la experimentación y fortalecer el pensamiento matemático.

Es importante destacar que, a lo largo de la propuesta didáctica se promovió de manera intencionada el uso de diversas representaciones de las cónicas como objetos de estudio. Esta estrategia no solo enriqueció el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que también contribuyó significativamente a la formalización y comprensión profunda de los conceptos involucrados. Al presentar las cónicas desde múltiples representaciones: gráficas, algebraicas y numéricas, se ofreció a los estudiantes la posibilidad de establecer conexiones y comparación entre distintas formas de representación matemática, lo cual favoreció el desarrollo del pensamiento abstracto y la flexibilidad cognitiva.

Si bien existen numerosas metodologías aplicables al aula de matemáticas, la incorporación del enfoque de investigación-acción desde la perspectiva de Kemmis y McTaggart resultó especialmente satisfactoria y pertinente. Este enfoque aportó elementos que se integraron de manera coherente a la propuesta, dinamizando la enseñanza y reconociendo la planificación, la acción, la observación y la reflexión, en ese orden, como componentes esenciales del proceso.

Sabido es que la implementación de una propuesta didáctica como la diseñada exige una mayor dedicación por parte del docente tanto en el diseño de las actividades como en la revisión constante y en la evaluación continua (antes, durante y al finalizar el proceso), los beneficios pedagógicos que se obtienen de este proceso justifican ampliamente el esfuerzo. Este modelo, basado en una retroalimentación permanente y significativa, contribuyó a que el estudiante tomara mayor conciencia de sus propias necesidades académicas y de su proceso de aprendizaje.

Consideramos que la propuesta didáctica realizada contribuyó para que el estudiante enfrente retos del ámbito profesional, (al menos algunos de ellos) promoviendo en él una actitud abierta a la crítica constructiva, al análisis de sus propios errores y a la búsqueda activa de estrategias para superar las dificultades. En este sentido, no solo se fortalecen sus competencias académicas, sino también habilidades clave como la autonomía, la resiliencia y el pensamiento crítico.

Así como se observó un avance significativo por parte de los alumnos en el estudio de las secciones cónicas, también fue importante identificar áreas de oportunidad que puedan ser útiles para los docentes interesados en replicar esta experiencia didáctica. Por ejemplo, en el caso de las cónicas de extensión abierta, como la parábola, un estudiante no consideró adecuadamente los límites del dominio. Esto provocó que el modelo inicial fuera general y no se ajustara con precisión a la imagen que habían propuesto. Ante esta situación, fue necesario reforzar conceptos clave como el dominio y la extensión de las cónicas, con el fin de lograr una representación más fiel y rigurosa.

La parte analítica representó mayores desafíos a los estudiantes, pero tuvieron la oportunidad de equivocarse y corregir en varias ocasiones, hasta que su modelo se aproximó lo más posible en las tres formas exploradas. Estos errores les permitieron darse cuenta de la importancia de realizar los cálculos con cuidado, ya que se trató de procesos extensos y complejos.

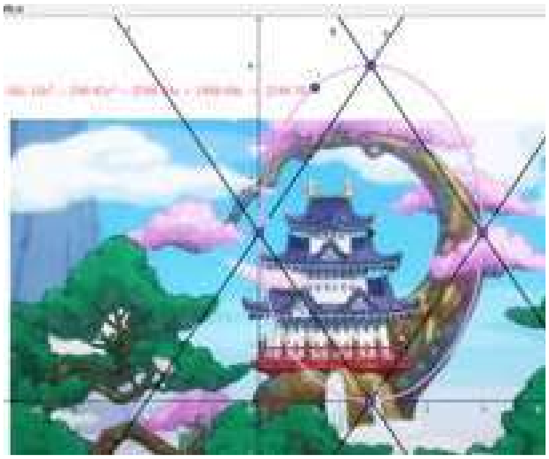


Figura 4. Imagen de Leslie. La cónica es externa a la imagen.

Con el objetivo de ajustar la cónica, una estudiante modificó el modelo sin percatarse de que se alejaban del dibujo original, lo que evidenciaba una diferencia significativa entre el modelo matemático y el objeto modelado. Este caso se observó de manera particular en la tarea de Leslie, quien trabajó con la imagen mostrada en la figura 4. Posteriormente, ella logró identificar el error, corregirlo y modificar su modelo, obteniendo así una representación más precisa.

Como recomendación a los maestros que quisieran implementar esta propuesta didáctica se sugiere que para la comprobación y dadas las múltiples revisiones que requiere hacerse pueden usar la calculadora virtual de OnlineMschool, ver figura 5. La elección de esta herramienta se debió a que ayuda a solucionar el sistema de ecuaciones lineales de 5x5, pero el valor agregado es que permite visualizar el proceso y los cálculos, para comparar lo que realizaban los alumnos con lápiz y papel. Esta herramienta no se puso a disposición de los alumnos porque la idea de las tareas dos y tres era la construcción del modelo usando lápiz y papel exclusivamente.

Figura 5. Calculadora virtual: onlineMschool.com

Referencias

1. Calculadora virtual: onlineMschool.com
2. Chavarriaga, O. y Torres, J. (2017). *Estudio de las secciones cónicas a través de la geometría dinámica*. Tesis doctoral no publicada, Universidad Pontificia Bolivariana. Repositorio Institucional UPB. repository.upb.edu.co
3. Costa, C. (2015). *As cônicas na geometria do táxi* [Artículo académico]. *Ciência e Natura*, 37(3), 179–191.
4. Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Traducción (2006) de la Universidad del Valle, Cali
5. García, G. (2024). *"Ingeniería didáctica" como metodología de enseñanza de cónicas en el desarrollo de capacidades geométricas para resolver problemas contextualizados de estudiantes de arquitectura*. Tesis doctoral no publicada, Universidad Femenina del Sagrado Corazón.
6. GeoGebra en www.geogebra.org
7. Giraldo, M. (2025). Innovación en un instituto de educación secundaria a través de entornos virtuales y tecnologías conversacionales: una investigación-acción para fomentar la autonomía del alumnado y la personalización de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. España.
8. Guevara, G., Verdesoto, A. y Castro, N. (2020). Metodologías de investigación educativa (descriptivas, experimentales, participativas y de investigación-acción). *Recimundo*, *4*(3), 163-173.
9. Latorre, A. (2003). *La investigación-acción: Conocer y cambiar la práctica educativa*. Graó.
10. Miller, M. E., & Johnson, C. L. (2021). *The impact of technology integration on the teaching and learning of conic sections. Journal of Technology in Mathematics Education, 8*(1), 45-60. https://doi.org/10.1080/24725854.2021.1881543

11. Salas, M. Hille, C. Etgen, G. (2003). Calculus. Barcelona: Reverté.
12. Torres, R. A., & García, A. M. (2023). *Teaching conic sections through inquiry-based learning: Insights from a classroom study*. *Educational Studies in Mathematics, 112*(3), 345-361. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10234-7
13. Ulson, K. (2024). *Using Graphing Application in Illustrating the Conic Sections: Its Effect on Student's Performance*. *International Journal of Humanities and Education Development (IJHED)*, *6*(3), 1–7. https://doi.org/10.22161/jhed.6.3.1
14. Vigil, J. (2021). Estudio de investigación-acción sobre la aplicación del modelo Flipped Classroom en las asignaturas de Matemáticas II y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II de 2º de Bachillerato. *Pulso: revista de educación*, (44), 109-128.

Artículo recibido: 15 septiembre 2025

Dictaminado: 23 diciembre 2025

Aceptado: 30 diciembre 2025

2025, Volúmen 13, Número 2, pp. 55-69

Sección: Entre Docentes

Aplicación del concepto de combinación en la métrica del taxista por medio de Geogebra

Application of the concept of combinations in the taxicab metric through GeoGebra

José Antonio Briceño Muro[a]
Centro de Estudios Tecnológicos industrial y de servicios (CBTis) No. 113; México
cinotla@hotmail.com
orcid.org/0009-0002-8225-5201

Arturo Leandro Valdivia
Instituto Tecnológico de Aguascalientes; México
arturo.lv@aguascalientes.tecnm.mx
orcid.org/0009-0000-3885-4632

Yareli Sandoval Sandoval
Centro de Estudios Tecnológicos industrial y de servicios (CBTis) No. 113; México
ysandoval@cetis113.edu.mx

Resumen:
El presente trabajo se desarrolla una propuesta didáctica que tiene como objetivo fortalecer el pensamiento matemático y computacional en los estudiantes, favoreciendo la vinculación entre las matemáticas y la vida cotidiana. La propuesta utiliza escenarios elaborados en GeoGebra donde se ponen en juego elementos geométricos y algebraicos para construir el concepto de combinación, el cual se utiliza como base para aplicarlo posteriormente en el análisis de los diferentes recorridos posibles entre dos puntos mediante la métrica del taxista. Este enfoque permite que los estudiantes comprendan cómo las matemáticas modelan situaciones reales de desplazamiento urbano. La propuesta se fundamenta en la metodología del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), que promueve una participación activa y el desarrollo de aprendizajes significativos. En relación con los principios de la Nueva Escuela Mexicana (NEM), se busca fomentar la autonomía en el aprendizaje y el pensamiento crítico a partir de situaciones contextualizadas. El uso de GeoGebra potencia la exploración y la formulación de conjeturas, aspectos esenciales para el desarrollo del pensamiento matemático.

Palabras clave: Combinación, GeoGebra, Métrica del Taxista, Simulación

[a] Autor de correspondencia

Abstract:
This paper presents an innovative teaching proposal designed to strengthen students' mathematical and computational thinking while fostering connections between mathematics and everyday life. The innovation lies in the use of interactive GeoGebra scenarios to build the concept of combinations, which is later applied to analyze the different possible routes between two points using the taxicab metric. This approach helps students understand how mathematics can model real urban travel situations. The proposal is grounded in Problem-Based Learning (PBL), which encourages active participation and the development of meaningful learning. In line with the principles of the New Mexican School (NEM), it seeks to promote learner autonomy and critical thinking through context-based experiences. The use of GeoGebra enhances exploration and conjecture formulation—essential components in the development of mathematical thinking.

Keywords: Combination, GeoGebra, Taxi Metric, Simulation

Cómo citar / How to cite: Briceño Muro, J., Valdivia, A., y Sandoval Sandoval, Y. (2025). Aplicación del concepto de combinación en la métrica del taxista por medio de GeoGebra. *Revista AMIUTEM*, *13*(2), 55–69. https://doi.org/10.65685/amiutem.v13i2.274

.

Introducción

La Nueva Escuela Mexicana (NEM), presentada en 2019 como parte de una reforma educativa nacional (SEP, 2019; SEP 2023), surge con la intención de transformar la educación en México hacia un modelo humanista, inclusivo y equitativo. En este marco, el Nuevo Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (NMCCEMS 2023) busca unificar y actualizar la formación en este nivel, promoviendo aprendizajes significativos y contextualizados. Además, este modelo plantea la transversalidad como una estrategia para que se logre uno de los propósitos del NMCCEMS: un currículum integrado, para alcanzar una mayor y mejor comprensión de la complejidad del entorno natural y social.

En el caso de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI), esta transformación se refleja particularmente en el área de matemáticas, donde se dejan a un lado los contenidos aislados para trabajar en progresiones situadas en contexto. De este modo, lo que anteriormente se impartía como asignaturas separadas como: Álgebra, Geometría, Cálculo y Probabilidad; ahora se integra en Unidades de Aprendizaje Curricular englobadas en Pensamiento Matemático y Temas Selectos de Matemáticas (SEP, 2023) cuyo propósito central es desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes. Lo anterior supone una problemática a la enseñanza tradicional, promoviendo el diseño de propuestas didácticas contextualizadas que integren conocimientos multidisciplinares y motiven al estudiante a desarrollar nuevos aprendizajes.

Por ejemplo, en el curso de Temas Selectos de Matemáticas I, esta reorganización curricular implicó no solo modificar la secuencia de contenidos, sino también proponer un enfoque divulgativo para abordar problemáticas complejas de manera motivadora. Algunos ejemplos de estos temas son la fractalidad, fenómenos caóticos, funciones lineales y no lineales, la conectividad y geometría fractal.

Los contenidos de probabilidad y estadística son un área de conocimientos que se ha abordado sin promover aprendizajes significativos, contextualizados o multidisciplinares tal como lo marca NEM, tradicionalmente el docente se enfoca en que el estudiante aprenda las fórmulas y los procedimientos que integran a cada conocimiento de la estadística o probabilidad privilegiando el cálculo antes que la comprensión (Insunza y Serrano, 2022). Dentro de esta área encontramos los conocimientos de combinatoria, donde aún los estudiantes universitarios con una preparación matemática no logran reconocer su utilidad al resolver problemas fuera de los contextos de selección (Guzmán et, al 2003), es decir, el uso de los conocimientos de combinatoria queda asociado a situaciones específicas con una definición procedimental. Por lo tanto, se carece de un aprendizaje significativo, contextualizado y multidisciplinar.

Para afrontar esta problemática se propone la aplicación de esta propuesta didáctica que aborda la aplicación de la métrica del taxista en contextos urbanos, esto como parte fundamental para construir gradualmente el concepto de combinación, posteriormente se aplica el concepto de combinación en las simulaciones construidas con GeoGebra sobre los diferentes recorridos posibles entre dos puntos. Esta propuesta aporta ideas innovadoras al centrar el aprendizaje en una situación real, donde los estudiantes utilizan recursos digitales para plantear y resolver estrategias, representando la problemática primero en un lenguaje matemático y posteriormente en un lenguaje de programación.

Se trata de una estrategia didáctica innovadora, ya que los alumnos pasan de resolver problemas ficticios de manera estática a reflexionar de forma dinámica sobre una situación contextual: las calles, el movimiento del vehículo y los posibles recorridos. Al analizar estas variables, así como el significado de ciertos movimientos y los elementos necesarios para la simulación, los estudiantes desarrollan una conciencia crítica y reflexiva de su propio aprendizaje.

El uso de simulaciones digitales permite generar entornos interactivos donde los estudiantes manipulan variables y experimentan situaciones cercanas a la realidad, favoreciendo un aprendizaje significativo. Además, como docentes, debemos reconocer que el uso de la tecnología es cada vez más relevante e importante en la actualidad y que su integración en nuestras áreas de conocimiento resulta fundamental para fortalecer la formación de los estudiantes en el presente futuro.

Referente teórico

Métrica del taxista

La métrica del taxista se basa en calles cuadriculadas por lo que es importante definir como se representarían matemáticamente estas calles. En su artículo García, Ramírez y Rodríguez (2025) definen una trama cuadrada como el conjunto formado por todas las rectas verticales y horizontales que poseen una coordenada entera:

$$TC = (R \times Z) \cup (Z \times R)$$

Este conjunto es de gran utilidad porque representa las calles horizontales y verticales de una ciudad idealizada. La Figura 1 muestra un ejemplo de lo que es una trama cuadrada:

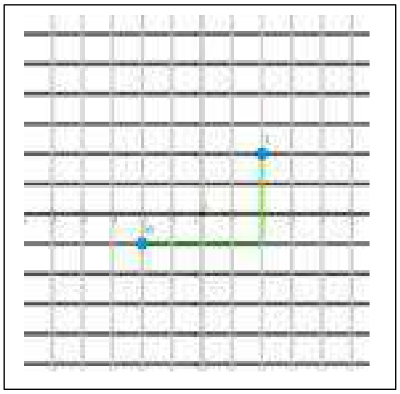


Figura 1. Trama Cuadrada

Fuente: Elaboración propia

La métrica del taxista, también conocida como métrica Manhattan, se basa en una forma de medir distancias que imita el movimiento de un vehículo o persona que se desplaza exclusivamente a lo largo de calles dispuestas en una cuadrícula, como en muchas ciudades. Este tipo de métrica considera únicamente desplazamientos horizontales y verticales.

Existen varios libros y autores que definen la métrica del taxista, Bonilla D., Parraguez M. & Solanilla L. (2014) definen como una función en $\mathbb{R}X\mathbb{R}$, si se tienen dos puntos en el plano $P = (x_1, y_1)\ y\ Q = (x_2, y_2)$, la distancia del taxista se calcula como:

$$d(P, Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

Este tipo de distancia representa situaciones donde no es posible moverse en línea recta, sino que se debe seguir una red ortogonal, como las calles de una ciudad.

En contraste, la métrica euclidiana mide la distancia directa entre dos puntos, como una línea recta. Su fórmula es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se utiliza cuando no hay restricciones en la trayectoria, lo cual en la realidad no es tan fácil de determinar, ya que los entornos reales suelen tener limitaciones como calles, edificios, construcciones u otras barreras que impiden moverse libremente en línea recta.

Del artículo que trabajan García, Ramírez y Rodríguez, (2025) podemos rescatar algunas de las propiedades que cuenta la métrica del taxista:

- Positividad: la distancia siempre resulta en un valor positivo, como se observa en su definición, al tratarse de una suma de dos valores absolutos, el resultado nunca puede ser negativo.
- Simetría: La distancia del punto P_1 al punto P_2 es la misma que del punto P_2 al punto P_1 .
- Interdependencia del camino: La distancia entre dos puntos no depende de la trayectoria específica, sino únicamente de las diferencias absolutas entre sus coordenadas. Es decir, hay múltiples caminos distintos que recorren la misma distancia mínima. En la siguiente imagen se muestra un ejemplo para los puntos A (0,0) y B (2,2). (Figura 2)

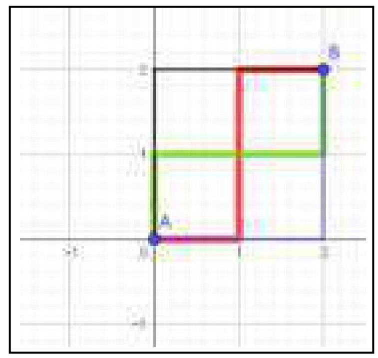


Figura 2. Múltiples recorridos

Fuente: Elaboración propia

La existencia de múltiples trayectorias mínimas entre dos puntos en una trama cuadrada, todas con la misma distancia según la métrica del taxista, plantea un escenario ideal para el análisis combinatorio. Esta propiedad no solo permite estudiar el concepto de distancia desde una perspectiva distinta a la euclidiana, sino también modelar, mediante GeoGebra, todos los caminos posibles entre dichos puntos. Esta visualización favorece la comprensión de conceptos como el conteo, la combinatoria y la optimización de rutas en un entorno urbano idealizado.

GeoGebra como herramienta de aprendizaje

GeoGebra se presenta como una herramienta interactiva que facilita la exploración de conceptos matemáticos de manera visual y dinámica. Al utilizarla para representar la métrica del taxista, los estudiantes pueden:

- Visualizar la trama cuadrada como representación de una ciudad ideal.

- Construir y contar diferentes trayectorias mínimas entre dos puntos.
- Comparar la métrica del taxista con la métrica euclidiana en términos gráficos.
- Comprender el concepto de distancia desde una perspectiva más tangible y contextualizada.

Esta estrategia didáctica favorece un aprendizaje activo, fomenta la intuición matemática y permite conectar el conocimiento formal con situaciones reales o simuladas. El desarrollo del trabajo consta de varias fases: en la primera se plantea una actividad para despertar el interés y motivación de los estudiantes mediante la construcción de una Applet en Geogebra que permita visualizar de manera dinámica el recorrido de un vehículo desde un punto inicial hacia un punto final. Si bien el calcular la distancia en la métrica del taxista es sencillo el poder realizar la simulación en Geogebra permitirá a los estudiantes experimentar con diferentes escenarios y manipular datos y observar resultados en tiempo real. Esta herramienta tecnológica, al integrar diversas representaciones visuales, contribuye a un aprendizaje más significativo y profundo del concepto de métrica como distancia, especialmente en contextos urbanos.

En este contexto, la herramienta GeoGebra adquiere relevancia como recurso pedagógico de tecnologías digitales, como parte de las actividades de aprendizaje representa una alternativa eficaz para el proceso de enseñanza, colocando al estudiante como protagonista. Es él quien construye la simulación, analiza los elementos que intervienen en ella, y busca comprender las relaciones entre los distintos componentes del modelo.

Como lo plantea Ryokiti, A. (2020), los simuladores digitales están diseñados para que el usuario haga uso de sus sentidos a través de la interacción: observar, manipular, analizar y volver a observar. En el contexto educativo, este proceso permite al estudiante formar conjeturas, realizar experimentos y generalizar conceptos a partir de la exploración del entorno virtual. En este sentido, el uso de simuladores como GeoGebra no es únicamente una cuestión tecnológica, sino una estrategia pedagógica que transforma el proceso de enseñanza-aprendizaje, al fomentar la manipulación y la visualización de los objetos matemáticos, se facilita el tránsito del pensamiento concreto al abstracto, promoviendo una comprensión más profunda y significativa de los conceptos. Por otra parte, Morales et al. (2022). explican que GeoGebra permite a los estudiantes a articular su pensamiento visual y analítico durante el aprendizaje, mejorando las habilidades de comunicación, fomenta la visualización y comprensión de los conceptos matemáticos y el razonamiento mientras los estudiantes aprenden.

Combinatoria en contextos urbanos

La métrica del taxista no solo plantea una forma alternativa de medir distancias, sino que introduce de manera natural problemas de conteo combinatorio. En una trama cuadrada, entre dos puntos cualesquiera $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, la distancia del taxista es fija, pero existen múltiples caminos que recorren esa distancia mínima.

Por ejemplo, si se desea ir de $A = (0, 0)$ a $B = (2, 2)$, el número total de trayectorias mínimas posibles que respetan la métrica del taxista puede determinarse utilizando el enfoque de permutaciones con repetición. En este caso, el trayecto mínimo consta de 2 movimientos horizontales (H) y 2 verticales (V), y cada trayectoria válida es una secuencia de estos movimientos, sin importar el orden específico.

El número total de trayectorias distintas es:

$$\binom{3+2}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

En general, dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ el número de caminos mínimos posibles se calcula como:

$$\binom{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|}$$

Este tipo de problema permite introducir conceptos fundamentales de la combinatoria en un contexto visual y concreto. Al emplear GeoGebra, los estudiantes pueden explorar estos caminos, contarlos manual o automáticamente, y verificar la validez del enfoque teórico a través de simulaciones interactivas.

Además, esta actividad estimula el pensamiento algebraico, promueve la generalización y proporciona una excelente oportunidad para introducir ideas de análisis de trayectorias, optimización y hasta problemas con restricciones (por ejemplo, calles bloqueadas o puntos prohibidos).

Aprendizaje Basado en Problemas

Las metodologías activas promovidas por la NEM se centran en la participación activa del estudiante dentro del proceso educativo. Vélez (2023) describe aspectos relevantes de estas metodologías, destacando que todas implican una ruptura con el enfoque tradicional, en el cual el estudiante deja de ser un receptor pasivo de contenidos y el docente asume el rol de facilitador del aprendizaje. Esta idea favorece nuestra propuesta pues se busca tener un cambio de paradigma en donde se transformen los roles de ambos actores docentes y estudiantes con el propósito de favorecer un aprendizaje más significativo.

La metodología que fundamenta nuestro trabajo es la del Aprendizaje Basado en Problemas, la cual permite que los conceptos matemáticos se construyan a partir de situaciones reales, esto no solo facilita su comprensión, sino que también favorece la conexión entre el conocimiento escolar y la vida cotidiana. Padilla y Flórez (2022) sitúan esta metodología dentro del enfoque constructivista, dado que promueve la construcción activa del conocimiento a través de la resolución de problemas relevantes. En este trabajo se propone que la métrica del taxista constituya la situación problemática que permita al estudiante construir y aplicar el concepto de combinación.

Otros autores, como Fernández C. & Aguado M. (2017), señalan que el ABP constituye un medio para que los estudiantes adquieran y apliquen conocimientos en la solución de problemas reales o ficticios. Por su parte, Ortiz y Cutimbo (2022) mencionan que el ABP potencia la construcción de nuevos conocimientos a partir del desarrollo de habilidades, destrezas y el aprendizaje autónomo, impulsando una comprensión profunda de las matemáticas. Contemplando estos fundamentos, la métrica del taxista se presenta como una herramienta idónea para la aplicación del ABP. Esta métrica se caracteriza por definir una distancia entre dos puntos cuya ruta mínima no es única, permitiendo analizar múltiples recorridos posibles. Esta multiplicidad de soluciones establece una situación problemática inherentemente rica que exige a los estudiantes resolver un desafío real y, a partir de ello, desarrollar y consolidar las habilidades, destrezas y el aprendizaje autónomo señalados por los autores.

El uso de GeoGebra en combinación con el ABP permite que los estudiantes desarrollen no solo habilidades matemáticas, sino también competencias digitales. Aunque el software se basa en conceptos matemáticos, su entorno ofrece una visualización dinámica que facilita la exploración y la comprensión conceptual. Merchán et al. (2025) destacan que el aprovechamiento de la tecnología educativa puede potenciar los beneficios del ABP mediante la simulación, la automatización y el uso de materiales que estimulan la exploración de ideas matemáticas.

Finalmente, Ortiz (2023) sostiene que el ABP promueve la autonomía y la responsabilidad al situar al estudiante en el centro de su propio proceso de aprendizaje. Asimismo, en sus conclusiones señala que la combinación del ABP con GeoGebra ofrece un enfoque dinámico, interactivo y contextualizado que favorece la comprensión de los conceptos matemáticos.

Metodología de la propuesta didáctica

Contexto y participantes

La propuesta se implementó en un grupo de cuarto semestre de la especialidad de programación, durante el ciclo escolar 2024–2025, en un bachillerato ubicado en Zacatecas. El grupo estuvo conformado por 18 estudiantes (4 mujeres y 14 hombres), quienes mostraban familiaridad con herramientas tecnológicas, pero el uso específico de GeoGebra era limitado.

La propuesta se aplicó en siete sesiones de 60 minutos, distribuidas en dos semanas. Las evidencias y resultados mostrados se obtuvieron mediante la observación participante.

Diagnóstico inicial

Antes de iniciar la implementación de la propuesta, se aplicó un diagnóstico inicial con el objetivo de identificar el dominio de los conceptos fundamentales sobre:

- El cálculo de distancias con la geometría euclidiana y la métrica del taxista.
- La representación y exploración de trayectorias mínimas mediante movimientos horizontales y verticales.
- El uso de conceptos de combinatoria específicamente la distinción de permutación y combinación.
- El dominio básico de funciones en GeoGebra como el insertar puntos y manipulación de elementos visuales.

La Figura 3 muestra el instrumento utilizado para dicha evaluación. El análisis mostró que los estudiantes poseían nociones básicas para calcular distancias mediante geometría euclidiana, pero la mayoría desconocía la métrica del taxista. Tampoco distinguían entre permutación y combinación, y el uso de GeoGebra se limitaba a acciones muy básicas. Estos hallazgos justificaron el diseño de la propuesta didáctica.

Fases de la propuesta didáctica

Fase 1: Exploración

En esta primera sesión, el objetivo fue introducir de manera intuitiva el concepto de la métrica del taxista mediante la construcción de una animación básica en GeoGebra donde un vehículo se desplaza sobre calles ortogonales. Para ello se presentaron imágenes de ciudades con trazos ortogonales, lo que permitió vincular la problemática con un contexto real. Esta actividad permitió que los estudiantes comprendieran de manera visual e intuitiva por qué la distancia del taxista difiere de la euclidiana y cómo se modelan desplazamientos urbanos reales mediante herramientas digitales.

En la segunda sesión, de manera colaborativa, los estudiantes exploraron manualmente y en GeoGebra los posibles caminos mínimos entre dos puntos. Esta actividad condujo a una observación espontánea del grupo: aunque la

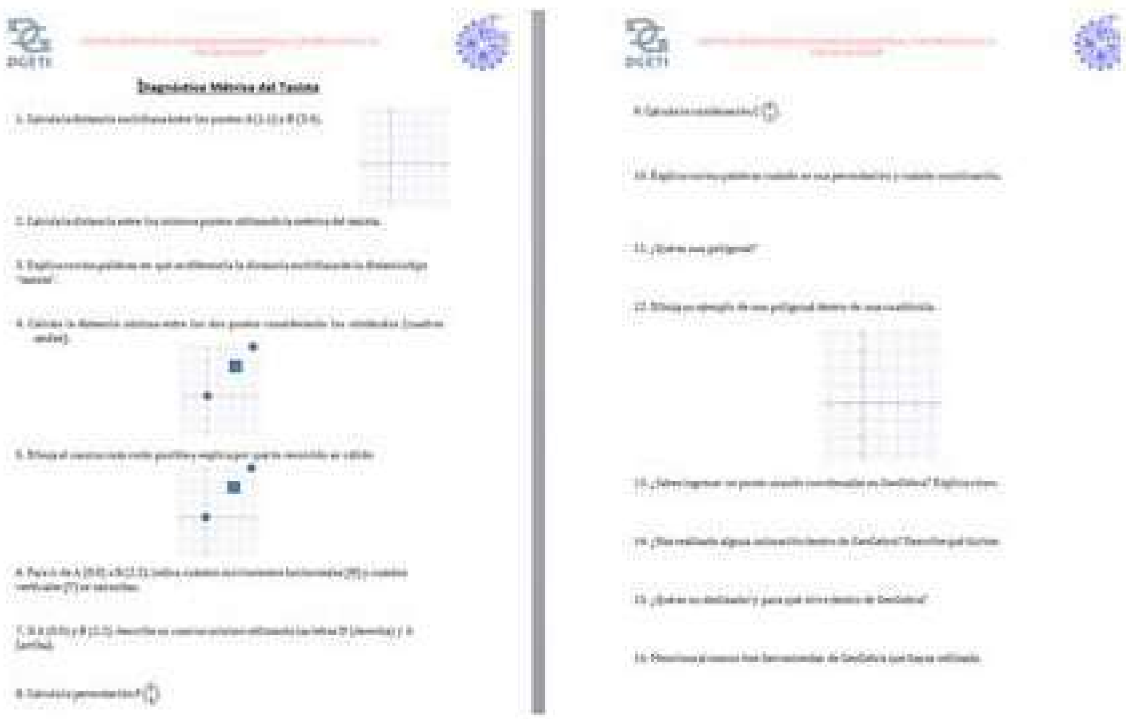


Figura 3. Evaluación Diagnóstica
Fuente: Elaboración propia

distancia era única, el número de rutas mínimas no lo era, generando el primer acercamiento al razonamiento combinatorio.

Fase 2: Detección del patrón

Esta fase se desarrolló en la tercer y cuarta sesión donde el propósito fue que los estudiantes analizaran los caminos obtenidos para identificar regularidades en el número total de movimientos horizontales y verticales. A través de preguntas guía se promovió el razonamiento inductivo, la búsqueda de patrones y el reconocimiento de invariantes en las trayectorias. Los escenarios diseñados permitieron transitar gradualmente de casos simples a situaciones que exigían mayor generalización.

Fase 3: Formalización del concepto

La quinta sesión se vinculó con el lenguaje matemático formal. Partiendo de trayectorias mínimas entre dos puntos, los estudiantes dedujeron que cada ruta puede representarse como un secuencia ordenada de movimientos horizontales (D) y verticales (A). Esto permitió introducir la combinación con repetición como herramienta para contar tales trayectorias. A partir de ejemplos progresivos, se llegó a la deducción de la fórmula general. Este proceso constituyó un tránsito claro del pensamiento intuitivo al formal.

Fase 4: Construcción de Applet

Durante la sexta y séptima sesión los estudiantes aplicaron los conocimientos matemáticos y computacionales para construir una simulación dinámica en GeoGebra que mostrara todas las trayectorias mínimas entre dos puntos. Para ello se empleó la cuadrícula predeterminada de GeoGebra, definida como representación idealizada de una ciudad.

Los movimientos se parametrizan como: Movimiento a la derecha (1,0) y el movimiento hacia arriba (0,1). La secuencia ordenada de estos vectores permitió construir rutas mediante sumas sucesivas de coordenadas. Con apoyo de Python que facilitó la generación automática de combinaciones mediante la biblioteca *itertools* los estudiantes importaron las secuencias de movimientos a GeoGebra.

Para completar esta Applet, se incorporaron dos deslizadores: uno que permita seleccionar cualquiera de los caminos generados, y el otro controla la visualización progresiva del recorrido, mostrando cada desplazamiento cuadra por cuadra. De esta forma, la herramienta no sólo ilustró todas las trayectorias posibles, sino que también facilitó una exploración interactiva del problema, fortaleciendo la comprensión geométrica, combinatoria y computacional del concepto de métrica del taxista.

Esta fase integró razonamiento matemático, pensamiento computacional y modelación geométrica.

Desarrollo y aplicación de la propuesta

Durante la primera sesión se evidenció que los estudiantes comprendieron rápidamente la métrica del taxista y pudieron aplicarla para calcular distancias en el entorno representado. Aunque en el diagnóstico previo se anticipaba que habría dificultades en el manejo de GeoGebra, especialmente en el uso de herramientas básicas como el trazado de puntos y segmentos, esto no ocurrió. Por el contrario, los estudiantes interactuaron con el software de manera eficiente, lo cual facilitó el desarrollo de la propuesta y permitió profundizar en la interpretación geométrica del recorrido. La figura 4 muestra un ejemplo de las simulaciones elaboradas por los estudiantes.

En la segunda sesión, el proceso de implementación se desarrolló en un ambiente de alta participación estudiantil. Una pregunta que surgió de manera espontánea "¿Cuántos caminos totales puede haber entre dos puntos utilizando la métrica del taxista?" actuó como detonante del razonamiento combinatorio. En un inicio, se había considerado dejar este cuestionamiento como una actividad de aula invertida para que los estudiantes investigaran por su cuenta; sin embargo, durante la discusión colectiva, uno de los estudiantes propuso consultar una inteligencia artificial. La respuesta simbólica obtenida permitió transitar de hipótesis intuitivas a una expresión matemática formal, evidenciando tanto el interés del grupo como su disposición para buscar la solución general.

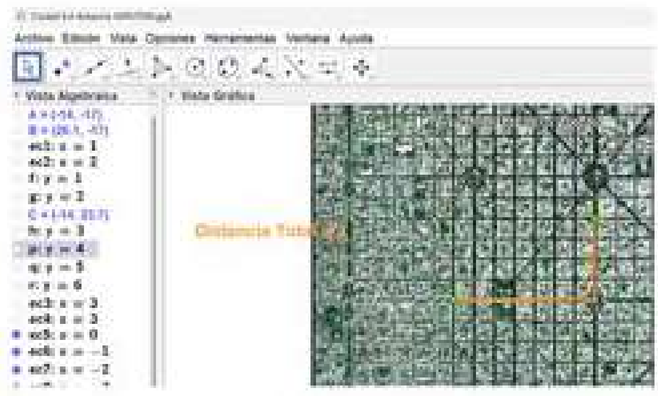


Figura 4. Simulación desplazamiento de coche

Fuente: Elaboración propia

Este episodio refleja la participación activa de los estudiantes, así como el aprovechamiento pertinente de la tecnología en beneficio del aprendizaje. Además muestra como la situación problemática los condujo de manera natural hacia la construcción de un nuevo concepto matemático. En ese sentido, la experiencia se alinea con los principios del aprendizaje basado en problemas (ABP), al promover la construcción activa del conocimiento mediante la resolución de problemas relevantes y el uso de herramientas tecnológicas en la exploración de nuevas ideas matemáticas, tal como lo señalan Padilla y Flórez (2022) y Merchán (2025).

En la tercera y la cuarta sesión, los estudiantes realizaron exploraciones tanto manuales como con apoyo de GeoGebra para identificar patrones y trayectorias. A continuación se presentan algunas de estas producciones. Se observó que, al construir los caminos, algunos alumnos los trazaron de manera directa colocando puntos y segmentos conforme avanzaban (Figura 5). Sin embargo, este procedimiento se volvía repetitivo, pues para representar nuevos caminos era necesario duplicar o reconstruir puntos previamente usados. Otros estudiantes optaron por una estrategia distinta: primero ubicaron todos los puntos involucrados y después unieron únicamente los segmentos correspondientes a cada camino (Figura 6). Finalmente, hubo quienes identificaron la herramienta *Poligonal* de GeoGebra, que permite dibujar un camino completo seleccionado únicamente por los puntos por los que pasa, sin necesidad de trazar segmento por segmento; esta funcionalidad facilitó la construcción eficiente de los recorridos (Figura 7).

Posteriormente en la quinta sesión, se trabajó la formalización del concepto de combinación y en su vínculo con los posibles recorridos dentro de la métrica del taxista. Para ello, se inició preguntando cuántos caminos podían construirse cuando la distancia en la métrica del taxista era 1, y los estudiantes lo dibujaron en sus cuadernos. Luego se repitió el proceso para distancias 2, 3 y así sucesivamente, hasta que lograron identificar una expresión general que determinara el número de caminos posibles para cualquier distancia n, llegando así a la fórmula de combinación.

La sexta y séptima sesión se dedicaron al desarrollo de una Applet final en GeoGebra con el propósito de representar visualmente todos los diferentes caminos posibles entre dos puntos. Los estudiantes observaron que las estrategias iniciales resultaban funcionales cuando las distancias eran cortas y el número de caminos era reducido. Sin embargo, al aumentar la distancia entre los puntos, la cantidad de trayectorias creció de manera considerable y los procedimientos empleados dejaron de ser eficiente.

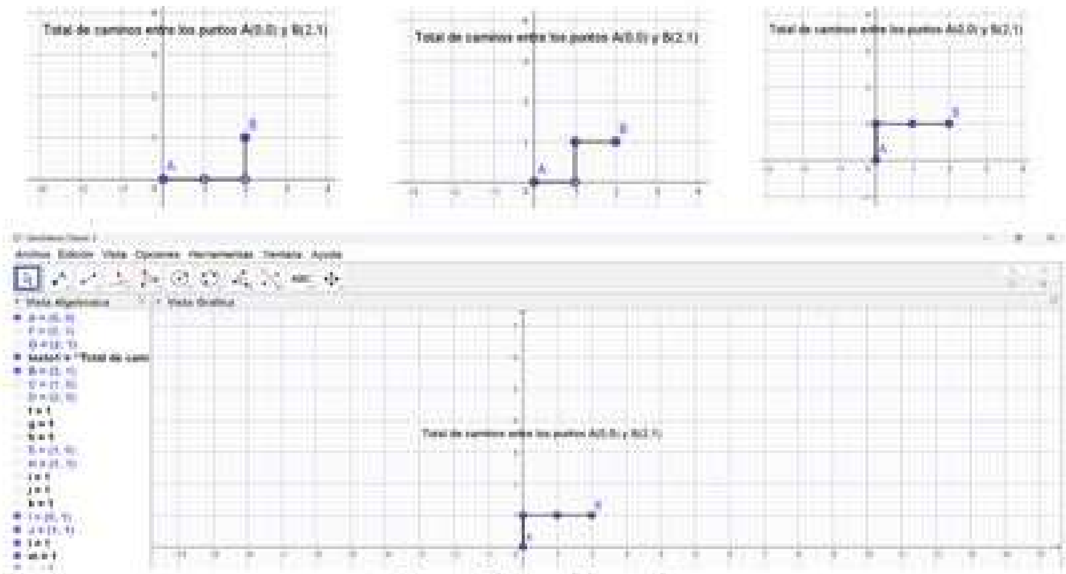


Figura 5. Evidencias Alumnos 1
Fuente: Elaboración propia

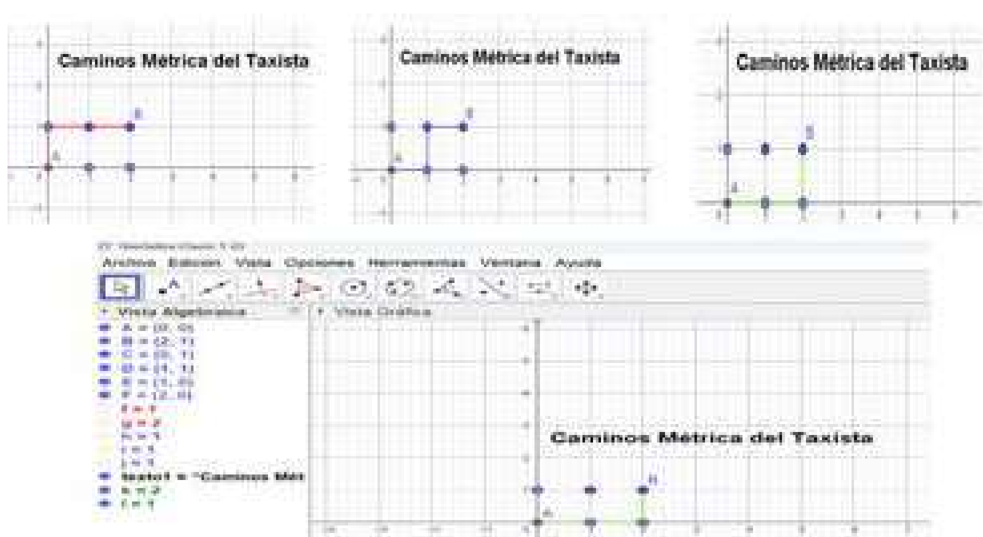


Figura 6. Evidencias Alumnos 2
Fuente: Elaboración propia

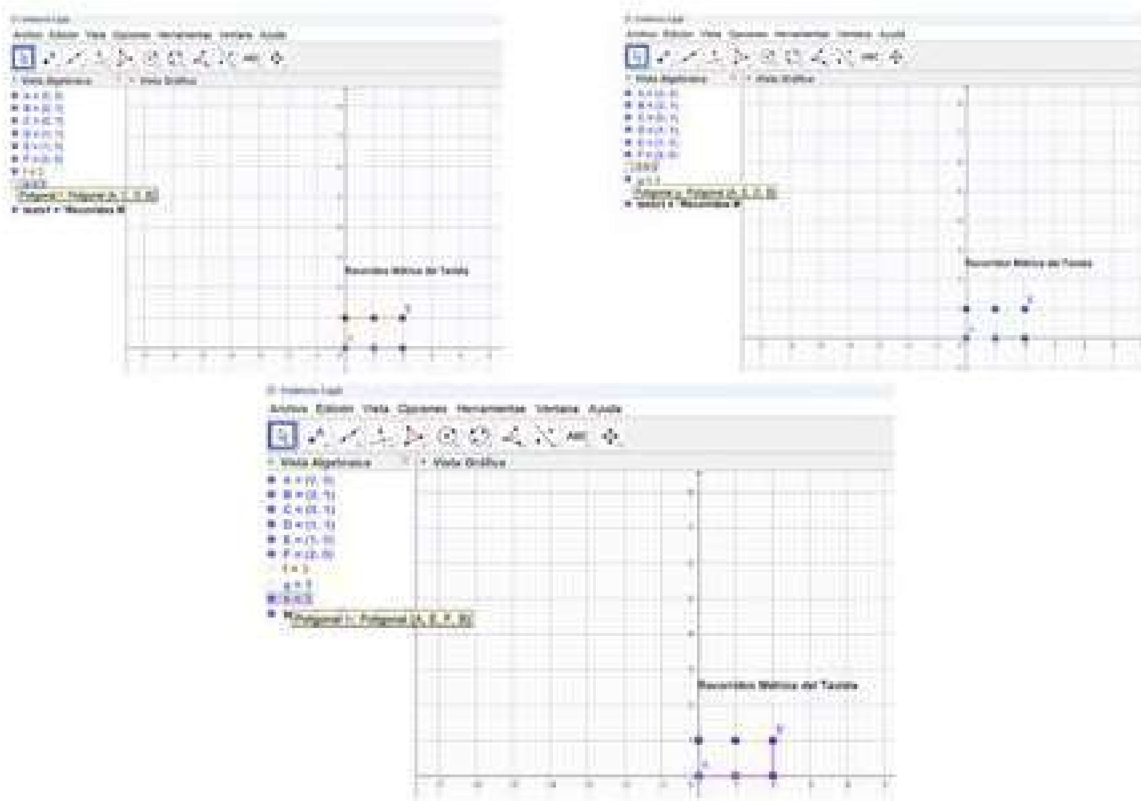


Figura 7. Evidencias Alumnos 3
Fuente: Elaboración propia

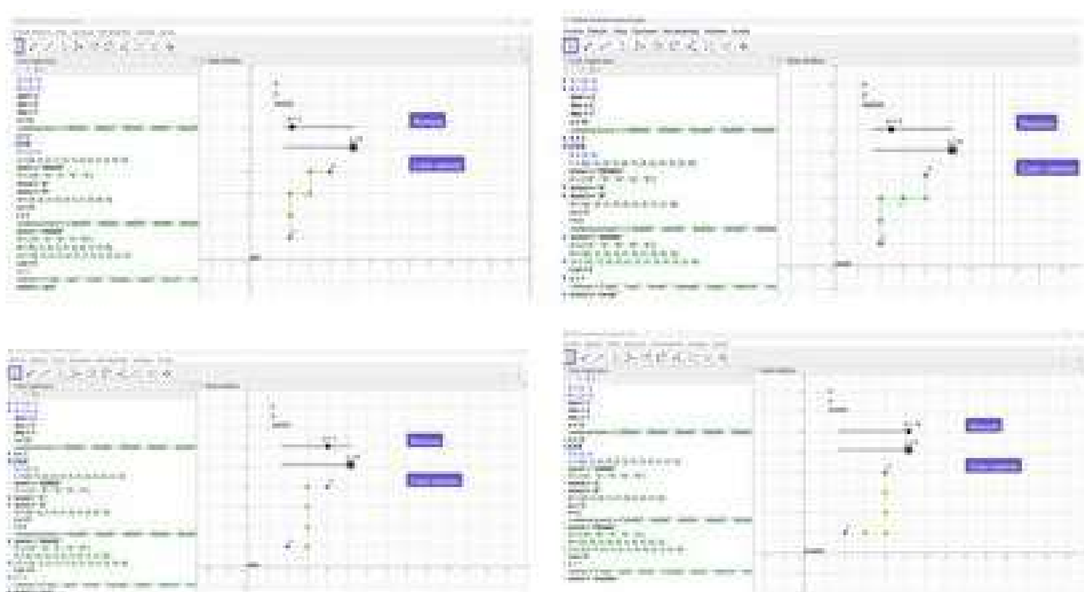


Figura 8. Recorridos con deslizadores
Fuente: Elaboración propia

Ante esta situación, se propuso buscar una alternativa más rápida y adecuada para generar y representar todos los caminos. El análisis comenzó a partir de los movimientos horizontales y verticales necesarios para desplazarse entre dos puntos, lo cual permitió reconocer que los caminos posibles correspondían a las distintas combinaciones de dichos movimientos. Se intentó generar esta lista directamente en GeoGebra, pero la herramienta no disponía de una funcionalidad que permitiera automatizar este proceso.

Por ello, se sugirió el uso de Python lenguaje que los estudiantes ya trabajan en su especialidad, el cual ya cuenta con librerías que permiten obtener permutaciones y combinaciones de manera eficiente. Una vez generada la lista de caminos con Python, esta se exportó a GeoGebra para ser representada visualmente. Haciendo uso de dos deslizadores o botones con código, los estudiantes pudieron recorrer cada una de las trayectorias como se muestra en la Figura 8.

Si bien el trabajo con los estudiantes se centró en la construcción de simulaciones básicas, posteriormente el proyecto se amplió con el propósito de mejorar la visualización gráfica de los recorridos y explorar posibilidades técnicas adicionales que no se habían considerado en las sesiones por lo que se decidió continuar trabajando con el proyecto para lograr una representación más clara y eficiente de los caminos. Esto ya fue como trabajo complementario y con la guía del docente.

Para ello, fue necesario aplicar algunos conocimientos básicos de programación en JavaScript, lenguaje base que GeoGebra utiliza para interactuar con objetos dinámicos. A través de un script en JavaScript fue posible recorrer cada uno de los caminos generados previamente (por ejemplo, desde Python), transformar los vectores en coordenadas absolutas acumuladas, y construir, de manera automatizada, una lista con todas las trayectorias posibles entre dos puntos, como se muestra en la Figura 9.

La Figura 10 muestra cómo se visualizan los diferentes caminos después de las últimas modificaciones mencionadas.

Además, la Applet completa puede consultarse en la siguiente liga: https://www.geogebra.org/m/ksxcgu9q

En conjunto, esta propuesta integra conceptos de combinatoria, al generar todas las rutas posibles, fundamentos de geometría analítica, al representar movimientos como coordenadas, y nociones de programación computacional. Su desarrollo favorece el uso de herramientas digitales para modelar, explorar y visualizar situaciones matemáticas de manera interactiva, clara y significativa. Las siguientes imágenes se muestran como evidencia de los diferentes trabajos finales obtenidos tras la implementación del proyecto (Figura 11):

Una vez concluida la implementación de la propuesta, se procedió a evaluar su impacto mediante la comparación entre el diagnóstico inicial y el postest, cuyos resultados se describen a continuación.

Figura 9. Secuencia para la simulación de recorridos
Fuente: Elaboración propia

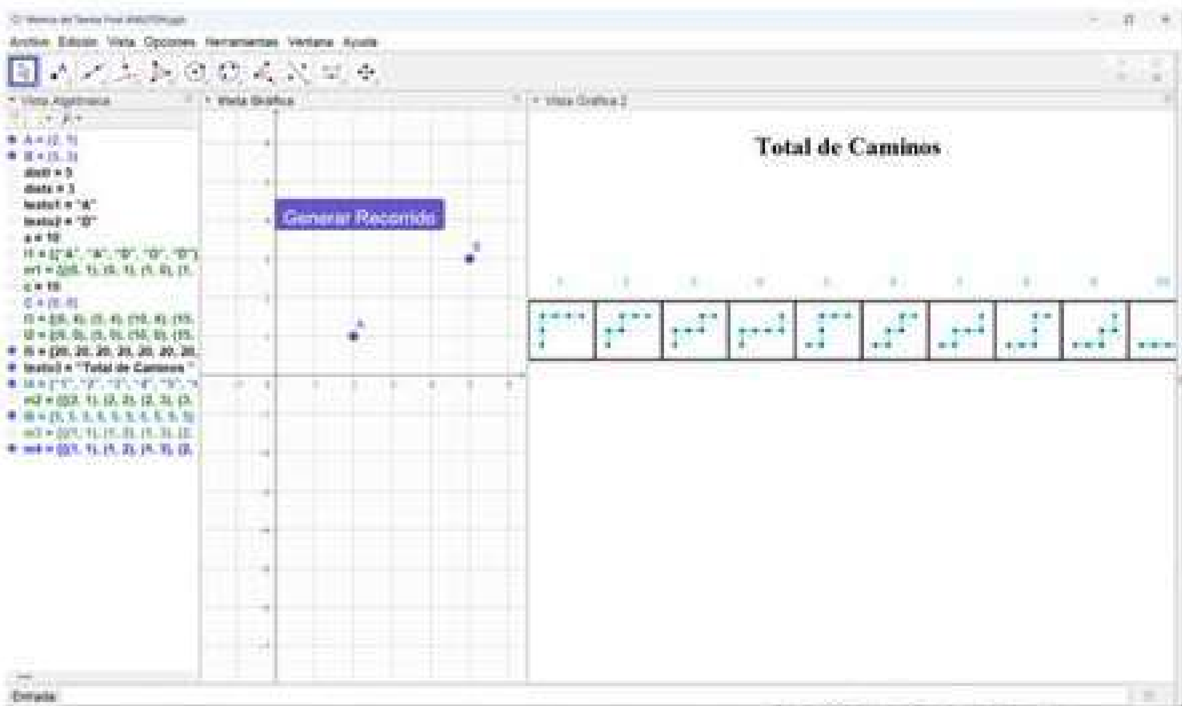


Figura 10. Ejemplo de una Applet finalizada
Fuente: Elaboración propia

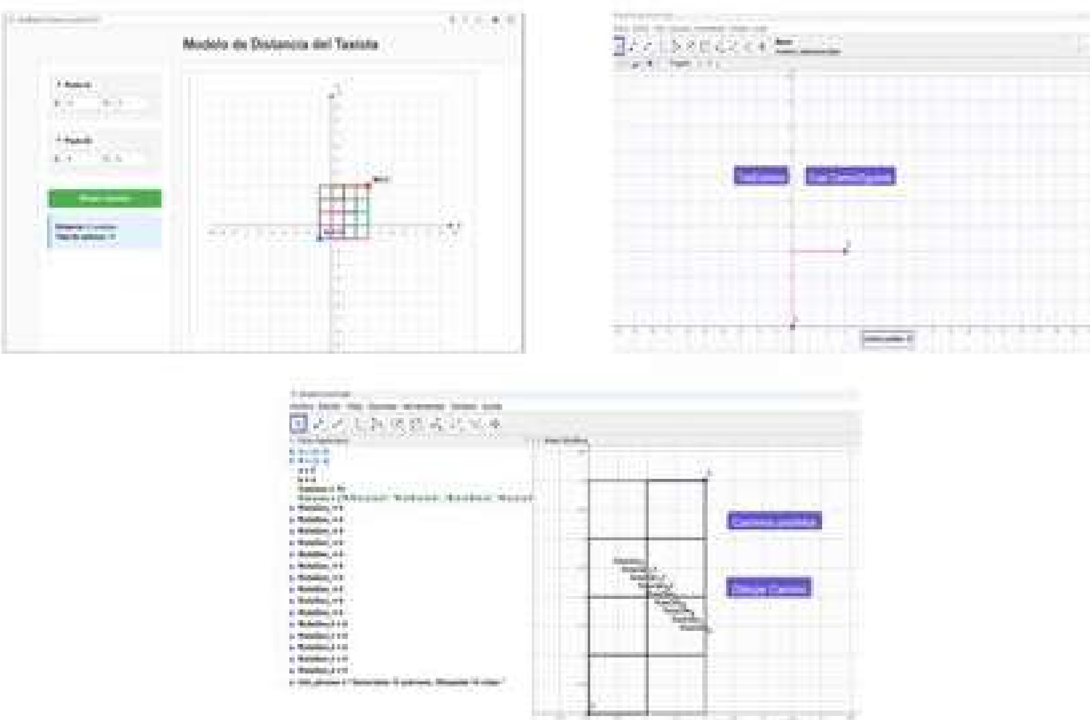


Figura 11. Resultados de applets finales
Fuente: Elaboración propia

Resultados

Comparación diagnóstico vs postest

El diagnóstico inicial mostró que el 78% calculaba correctamente la distancia euclidiana, pero solo el 33% sabía determinar la distancia con la métrica del taxista. Únicamente el 23% distinguió entre ambas métricas. El 83% no recordaba la diferencia entre permutación y combinación. Aunque habían usado GeoGebra en semestres previos, solo el 78% describió elementos básicos del software.

Tras la implementación, el postest evidenció avances significativos: el 89% calculó correctamente la distancia con la métrica del taxista y explicó adecuadamente la diferencia con la métrica euclidiana. El 78% resolvió problemas empleando combinaciones y el 84% representó rutas mínimas en GeoGebra. La mayoría elaboró simulaciones simples que les permitieron visualizar y comparar las trayectorias.

Los resultados obtenidos indican un progreso notable en el dominio conceptual y en el uso de herramientas digitales, particularmente en el cálculo de distancias, la distinción entre métricas y el empleo de combinaciones para el conteo de trayectorias.

La propuesta didáctica permitió consolidar aprendizajes clave en tres áreas principales:

1. Comprensión matemática. Los estudiantes lograron identificar y aplicar la métrica del taxista en problemas contextualizados, reconocieron las diferencias con la métrica euclidiana y emplearon el razonamiento combinatorio para calcular la cantidad de trayectorias mínimas entre dos puntos.
2. Representación y visualización. Las simulaciones en GeoGebra facilitaron la exploración gráfica de recorridos, la identificación de patrones en las trayectorias y la representación clara de los movimientos horizontales y verticales.
3. Competencias tecnológicas. El uso de GeoGebra, Python y JavaScript permitió a los estudiantes traducir procedimientos matemáticos en representaciones digitales, favoreciendo la apropiación de herramientas de modelación y fortalecimiento del pensamiento computacional.

En conjunto, estos resultados muestran que la propuesta contribuyó al desarrollo de habilidades matemáticas, digitales y de análisis. La implementación de la propuesta permitió observar cómo los estudiantes transitaron de un razonamiento intuitivo hacia una comprensión formal de la métrica del taxista y la combinatoria. Este proceso coincidió con lo señalado por Padilla y Flórez (2022), quienes afirman que el ABP favorece la construcción del conocimiento a partir de situaciones problema auténticas. En este caso, la búsqueda de caminos mínimos funcionó como detonador para que el grupo explorara, argumentara y finalmente formalizara el concepto de combinación.

La experiencia también confirmó los principios de la Nueva Escuela Mexicana, particularmente en lo referente al aprendizaje situado y colaborativo. El uso de una "ciudad ideal" como contexto permitió que los estudiantes conectaran el contenido matemático con su entorno cotidiano, favoreciendo un aprendizaje significativo. Además, la interacción entre pares, las discusiones espontáneas y la toma de decisiones colectivas evidenciaron el papel central del estudiante en la construcción de su propio conocimiento.

Un momento especialmente revelador fue la propuesta espontánea de un estudiante de consultar una herramienta de inteligencia artificial para contrastar sus conjeturas. Tal como lo plantean Merchán et al. (2025), las tecnologías emergentes pueden enriquecer la exploración matemática cuando se integran de forma crítica y orientada. La incorporación de GeoGebra, Python y JavaScript contribuye al desarrollo de competencias digitales y de pensamiento computacional, al transformar procedimientos matemáticos en simulaciones dinámicas que vinculan la teoría con entornos reales.

No obstante, la experiencia también puso de manifiesto áreas de oportunidad. Algunos estudiantes requirieron acompañamiento adicional para manejar el software, lo que coincide con la necesidad de equilibrar la autonomía promovida por el ABP con intervenciones docentes que orienten el proceso sin limitarlo. Asimismo, los tiempos destinados a las simulaciones resultaron ajustados, lo que sugiere la pertinencia de ampliar las sesiones para consolidar aprendizajes más profundos.

Finalmente, esta experiencia reafirmó que el papel del docente en el ABP cambia de transmisor a mediador. Guiar, acompañar y generar condiciones para que los estudiantes cuestionen, exploren y se apropien de los conceptos no solo beneficia su aprendizaje, sino que transforma la práctica docente hacia un enfoque más reflexivo, flexible y centrado en el estudiante.

Conclusiones

Durante las actividades se observó una participación constante y un ambiente de descubrimiento compartido. La búsqueda del número total de caminos generó un proceso colaborativo en el que los estudiantes ejercitaron su creatividad, razonamiento lógico y pensamiento matemático, especialmente en la fase de simulación digital. Aunque la simulación completa, descrita en el trabajo, excedía el nivel programático de la mayoría de los estudiantes, las exploraciones realizadas fueron suficientes para que valoraran el potencial del software al representar movimientos, visualizar combinaciones y comparar rutas.

Si bien, el objetivo en el aula se centró en simulaciones simples, estas resultaron significativas para facilitar la visualización de trayectorias y fortalecer la comprensión del concepto de combinación en un contexto auténtico. La integración de GeoGebra no solo contribuyó al desarrollo del pensamiento matemático y computacional, sino que también fomentó la autonomía y el interés de los estudiantes por construir sus propios modelos a partir de problemas reales o simulados. La métrica del taxista es un recurso didáctico con amplias aplicaciones en matemáticas y computación, ya que permite contextualizar el aprendizaje de conceptos abstractos en situaciones cercanas a la vida cotidiana. La propuesta presentada favorece la comprensión de la métrica del taxista como alternativa a la euclidiana.

Desde el punto de vista pedagógico, la estrategia fomenta habilidades como el pensamiento crítico, la resolución de problemas, la creatividad y la colaboración, en concordancia con los principios de la Nueva Escuela Mexicana. Al mismo tiempo, representa una oportunidad para que los docentes se actualicen en metodologías innovadoras que trascienden lo tradicional, colocando al estudiante en el centro del proceso. Aunque la metodología propone fases orientadas al profesor, cada actividad plantea problemas abiertos que requieren que los alumnos construyan sus propias soluciones y propongan simulaciones de los recorridos, favoreciendo así la autonomía y el aprendizaje significativo.

Finalmente, si bien la propuesta se desarrolló en el marco de una ciudad idealizada, abre la puerta a extensiones más complejas, como trayectos con obstáculos, análisis de costos o la optimización de rutas múltiples (por ejemplo, recorridos de recolección o distribución). Estas proyecciones permiten no solo enriquecer el aprendizaje matemático, sino también conectar la enseñanza con problemas reales, fortaleciendo la formación integral de los estudiantes en un mundo cambiante.

Referencias

1. Alvarez-Matute, J. F., Garcia-Herrera, D. G., Erazo-Álvarez, C. A., & Erazo-Álvarez, J. C. (2020). GeoGebra como estrategia de enseñanza de la Matemática. *EPISTEME KOINONIA*, *3*(6), 211–230. https://doi.org/10.35381/e.k.v3i6.827
2. Bonilla-Barraza, D., Parraguez-González, M., y Solanilla-Chavarro, L. (2014). Al fin de cuentas, ¿qué es una recta en la Geometría del Taxista? Revista Tumbaga, 2(10), 53–68. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5560023
3. Fernández, Carina Lorena, y Aguado, María Inés. (2017). Aprendizaje basado en problemas como complemento de la enseñanza tradicional en Fisicoquímica. *Educación química*, *28*(3), 154-162. https://revistas.unam.mx/index.php/req/article/view/63996
4. García, A, Ramírez R. y Rodríguez M. (2025). Reposando el concepto de triangulo mediante la métrica del taxista. SUMA, 108, 79-88. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=10116137
5. Inzunza, S., y Serrano Enciso, S. (2022). Alfabetización y razonamiento estadístico de estudiantes mexicanos al concluir el bachillerato. Revista Chilena De Educación Matemática, 14(3), 101–117. https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i3.101
6. Merchán Lalvay, C. H., Chinachi Aman, E. J., Ramos Llagua, E. F., Litardo Villamar, S. P., Villamar Holguin, R. del R., y Basurto Chavarría, H. E. (2025). *Impacto del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en la resolución de ecuaciones algebraicas en estudiantes de bachillerato: Un enfoque desde la enseñanza activa de las matemáticas*. *Revista Científica de Salud y Desarrollo Humano*, 6(2), 83–104. https://doi.org/10.61368/r.s.d.h.v6i2.577
7. Morales Chicana, L., Zuta Velayarse, L. M., Solis Trujillo, B. P., Fernández Otoya, F. A., y García González, M. (2023). *El uso del Software GeoGebra en el aprendizaje de las matemáticas: Una revisión sistemática*. Revista Referencia Pedagógica, 4(1), 1–13. https://rrp.cujae.edu.cu/index.php/rrp/article/view/324
8. Ortiz Cuñado, Á. (2023). Impacto del aprendizaje basado en problemas y el uso de GeoGebra en el aprendizaje de las derivadas en estudiantes del primer curso de bachillerato [Trabajo de fin de máster, Universidad de Burgos]. Repositorio Institucional UBU. https://riubu.ubu.es/handle/10259/9530
9. Ortiz Díaz, J. A., y Cutimbo Lozano, G. F. (2022). Aprendizaje basado en problemas: una metodología aplicada a la asignatura universitaria Matemática Básica. *Revista Tecnología, Ciencia Y Educación*, (22), 155–172. https://doi.org/10.51302/tce.2022.820

10. Padilla Doria, L. A., y Flórez Nisperuza, E. P. (2022). El aprendizaje basado en problemas (ABP) en la educación matemática en Colombia. Avances de una revisión documental. Revista Boletín Redipe, 11(2). https://doi.org/10.36260/rbr.v11i2.1686
11. Roa Guzmán, R., Batanero Bernabeu, C., y Díaz Godino, J. (2003). *Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios.* Educación Matemática, 15(2), 5-25. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40515201
12. Ryokiti, A. (2020). *Desarrollando Simuladores con GeoGebra*. En **Memorias de la II Jornada Ecuatoriana de GeoGebra** (pp. 27–38). Organización de Estados Iberoamericanos. Recuperado de https://oei.int/oficinas/ecuador/publicaciones/memorias-de-la-ii-jornada-ecuatoriana-de-geogebra-2/
13. Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2019). *Nueva Escuela Mexicana. Fundamentos y orientaciones*. SEP.
14. Vélez, E. (2023). *Perspectivas metodológicas para desarrollar el pensamiento crítico en los estudiantes de la básica media.* Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí. Obtenido de https://repositorio.uleam.edu.ec/bitstream/123456789/4852/1/ULEAMPLL-018.pdf

Artículo recibido: 15 de septiembre de 2025
Dictaminado: 21 diciembre 2025
Aceptado: 30 diciembre 2025

2025, Volúmen 13, Número 2, pp. 70-75

Sección: Entre Docentes

Fractales en Geogebra

Fractals in GeoGebra

Efraín de la Rosa Dávila[a]
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (CBTis) No. 121; México
efrain.delarosa.cb121@dgeti.sems.gob.mx

Salvador Colima Rodríguez
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (CBTis) No. 121; México
salvador.colima.cb121@dgeti.sems.gob.mx

Edgar Armando Torres Báez
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (CBTis) No. 121; México
edgararmando.torres.cb121@dgeti.sems.gob.mx

Resumen:

En el marco del curso *Temas Selectos de Matemáticas I*, que corresponde al 5° semestre del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) 2023 se llevó a cabo una actividad centrada en la construcción de fractales utilizando la plataforma GeoGebra en bachillerato. A los estudiantes se les explicó detalladamente la técnica para crear una herramienta nueva dentro del programa, basada en una figura inicial. Esta herramienta puede ser llamada cada vez que se requiera, lo cual permite repetir un patrón de forma controlada. El objetivo principal fue mostrar cómo esta repetición de patrones mediante la herramienta permite construir figuras con autosimilitud, una característica esencial de todo fractal. Para lograrlo, los alumnos trabajaron con transformaciones geométricas como la homotecia, que permite escalar figuras proporcionalmente, y aplicaron procesos de iteración, repitiendo la figura base en distintas escalas y posiciones.

Palabras clave: Fractal, Autosimilitud, Iteración, Homotecia

[a] Autor de correspondencia

Abstract:

As part of the Temas Selectos de Matemáticas I course, corresponding to the 5th semester of the MCCEMS 2023 program, an activity focused on constructing fractals using the GeoGebra platform was carried out in High School. Students were given a detailed explanation of the technique for creating a new tool within the program, based on an initial figure. This tool can be invoked whenever needed, allowing a pattern to be repeated in a controlled manner. The main objective was to demonstrate how this repetition of patterns through the tool enables the construction of figures with self- similarity, an essential characteristic of every fractal. To achieve this, students worked with geometric transformations such as homothety, which allows figures to be scaled proportionally and applied iteration processes, repeating the base figure at different scales and positions.

Keywords: Fractal, Self-similarity, Iteration, Homothety

Cómo citar / How to cite: de la Rosa Dávila, E., Colima Rodríguez, S., y Torres Báez, E. (2025). Fractales en GeoGebra. *Revista AMIUTEM*, *13*(2), 70–75.

Introducción

La fractalidad es una propiedad fundamental que describe objetos y fenómenos que exhiben autosimilitud a diferentes escalas. El término "fractal" fue acuñado por el matemático Benoît B. Mandelbrot en 1975. Lo tomó del adjetivo latino fractus, que significa "fragmentado" o "roto", derivado del verbo *frangere* ("romper"). Los fractales presentan dos características muy importantes:

Autosimilitud a diferentes escalas, significa que un patrón se repite indefinidamente, sin importar cuán cerca o lejos lo mires.

Complejidad infinita: aunque su regla de construcción es sencilla, genera estructuras muy complejas.

Durante el curso Temas Selectos de Matemáticas I, nos propusimos ir más allá de la teoría y como objetivos didácticos:

1. Comprender la fractalidad mediante la construcción en GeoGebra.
2. Desarrollar habilidades de iteración, autosimilitud y homotecia en contextos visuales.
3. Favorecer la experimentación matemática con herramientas digitales.

Referente teórico

En el *Marco Curricular Común de la Educación Media Superior* (MCCEMS, 2023; 2025) se enfatiza el desarrollo de competencias matemáticas, pensamiento crítico y uso de tecnología, además del aprendizaje activo y experimental. En este marco, la construcción de fractales mediante herramientas digitales como GeoGebra permite situar a los estudiantes en experiencias de aprendizaje que vinculan la visualización, la manipulación y la abstracción.

Desde la perspectiva de la teoría de los registros de representación semiótica propuesta por Duval (1988, 1993), comprender un objeto matemático implica operar con distintos sistemas de representación (gráfico, algebraico, verbal o simbólico) y, especialmente, lograr conversiones entre ellos. Los fractales, al combinar construcciones gráficas, transformaciones geométricas (como la homotecia) y patrones numéricos de iteración, constituyen un excelente contexto para desarrollar esta habilidad de conversión. En GeoGebra, el estudiante no solo observa el fractal, sino que lo construye y manipula, transitando entre los registros visual, algebraico y simbólico. De esta forma, se potencia la comprensión semiótica y noética, al representar un mismo concepto en diferentes formas interrelacionadas (Duval 1993).

Por otro lado, Piaget (1970) plantea que el desarrollo del pensamiento lógico y matemático se sustenta en dos tipos de abstracción: la empírica, derivada de las propiedades observables de los objetos, y la reflexiva, originada en la reflexión sobre las propias acciones mentales del sujeto. En el contexto de *GeoGebra*, la abstracción empírica se manifiesta cuando los estudiantes observan regularidades o patrones visuales, mientras que la abstracción reflexiva emerge cuando analizan las operaciones realizadas, por ejemplo, al aplicar una homotecia o una iteración, y comprenden las relaciones subyacentes entre las figuras (Piaget, 1970).

Ambas perspectivas teóricas se complementan: mientras Duval (1988, 1993) enfatiza la importancia de los registros de representación y las conversiones semióticas para construir significado, Piaget (1970) profundiza en los procesos cognitivos que permiten dicha conversión a través de la reflexión sobre la acción. En conjunto, ambas teorías sustentan que la comprensión matemática surge del tránsito entre lo concreto, lo simbólico y lo abstracto, favorecido por entornos digitales interactivos como GeoGebra.

Por tanto, la creación de fractales en GeoGebra favorece tanto la abstracción empírica a partir de la observación y exploración de patrones visuales, como la abstracción reflexiva al analizar las reglas y procesos que generan dichos patrones. Además, promueve el tránsito entre diversos registros de representación, fortaleciendo la construcción conceptual desde una perspectiva cognitiva y didáctica.

En este sentido, la geometría fractal se convierte en un puente entre la intuición visual y la formalización matemática, permitiendo a los estudiantes descubrir regularidades, identificar invariantes y reconocer la estructura recursiva de las figuras. Esto responde al propósito de los nuevos marcos curriculares: propiciar aprendizajes significativos, activos y tecnológicos que integren pensamiento crítico, visualización geométrica y creatividad.

Metodología

La experiencia que a continuación se describe en este trabajo muestra que, al crear fractales en GeoGebra, los estudiantes integran teoría matemática y habilidades digitales, logrando representaciones visuales complejas que refuerzan su comprensión conceptual y su capacidad de expresión creativa.

Una vez comprendida la creación y el uso de una nueva herramienta en GeoGebra, se les pidió a los estudiantes emplear su creatividad para construir sus propios fractales. A continuación, se describen algunos de los pasos seguidos para elaborar uno de los productos obtenidos, al que los estudiantes decidieron llamar *estrella de polígono regular*. Cabe mencionar que la mayoría de los participantes ya estaban familiarizados con el uso de GeoGebra; a los pocos que no, se les brindó primero una breve explicación sobre la construcción de polígonos y sobre la creación y utilización de nuevas herramientas. Además, el trabajo se desarrolló de manera colaborativa en equipos de dos a tres integrantes.

Inicialmente se crea un pentágono como el que se observa en la Figura 1, a continuación, se trazan segmentos entre vértices (diagonales) para formar una estrella y se obtiene un nuevo pentágono en el centro como se observa en la Figura 2.

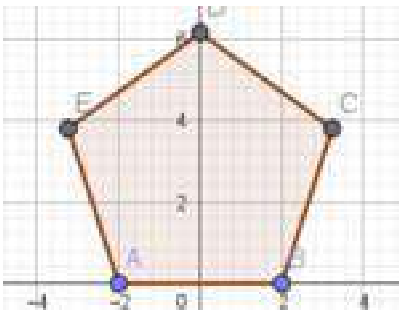


Figura 1. Polígono regular de 5 lados (pentágono)

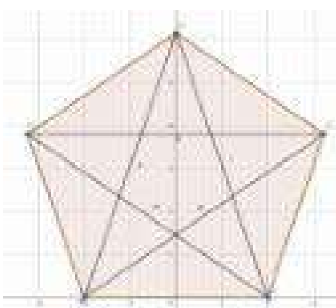


Figura 2. Diagonales trazadas

A cada pico de la estrella se le asigna un color para diferenciarlos como se observa en la Figura 3.

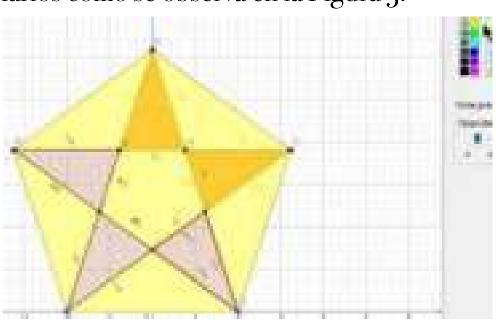


Figura 3. Asignar color a cada pico de la estrella

Una vez que se tiene el patrón se crea una "nueva herramienta" para poder usarla en el momento que se desee y repetir el proceso como se observa en la Figura 4 y Figura 5, hasta obtener lo que se observa en la Figura 6 como una especie de "anillo".

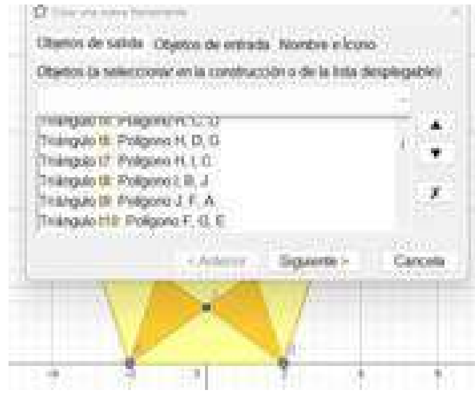


Figura 4. Creación de una nueva herramienta

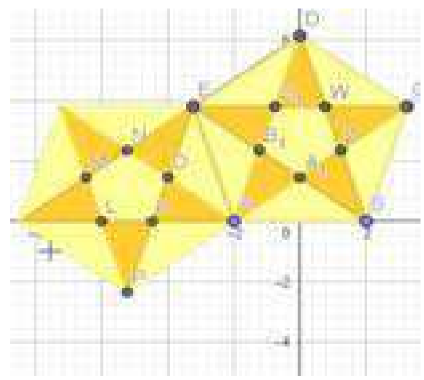


Figura 5. Usar la "nueva herramienta" patrón guardado

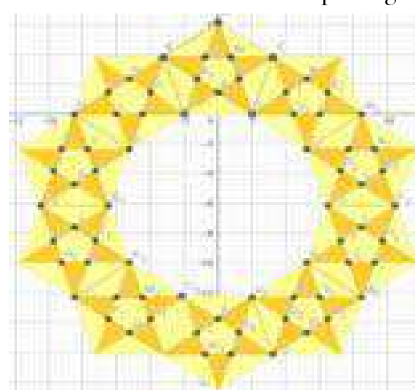


Figura 6. Patrón repetido

Posteriormente, se traza un pentágono central (Ver Figura 7) y en cada uno de los pentágonos formados en el centro de las estrellas, se repite el patrón inicial por medio del uso de la "nueva herramienta" creada como se observa en la Figura 8 y Figura 9.

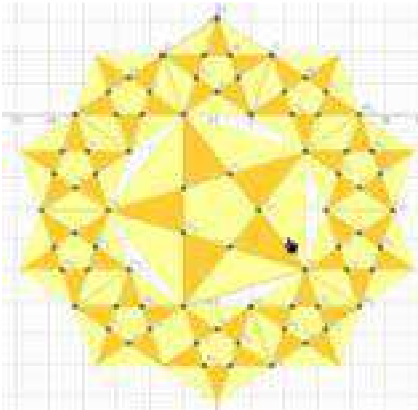


Figura 7. Pentágono central en "anillo".

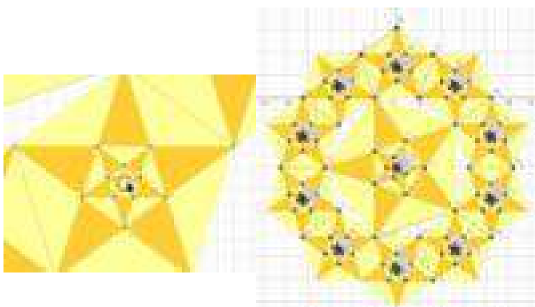


Figura 8 y 9. Uso de la nueva herramienta en los centros.

Primero se depura y se crea la "nueva herramienta", la cual servirá como patrón para las iteraciones posteriores. Para utilizarla correctamente, es necesario trazar un nuevo pentágono base, seleccionando con precisión el par de puntos adecuado; de no hacerlo, en cada iteración podría empalmarse la última "nueva herramienta". Una vez creado el pentágono y aplicada la herramienta, el diseño puede reutilizarse tantas veces como se requiera. Siguiendo este procedimiento, se obtiene el fractal final, cuya forma recuerda la trayectoria de un caracol, como se observa en la Figura 10.

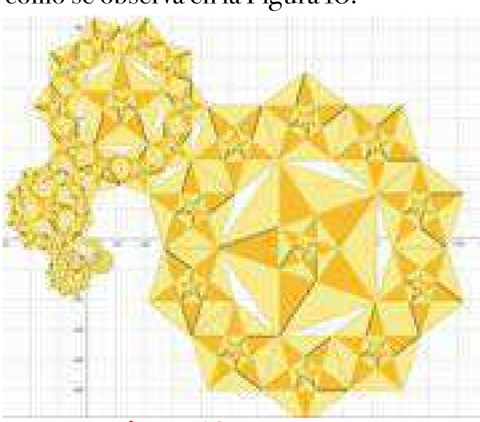


Figura 10. Fractal terminado

Resultados

Este trabajo constituye un ejemplo de cómo los estudiantes pueden descubrir las matemáticas desde una perspectiva visual, dinámica y creativa, aprovechando las posibilidades que ofrecen las herramientas tecnológicas como GeoGebra. La experiencia permitió observar no solo una comprensión más profunda de conceptos matemáticos complejos, sino también un cambio en la actitud de los alumnos hacia la disciplina. Es importante señalar que, durante el desarrollo del proyecto, los estudiantes mostraron una notable disposición, ya que fueron motivados constantemente a emplear su ingenio en la creación de sus propias "formas creativas".

Entre los principales logros obtenidos se destacan:

- Un mayor interés y motivación hacia el aprendizaje de las matemáticas.
- El desarrollo de competencias digitales, al emplear software especializado para la construcción y exploración de fractales.
- Una mejor comprensión de conceptos abstractos mediante la visualización y manipulación de objetos geométricos.

Como reflexión final, se reconoce la importancia de:

- Integrar el uso de software matemático en los procesos de enseñanza-aprendizaje.
- Favorecer aprendizajes significativos a través de experiencias prácticas y visuales.
- Promover la autonomía y la creatividad en el estudiante como ejes del aprendizaje activo.

Reflexión (conclusión) de los estudiantes:

- "La experiencia de construir fractales manualmente y mediante el uso de herramientas como GeoGebra nos permitió aplicar y visualizar las transformaciones geométricas de rotación, translación y de escalado, y se pudo observar cómo, al repetir un mismo proceso, se generaron figuras más complejas y bellas".
- "En síntesis, este proyecto no solo reforzó nuestro aprendizaje sobre geometría y matemática, sino que también nos mostró la estrecha relación entre ciencia, arte y tecnología, y como los fractales nos ayudan a entender mejor las estructuras naturales como los diseños creados por el ser humano".

A continuación, se muestran algunas evidencias de otros fractales creados por los estudiantes: en la Figura 11 se muestran tréboles y en la Figura 12 se muestran remolinos.

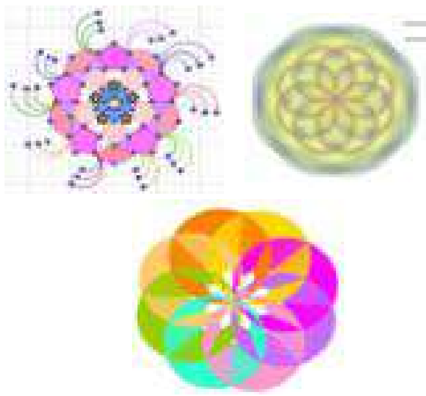


Figura 11. Tréboles creados en GeoGebra

Figura 12. Remolino

Conclusiones

La actividad permitió que los estudiantes no solo comprendieran los fundamentos matemáticos de los fractales —como la autosimilitud, la homotecia y la iteración—, sino que también desarrollaran habilidades tecnológicas y creativas mediante el uso de GeoGebra. La creación de herramientas personalizadas dentro del software favoreció la comprensión visual y conceptual de la fractalidad, facilitando la repetición controlada de patrones a diferentes escalas.

El fractal presentado en este trabajo es solo uno de varios ejemplos elaborados por los estudiantes, cada uno con enfoques, figuras base y niveles de complejidad distintos. Todos reflejan la apropiación del conocimiento matemático a través de un enfoque activo y visual, que promueve tanto el razonamiento geométrico como la expresión creativa.

Este tipo de experiencias demuestra el potencial didáctico de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas, y puede ser replicado o adaptado para abordar otros contenidos relacionados con geometría, simetría, modelación o arte matemático y modelación de fenómenos naturales.

Referencias

1. Duval, R. (1988). *Graphiques et équations: L'articulation de deux registres*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, p. 235–253.
2. Duval, R. (1993). *Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, p. 37–65.
3. Falconer, K. J. (2003). *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications* (2nd ed.). John Wiley & Sons
4. Gutiérrez, J., & Montes, A. (2005). Fractales: una herramienta para el desarrollo del pensamiento geométrico. *Revista Educación Matemática*, 17(3), p. 55–77.
5. Mandelbrot, B. B. (1982). *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman and Company.
6. Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Saupe, D. (2004). *Chaos and fractals: New frontiers of science* (2nd ed.). Springer.
7. Piaget, J. (1970). *La psicología de la inteligencia*. Buenos Aires, Argentina: Paidós

Artículo recibido: 10 de octubre de 2025
Dictaminado: 10 diciembre 2025
Aceptado: 30 diciembre 2025

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de
Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática