REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen XI Número 1 Fecha: enero-junio de 2021

ISSN: 2395-955X

Contenido Pág.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Volumen IX, No. 1, enero-junio de 2021, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

.

COMITÉ DE EVALUACIÓN

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen IX Número 1 Fecha: enero-junio de 2021

ISSN: 2395-955X

CONSIDERACIONES PARA DISEÑAR UN CURSO VIRTUAL DE MATEMÁTICAS PARA ASPIRANTES A LA EBUAQ

José Eduardo Rodríguez Guevara, Luis Alberto Soto Reyes, Rita Ochoa Cruz

jose.eduardo.rodriguez@uaq.mx, luis.soto@uaq.mx, rita_ochoa@uaq.mx

Universidad Autónoma de Querétaro

Para citar este artículo:

Rodríguez, J. A., Soto, L. A., Ochoa, R. (2021). Consideraciones para diseñar un curso virtual de matemáticas para aspirantes a la EBUAQ. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. IX, No. 1, pp. 1-20. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año IX, No. 1, enero-junio de 2021, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

CONSIDERACIONES PARA DISEÑAR UN CURSO VIRTUAL DE MATEMÁTICAS PARA ASPIRANTES A LA EBUAQ

José Eduardo Rodríguez Guevara, Luis Alberto Soto Reyes, Rita Ochoa Cruz

jose.eduardo.rodriguez@uaq.mx, luis.soto@uaq.mx, rita_ochoa@uaq.mx

Universidad Autónoma de Querétaro

Resumen

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, se reflejan en los altos índices de reprobación de esta asignatura en diversas instituciones educativas de nivel medio superior en nuestro país, siendo una de las materias con el menor porcentaje de aprobación. El fenómeno descrito se evidencia con los resultados obtenidos por los alumnos en el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA), donde se observa que "en Matemáticas, 6 de cada 10 estudiantes se ubica en el Nivel I (66%) de conocimiento". La problemática descrita es latente en la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro (EBUAQ) donde el 50% de los alumnos de nuevo ingreso reprueban alguna materia de ciencias básicas. Con el objetivo de fortalecer los aprendizajes en matemáticas de los aspirantes a la EBUAQ y aumentar su puntuación en su examen de admisión EXCOBA, se desarrolló un curso virtual lo que implicó una serie de etapas, que de manera general consistieron en analizar los contenidos que se evalúan y el diseño de las preguntas del EXCOBA.

Palabras claves: Matemáticas, Tecnologías de la Información y la Comunicación, Entornos Virtuales de Aprendizaje.

Abstract

Difficulties in learning mathematics are reflected in the high failure rates of this subject in various educational institutions of upper secondary level in our country, being one of the subjects with the lowest percentage of approval. The phenomenon described is evidenced by the results obtained by the students in the National Plan for the Evaluation of Learning (PLANEA), where it is observed that "in Mathematics, 6 out of 10 students are located in Level I (66%) of knowledge". The problem described is latent in the High School of the Autonomous University of Querétaro (EBUAQ) where 50% of new students fail some basic science subject. In order to strengthen the mathematics learning of the EBUAQ applicants and increase their score in their EXCOBA entrance exam, a virtual course was developed which involved a series of steps, which generally consisted of analyzing the contents that were evaluate and design the EXCOBA questions.

Keywords: Mathematics, Information and Communication Technologies, Virtual Learning Environments.

Introducción

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, se reflejan en los altos índices de reprobación de esta asignatura en diversos niveles educativos de nuestro país. Ese fenómeno se pone en evidencia con los resultados obtenidos por los alumnos en el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA), en éste se observó que en Matemáticas, 6 de cada 10 estudiantes de tercer grado de secundaria (64.5%) se ubican en el Nivel de logro I (Secretaría de Educación Pública, 2018), lo que significa que solo son capaces de solucionar problemáticas que impliquen comparar o realizar operaciones con números naturales. Presentando mayores dificultades al resolver problemas cuyos procesos de solución involucren operaciones o potencias con números naturales, fraccionarios, decimales o la combinación de éstos (Figura 1). Además presentan escollos al describir en lenguaje coloquial una expresión algebraica, así que no logran emplear ecuaciones para definir valores desconocidos.

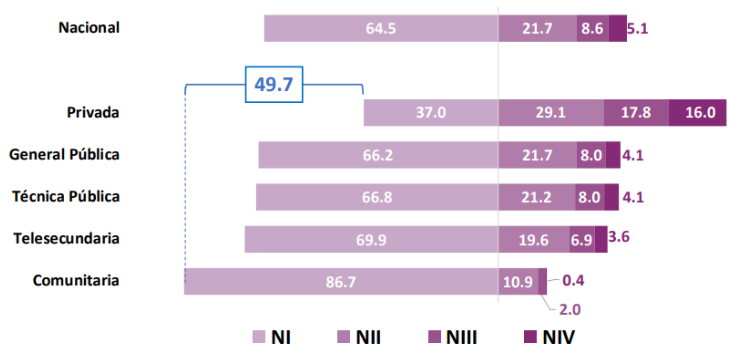


Figura 1. Porcentaje de estudiantes en cada nivel de logro educativo en matemáticas, según tipo de escuela. Nota: Secretaría de Educación Pública (2018).

Con respecto al Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA), en los resultados obtenidos por estudiantes de 15 años, se identificó que en México el 57% de éstos (Figura 2) no alcanzan el nivel mínimo de competencias (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, 2018), lo que parece indicar que solo pueden ejecutar procesos matemáticos básicos y dar solución a problemáticas cotidianas cuya información este definida de forma explícita. Estos alumnos tienen limitaciones para interpretar y usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información, así como para razonar directamente a partir de ellas. También tienen problemáticas para seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo símbolos y asociándolos directamente a situaciones del mundo real, además de seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas complejos. Teniendo su mayor limitante al aplicar sus conocimientos y destrezas en matemáticas para enfrentar situaciones novedosas.

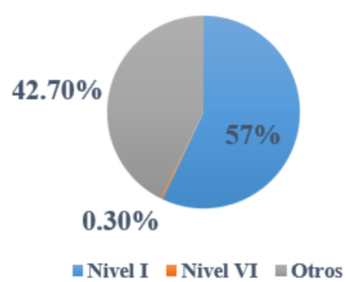


Figura 2. PISA 2018: Porcentaje de niveles de competencia en matemáticas. Nota: Elaboración propia.

Los factores que originan las problemáticas en el aprendizaje de las matemáticas son distintos, Cuevas (2014) señala que el más significativo se asocia con la mala preparación de los profesores. Sin embargo, otro factor con gran impacto es el incorrecto aprendizaje de los contenidos previos que están involucrados en el estudio del álgebra

Los bajos índices de aprobación en matemáticas es una problemática que se debe atender, en la actualidad existen diferentes estrategias para tratar de resolverla, algunas enfocadas al trabajo individualizado (asesorías o tutorías) y otras que incluyen el uso de la tecnología, lo que permite generar estrategias de estudio que se adapten al espacio y tiempo de los alumnos de acuerdo a sus necesidades.

Referente teórico

García-Valcárcel (2013) señala que las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), permiten generar procesos educativos innovadores, siempre y cuando, se logré una armonía entre los diferentes recursos que se involucran. Lo anterior, exige cambios organizativos, metodológicos y actitudinales, además del rol de cada uno de los participantes.

Para contribuir a resolver las problemáticas en la didáctica con el apoyo de las tecnologías, Vicario (2010) afirma que es necesario proponer una solución innovadora mediante el uso de las TIC. El enfoque descrito debe involucrarse en el estudio de las matemáticas, para así generar entornos de aprendizaje que oferten a los participantes, estrategias y técnicas de aprendizaje vanguardistas orientadas hacia la generación de conocimientos.

La integración de las herramientas digitales en los procesos formativos, involucra un enfoque de Tecnología Educativa (TE) que ha sido transformado, Cabero (2015) hace referencia a que dicha transformación va de la integración de las TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje a la generación de entornos de estudio guiados con estos recursos.

Lo que exige al docente ser capaz de planificar el uso de los recursos tecnológicos, involucrando estrategias orientadas hacia un aprendizaje significativo, implicando modificar sus metodologías didácticas. De acuerdo con García-Valcárcel (2013), al pasar de un escenario presencial a uno virtual se modifica la forma de participar, no sólo de los docentes sino también de los alumnos y la institución.

Lo antes descrito, se relaciona con la Informática Educativa (IE), definida por Vicario (2010) como una perspectiva socio-tecno-científica transformadora, impulsada por un cuerpo de conocimientos a modo de disciplina científica, que impulse el desarrollo de la Civilización del Conocimiento y permita ampliar la percepción de la integración de la tecnología en procesos educativos.

Al involucrar la IE se deben considerar las siguientes problemáticas: "la gestión estratégica informático educativa, la formación de recursos humanos, el desarrollo de una cultura en el ámbito de la IE, el desarrollo de entornos educativos innovadores basados en TIC, el desarrollo y aplicación de modelos y experiencias con enfoque informático educativo, además de la producción de recursos informático-educativos" con el apoyo de la tecnología educativa (Vicario, 2010, p. 123).

De acuerdo con Cabero (2015), generar tecnología educativa, implica conjuntar recursos técnicos y humanos que deben interactuar para concebir, aplicar y evaluar procesos de enseñanza-aprendizaje.

Para atender las necesidades de los alumnos, se requieren estrategias y recursos pedagógicos que se adapten a su estilo de vida definido principalmente por el uso de la tecnología, lo que ha dado la apertura a nuevas concepciones dentro de los procesos educativos.

Como parte de las nuevas estrategias de enseñanza, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2014), recomienda involucrar recursos diferentes como el acceso inmediato a la información y la generación de entornos virtuales, donde los recursos visuales se imponen al texto. Estas nuevas herramientas no aseguran mejorar el proceso educativo, pero su integración guiada por objetivos pedagógicos puede lograrlo.

El uso de los recursos digitales en los procesos educativos no garantiza el aprendizaje de los discentes, Castaño y Romero (2007) afirman que aspirar a un aprendizaje significativo depende de las estrategias de enseñanza-aprendizaje que se diseñen y de las técnicas didácticas que se involucren.

Metodología

Este estudio se vincula con la línea Informática Educativa, ya que tiene que ver con el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el ámbito educativo, con la finalidad de mejorar los métodos de enseñanza, propiciar espacios de colaboración y retroalimentación para el estudio de contenidos, la difusión del conocimiento y el desarrollo de habilidades.

Contexto

La investigación se llevó a cabo en la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro (EBUAQ) mediante el diseño y aplicación de un curso virtual propedéutico para los aspirantes a los diferentes planteles de dicha institución: Amazcala, Amealco, Bicentenario, Colón, Concá, Jalpan, Norte, Sur, Pedro Escobedo, Pinal de Amoles y San Juan del Río.

Participantes

Para el desarrollo del proyecto, se trabajó con 100 aspirantes de la zona urbana de la EBUAQ, quienes estaban cursando tercer grado de educación secundaria. Estos estudiantes se dividieron en dos grupos de 50 cada uno con la finalidad de experimentar el curso virtual propedéutico de dos maneras distintas.

ADDIE

La metodología utilizada en el estudio fue la de diseño instruccional ADDIE, que se define como: “un proceso de diseño instruccional interactivo, en donde los resultados de la evaluación formativa de cada fase pueden conducir al diseñador instruccional de regreso a cualquiera de las fases previas” (Belloch, 2013, p. 10). Alguna de las ventajas de este modelo, son que permite una adaptación continua del material a las necesidades cambiantes del estudiante, además de facilitar la reobservación y el replanteamiento de los problemas.

Mientras que algunas de sus desventajas son que puede llevar a un uso innecesario de los recursos disponibles y puede generar un estancamiento al aplicarse en momentos donde no hay la madurez necesaria del estudiante.

Resultados

Para realizar un análisis cualitativo de las respuestas incorrectas de cada una de las preguntas del examen de matemáticas (Hernández, 2010, p.4), se centró la atención en aquellas que tuvieron la mayor frecuencia absoluta. A continuación, se describen los resultados obtenidos del análisis cualitativo de los datos en los temas de “Número, operaciones y figuras”, “Magnitudes, proporciones, probabilidad y estadística” y “Álgebra”.

En la Figura 3, se muestra que en la pregunta 1 la respuesta incorrecta que seis estudiantes obtuvieron fue $13, 800. Para obtener ese resultado los alumnos no consideraron el depósito como parte del pago de la renta así que calcularon el total a pagar con base en el costo por mensualidad y el número de mensualidades, el proceso de solución que llevaron a cabo fue $4 \times 3450 = 13{,}800$.

En la segunda pregunta del examen de matemáticas, la respuesta incorrecta con mayor frecuencia absoluta fue 8.4 (15 de 16 alumnos). Al considerar que la solución correcta implica convertir 5 años y 6 meses a una representación decimal y sumar 5.5 más 2.8 para obtener 8.3, los estudiantes tuvieron dificultades para hacer esa conversión de manera adecuada (Figura 4).

La Figura 5 muestra que la respuesta que obtuvieron 23 de 50 alumnos fue $\frac{28}{6}$. Para obtener ese resultado, estos aspirantes entendieron que la cantidad que se les pidió era el restante de espinacas, es decir, el que no se utilizó para preparar la ensalada. Por eso, ellos convirtieron 5 kg a sextos correctamente $\left(\frac{30}{6}\right)$ y efectuaron la resta $\left(\frac{30}{6} - \frac{2}{6} = \frac{28}{6}\right)$. Si bien, los alumnos convirtieron 5 kg a sextos y resolvieron la resta adecuadamente, tuvieron dificultades en la comprensión del problema.

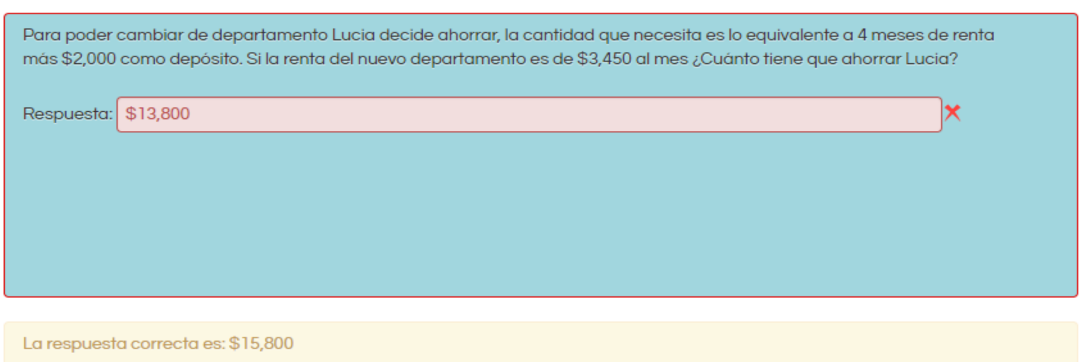


Figura 3. Respuesta errónea de seis aspirantes a la EBUAQ en la pregunta 1. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 1.

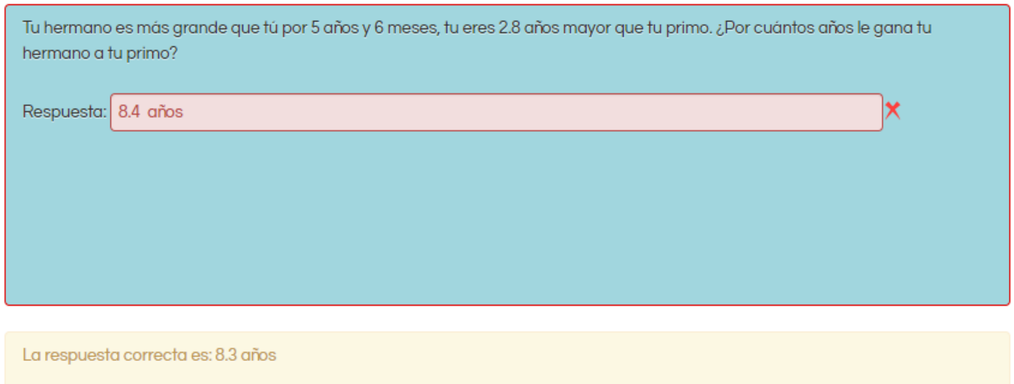


Figura 4. Respuesta incorrecta de quince estudiantes en la pregunta 2. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 2.

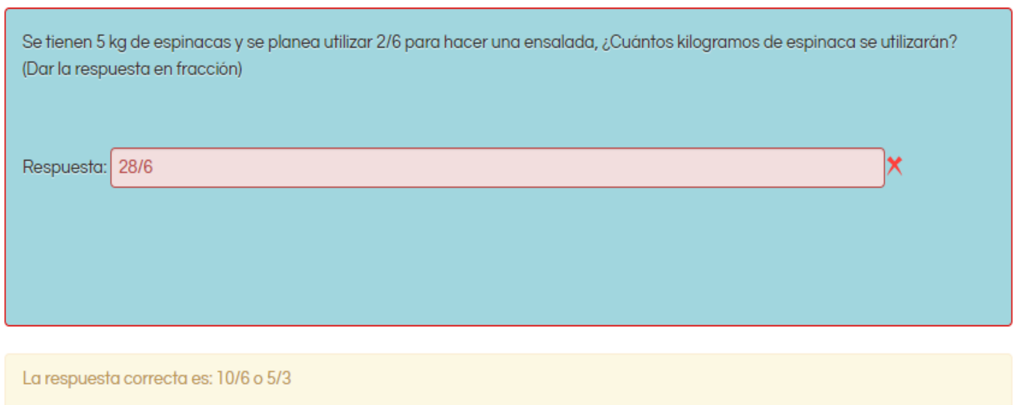


Figura 5. Respuesta errónea de 23 alumnos en la pregunta 3. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 3.

En la pregunta 4 del examen de matemáticas, la respuesta incorrecta con mayor frecuencia fue 200 (7 aspirantes). Estos alumnos interpretaron que la cantidad fraccionaria para completar la unidad era $\frac{1}{5}$, por lo que obtuvieron $\frac{1}{5}$ de 1000 igual a 200, lo que se asocia con dificultades para comprender el problema (Figura 6).

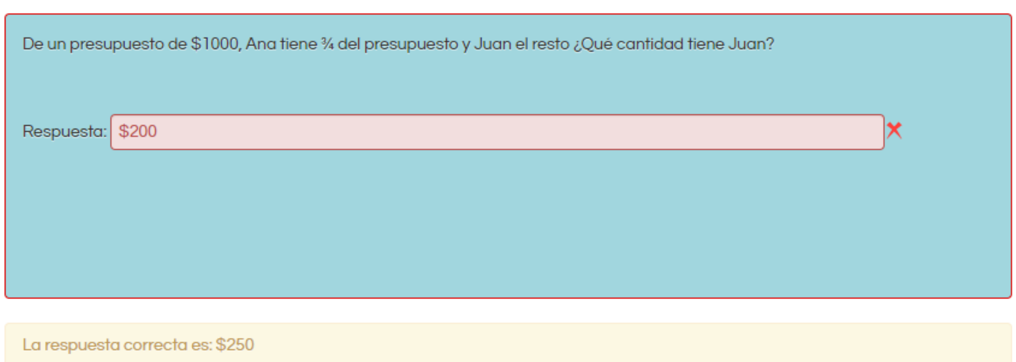


Figura 6. Respuesta incorrecta de siete aspirantes en la pregunta 4. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 4.

Como se puede observar en la Figura 7, la respuesta errónea de 13 estudiantes en la pregunta 5 fue 192 cm^2. En el procedimiento que llevaron a cabo, es posible que hayan considerado que la figura achurada PQRS y el rectángulo ABCD tenían las mismas dimensiones, por lo que calcularon el área de éste multiplicando 12 cm por 16 cm. Lo anterior, muestra que los alumnos no identificaron la relación entre las áreas de estos cuadriláteros (el área de PQRS es la mitad del área de ABCD, o bien, que el área de ABCD mide lo doble que la de PQRS), lo que se vincula con una dificultad para comprender el problema.

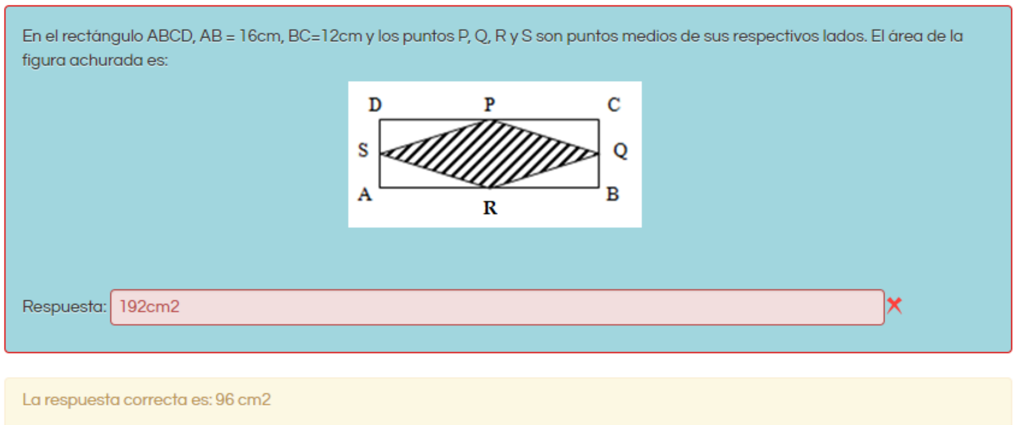


Figura 7. Respuesta errónea de trece estudiantes en la pregunta 5. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 5.

En la pregunta 6 la respuesta incorrecta con la mayor frecuencia absoluta fue 1.8 m^2 (9 alumnos), ellos utilizaron la fórmula para obtener el área de un rectángulo en lugar de la que les permitía obtener el área del triángulo, por lo que tal vez tuvieron dificultades tanto para comprender el problema, como para identificar la fórmula correcta (Figura 8).

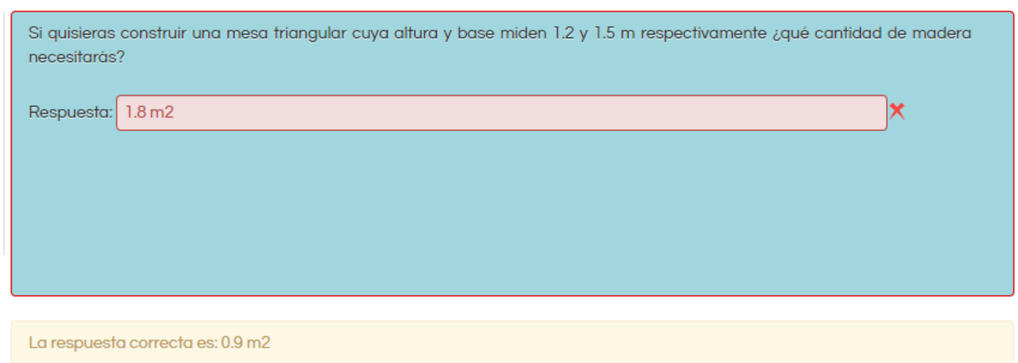


*Figura 8***.** Respuesta incorrecta de nueve alumnos en la pregunta 6. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 6.

La Figura 9 muestra que la respuesta errónea que trece estudiantes obtuvieron en la pregunta 7 fue 25,254 m^3. Para obtener ese resultado, es posible que los aspirantes a la EBUAQ hayan interpretado que la figura descrita tiene dos dimensiones, la relacionaron con un rectángulo y calcularon el área multiplicando lo que mide la base por lo que mide la altura. Esta respuesta se puede asociar con una falta de comprensión del problema y una dificultad para obtener el volumen de una pirámide mediante el uso de la fórmula V= $\frac{a_b * A}{3}$.

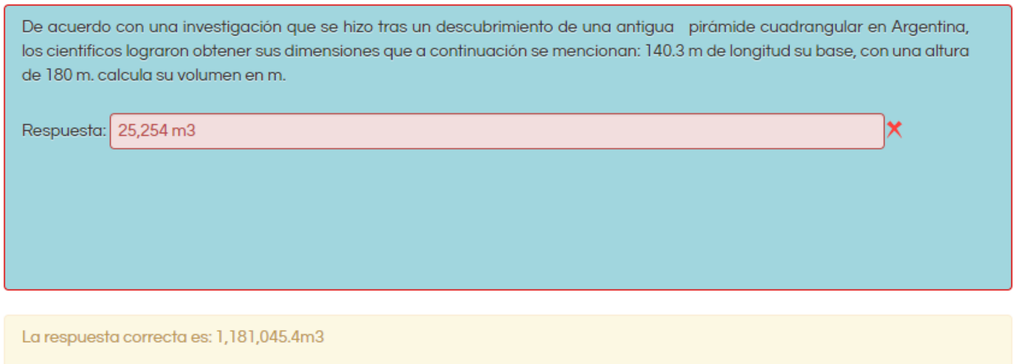


Figura 9. Respuesta errónea de trece aspirantes en la pregunta 7. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 7.

En la pregunta 8, doce alumnos obtuvieron la respuesta incorrecta 86.25 km, la cual se vincula con varios aspectos (Figura 10). Para obtener ese resultado, concibieron que 3hm equivalen a 3 km y que 45m equivalen a 0.45 km, por lo que para calcular la distancia recorrida en una vuelta sumaron 3km+0.45km= 3.45km. Una vez que calcularon la distancia que se recorre por vuelta, multiplicaron 3.45 km por 5, ya que sólo consideraron 5 días de la semana en lugar de 7. Lo anterior, pone de manifiesto las dificultades de los alumnos en la conversión de unidades de medida.

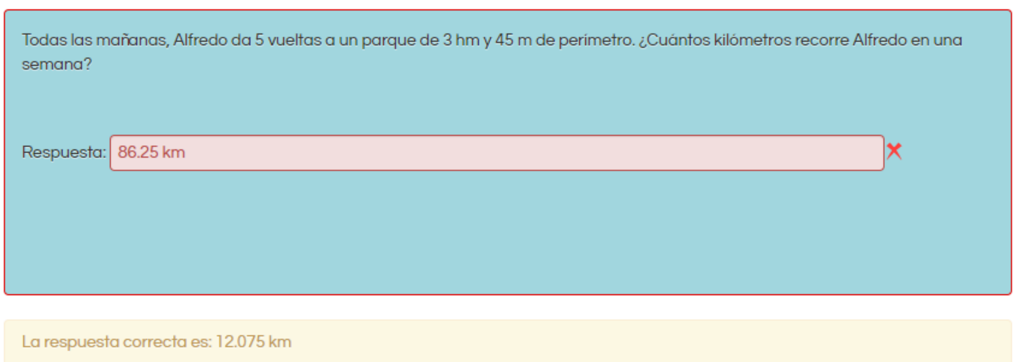


Figura 10. Respuesta incorrecta de doce alumnos en la pregunta 8. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 8.

La Figura 11, incluye una de las respuestas erróneas que dieron catorce alumnos en la pregunta 9, es decir, 3.175 cm. Resolver ese problema, requería convertir $1\frac{1}{2}$ pulgadas a cm o 3.175 cm a pulgadas para determinar cuál de las dos medidas es mayor. Los estudiantes que dieron esa respuesta, tuvieron dificultades para convertir una unidad de medida del sistema anglosajón a una del sistema internacional o viceversa.

En la pregunta 10 del examen de matemáticas, 6 estudiantes respondieron 1.8 km (Figura 12) como resultado de un procedimiento incierto.

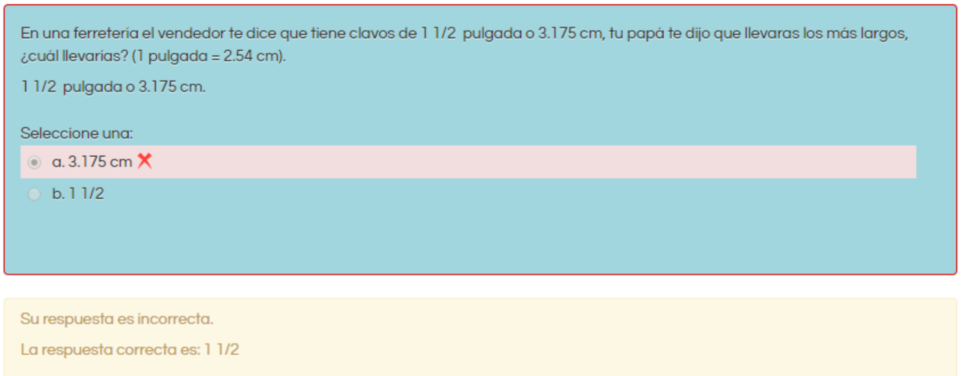


Figura 11. Respuesta errónea de catorce aspirantes en la pregunta 9. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 9.

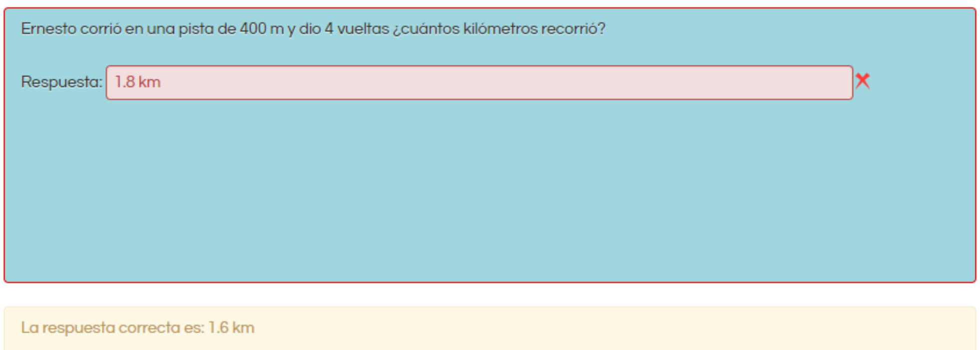


Figura 12. Respuesta incorrecta de 6 alumnos en la pregunta 10. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 10.

Como se puede observar en la Figura 13, doce alumnos contestaron erróneamente $15, 000 en la pregunta 11. Para obtener ese resultado, es posible que determinaran que por cada peso invertido les corresponderían $1, 000 y multiplicaran los 15 pesos que puso Jorge por $15, 000, lo que se vincula con dificultades al resolver problemas sobre reparto proporcional, o bien, para obtener el valor unitario en una situación de proporcionalidad directa.

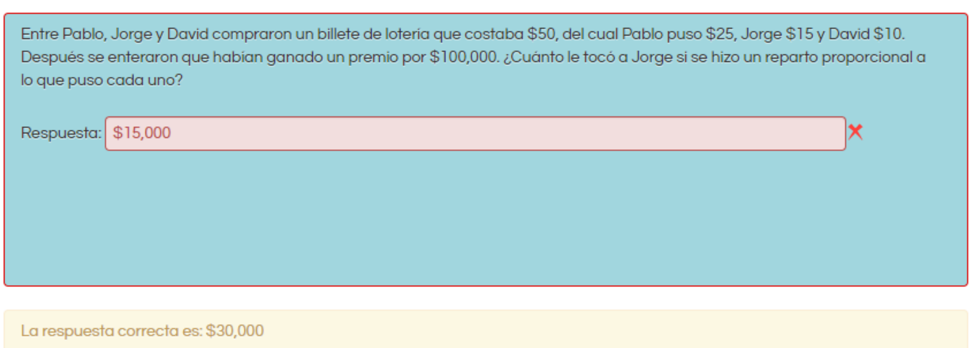
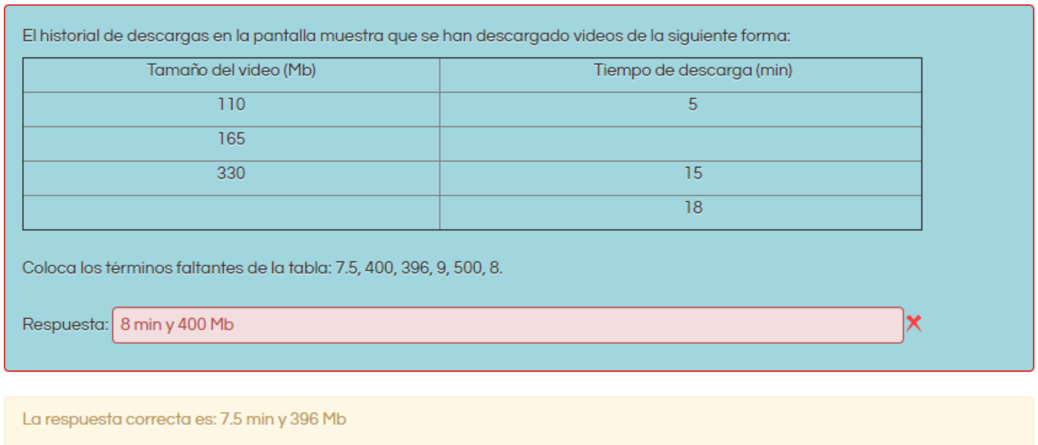


Figura 13. Respuesta errónea de doce aspirantes en la pregunta 11. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 11.

La Figura 14 incluye la respuesta incorrecta de ocho estudiantes en la pregunta 12, a saber, 8 min y 400 Mb. Para responder adecuadamente, se requiere obtener la cantidad de Mb que se descargan por minuto y multiplicar o dividir por 22 según corresponda, lo que pone de manifiesto que los alumnos tuvieron dificultades para resolver problemas de tipo valor faltante y calcular la variable dependiente o independiente, en una relación de correspondencia asociada con una situación de proporcionalidad directa.



El historial de descargas en la pantalla muestra que se han descargado videos de la siguiente forma:

Tamaño del video (Mb)	Tiempo de descarga (min)
110	5
165	
330	15
	18

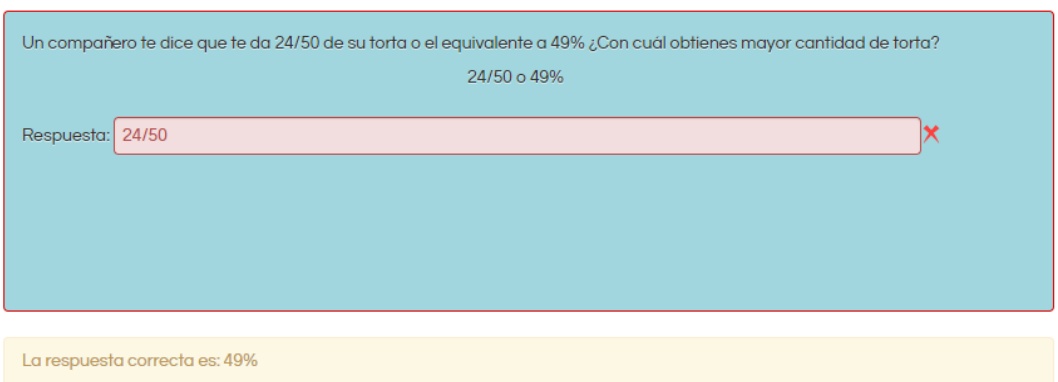
Coloca los términos faltantes de la tabla: 7.5, 400, 396, 9, 500, 8.

Respuesta: 8 min y 400 Mb

La respuesta correcta es: 7.5 min y 396 Mb

Figura 14. Respuesta incorrecta de ocho estudiantes en la pregunta 12. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 12.

En la pregunta 13 la respuesta errónea que dieron quince estudiantes fue 24/50, por lo que se observaron dificultades para obtener una fracción equivalente, relacionar el porcentaje con su representación fraccionaria, y en consecuencia, al comparar una fracción con un porcentaje para determinar cuál es mayor (Figura 15).



Un compañero te dice que te da 24/50 de su torta o el equivalente a 49% ¿Con cuál obtienes mayor cantidad de torta?

24/50 o 49%

Respuesta: 24/50

La respuesta correcta es: 49%

*Figura 15***.** Respuesta errónea por parte de quince alumnos en la pregunta 13. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 13.

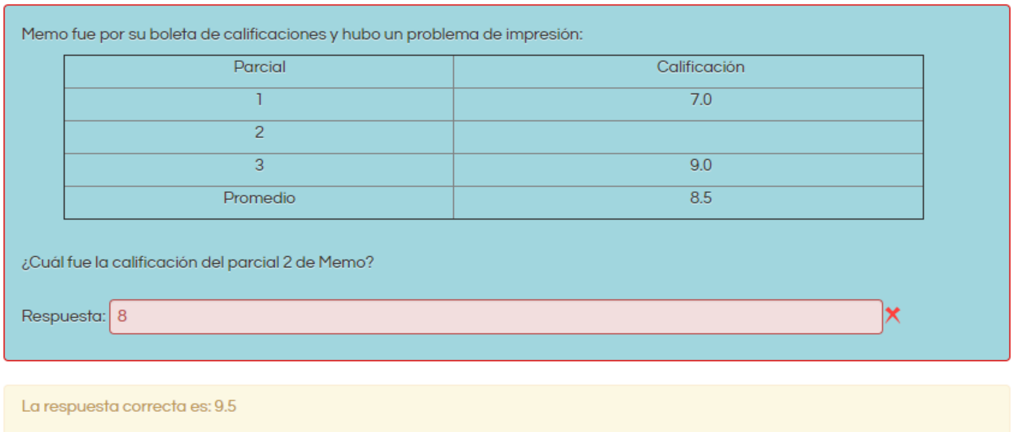


Figura 16. Respuesta incorrecta de nueve aspirantes en la pregunta 14. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 14.

Como se puede ver en la Figura 16, en la pregunta 14 nueve estudiantes contestaron 8, por lo que consideraron al promedio como uno de los datos, éste lo sumaron con los otros dos y la suma la dividieron entre 3 $\left(\bar{x} = \frac{8.5+7+9}{3} = 8\right)$. Debido a que para contestar correctamente se requiere calcular el valor que hace falta en un conjunto de datos a partir de los otros datos y de la media aritmética, se puede afirmar que los alumnos tuvieron dificultades al respecto. Lo anterior, también se puede asociar con debilidades de los estudiantes al plantear y resolver una ecuación como la siguiente:

$$8.5 = \frac{7 + b + 9}{3}$$

En la pregunta 15, veinte alumnos contestaron erróneamente que la fracción $\frac{7}{10}$ es mayor que $\frac{7}{8}$ (ver Figura 17).

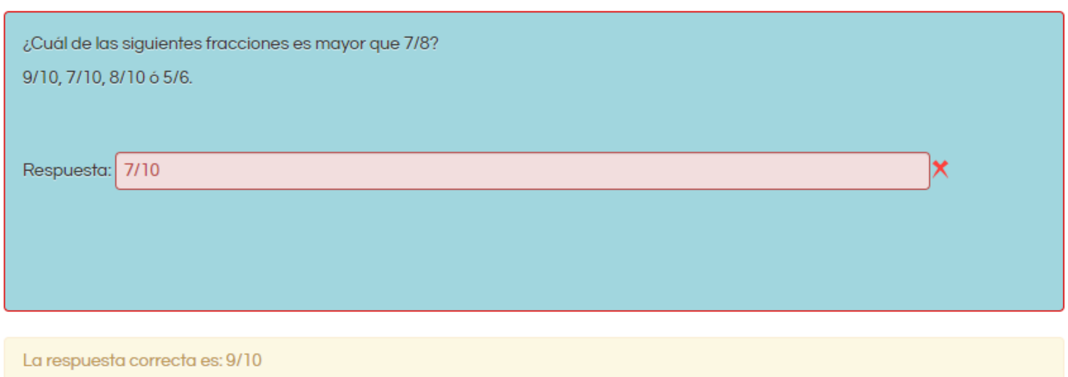


Figura 17. Respuesta errónea de veinte estudiantes en la pregunta 15. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 15.

Al parecer ellos identificaron el número fraccionario con el mismo numerador y determinaron que ése era el mayor con base en el denominador. Para poder comparar esos números podrían haber usado la equivalencia de fracciones o la conversión de un número fraccionario a su representación decimal. Lo antes descrito pone de manifiesto las dificultades de los alumnos al comparar fracciones, en particular $\frac{7}{8}$ con respecto a $\frac{9}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}$ y $\frac{5}{6}$ para determinar cuál es mayor.

La Figura 18 incluye la pregunta 16 y la respuesta con la mayor frecuencia absoluta que fue 6. Es posible que los alumnos hayan dado esta respuesta porque centraron la atención en la primera fracción $\left(\frac{1}{2}\right)$ y en su representación decimal (0.5), lo que dio lugar a la selección del número decimal 0.6. Por esa razón, los estudiantes tuvieron dificultades para indicar un número decimal entre dos fracciones y es posible que también para convertir un número fraccionario a uno decimal.

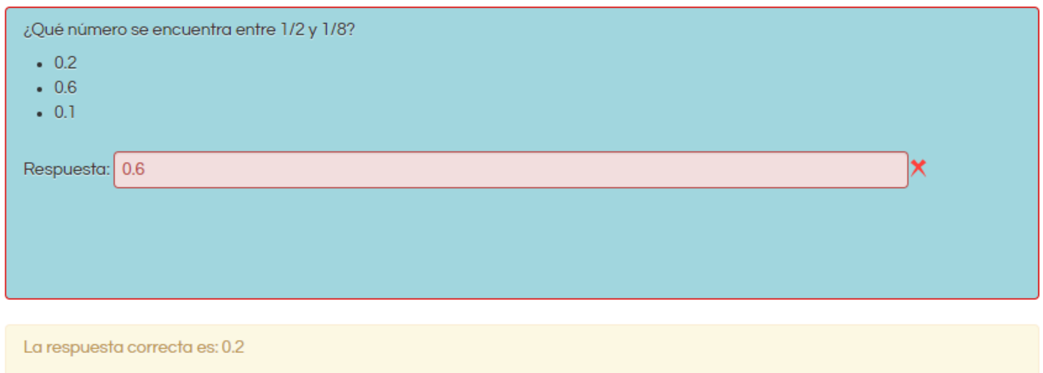


Figura 18. Respuesta incorrecta de seis alumnos en la pregunta 16. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 16.

Como se puede ver en la Figura 19, en la pregunta diecisiete quince alumnos contestaron erróneamente que el quinto término de la sucesión es -45. Esa respuesta se debe a que generaron la secuencia numérica -10, -17, -24, -31, -45, … al considerar que: el primer término es -10, se suma 7 al anterior para obtener el siguiente y se pueden sumar números enteros con el mismo signo. Por ello, los estudiantes mostraron escollos para determinar el quinto término de una sucesión con progresión aritmética.

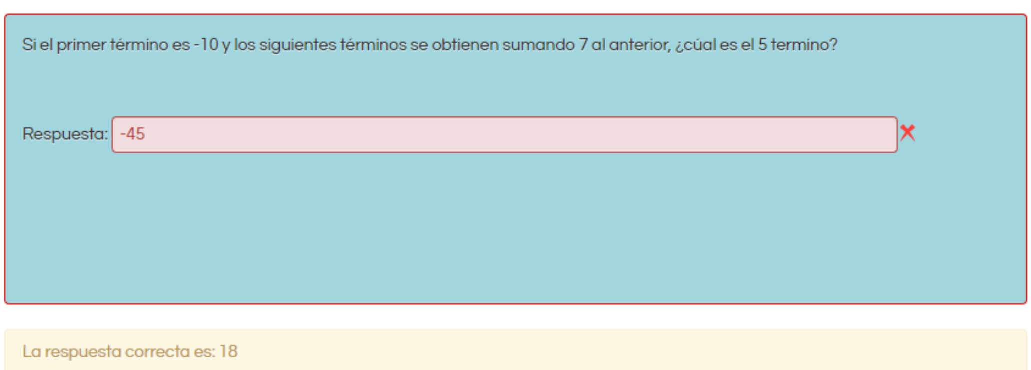


Figura 19. Respuesta errónea de quince alumnos en la pregunta 17. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 17.

En la pregunta 18 del examen de matemáticas se requiere sumar polinomios o hacer una reducción de términos semejantes, la respuesta incorrecta que dieron 19 estudiantes fue $29x^4$-$8x^2y^2$-$23y^4$ (Figura 20). Para obtener ese resultado los alumnos identificaron los términos semejantes: ($4x^2$ – 12xy + $9y^2$) + ($25x^2$ + 4xy – $32y^2$) y operaron con los coeficientes correctamente, pero tuvieron dificultades para aplicar las leyes de los exponentes.

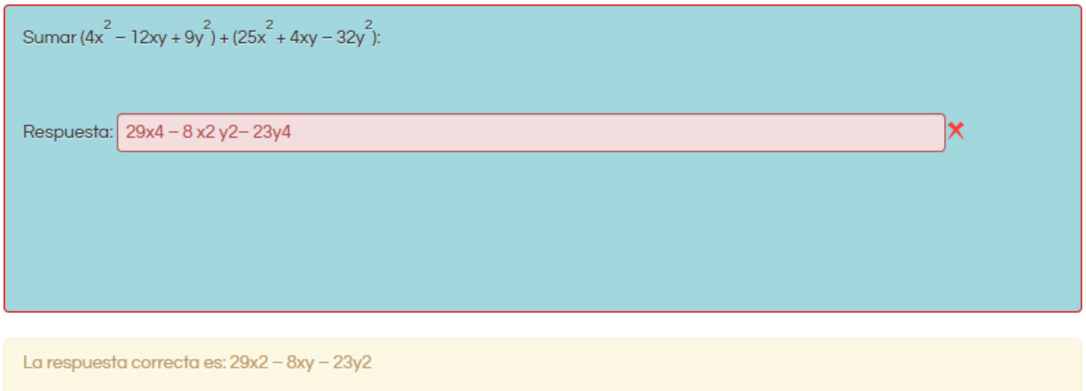


Figura 20. Respuesta incorrecta obtenida por diecinueve aspirantes en la pregunta 18. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 18

La Figura 21 incluye la pregunta 19 y la respuesta errónea de nueve estudiantes. Es posible que estos aspirantes eligieran la función $y = 2x + 1.5$, comprobaran esa regla de correspondencia sólo con el primer par ordenado (3, 7.5) y dieran por sentado que era válida para los demás pares ordenados. Por esa razón, estos alumnos tuvieron deficiencias al identificar cuál es la expresión algebraica que se asocia con la representación tabular de una función lineal.

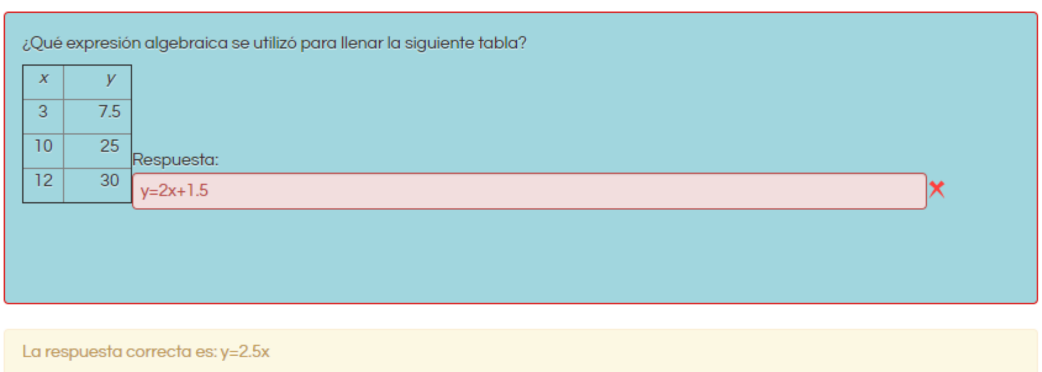


Figura 21. Respuesta errónea que dieron nueve estudiantes en la pregunta 19. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 19.

Al resolver una ecuación de segundo grado en el reactivo 20, diez alumnos contestaron incorrectamente que $x = 2$ (Figura 22). El proceso para resolver la ecuación cuadrática incompleta $5x^2$ - 2x= x^2 + 6x implica igualarla a 0 como se muestra enseguida:

$$5x^2 - x^2 - x - 6x = 0$$

$$4x^2 - 8x = 0$$

$$4x(x-2)=0$$

Si bien, estos estudiantes hicieron correctamente lo antes descrito, tuvieron dificultades en los siguientes pasos, es decir, al resolver las ecuaciones de cada uno de los factores para obtener que $x_1=0$ y $x_2=2$.

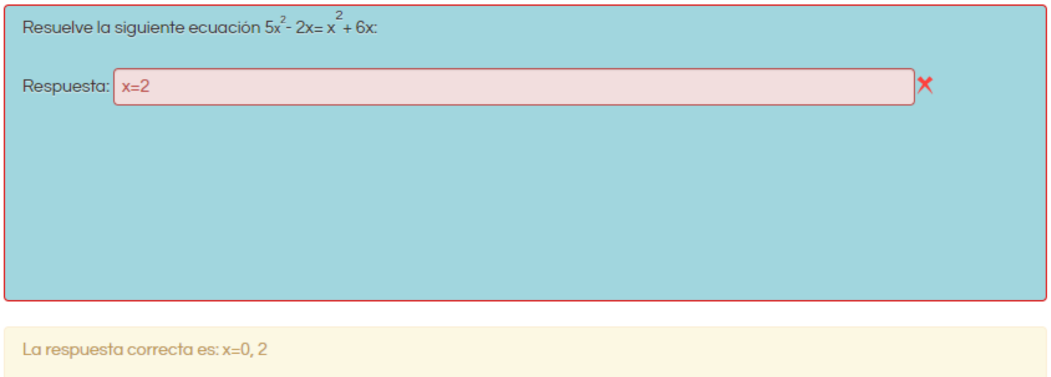


Figura 22. Respuesta incorrecta de diez alumnos en la pregunta 20. Nota: La figura muestra una de las respuestas incorrectas obtenidas en la pregunta 20.

A continuación, en relación a los resultados obtenidos, se describe cómo se puede diseñar un curso virtual para aspirantes a nivel medio superior, de tal forma que éstos puedan superar sus dificultades sobre el conocimiento matemático. Se deben considerar los siguientes aspectos:

- Analizar el diseño y los contenidos de la prueba estandarizada para ingresar al nivel medio superior.
- Diseñar las estrategias didácticas con el uso de las TIC que se deben involucrar en el curso propedéutico, así como las características técnicas necesarias para generar un entorno de aprendizaje.
- Diseñar un instrumento para evaluar el curso propedéutico.

Se analizó el diseño y los contenidos de la prueba EXCOBA, ya que es el instrumento de ingreso a la EBUAQ, para definir los temas y subtemas que se estudiarán en el curso propedéutico

Después se llevó a cabo la búsqueda y selección de fuentes bibliográficas para diseñar los materiales de estudio de los diferentes temas incluidos en la prueba EXCOBA de tal forma que éstos orientaran al estudiante hacia la reflexión y el análisis de situaciones problema y se evitara el aprendizaje memorístico.

Además se seleccionaron recursos complementarios, ya que el curso propedéutico de la EBUAQ se ofertó durante un período activo del ciclo escolar del nivel medio, con el objetivo de no saturar al aspirante en su proceso de estudio la revisión de estos fue opcional. Dichos recursos tuvieron como principales características abordar los contenidos estudiados en el curso propedéutico, estar alojados en sitios web con referencias confiables, además de presentar los contenidos de manera clara. Se eligieron tres tipos de materiales complementarios: problemas resueltos, quiz auto evaluables y ejercicios para resolver.

Con el objetivo de definir la estructura del contenido de los materiales de estudio, que incluyeron los enlaces a los recursos complementarios, se diseñó un guión técnico pedagógico. Posteriormente se revisaron los contenidos integrados al guión técnico pedagógico y se modificaron aquellos en los que era necesario, para que después se migraran al formato definido con base a las características de la plataforma donde se alojará el curso propedéutico.

Además se utilizó el vídeo como material de estudio para generar un ambiente dinámico para los estudiantes, cuyas características permiten simular una clase presencial con la ventaja de regular el ritmo de aprendizaje.

Posteriormente se seleccionó la plataforma donde se alojará el curso propedéutico, con base a las necesidades de nuestro entorno y población, como lo son: la cantidad de usuarios, las tecnologías que se desean involucrar, lo intuitivo del uso de la plataforma, las modificaciones técnicas que permite realizar, la eficiencia para ejecutar procesos y su accesibilidad por parte de los usuarios.

Para la propuesta actual, el curso propedéutico se alojó en la plataforma Moodle que permite gestionar y desarrollar diferentes formatos, sin embargo, al considerar la cantidad de usuarios se optó por utilizar formatos de texto plano, ya que, a diferencia de otro tipo de formato, se utilizan una menor cantidad de recursos del sistema durante su funcionamiento, lo que disminuiría de manera considerable fallas técnicas como el lento acceso e incluso la desconexión de usuarios.

Con base en las características de la plataforma donde se alojará el curso se definieron los datos que se les deben solicitar a los aspirantes y su método de matriculación.

Posteriormente se definió un diseño intuitivo y atractivo de la interfaz del curso propedéutico, considerando las características de los usuarios y los contenidos del curso, para finalmente alojar los materiales de estudio.

Además se aplicó un examen cuyo diseño involucró preguntas que evaluaran los mismos contenidos que la prueba EXCOBA, siendo reactivos que impliquen la reflexión del estudiante. A pesar de que esta prueba estandarizada contiene diferentes tipos de preguntas, para evitar problemas de conexión, se definieron preguntas cerradas y los exámenes fueron programados en diferentes horarios asignando uno diferente para cada agrupamiento (bloque de grupos). Con base al demo de la prueba EXCOBA, se definieron la cantidad de preguntas y el tiempo de duración del examen de matemáticas.

Con el objetivo de optimizar el funcionamiento del curso virtual, se involucró una estrategia para monitorear y definir el ritmo de estudio de los alumnos, al ser una modalidad virtual es indispensable la autogestión del tiempo definido para estudiar, siendo un hábito del cual carecen la mayoría de los estudiantes; en esta propuesta se definieron horarios para habilitar y cerrar el acceso a los materiales de estudio.

Para evitar las fallas de conexión durante el examen, se disminuyó la concurrencia de usuarios asignando diferentes horarios para aplicarlo, así se logró evitar un ambiente de estrés que limite y desenfoque al aspirante de su prueba.

Por último, se aplicó una encuesta de satisfacción a los usuarios, cuyas respuestas fueron analizadas con la finalidad de identificar las áreas de mejora del curso propedéutico, respecto a los materiales de estudio y la funcionalidad de la plataforma. Además, como parte de la evaluación del curso, se analizaron los resultados obtenidos en el examen virtual de matemáticas.

Al finalizar le implementación y evaluación del curso propedéutico, los resultados obtenidos permitieron identificar fortalezas y debilidades, las cuales se describen a continuación:

- El curso virtual propedéutico fue diseñado con base en las características de los usuarios, con la finalidad de favorecer un entorno de aprendizaje por medio de una estrategia que incluyera recursos de aprendizaje, materiales complementarios, monitoreo de los usuarios y un examen virtual.
- La integración de las TIC, como parte fundamental de una estrategia de estudio guiada mediante fundamentos pedagógicos, propició un entorno de aprendizaje. Además, permitió romper las fronteras de espacio y tiempo durante el proceso de estudio de los aspirantes.
- Toda modalidad educativa a distancia exige definir y respetar periodos de estudio, lo cual se asocia con una limitante ya que los estudiantes carecen de hábitos para gestionar su aprendizaje. Con las funcionalidades de la plataforma en la que se alojó el curso virtual, se definieron periodos para revisar los recursos de estudio por parte de los alumnos, a diferencia de los aspirantes del grupo de control quienes autogestionaron su proceso de aprendizaje, en algunos casos definiendo horarios de estudio, pero en muchos otros sin control alguno de sus periodos de aprendizaje. En los resultados obtenidos en el examen presencial de matemáticas los alumnos del grupo experimental obtuvieron un porcentaje de aciertos mayor que los del grupo de control, 58.10% y 50.70% respectivamente, lo que evidencia el impacto positivo de orientar al estudiante en sus periodos de estudio.
- En el diseño del curso propedéutico virtual, se consideraron todos los temas y subtemas que se evalúan en la prueba estandarizada para ingresar al nivel medio superior denominada EXCOBA.
- Ya que el vídeo didáctico (VD) es el recurso de mayor aceptación por parte de los alumnos como parte de sus estrategias de estudio, se integró como material de apoyo en uno de los subtemas del curso propedéutico.
- Se diseñó un examen virtual en el que se incluyeron los contenidos que se evalúan en el EXCOBA, el cual tiene un diseño similar, ya que contiene preguntas que orientan al estudiante hacia la reflexión y el análisis.

Una segunda versión del curso propedéutico implicaría atender las áreas de mejora que se describen enseguida:

- Como parte del curso propedéutico, se estudiaron contenidos que los aspirantes aún no estudiaban en la secundaria, específicamente las medidas de dispersión y casos cuyo proceso de solución define la selección de la media o mediana, la falta de conocimiento respecto al tema mencionado, fue evidenciado en los resultados obtenidos en el examen de matemáticas. Así que se recomienda al definir los contenidos del curso propedéutico considerar los temas estudiados por los aspirantes durante la secundaria.

- Considerando el diseño del EXCOBA, los contenidos de estadística evaluados en el curso se dividieron en dos unidades de estudio, dejando de lado la opción de agruparlos en una sola unidad.
- El curso propedéutico de la EBUAQ no ofrecía el apoyo de un instructor, siendo indispensable para dar un seguimiento puntual a los aspirantes y poderlos apoyar en las cuestiones académicas.
- No se diseñó una estrategia para monitorear el uso de los materiales complementarios, motivo por el cual es posible que pocos alumnos trabajaran con ellos.
- Se diseñó una encuesta de satisfacción cuyas preguntas evaluaron aspectos generales, además de no incluir cuestionamientos que permitieran recabar información respecto a la opinión de los usuarios.

Considerando las fortalezas y debilidades que se identificaron al finalizar el curso propedéutico se enlistan las siguientes recomendaciones con el objetivo de guiar el diseño y desarrollo de un curso virtual para aspirantes al nivel medio superior.

- Utilizar diferentes formatos para el diseño de los materiales, cuya selección dependa de los contenidos y las competencias que se desean desarrollar.
- Generar un banco de preguntas, para programar de manera aleatoria los exámenes de los alumnos y así tener muchas versiones para evitar que las pruebas se dupliquen.
- Diseñar e integrar actividades para poner en práctica los contenidos estudiados.
- Diseñar una encuesta de satisfacción con preguntas abiertas o semi abiertas, para evitar evaluar únicamente aspectos generales y permitir a los usuarios aportar sugerencias.

Conclusiones

A manera de síntesis con base en lo descrito, las consideraciones para implementar un curso virtual para aspirantes al nivel medio superior se describirán a continuación, sin antes aclarar que todo recurso de estudio cuyo desarrollo esté sustentado en una metodología de diseño instruccional, propicia un entorno de aprendizaje para los estudiantes, siendo el vídeo didáctico el recurso con mayor uso por parte de los alumnos por su dinamismo y características propias que permiten definir un ritmo propio de aprendizaje.

- Analizar los contenidos y reactivos de la prueba estandarizada que presentarán los estudiantes.
- Considerar los temas estudiados por los aspirantes en la secundaria, así como la programación de éstos de acuerdo con los planes y programas de estudio vigentes.
- Diseñar y desarrollar recursos de estudio con base a la información obtenida.
- Incluir diferentes formatos para los recursos de estudio, con base en las características de los contenidos y las competencias que se desean estudiar y desarrollar respectivamente.

- Diseñar y desarrollar actividades complementarias para los contenidos estudiados.
- Aplicar un examen cuya creación sea mediante un banco reactivos, para obtener exámenes aleatorios para cada uno de los usuarios.
- Seleccionar la plataforma donde se alojará el curso virtual, con base a las características y necesidades de los usuarios.
- Generar una estrategia que oriente al estudiante a cumplir sus actividades dentro del curso virtual.
- Aplicar una encuesta de satisfacción a los usuarios del curso virtual que contenga preguntas abiertas.

No obstante, se debe entender que sin importar la estrategia didáctica que se implemente con el apoyo de las TIC, materiales de estudio y recursos complementarios, para propiciar el aprendizaje de los estudiantes, depende del compromiso y responsabilidad de cada uno de ellos para gestionar su proceso de aprendizaje, lo que se asocia con el uso de la tecnología en educación. Para que este tipo de propuestas sean exitosas no sólo se requiere de un buen diseño y experimentación sino también de la autogestión del aprendizaje por parte de los alumnos.

Referencias

Belloch, C. (2013). Diseño instruccional. *VNIVERSITAT DE VALENCIA, 2(1), 1-15.* https://www.uv.es/bellochc/pedagogia/EVA4.wiki#:~:text=Modelo%20ADDIE,-El%20modelo%20ADDIE&text=ADDIE%20es%20el%20modelo%20b%C3%A1sico,situaci%C3%B3n%20y%20sus%20necesidades%20formativas.

Cabero, J. & Barroso, J. (2015). *Nuevos retos en tecnología educativa*. (4ta ed.). España: Editorial Síntesis.

Castaño, C. & Romero, R. (2007). Las TIC en los procesos de formación: Nuevos medios, nuevos escenarios para la formación. *Dialnet*, 12(2) 234-252. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2672986

Cuevas, C. (2014). Es grave en México el problema de reprobación en matemáticas, advierte investigador. *Vanguardia*. https://vanguardia.com.mx/esgraveenmexicoelproblemadereprobacionenmatematicasadvierteinvestigador-2155718.html

García-Valcárcel, A. & Hernández, A. (2013). *Los recursos tecnológicos como instrumentos al servicio de la innovación educativa. Buenas prácticas en el uso de la tecnología para la mejora de la enseñanza.* (3da ed.). España: Editorial Síntesis.

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2014). *Políticas TIC en los sistemas educativos de América Latina. Informe sobre tendencias sociales y educativas en América Latina*. UNESCO http://archivo.siteal.iipe.unesco.org/informe/514/politicas-tic-en-los-sistemas-educativos-de-america-latina.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (2018). *Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA).* OECD. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2018). *Planea. Resultados Nacionales 2018. Educación Media Superior: Lenguaje y comunicación Matemáticas.* SEP. https://historico.mejoredu.gob.mx/evaluaciones/planea/resultados-planea/

Vázquez, M. (2013). Matemáticas, la más reprobada en prepa. *El Universal*. http://www.eluniversalqueretaro.mx/metropoli/18-06-2013/matematicas-la-mas-reprobada-en-prepa

Vicario, M. (2010). *Informática Educativa: Elementos de una Teoría para la Civilización del Conocimiento* [Tesis doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México]. https://es.calameo.com/read/0025382051d6844075c02

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen IX Número 1 Fecha: enero-junio de 2021

ISSN: 2395-955X

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA INTRODUCIR EL CONCEPTO DE ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

José Luis Soto Munguía, César Fabián Romero Félix

jlsoto@mat.uson.mx, cesar.romero@unison.mx

Universidad de Sonora

Para citar este artículo:

Soto, J. L., Romero, F. (2021). Una secuencia didáctica para introducir el concepto de ángulo entre dos planos. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. IX, No. 1, pp. 21-31. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año IX, No. 1, enero-junio de 2021, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA INTRODUCIR EL CONCEPTO DE ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

José Luis Soto Munguía, César Fabián Romero Félix

jlsoto@mat.uson.mx, cesar.romero@unison.mx

Universidad de Sonora

Resumen

Se describe aquí una secuencia didáctica diseñada con el propósito de promover el significado geométrico de la noción de ángulo entre dos planos. La secuencia está compuesta de tres fases: Apertura, Desarrollo y Cierre. Está dirigida a estudiantes del área de ciencias e ingeniería y su diseño está basado en una metodología que propone usar GeoGebra de distinta manera en cada una de sus fases.

Palabras clave: Geometría analítica del espacio, ángulo ente dos planos, secuencia

Abstract

A didactic sequence designed with the purpose of promoting the geometric meaning of the notion of angle between two planes, is described here. The sequence is composed of three phases: Opening, Development and Closing. It is aimed at science and engineering students and its design is based on a methodology that proposes to use GeoGebra in a different way in each of its phases.

Keywords: Analytical geometry of space, angle between two planes, sequence

Introducción

La noción de ángulo entre dos planos es uno de los ejemplos más representativos, de qué tan distante puede estar un objeto matemático de la realidad, en la matemática universitaria. El estudiante puede aprender a calcular el ángulo entre dos planos (llamado a veces ángulo diedro), utilizando el producto punto entre los vectores normales a dos planos, sin tener una idea gráfica sobre la ubicación del ángulo que está calculando. Y si no puede ubicar este ángulo en una representación gráfica de los planos, difícilmente podrá hacerlo sobre la arista de un sólido que se encuentre en la realidad (Figura 1). En los cursos dirigidos a estudiantes de ingeniería, el problema no parece menor y puede darnos una idea sobre la orientación que se ha venido imponiendo a los cursos de matemáticas para futuros ingenieros, en este caso el de Geometría Analítica.

Figura 1. ¿Cuál es el ángulo entre los dos "planos"? ¿α o β o ninguno de ellos? Creación propia.

La noción de ángulo, que el estudiante conoce desde la educación básica, definida como "un conjunto de puntos que consisten en un punto P y dos semirrectas que se extienden a partir de P" (James, 1992, p. 13), es un objeto del plano que el estudiante puede representar usando la regla y el compás, medir con un transportador y usarlo para construir otros objetos geométricos sobre el mismo plano. Y aunque no es una noción exenta de dificultades de aprendizaje para el alumno (ver por ejemplo, Mullins, 2020), en cuanto se aborda la noción de ángulo entre planos, aparece de inmediato la problemática asociada a la visualización de figuras tridimensionales, que se están representando en la hoja plana de un cuaderno o en la pantalla plana de una computadora, y en donde las relaciones entre los objetos geométricos que integran dicha representación, no son fácilmente identificables ni las medidas de estos objetos pueden ser tomadas directamente de sus representaciones.

La definición de ángulo entre dos planos que aparece en algunos textos, por ejemplo, Downing (2009), pone de manifiesto las dificultades ya señaladas, al remitir a la definición de ángulo en un plano

> "la figura formada por la intersección de dos planos. Si se considera la intersección de dos rectas, una en cada plano, que son ambas perpendiculares a la recta de intersección de los planos. Entonces el ángulo entre estas dos rectas es el tamaño del ángulo diedro" (pp. 99-100).

En el trabajo hemos tomado en cuenta las dificultades que se presentan cuando la relación espacio-plano se hacen presente, en particular las señaladas por Duval (2017), quien asegura al respecto que:

> "La solución de un problema de geometría 'en el espacio' requiere necesariamente una operación de deconstrucción dimensional, i.e. *ver la forma 2D obtenida por la intersección de un sólido con algún plano en el espacio,* y no alguna habilidad para ver en 'el espacio'" (p. 65)

En algunos libros de Geometría Analítica, un ángulo entre dos planos se define simplemente como "el ángulo que forman sus normales respectivas" (Lehmann, 1972, pp. 350-351) e inmediatamente se pasa a proponer la siguiente fórmula para calcularlo:

$$cos\theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

En donde $[A, B, C]$ y $[A', B', C']$ son los números directores respectivos de las rectas normales a los planos:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

En otros textos como Raichman y Totter (2016) se recurre a los vectores normales a los planos y luego simplemente se propone una expresión para el $\cos\theta$, en términos del producto punto, desarrollada previamente para dos vectores arbitrarios (Figura 2). El tema, a diferencia de los inmediatamente anteriores, no aparece ilustrado con ninguna gráfica.

Definición: El ***ángulo*** θ entre dos planos es el ángulo que determinan sus respectivos vectores normales. Es decir:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{n}_{\pi 1} \cdot \boldsymbol{n}_{\pi 2}}{\|\boldsymbol{n}_{\pi 1}\| \|\boldsymbol{n}_{\pi 2}\|}$$

Por lo tanto, hay dos valores para este ángulo, suplementarios entre sí.

Teniendo en cuenta las componentes de los vectores normales, esta ecuación se puede escribir como sigue:

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Figura 2. Definición de ángulo entre planos, tomada de Raichman y Totter (p. 55).

La misma expresión anterior para el $\cos\theta$, como el producto punto entre vectores normales, dividido entre el producto de las normas de los mismos, puede verse en Edwards y Penney (1996), aunque en este caso se hace referencia a la representación gráfica de la intersección de dos planos y al ángulo que forman entres sí los vectores normales a ellos (Figura 3).

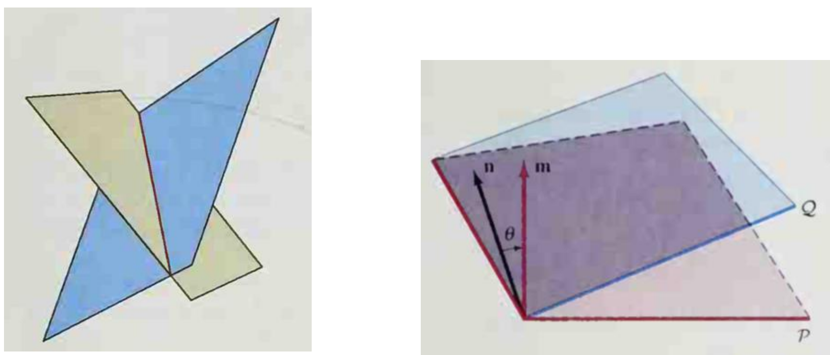


Figura 3. Representaciones gráficas utilizadas para explicar la noción de ángulo entre dos planos en Edwards y Penney (pp. 709-710).

En cambio, en Castañeda (2000) hay un intento por ubicar gráficamente el ángulo entre dos planos. A pesar de las limitaciones de las representaciones gráficas y de la informalidad de los argumentos geométricos presentados, la explicación retoma un problema crucial: la reducción al plano de la situación tridimensional (Figura 4)

a) Ángulo entre dos planos

Sean los planos P y Q de la figura 3.11. Si estos planos se ven de canto, con sus respectivos vectores normales, en la figura 3.12:

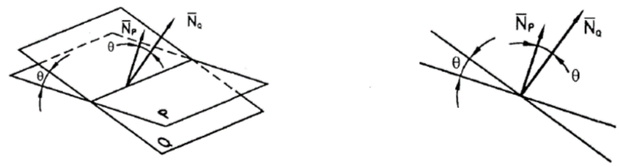


FIGURA 3.11 FIGURA 3.12

Por un teorema de la Geometría Elemental que relaciona el ángulo formado por rectas respectivamente perpendiculares, se tiene que el ángulo formado por los planos es igual al formado por sus vectores normales; es decir:

$$\theta = \text{ang cos } \frac{\overline{N_P} \cdot \overline{N_Q}}{|\overline{N_P}|\,|\overline{N_Q}|}$$

Figura 4. Una explicación geométrica sobre la relación entre el ángulo entre dos planos y el ángulo entre sus vectores normales, tomada de Castañeda (p. 109).

El tema de ángulo entre planos aparece también en los textos de Álgebra Lineal, aunque el tratamiento es esencialmente el mismo, excepto porque ya no se hace alusión a los números directores y se usan solo los vectores normales a los planos respectivos, ver por ejemplo (Grossman, 1987, p. 174), en donde la definición de ángulo entre dos planos es apenas enunciada en uno de los ejercicios.

El enfoque observado en los textos, permite a los estudiantes reproducir el procedimiento estipulado en la fórmula para el cálculo del ángulo, pero tienen serias dificultades para ubicar en tres dimensiones el ángulo que están calculando y las características geométricas de este ángulo presentes en la definición.

Elementos teóricos

Aunque las presentaciones puramente algebraicas del ángulo entre planos son matemáticamente correctas, lo que muestran los textos anteriores en general, es una despreocupación por abordar la significación gráfica de esta noción, y poco o nulo interés en la promoción de la conversión gráfico-algebraica en el sentido propuesto por Duval.

> En otras palabras, *no es suficiente yuxtaponer representaciones de diferentes registros para que los estudiantes "vean" las correspondencias entre las unidades de significado matemáticamente relevantes de las diferentes representaciones yuxtapuestas*. Es por eso que la conversión de las representaciones es el primer umbral de comprensión matemática. Es en esta clase de transformaciones que los estudiantes puedan tomar conciencia del funcionamiento representacional específico de cada registro. Duval (2017, p. 70)

Esta desconexión entre la organización y presentación formal de los conceptos matemáticos, va en contra de su desarrollo cognitivo. La utilidad de las representaciones algebraicas en geometría, viene de su conexión con las representaciones gráficas, de la posibilidad de transitar entre ambos registros, en palabras de Duval, "en matemáticas, nunca pensamos en un solo registro, sino en varios a la vez, incluso si las producciones explícitas favorecen un solo registro" (2017, p. 83). De tal manera, la enseñanza restringida a un tipo de representaciones limitaría el desarrollo de esta habilidad y por lo tanto del aprendizaje de los conceptos.

Más allá de la exposición de distintas representaciones, para realizar conversiones entre registros se vuelve necesario identificar qué es *matemáticamente relevante* en cada representación. Identificar estas *unidades de significado relevante,* es una habilidad fundamental que se entrelaza con la operación de conversión y permite la comprensión de los objetos matemáticos representados. Sin embargo, para distinguir las unidades de significado matemáticamente relevantes, es necesario realizar conversiones a otro registro (Duval, 2017, p. 77). Nos enfrentamos entonces a una aparente contradicción, en la que, para desarrollar la habilidad de conversión, es necesario la identificación de unidades de significado, pero para esta identificación, es necesaria la operación de conversión. La propuesta de Duval para salir de este círculo vicioso, es el desarrollo de ambas habilidades en *tareas de reconocimiento* de unidades de significado.

En las tareas de reconocimiento de unidades, "el contenido de las representaciones iniciales necesita ser variado en una forma sistemática y cada variación del contenido debe ser comparada con la representación correspondiente en el otro registro" (Duval, 2017, p. 77). El objetivo de estas tareas es básicamente aislar las unidades de significado mediante la exploración sistemática de sus variaciones. De esta manera, se distinguen las tareas de reconocimiento de las tareas más globales de resolución de problemas: "las tareas de reconocimiento se eligen en función de las variables cognitivas que pueden identificarse mediante el método de análisis de las producciones matemáticas que acabamos de presentar" (p. 81).

En concordancia con los anteriores elementos teóricos, la propuesta que se presenta se basa inicialmente en tareas de reconocimiento de las unidades de significado en las representaciones de ángulos entre planos. A partir de la manipulación sistemática de representaciones gráficas y su comparación con las representaciones numéricas (medidas de los ángulos), se deduce el significado del ángulo entre planos y la necesidad matemática de su definición. Posteriormente, se presentan tareas de construcción gráfica y de conversión al registro algebraico, de manera que se permita construir expresiones como las mencionadas arriba para el cálculo de los ángulos entre planos. Finalmente, se plantean tareas de resolución de problemas sobre ángulos, donde los estudiantes podrían iniciar el abordaje a partir de la identificación de las unidades de significado estudiadas y la aplicación de las conversiones y tratamientos desarrollados.

La secuencia didáctica

Con el propósito de promover el significado geométrico que tiene el ángulo entre dos planos, hemos diseñado una secuencia didáctica, en la que usamos GeoGebra como herramienta para la manipulación de construcciones geométricas dinámicas, la secuencia parte del supuesto de que los estudiantes ya han aprendido a calcular el ángulo entre dos planos a partir de sus ecuaciones y tiene una estructura didáctica integrada por las fases de Apertura, Desarrollo y Cierre. El diseño está basado en la metodología descrita en Soto (2019).

La Apertura de la secuencia está compuesta de dos partes, en una primera se presenta la fotografía de la fachada de una casa en la que dos de sus muros han sido resaltados (Figura 5) y se pone a discusión de los estudiantes cómo medirían el ángulo entre estos dos muros planos. La idea aquí es que puedan comparar sus procedimientos de cálculo con un problema real, si hay conceptos entre los utilizados para el cálculo, que pudieran ser utilizados y si pudieran valerse de algún instrumento para medirlo.

Figura 5. Fachada de casa habitación presentada a los estudiantes, para que expliquen cómo podrían calcular el ángulo entre los muros resaltados.

En una segunda parte, se proporciona al estudiante una construcción en GeoGebra, en la que se muestra una barda sobre la cual se ha recargado una varilla y se simula el movimiento de las sombras proyectadas por la varilla conforme avanza el día. El propósito aquí es mostrar que hay una infinidad de ángulos que pueden trazarse en dos planos (representados aquí por el piso y la barda) manteniendo el vértice sobre la recta de intersección entre ellos. El estudiante podrá manipular el ángulo de elevación del sol a través de un deslizador y explorar los valores de los ángulos formados por la sombra que la varilla proyecta sobre la barda y el piso. La barda está orientada de oriente a poniente (Ver Figura 6)

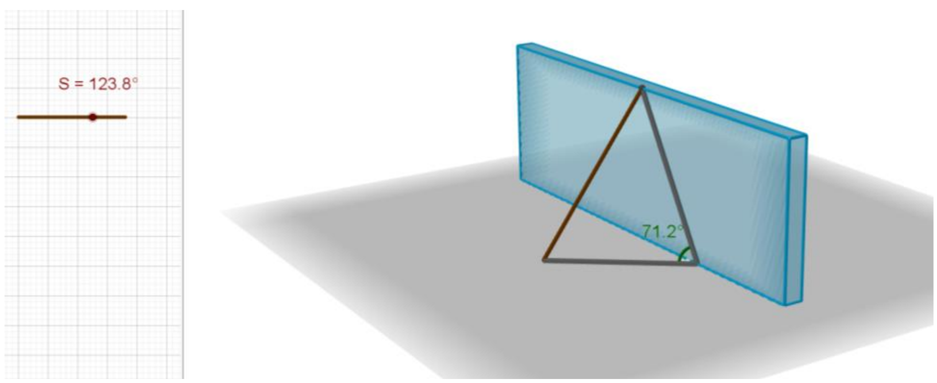


Figura 6. La proyección de la sombra de una varilla recargada sobre una barda. Construcción propia.

En esta parte el estudiante tendrá que responder una serie de preguntas que lo lleven a identificar algunos elementos de la construcción, por ejemplo, la recta de intersección entre el plano del piso y el plano de la cara frontal de la barda. A partir de hacer variar el ángulo de elevación del sol, observará la variación del ángulo formado por las sombras y seleccionará el que a su juicio es el ángulo entre los dos planos. Se pretende además que establezca la relación entre el plano del ángulo formado por las sombras con la recta de intersección entre los dos planos.

El Desarrollo de la secuencia está integrada por tres partes, en la primera se proporciona una construcción en la que se ha trazado un tetraedro de arista 8 y el plano que pasa por los vértices A, B y D (Figura 7). Se trata aquí de calcular el ángulo entre las caras ABD y ABD del tetraedro, utilizando el procedimiento algebraico ya conocido. El cálculo se realiza a partir de las ecuaciones de los planos proporcionados por la vista algebraica de GeoGebra.

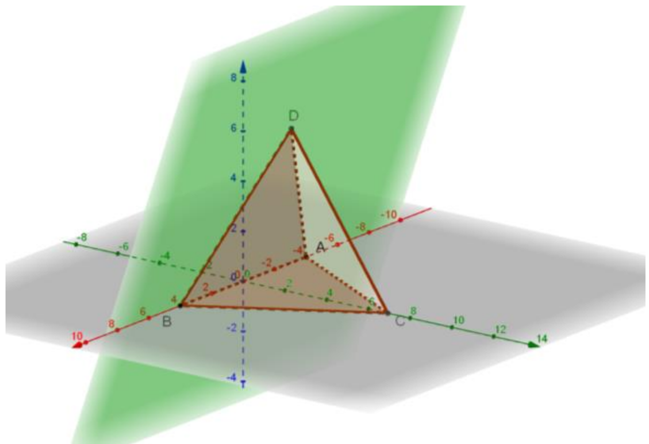


Figura 7. Dos de los planos determinados por las caras de un tetraedro.

En la segunda parte se proporciona una construcción en la que se ha trazado un tetraedro, un plano que pasa por los vértices C y D y por un punto P sobre AB que puede arrastrarse sobre este segmento para hacer variar el plano. La construcción puede verse en la Figura 8.

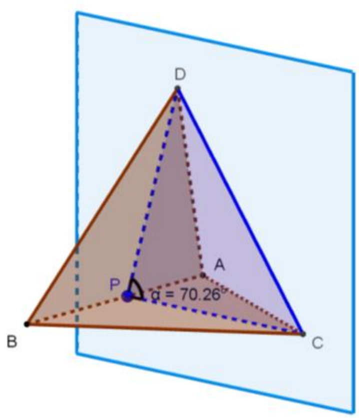


Figura 8. Un tetraedro cortado por un plano que pasa por una de sus aristas e interseca en P a la arista opuesta.

En el tetraedro se ha trazado el ángulo CPD, en donde P es un punto sobre la arista AB, que puede ser arrastrado haciendo variar el ángulo CPD. Se ha trazado también el plano sobre el que se mantiene el ángulo CPD. La idea aquí es arrastrar el punto P hasta que se aproxime lo más que se pueda al ángulo calculado antes algebraicamente. Una vez obtenida la aproximación, se plantea el problema de establecer la posición relativa del plano que contiene al triángulo CPD con respecto a la arista AB. Si esta posición no es clara, se puede pedir a GeoGebra que muestre los ejes coordenados de la vista 3D.

En tercera y última parte del Desarrollo, se presenta al estudiante una construcción con dos planos graficados (planos verdes en la Figura 8), en los que tendrá que trazar el ángulo entre ellos y solicitar a GeoGebra la medida de este ángulo. En las instrucciones se le indica cómo trazar un plano perpendicular a la recta de intersección entre los dos planos originales (plano color rosa en la Figura 8). Una vez que el ángulo entre los planos se haya trazado, el archivo debiera verse como se muestra en la Figura 9.

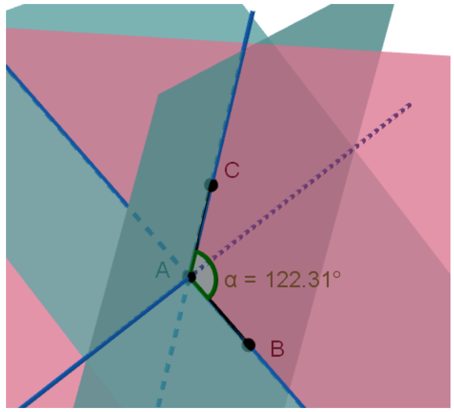


Figura 9. Ángulo determinado por un plano perpendicular a la recta de intersección de otros dos planos.

Posteriormente el estudiante usará los coeficientes de la representación algebraica de los dos planos dados para trazar sus respectivos vectores normales, solicitar a GeoGebra el valor del ángulo que forman estos vectores y rotar la construcción hasta que la construcción pueda verse como en la Figura 10. Para finalmente comparar en esta figura, el ángulo entre los planos con el ángulo entre los vectores normales.

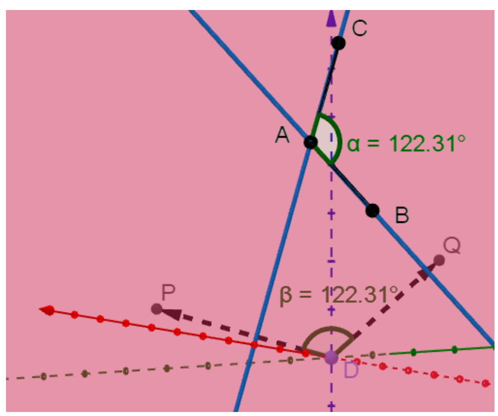


Figura 10. Una rotación de la construcción, hasta que la recta de intersección de los planos originales se vea como un punto.

Al final de la etapa de Desarrollo calculará ángulo β que forman los vectores normales, usando la fórmula:

$$cos\beta = \frac{ae + bf + cg}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{e^2 + f^2 + g^2}}$$

Donde los vectores (a, b, c) y (e, f, g) son los vectores normales a los planos, cuyas ecuaciones son: $ax + by + cz = d$ y $ex + fy + gz = h$ y comparará el valor obtenido de β con el valor mostrado en la gráfica construida en GeoGebra.

La etapa de Cierre está dedicada a justificar geométricamente por qué, en general, en la construcción de la Figura 9, los ángulos α y β son siempre iguales, para ello se utiliza la gráfica de la Figura 11, en la que se analizan los ángulos internos del cuadrilátero AFDE. Primero se establece qué tipo de ángulos son los ángulos DFA y AED y cómo podría justificarse su respuesta. Con base en la respuesta dada a la pregunta anterior, los estudiantes tendrán que obtener la suma de los ángulos β = EDC y FAD por una parte y por otra establecer cuánto suman los ángulos α =EAC y FAE. La igualdad entre α y β se deduce de las dos igualdades anteriores.

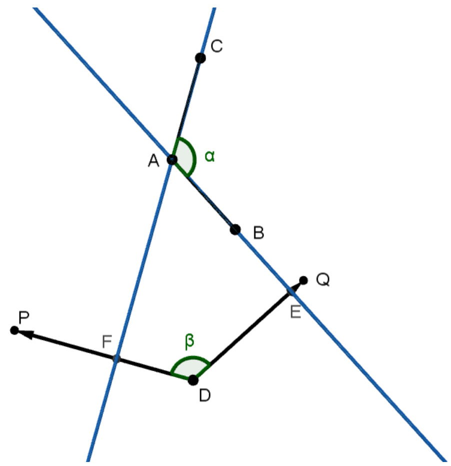


Figura 11. Una representación plana del problema, para demostrar que $\alpha = \beta$.

Comentarios finales

La presente secuencia forma parte del diseño de materiales de enseñanza, que estamos elaborando para una nueva versión del curso de Geometría Analítica que se ofrece a los estudiantes del área de Ciencias e Ingeniería en la Universidad de Sonora.

La secuencia didáctica descrita aquí fue diseñada antes de que iniciara la pandemia que sufrimos actualmente, por esta razón no se ha podido experimentar en un curso presencial. Los resultados obtenidos hasta ahora en tres cursos impartidos en modalidad no presencial son alentadores, pero hemos tenido algunas dificultades técnicas para recoger datos experimentales en esta modalidad.

Referencias bibliográficas.

Castañeda, É. (2000). *Geometría analítica en el espacio*. México: UNAM, Facultad de Ingeniería.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking–The Registers of Semiotic Representations*. Switzerland: Springer International Publishing.

Downing, D. (2009). *Dictionary of Mathematics Terms*. Hauppauge, NY: Barron's Educational Series.

Edwards, C. y Penney, D. (1996). *Cálculo con geometría analítica*. México: Prentice Hill.

Grossman, S. (1988). *Álgebra Lineal*. México: McGraw-Hill.

James, R. (1992). *Mathematics Dictionary*. NY: Chapman & Hall.

Lehmann, Ch. (1972). *Geometría Analítica*. México: UTEHA.

Mullins, S. (2020). Angling for the Right Result: Students' Conceptualizations of Angles. *Journal of Research in Education*, *29*(1), p. 1-47.

Raichman S. y Totter, E. (2016). *Geometría analítica para ciencias e ingenierías*. Mendoza: Universidad Nacional de Cuyo.

Soto, J. L. (2019). La inclusión de GeoGebra en el diseño de actividades didácticas en matemáticas, En Quiroz, S., Núñez, E., Saboya, M. y Soto, J-L. (Eds) *Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico* (pp. 97-112). México: Editorial Amiutem.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen IX Número 1 Fecha: enero-junio de 2021

ISSN: 2395-955X

SITUACIÓN PROBLEMA COMO ESTRATEGIA PARA LA COMPRENSIÓN E INTERPRETACIÓN DE LAS FUNCIONES EN SECUNDARIA

Juan Antonio Chávez Díaz

juanchavezdiaz10@gmail.com

Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro "Andrés Balvanera"

Para citar este artículo:

Chávez, J. A. (2021). Situación problema como estrategia para la comprensión e interpretación de las funciones en secundaria. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. IX, No. 1, pp. 32-46. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año IX, No. 1, enero-junio de 2021, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

SITUACIÓN PROBLEMA COMO ESTRATEGIA PARA LA COMPRENSIÓN E INTERPRETACIÓN DE LAS FUNCIONES EN SECUNDARIA

Juan Antonio Chávez Díaz

juanchavezdiaz10@gmail.com

Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro “Andrés Balvanera”

Resumen

En el siguiente trabajo se propone el abordaje de las funciones polinomiales mediante el trabajo de una situación problema. Esto causado por una reciente jornada de prácticas, la cual provocó un arduo trabajo reflexivo que indicó la necesidad de una propuesta que esté orientada a una realidad más cercana a la actual. Es decir, que se sitúe en el trabajo con el uso de tecnologías. Con esta situación de la pandemia por SARS Cov-2, que el trabajo tenga cierto grado de flexibilidad para poder integrarlo en una modalidad en línea y/o en una modalidad presencial, pero sin perder la complejidad de los contenidos que se necesitan abordar en cualquiera de ellas. Se buscó con esta propuesta y la teoría de las situaciones didácticas llevar al alumno, mediante este tipo de situaciones problema, por varias de las características que conforman a una función y posterior a ello avanzar en el grado del polinomio, para de esta forma conocer cómo las situaciones problema influyen en el proceso de comprensión e interpretación de las funciones polinomiales.

Palabras clave: Funciones polinomiales, situación problema, GeoGebra, análisis gráfico.

Abstract

In the following work, the approach to polynomial functions is proposed by working on a problem situation. This is caused by a recent internship session, which led to hard reflective work that indicates the need for a proposal that is oriented to a reality closer to the current one. That is to say, that it is situated at work with the use of technologies. With this situation of the SARS Cov-2 pandemic, that the work has a certain degree of flexibility to be able to integrate it in an online modality and / or in a face-to-face modality but without losing the complexity of the contents that need to be addressed in any of they. It was sought with this proposal and the theory of didactic situations to bring the student, this type of problem situations, through several of the characteristics that make up a function and after that advance in the degree of the polynomial, in order to know how the problems influence the process of situations of understanding and interpretation of polynomial functions

Keywords: Polynomial functions, problematic situation, GeoGebra, graphic analysis.

Introducción

El siguiente trabajo es una propuesta didáctica que, en cuanto se tengan las condiciones necesarias, se daría apertura a su aplicación con un grupo de tercer grado de secundaria. Aun así se deja cierto margen de apertura para que la propuesta pueda ser aplicable en esta modalidad en línea o en una posterior modalidad presencial. En este caso particular no se ha logrado trabajarlo, pues, el rezago educativo que ha traído estos meses a causa de la pandemia ha demeritado que, primero se atiendan los contenidos en el cual, mediante un primer diagnóstico se refleja una verdadera dificultad, provocando una necesidad en iniciar con un repaso de temas.

Esta propuesta, al tratar un tema tan avanzado como lo son las funciones polinomiales, el cual, muchos ignoran que se deben de trabajar en secundaria, de menor o mayor medida, nos dificulta el proponer situaciones que atiendan este problema. Y, aunque no lo queramos ver de esa forma, el obstáculo sigue permeando en las generaciones de alumnos que egresan de la educación básica. Pues en la realidad se topan con situaciones en el bachillerato de las cuales ya es necesario tener un conocimiento previo de estas.

Según Schoenfeld (1989) menciona que la graficación de ecuaciones es parte de la currícula en los niveles medio básico y medio superior, pero el uso e interpretación que los estudiantes hacen de la gráfica en si misma enfrenta problemas que se observan incluso en los niveles universitarios. Es decir, la necesidad de trabajar estos contenidos para llegar a elementos como la correcta graficación e inclusive, el buen uso del lenguaje gráfico, es necesario mediante el trabajo de este tipo de temas y problemas matemáticos. Y de la cual, es una necesidad, evidente y ya declara por diversos autores, en sus trabajos de investigacion, sin embargo, en la realidad sigue siendo un tema que no entra en la dosificación que hace el maestro.

Referente teórico

Problemática

La poca profundización del plano cartesiano provoca que los alumnos confundan elementos que serán importantes para después tener una comprensión de la parte gráfica. La propia enseñanza del plano cartesiano es algo que se prevé retomar en un inicio de la propuesta de trabajo. Pues aunque la actividad no se centre en ello, es parte fundamental que se debe de retomar y dejar bien establecido, para poder continuar con el proyecto que se tiene planeado.

El contenido específico que abarca a las funciones polinomiales para tercer grado de secundaria, es un tema poco trabajado por diversas circunstancias que se presentan en el último grado. Sin embargo ese no es motivo suficiente para dejar a un lado un aprendizaje esperado necesario para el próximo abordaje de la matemática, tal vez no en la secundaria, pero si en un trabajo de nivel media superior. Algo observado es la poca comprensión e interpretación de los resultados en la resolución de funciones polinomiales ya que los alumnos no comprenden e interpretan esa resolución con algún ejemplo de la vida cotidiana.

Asumir que se trabajara el contenido de funciones polinomiales bajo la teoría de las situaciones didácticas, podemos catalogarlo como verdaderamente un reto. Pues desde la experiencia se ha identificado varios retos en estas dos categorías. La primera como se mencionó anteriormente, sobre el descuido a ese contenido en el último grado de secundaria.

En cuestión de la teoría, la realidad es que se considera como una exigencia a aprender, y que pocos alumnos logran resolver, ya que el plantearles una situación problema les implica una lectura en donde tienen que estar muy atentos para rescatar la información que les resulte de utilidad para posteriormente hacer el procedimiento de resolución. Es un hecho que también pone un grado de dificultad al trabajo, pero que a final de cuentas es algo que no debemos ignorar, pues el plan y programas de estudio de secundaria (2018) nos referencia a un trabajo grafico desde el trabajo de varias situaciones problema, de hecho ahí lo describe como un trabajo en relación a ejemplos desde el área de la Fisca.

Siguiendo un trabajo puntual se esperaría que los alumnos subsanen problemáticas que se presentaron durante el diagnostico. No será un trabajo sencillo para las dos partes (alumnos y maestros) pero se espera que se lleguen a muy buenos resultados en cuestión de la comprensión e interpretación de este contenido.

Metodología

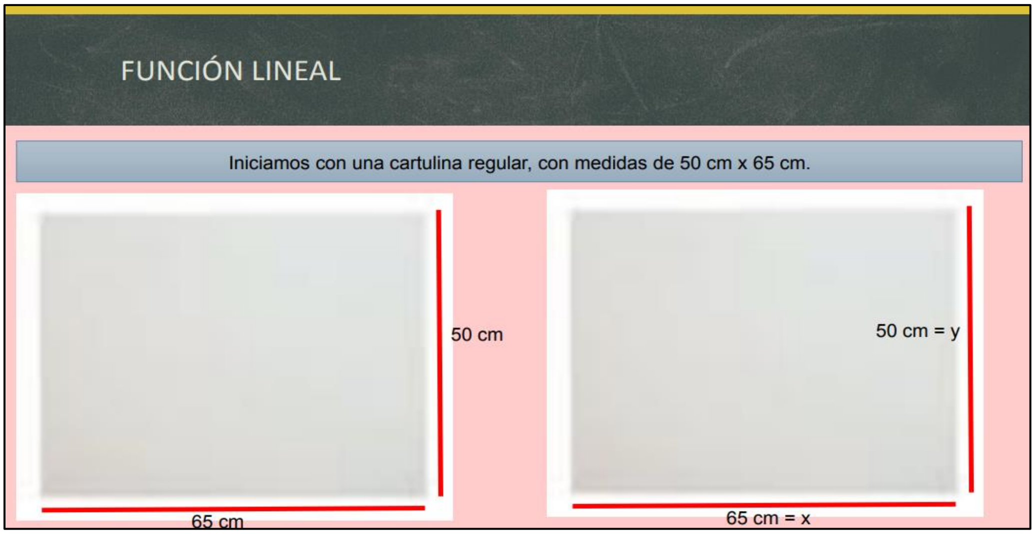
Propuesta

La propuesta es una situación problema (SP) que consta como producto final, en la elaboración de una caja de regalo (CR) en donde, además del trabajo meramente matemático, los alumnos trabajarán con elementos emocionales durante su construcción y decoración de ella, llegando a la posibilidad de un trabajo colaborativo con materias como química, artes, educación física, educación socioemocional, entre otras. En cuestión matemática lo que busca es generar funciones polinomiales para partir a la conceptualización y graficación de estas.

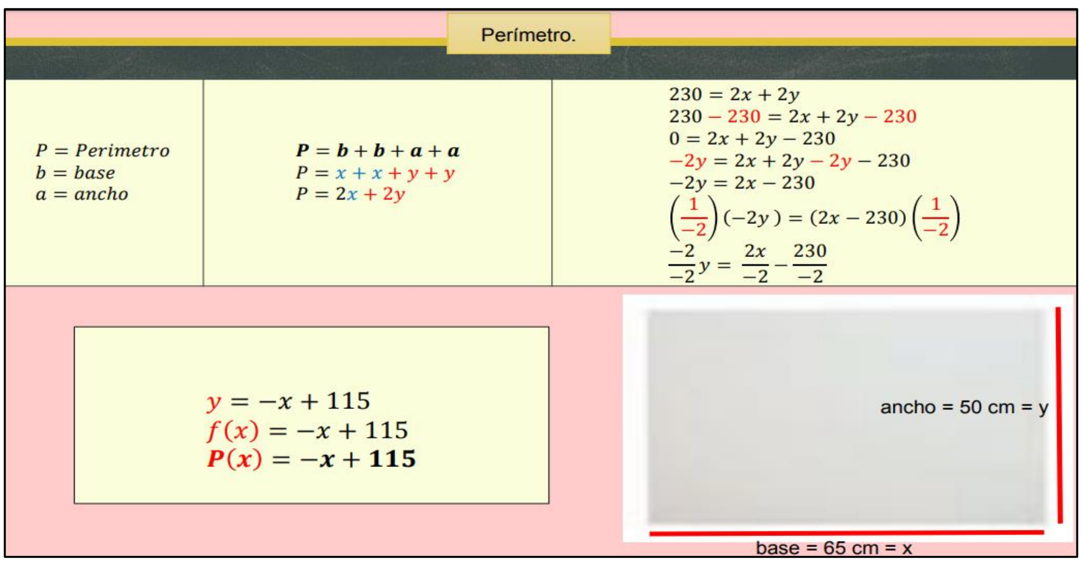
Se les proyectará una imagen de cajas a los alumnos y mediante la metodología de provocación se realizará una observación de esta para llegar a preguntas en donde se detone el trabajo matemático a partir de esas cajas. Se les planteará a los alumnos la SP de elaborar una CR, para ello harán uso de algún material para hacer la plantilla y poder realizar los dobleces para el armado de su producto.

Las medidas del material se dejan a libertad. La primera función que se abordará es lineal (*figura 1*), y se obtendrá mediante las medidas de las longitudes del material y haciendo uso del concepto *perímetro* para la obtención de ella. En cada momento, al trabajar un grado de la función, se hará el proceso de graficación de manera física (en el pizarrón o en las canchas) y de forma digital (con GeoGebra) pues es importante observar el desarrollo de cada una de estas y cómo, en medida de que avanza el grado del polinomio, se van agregando características durante el proceso del análisis de la gráfica.

Proceso matemático



Contenido 1. FL1. Creación Propia.



Contenido 2. FL2. Creación Propia.

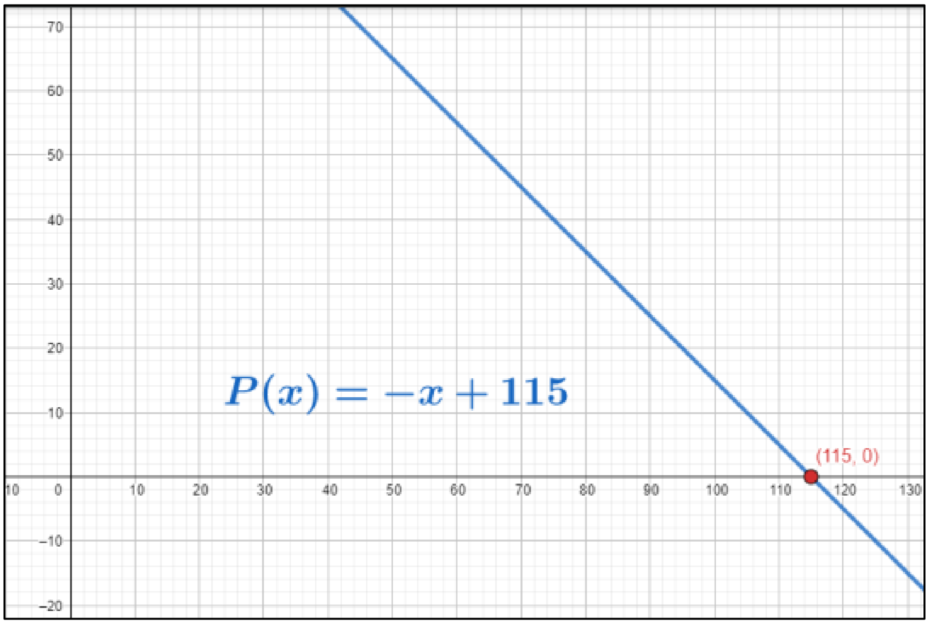


Gráfico 1. Función Lineal. Creación Propia.

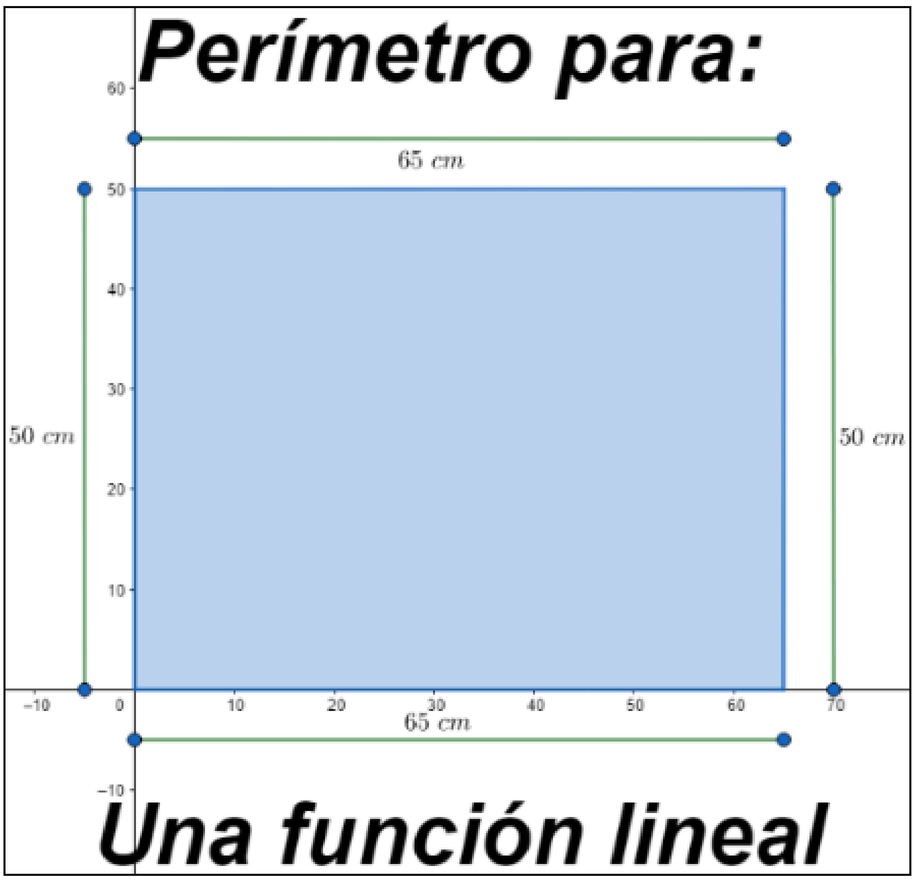
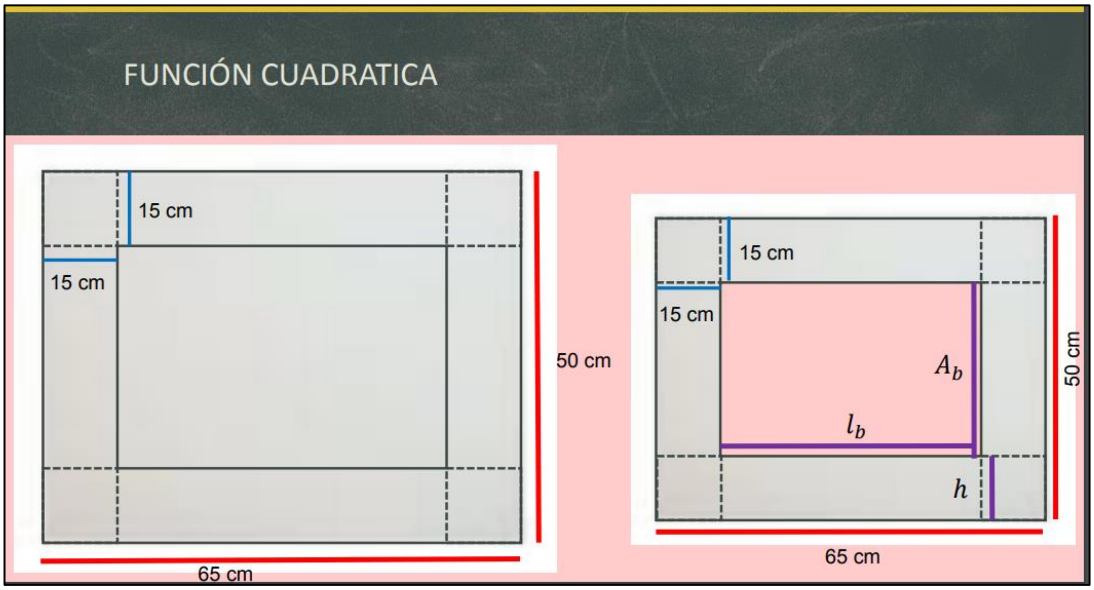


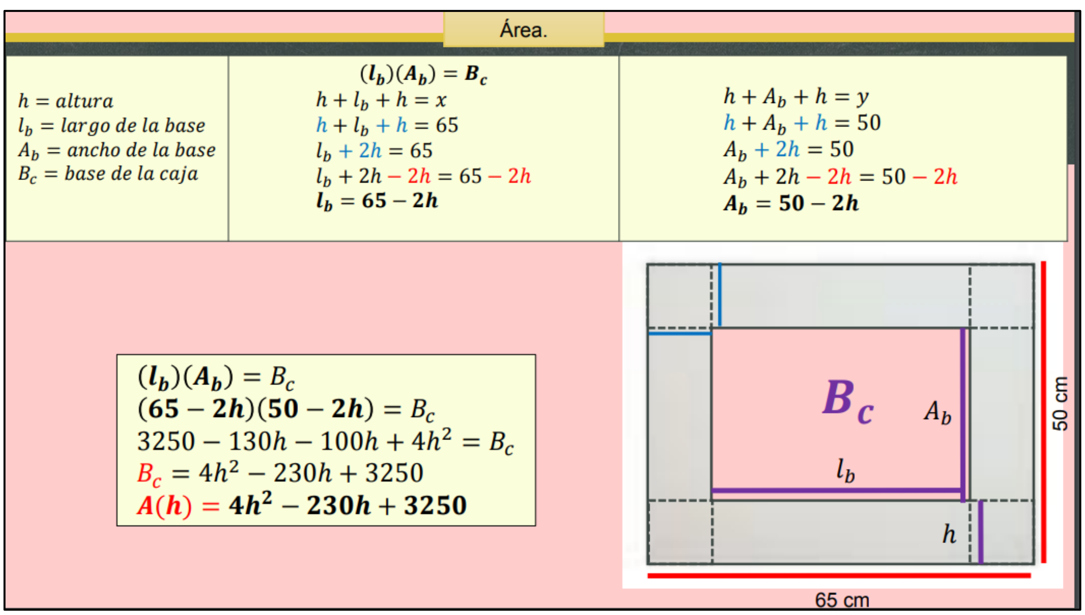
Figura 1. P-FL. Creación Propia.

Como segundo proceso es el trabajar una función cuadrática manejando el *área* de la base de la CR, en este caso la única condición es que la base deberá de ser rectangular, y de la cual la función dependerá de la variable *h* (altura) (*figura 2*), de igual forma se hace el proceso de graficación y en donde comienzan a intervenir procesos como el de factorización, multiplicación de monomios o binomios o el uso de la formula general para abordar características un poco más complejas al grado anterior.

Proceso matemático



Contenido 3. FC1.Creación Propia.



Contenido 4. FC2. Creación Propia.

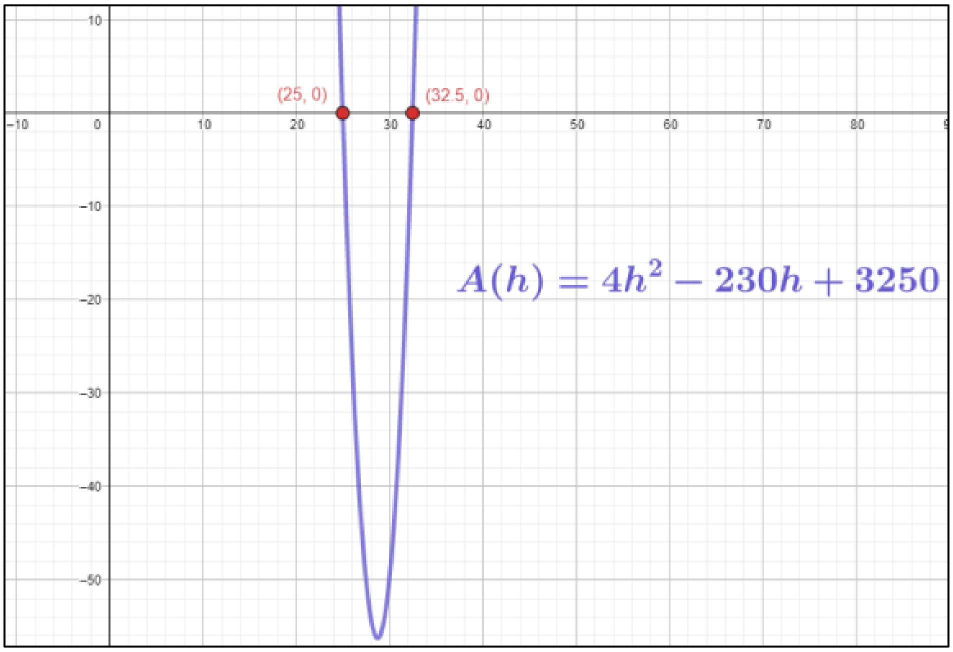


Gráfico 2. Función Cuadrática. Creación Propia.

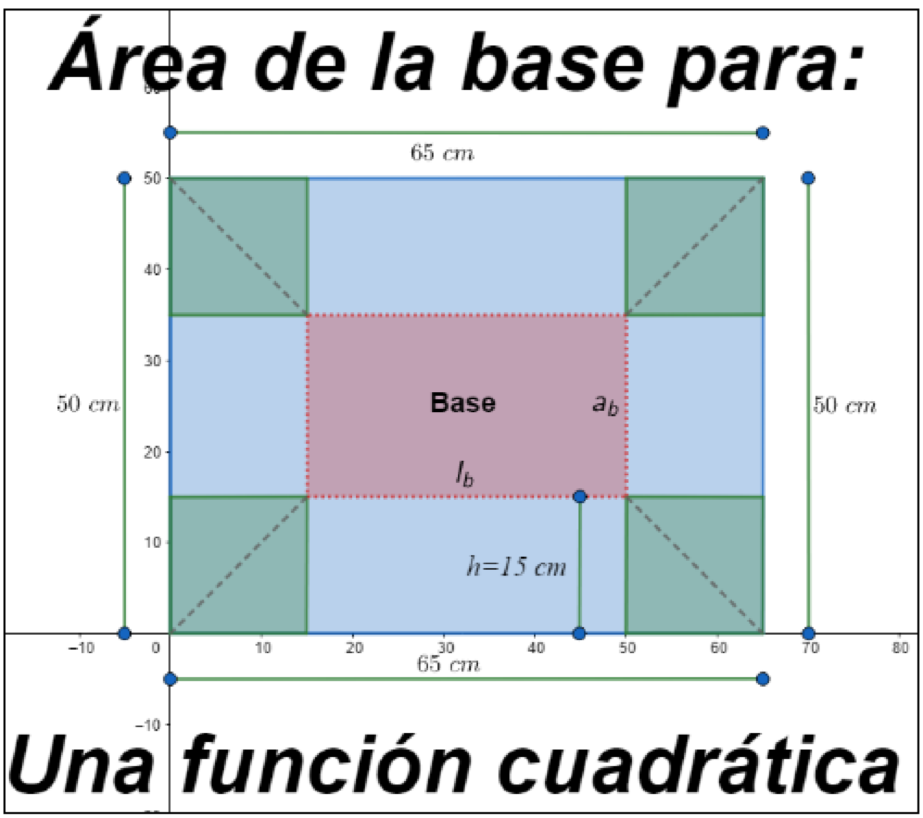
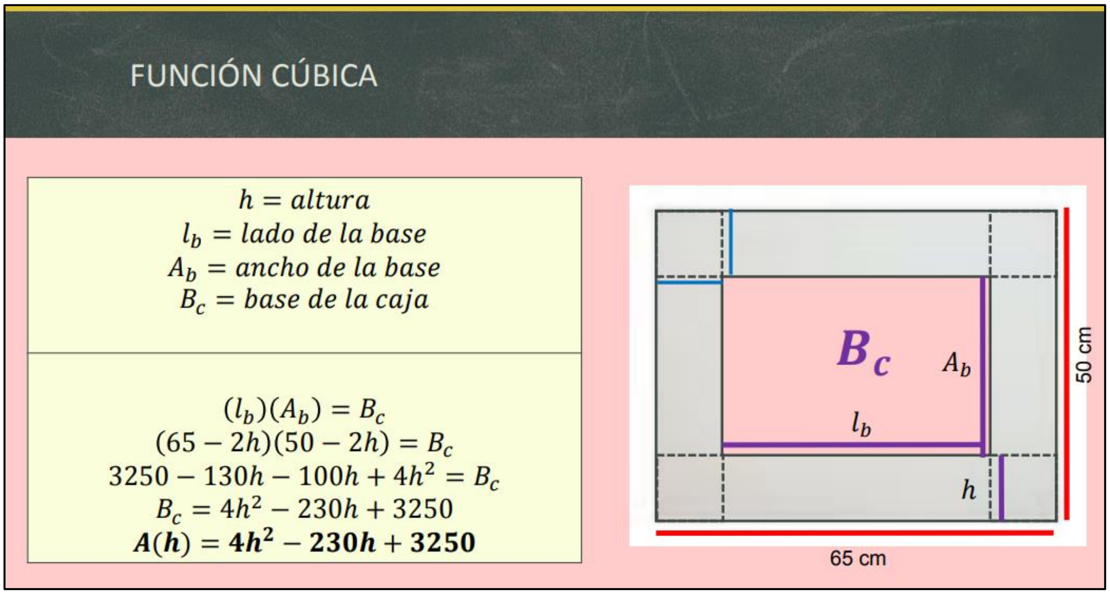


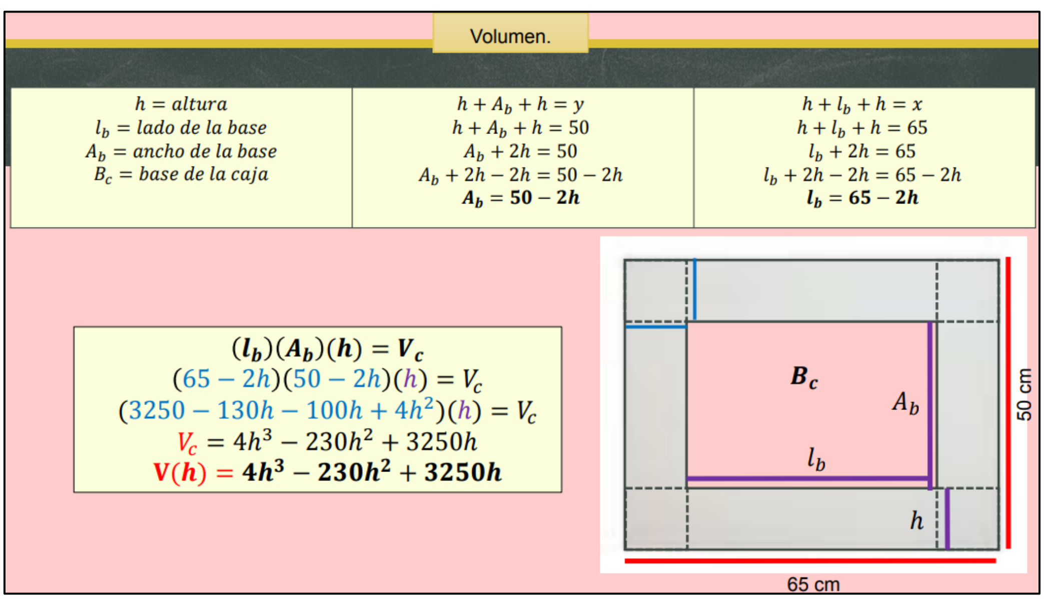
Figura 2. A-FC. Creación Propia.

Como último proceso, se trabajará el *volumen* de la CR para poder construir una función cúbica (*figura 3*). Se tomará el mayor tiempo posible, pues no solo implicará graficar la función de forma aproximada, pues la consigna o característica que debe de tener su CR es que sea construida pensando en que deberá de tener el mayor volumen posible. De manera simple se abordará el trabajo de máximo y mínimo de la función, con el fin de encontrar la medida máxima de nuestra variable, para que el producto final cumpla con lo que se pide desde un inicio.

Proceso matemático



Contenido 5. FCu1. Creación Propia.



Contenido 6. FCu2. Creación Propia.

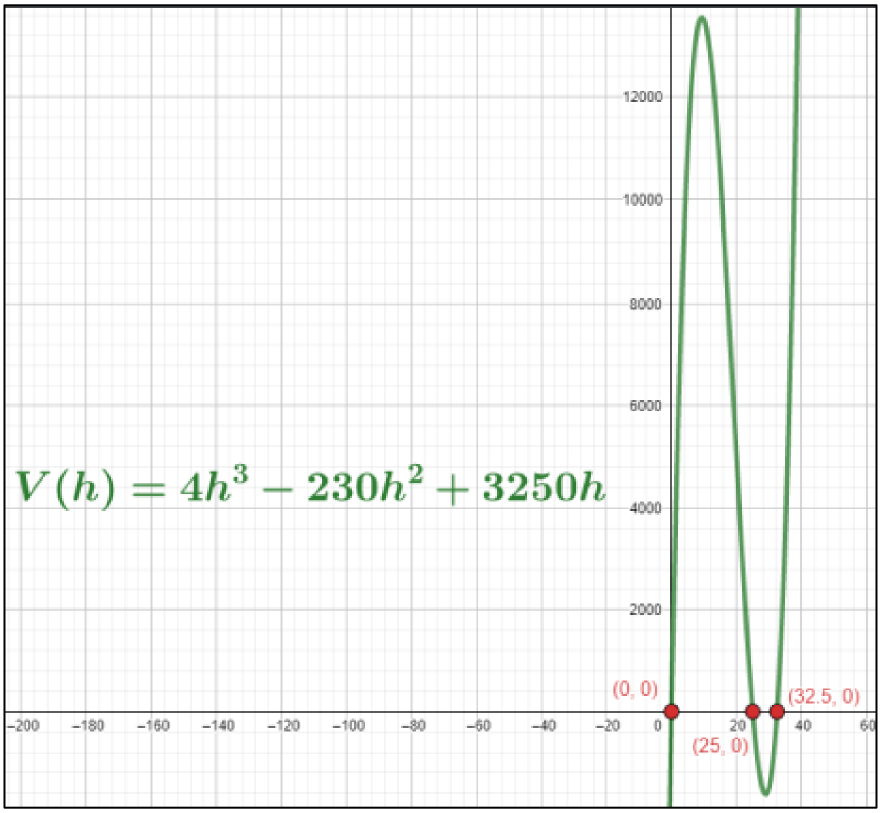


Gráfico 3. Función Cúbica. Creación Propia.

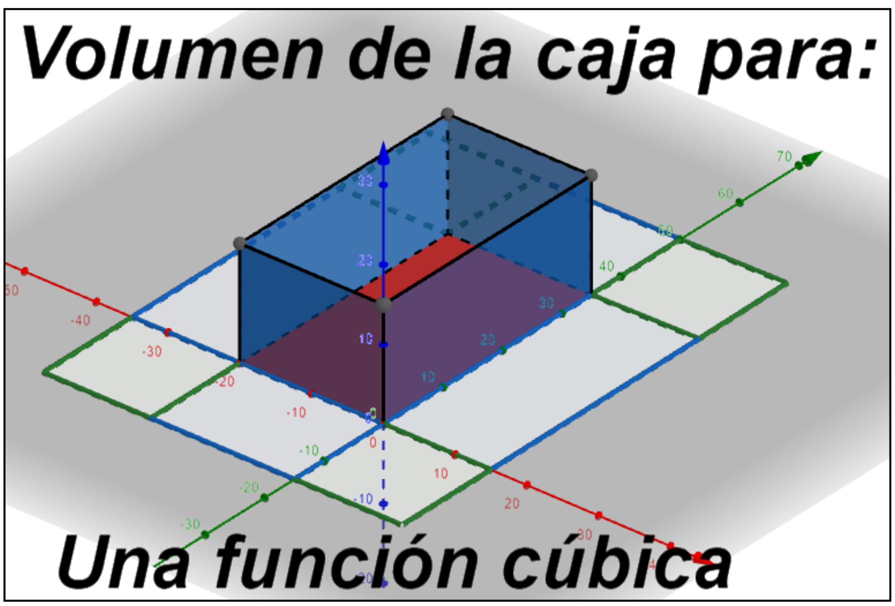


Figura 3. V-FC. Creación Propia.

Esta propuesta tiene un grado de complejidad elevado, pues con alumnos de tercer grado de secundaria puede resultar un reto, por ello se pensó en una SP que tuviera seguimiento desde una función de grado uno, ya que teniendo esa continuidad se esperaría que el alumno mismo se plantee el reto de llegar a grados superiores.

Método

El método por el que se optó enfocar este trabajo de investigación es el de investigación-acción. Kemmis y McTaggart (1988) declaran que los beneficios de la investigación-acción son la mejora de la práctica, la comprensión de la práctica y la mejora de la situación en la que tiene lugar la práctica. Pareciera ser que esta metodología, es de agrado de un gran número de docentes pues representa sencillamente nuestros objetivos que nos planteamos, es decir, el maestro siempre busca la mejora de sus actividades, está en constante observación de áreas de oportunidad en pasos que funcionaron y de los que no hubo una buena conducción al momento de aplicar sus actividades.

Y este método se basa en ello, en la lectura que hace Latorre a partir de varios autores más, la labor docente va conformando una espiral que se lleva a cabo a través de la implementación, la reflexión y una continua mejora para iniciar nuevamente con el ciclo en cada una de las actividades. Lo que, para el docente significa una mejora personal en su labor profesional, y para el alumno le refiere como una elevación en los estándares, no solo de calidad sino del mismo funcionamiento de los trabajos que le pone el docente y él tiene que trabajar.

Técnicas

Al enfocar la propuesta hacia algo mixto (cualitativo y cuantitativo) el catálogo de técnicas que podrían ser utilizadas se extiende. Pero es importante mencionar las técnicas que tendrán mayor relevancia durante el trabajo. Pues entre las características que es fundamental para cualquier docente es la observación, pues a partir de ella podemos llegar a conclusiones sobre, si los alumnos están entendiendo lo que se trata de explicar o en algún punto tenemos que mejorar o desviar nuestra práctica docente para llegar a un mejor término.

Comentarios finales

Diagnóstico del contenido

Revisada la estructura del plan de estudios de secundaria (2011 y 2018), se encontraron muchas carencias respecto al contenido relacionado con el plano cartesiano. Está claro que existen deficiencias en el último grado de secundaria. Por ejemplo, sabiendo que el plano cartesiano se utiliza desde primaria y que en secundaria se trabaja en distintos ejes para abordar ciertos contenidos matemáticos, cómo es posible que los estudiantes sigan confundiendo elementos como, cuál es el eje “x” o el eje “y”. Si se sigue ignorando la explicación de estos elementos que conforman al plano cartesiano, su uso en temas como funciones polinomiales seria de manera inadecuada, trayendo consigo obstáculos al momento de poder visualizar el resultado de las funciones en forma gráfica.

Es una problemática que inclusive hoy en día se sigue presentando de manera recurrente, y fue corroborada cuando de manera rápida se realizó una encuesta a estudiantes normalistas de 3er semestre, preguntando: ¿Qué tema se te dificulto más en el Bachillerato?, dándoles dos opciones a responder, funciones polinomiales (Precálculo) y ecuación de una recta (Geometría Analítica). Revisando las respuestas de 23 normalistas, la encuesta arrojo que a

22 se les complicó el tema de funciones polinomiales mientras que solo a un estudiante se le dificultó el tema de ecuación de una recta en este nivel de Media Superior.

Estos obstáculos que se presentan en el Bachillerato serian generados por una mala conceptualización del plano cartesiano durante el transcurso de la secundaria, de acuerdo a lo que hemos estado revisando. De igual forma recurriendo a los planes y programas de estudio (2011 y 2018) podemos encontrar una sesión en donde se nos hace la “recomendación” de implementar planes de trabajo ya establecidos de alguno de los temas matemáticos más importantes, pero si ningún sustento en cuestión del contexto de los alumnos del cual se basó para la elaboración de dicho plan.

Esta propuesta busca articular los aprendizajes de los estudiantes con situaciones problemas y dilemas reales que enfrentan cotidianamente, generar situaciones que les permitan una comprensión e interpretación de lo que realizan, para que sus aprendizajes de Matemáticas sean funcionales y no meramente como un requisito para obtener el grado escolar. Y es ineludible que se realicen la pregunta del millón ¿Para qué me va a servir? Y que sus propias respuestas se limiten a ejemplos como; para saber cuándo ya estés grande, como para ser ingeniero o contador se necesitan las Matemáticas, para aprender a contar, saber sumar, dividir, etc. porque tal vez más adelante o en un futuro las ocuparemos, para saber hacer la gráfica porque si no sabemos vamos a reprobar algún examen, etc.

Si bien han ocupado las Matemáticas durante todo su trayecto formativo, consideran que algún momento de su vida, las podrán necesitar, cuando ya vayan en un nivel de Bachillerato o Universitario, lo que indica que consideran que el trabajo de funciones polinomiales no son aplicables, relevantes y funcionales en su contexto inmediato real. El tema de la resolución de problemas matemáticos es de gran importancia, pues se ubica dentro del currículo de educación y forma parte de las competencias que los alumnos deben desarrollar. La dificultad no radica únicamente en el conocimiento del estudiante, también en cómo se ha venido trabajando el tema del plano cartesiano.

Y así de relevante es el contenido, la interpretación y la construcción de gráficas elementales deben todavía superar las resistencias de muchos que las consideran como algo poco relevante o, en todo caso, alejado de los principales objetivos de la enseñanza de las matemáticas. Y así de relevante es el contenido, tal y como lo menciona Deulofeu (2001) “la interpretación y la construcción de gráficas elementales deben todavía superar las resistencias de muchos que las consideran como algo poco relevante o, en todo caso, alejado de los principales objetivos de la enseñanza de las matemáticas” (p.376). Hoy en día pareciera que el contenido referente a la graficación, tal y como lo dice Deulofeu, no se le da la importancia necesaria.

Sabiendo que es uno de los temas que más se les complica a los alumnos, precisamente por los obstáculos que se tienen al momento de hacer un análisis visual de alguna gráfica. Así que, cualquier aporte a este tema de investigación, es un aporte a la mejora en la enseñanza del contenido matemático en los alumnos de secundaria. Además que los resultados de esta investigación, quedaría en total disposición de las próximas investigaciones que quieran seguir abordando y aportando al tema. Así que, se esperaría que este estudio sea tomado como referencia de próximas investigaciones, las cuales tengan 14 un planteamiento de objetivos similares o que incluso este estudio pudiera ser complementado al reproducir esta idea en un contexto diferente.

Contexto del grupo con el que se trabajará

El grupo con el que se tiene planeado trabajar esta propuesta es con 3° "A" de la escuela secundaria técnica número 1 "Benito Juárez", con clave 22DST0001T, se encuentra ubicada en la calle Ingenieros, colonia Molinos de la Era, C. P. 76150, Santiago de Querétaro, Querétaro.

Un aspecto de suma importancia para el buen trabajo escolar es, si tienen un espacio asignado específicamente para tomar las clases y realizar sus actividades/tareas, el cual únicamente el 80% del grupo cuenta con ese espacio en sus hogares. Y sobre ello, el 90% cuenta con una buena iluminación y ventilación en esa área de trabajo, aunque solo el 60% declaro que tienen un buen asilamiento del ruido, el cual es de suma importancia para evitar las distracciones y que pongan toda su atención en las labores académicas que tienen que realizar. Y continuando con el tema de las clases virtuales, los estudiantes también expresaron que, debido a las clases mediante plataformas como Meet y/o Classroom, ahora el tiempo que le dedican para estar haciendo la tarea enfrente a una computadora o celular es de más de 2 horas en 80% de los casos.

El último aspecto que se mencionó anteriormente puede ser debido a la forma de trabajo que se ha venido implementando, el cual, por lo menos en la materia de matemáticas, se maneja un grupo en la plataforma de Google Classroom el cual se utiliza para dar avisos y generalmente asignarles de 2-3 taras semanales, las cuales suelen darse plazos de 1-3 días para entregarlos, y con mi integración al trabajo con el grupo, se dio libertad para también utilizar Google Meet y poder dar clases mediante esta herramienta. Esto no sucede en todas las materias pues, al inicio del nuevo ciclo escolar se había acordado que el uso de Meet no tendría que ser obligatorio y la decisión de utilizarlo sería responsabilidad del maestro de la materia.

Sin embargo, en estas semanas se ha transitado hacia una nueva normalidad, la cual consiste en una apertura escalonada a las clases presenciales, la dinámica de otras materias podría verse afectada debido a que, puede ser que se formen dos grupos, el grupo que aceptó ir a clases presenciales y el que aún no está del todo seguro. En el caso de esta materia de matemáticas y con una sincronización y comunicación por parte del docente titular, acordamos que él se encargara de los muchos o pocos alumnos que asistan a la escuela y yo seguiré trabajando mediante estas plataformas que se mencionaron anteriormente, en esta modalidad virtual.

Lo anterior con el fin de que no haya una desincronización o algún estrato del propio grupo se vea menos atendido que el otro, esto haciendo caso a los comentarios por parte de los padres de familia en relación al desempeño que observan en sus hijos en esta asignatura, de la cual expresaron que, a un gran número de alumnos les gusta la materia y que en general han tenido un buen desempeño, aunque es indispensable mantener una orientación en cualquiera de las modalidades. Incluso hubo varios comentarios en donde argumentaban que, debería de haber más sesiones por medio de Meet, para reforzar cualquier conocimiento que aún no haya quedado del todo claro o que, por las prisas se abordó de manera muy superficial.

Esta montaña rusa de emociones de los alumnos, de forma indirecta puede ser que altere o potencie los intereses de esta generación de estudiantes por lo que también fue de interés e importancia recabar esos datos, generalizando dentro de esos intereses los siguientes conceptos: música, noticias, idiomas, inglés, tecnología, programación, deportes, futbol, artes marciales, béisbol, ciclismo de montaña, tocar batería, regreso a clases, comunidad LGBTIQ..., el cuerpo humano, química, cultura chicana, series, la salud, animales, la escuela y las matemáticas. En cuanto a sus pasatiempos, también ha habido cambios, el hacer ejercicio y jugar videojuegos, son los dos pasatiempos que el 70% del grupo declarar realizar en estos tiempos pandemia.

Al intentar adentrarnos a la forma de trabajo que podría ser más conveniente, se optó en la realización de una encuesta VAK y una para saber el tipo de inteligencia que predomina, con el fin de tener un panorama más amplio de lo que es el grupo como conjunto y no tanto como características individuales. Y del cual, en la encuesta VAK resulto que el grupo de 3° "A" predominan los alumnos auditivos, seguidos de los visuales. Y en relación a la encuesta de las inteligencias múltiples, en el grupo predominaron tres tipos, aunque debido a las características que se han venido describiendo, la inteligencia que pareciera predominar por encima de las otras dos es la "intrapersonal" pues aparecen como introvertidos y tímidos. Viven sus propios sentimientos y se auto motivan intelectualmente.

Referencias bibliográficas

Acuña, C. (2001). Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 4(3), 203-217.

Basurto, E. (2013). *Uso de tecnología digital en la comprensión de parámetros en funciones polinomiales.* En Morales, Yuri; Ramírez, A. (Eds.), Memorias I CEMACYC (pp. 1-8). Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC.

Brousseau ches en, G., didactique "Problémes des mathematicues, de didactique des vol. décimaux", 21, Francia, en Recher1981.

Brousseau, G. (2007) *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica*. Buenos Aires: AIQUE.

D´Amore, B., Fandiño, P. M., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2012). *La didáctica y la dificultad en matemáticas*. Bogotá: La imprenta Editores S.A.

D'Amore, B. (2000). Sobre la Preparación Teórica de los Maestros de Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 3(1), 33-45. Consultado de https://www.researchgate.net/publication/28130271_Sobre_la_preparacion_teorica_de_los_maestros_de_matematicas.

De Márquez, A. T. (2008). La reflexión, la contestación, la proposición y la acción como espacios indispensables en el contexto áulico. Educere, 12(43), 697- 705.

Deulofeu, J. O. R. D. I. (2001). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? Aportaciones de investigación. X Jornadas para la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas, X JAEM, Zaragoza. Ponencia P41, 367- 377.35.

Elliott, J. (2005). La Investigación - acción en educación. Madrid: Morata.

Farfán, R. (2013). Lenguaje gráfico de funciones. Elementos de Precálculo (Vol. 1). DF, México: Secretaría de Educación Pública.

Latorre, A. (2003). La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa. España: GRAÓ.

Polya, G. (2008). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Polya, G. (1978). Cómo Plantear y Resolver Problemas. México: Editorial Trillas.

SEP. (2018). Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación Secundaria. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación. México: SEP.

Viloria, N., & Godoy, G. (2010). Planificación de estrategias didácticas para el mejoramiento de las competencias matemáticas de sexto grado. Investigación y Postgrado, 25(1), 95-116.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen IX Número 1 Fecha: enero-junio de 2021

ISSN: 2395-955X

APRENDER ÁLGEBRA JUGANDO: EL CASO DEL *DRAGON BOX*

José Carlos Cortés, Karolyn Martínez

jcortes@umich.mx, kaarooh_ngt@icloud.com

Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo

Para citar este artículo:

Cortés, J. C., Martínez, K. (2021). Aprender álgebra jugando: el caso del *DRAGON BOX*. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. IX, No. 1, pp. 47-56. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año IX, No. 1, enero-junio de 2021, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

APRENDER ÁLGEBRA JUGANDO: EL CASO DEL *DRAGON BOX*

José Carlos Cortés, Karolyn Martínez

jcortes@umich.mx kaarooh_ngt@icloud.com

Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo

Resumen

La introducción al álgebra escolar requiere de un cambio en el pensamiento del estudiante, es por esto, que los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de algebra juegan un papel muy importante a considerar dentro de las propuestas de enseñanza. Simultáneamente, en el rubro matemático, el reflexionar sobre las relaciones de la Didáctica de las Matemáticas con la práctica de la enseñanza impulsan a incorporar herramientas que la faciliten y la fortalezcan. Una de estas, y la que más podría ser considerada versátil y útil, es la incorporación de herramientas tecnológicas dentro de la enseñanza de las Matemáticas. En este trabajo daremos una propuesta para la adquisición de nociones algebraicas mediante el uso de un software educativo llamado ***Dragon Box 12+*** usando como motivación las tendencias de enseñanza que incorporan tecnología.

Palabras Clave: *Tecnología, álgebra, DragónBox*

ABSTRACT

The introduction to school algebra requires a change in the student's thinking, which is why the cognitive processes involved in learning algebra play a very important role to consider within the teaching proposals. Simultaneously, in the mathematical area, reflecting on the relationships of the Didactics of Mathematics with the practice of teaching encourages the incorporation of tools that facilitate and strengthen it. One of these, and the one that could be considered the most versatile and useful, is the incorporation of technological tools within the teaching of Mathematics. In this work we will give a proposal for the acquisition of algebraic notions through the use of educational software called ***Dragon Box 12+*** (Kahoot DragonBox AS 2021. All Right Reserved.), Using teaching trends that incorporate technology as motivation.

Keywords: Technology; algebra, DragonBox

Introducción

Sabemos que, la tecnología llegó para ayudar a resolver múltiples cuestiones, una de ellas es la enseñanza del álgebra. A través del paso del tiempo, se ha buscado implementar herramientas que sean de ayuda para esta misión. ***Dragon Box 12+,*** surgió con el fin de que la enseñanza del álgebra pueda ser atractiva para los estudiantes de matemáticas, su razón de ser diseñada e implementada en las clases de matemáticas es para que pueda crearse un aprendizaje significativo.

Dentro de este software, podremos encontrar lo que puede ser una gran herramienta de apoyo para introducir a los jóvenes dentro del mundo del álgebra.

Profundiza en conceptos algebraicos avanzados. Los temas que cubren en la aplicación son: suma, división, multiplicación, paréntesis, signos positivos / negativos, suma de fracciones (denominador común), colección de términos semejantes, factorización y sustitución.

El objetivo específico de esta experimentación es, ir escalando en los niveles de esta aplicación, para que se completen ambos lados del juego. Todo esto, con el fin de que, al finalizarlos, puedan seguir con expresiones similares a las que previamente hayan tenido contacto, y así puedan "abandonar" el uso de ***Dragon Box*** para que la resolución de dichas expresiones pueda ser autónoma. Busca que se logre aprender nociones algebraicas para que sirvan como una buena base y transición hacia el álgebra formal.

Así mismo, la tecnología supone un gran reto para todos los actores que estén involucrados en la práctica educativa. Principalmente, para el profesor y el alumno suponen el reto más grande. Para el docente, supone una serie de retos, donde su concepción didáctica acerca del uso de nuevas tecnologías intervendrá para su aplicación. Para el alumno, supone primordialmente el uso de dicha herramienta, para que pueda llegar, mediante la guía del profesor, a una génesis instrumental, y pueda manejar las nuevas tecnologías como una poderosa herramienta en su aprendizaje.

Referente teórico

Este apartado lo empezaremos al intentar definir qué es álgebra, lo cual no es una tarea fácil. No es solo resolver ecuaciones, ni encontrar un resultado. Introducirnos al álgebra conlleva un conjunto de procesos mentales, como lo es generalizar, representar, reconocer y formalizar patrones, resolver problemas y hasta modelar situaciones.

Esto se puede entender mejor con lo que el NCTM (2000) afirma:

Los estudiantes necesitan comprender (del álgebra) sus conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de símbolos y cómo pueden usarse estos para registrar ideas y comprensión de las situaciones. (Pág. 39)

Bednarz, Kieran y Lee (1996) distinguen cinco concepciones diferentes referentes al álgebra:

a) El álgebra como expresión de la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas,
b) El álgebra como una herramienta para la resolución de problemas,
c) Como la modelización de fenómenos físicos, usando variedad de representaciones y
d) El álgebra como el estudio de las funciones.

Kieran (2007) menciona que: El razonamiento algebraico puede interpretarse como una aproximación cuantitativa a las situaciones que hace hincapié en los aspectos generales de relaciones con herramientas que no son necesariamente literal-simbólico, pero que, en última instancia, puede ser utilizado como apoyo cognitivo de creación y para sostener el discurso más tradicional de la escuela sobre el álgebra (p. 275). Por su parte Carraher y Schliemann (2007) mencionan que el razonamiento algebraico se refiere a un proceso psicológico que involucra resolución de problemas que pueden ser expresados matemáticamente de manera fácil usando notación algebraica.

Para vencer estas dificultades y crear una transición sólida, hacemos uso de distintas herramientas, una muy poderosa, es la tecnología. Necesitamos formar nuevos esquemas, usos y conexiones del álgebra con la vida real y esta tarea resulta complicada desde cualquier punto de vista.

La imagen del álgebra de despejar letras, resolver ecuaciones y de aprender a manipular signos, es esa a la que todos convergen. En esta ocasión, con ayuda de la tecnología, empezaremos a trabajar con una nueva perspectiva de ver al álgebra, una divertida. No buscamos que los estudiantes memoricen procedimientos, que sólo vean como manipular cadenas de símbolos, ni que sólo resuelvan problemas superficiales que no tienen ningún interés para ellos. La primera tarea que queremos resolver, es que los estudiantes se familiaricen con el lenguaje algebraico, después que puedan manipularlo, más adelante que entiendan las reglas y, por último, que puedan avanzar al álgebra formal.

El iniciar con el lenguaje algebraico, nos referimos a que puedan representar lo que sea que se les venga en mente, ya sea un número, una persona, una cantidad, es decir lo que sea, y utilizamos símbolos. Por ejemplo, cómo podemos representar la operación 2+2=4. Primero seleccionamos un símbolo que representa una unidad, por ejemplo, un triángulo (Δ). Entonces tendremos $\Delta\Delta + \Delta\Delta = \Delta\Delta\Delta\Delta$ o por ejemplo si tenemos 2x+4y, seleccionamos símbolo para x y símbolo para y $x = \Delta; \quad y = \Theta$ entonces tendremos $2\Delta + 3\Theta$. Tenemos que seleccionar también la unidad negativa. Es decir, deberemos de construir una serie desimbologías, sus negativos sus agrupaciones etc. En el caso de ***Dragon Box*** utiliza fichas que tienen símbolos diversos como los que se muestran abajo.

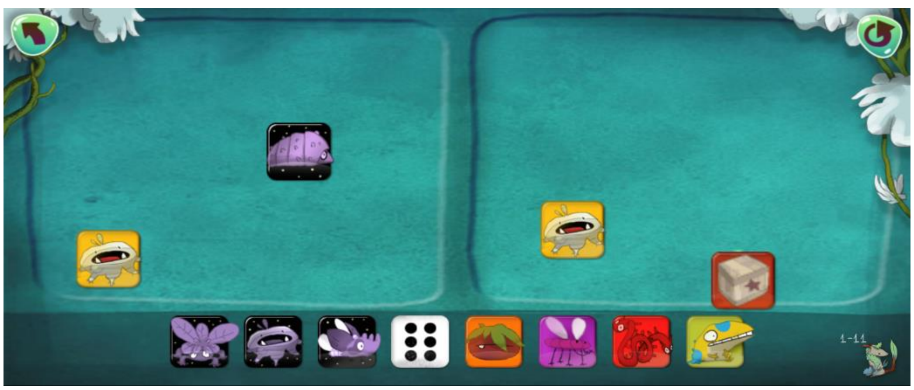


Figura 1. Diferentes símbolos que se utilizan.

Las unidades negativas tienen el mismo símbolo pero diferente color, también se tienen figuras de dados con las unidades y posteriormente se trabaja con expresiones matemáticas:

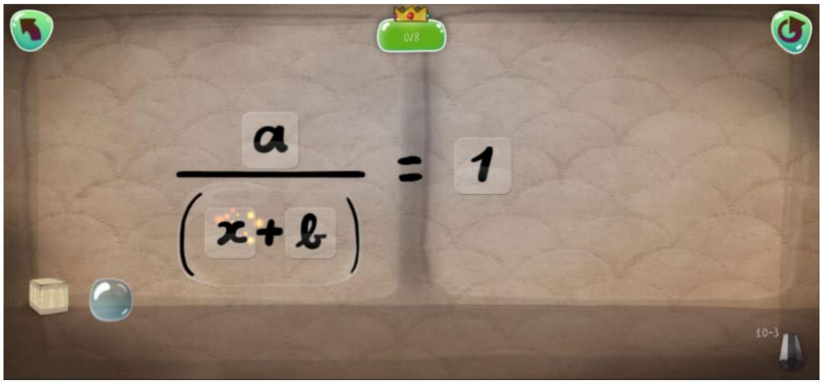


Figura 2. Uso de expresiones matemáticas.

Cómo podrá verse en las figuras anteriores se presenta un tablero divido en dos, esto simula que tenemos una ecuación y que el trabajo por desarrollar consiste en el balance de cada lado, quitando o agregando lo necesario.

Dragon Box es un manipulador digital. Comienza con dos paneles orientados hacia la izquierda y hacia la derecha respectivamente, en cada panel encontramos una caja (presumiblemente que contiene un dragón) y varias cartas con personajes, cada una de ellas con su inverso, la carta de "día" tiene por su inverso a su respectiva carta de "noche". Con estas cartas, se realizan las interacciones necesarias, o, mejor dicho, las operaciones necesarias para dejar a la caja aislada en un panel para que el dragón contenido en ella pueda alimentarse de las tarjetas en el panel opuesto.

Figura 3. Caja que contiene al Dragón.

Así, el jugador se familiariza en los primeros niveles con operaciones básicas de sumas, pasando posteriormente y de forma suave al aprendizaje de fracciones. El sistema es siempre el mismo, superar los niveles con el mínimo de movimientos que nos sea posible. ***Dragon Box*** también cuenta con dos lados dentro de la aplicación, el primero es en donde aprenderemos las nociones algebraicas a través del juego, el cual está dividido en diez mundos (o capítulos), con 20 niveles en cada uno. Cada capítulo trata de un tema los cuales son:

1) Suma; 2) División; 3) Multiplicación; 4) X como denominador; 5) Signos; 6) Desarrollo; 7) Factorización; 8) Semejantes; 9) Fracciones y 10) X en el denominador

En el lado B, encontraremos exactamente la misma dinámica de juego y con los mismos temas, pero ahora se realizarán los niveles con tarjetas que contienen exclusivamente números y letras. Resolvemos los niveles a partir de interacciones con el software, las cuales llamaremos acciones.

Diseño de la propuesta

La propuesta que se diseñó fue dividir en sesiones los capítulos del software, para así trabajarlos con el grupo y lograr un aprendizaje y producción en cada sesión. Está dividida en 8 sesiones:

Sesión	capítulo	Niveles	Tarea
1	Diagnóstico	-	-
2	1 y 2	Lado A1: 1, 3, 8, 9, 10, 13, 16, 19. Lado A2: 1, 2, 5, 6, 10, 11, 19.	Lado B de ambos capítulos
3	3 y 4	Lado A3: 1, 2, 5, 6, 7, 10, 17. Lado A4:1, 4, 6, 8, 14, 18.	Lado B de ambos capítulos
4	5 y 6	Lado A5: 1, 4,5, 9, 18. Lado A6: 1, 2, 5, 7, 9, 16.	Lado B de ambos capítulos
5	7 y 8	Lado A7: 1, 4, 5, 10, 14, 20. Lado A8:1, 2, 9, 14, 16.	Lado B de ambos capítulos
6	9 y 10	Lado A9: 1, 3, 5, 14, 18. Lado A10: 1, 3, 4, 6, 12, 17.	Lado B de ambos capítulos
7	Sesión pizarrón	-	-
8	Evaluación final	-	-

En la primera sesión se realizó un diagnóstico, en el que pudimos absorber información que indicaba que el manejo del álgebra era casi nulo, por lo que el usar ***Dragon Box***, denotaba que podría ser de ayuda para que los alumnos pudieran adquirir las nociones básicas necesarias.

Las siguientes sesiones el grupo se trabajó directamente con ***Dragon Box***, cada sesión fue de una hora a la semana, cada estudiante contaba con Tablet y el software instalado en ella. La forma en que se trabajo fue: el profesor daba la instrucción dejaba un determinado tiempo para que cada alumno trabajara en su tableta resolviendo los ejercicios propuestos para cada sesión y los que no terminaban se lo llevaron de tarea.

Las sesiones que no se alcanzaron a realizar fueron la 6, 7 y 8.

Resultados

Debido a que la experimentación del plan diseñado, (el cual consistía en diez sesiones de trabajo las cuales iniciaban y terminaban con una evaluación), se inició 45 días antes de que se cerraran las aulas debido a la pandemia no se pudo concluir en su totalidad. Dicha evaluación era el principal indicador del avance cognitivo matemático que desarrollaron los estudiantes al interactuar en las demás sesiones con ***Dragon Box***.

En las sesiones efectuadas, se realizó la evaluación inicial, pero no se alcanzó a realizar la evaluación final, que era la misma pero ahora si reflejando el manejo algebraico que les proporcionó la aplicación. Los resultados evaluados reflejan solo una parte de lo esperado. A pesar de esto, lo que se observó en el aula en relación al trabajo de cada estudiante con la aplicación permite decir que es de gran ayuda la aplicación.

Lo que queríamos probar era que, un software atractivo que es diseñado para adquirir algún tipo de aprendizaje matemático, puede ser incluido como una experiencia de aprendizaje para estudiantes y que además de verdad sea un factor de aprendizaje y no solo de foco de atención.

Durante las sesiones de aprendizaje pudimos observar que los aprendizajes que figuraron fueron los siguientes:

- Calcular con fluidez y con números de varios dígitos y encuentre factores comunes y múltiplos.
- Encontrar el máximo factor común de dos números enteros menores a 100 y el mínimo común múltiplo de dos números enteros menores que 12. Utilizar la propiedad distributiva para expresar una suma de dos números del 1 al 100 con un factor común como múltiplo de una suma de dos números enteros sin factor común. Por ejemplo, exprese 36 + 8 como 4 (9 + 2).
- Aplicar y ampliar conocimientos previos de aritmética a expresiones algebraicas.
- Escribir, leer y evaluar expresiones en las que letras representan números.
- Aplicar las propiedades de las operaciones para generar expresiones equivalentes. Por ejemplo, aplique la propiedad distributiva a la expresión $3(2+x)$ para producir la expresión equivalente $6+3x$; aplicar la propiedad distributiva a la expresión $24x+18y$para producir la expresión equivalente $6(4x+3y)$; aplicar propiedades de operaciones a $y+y+y$ para producir la expresión equivalente $3y$.
- Razonar y resolver ecuaciones de una variable y desigualdades.
- Identificar cuando dos expresiones son equivalentes (es decir, cuando las dos expresiones nombran el mismo número independientemente de cuyo valor se sustituye en ellos).
- Usar variables para representar números y escribir expresiones al resolver un problema matemático o del mundo real; entender que una variable puede representar un número, o, dependiendo del propósito en cuestión, cualquier número en un conjunto especificado.
- Resolver problemas matemáticos y del mundo real, escribiendo y resolviendo ecuaciones de la forma $x+p=q$ y $px=q$ para los casos en donde p, q y x son todos números racionales no negativos.
- Entender la resta de números racionales como la suma de inverso aditivo, $p-q=p+(-q)$. Muestra que la distancia entre dos números racionales en la recta numérica es el valor absoluto de su diferencia, y aplicar este principio en contextos del mundo real.

- Resolver problemas matemáticos y del mundo real que involucren cuatro operaciones con números racionales.
- Utilizar las propiedades de las operaciones para generar expresiones equivalentes.
- Aplicar propiedades de operaciones como estrategias para agregar, restar, factorizar y expandir expresiones lineales con coeficientes racionales.
- Resolver problemas matemáticos y de la vida real utilizando expresiones y ecuaciones algebraicas.
- Resolver problemas matemáticos y de la vida real con números racionales positivos y negativos en cualquier forma (números enteros, fracciones y decimales), usando herramientas estratégicamente. Aplicar propiedades de operaciones para calcular con números en cualquier forma; convertir entre formas como apropiado; y evaluar la razonabilidad de las respuestas usando estrategias de cálculo y estimación mental. Utilizar variables para representar cantidades en un mundo real o problema matemático y construir ecuaciones simples y desigualdades para resolver problemas razonando sobre cantidades.
- Resolver problemas verbales que conducen a ecuaciones de la forma: $px+q=r$ y $p(x+q)=r$, donde p, q y r son racionales específicos números. Resuelve ecuaciones de estas formas con fluidez.
- Comparar una solución algebraica con una solución aritmética, identificando la secuencia de las operaciones utilizadas. Resolver ecuaciones lineales en una variable. Dar ejemplos de ecuaciones lineales en una variable con una solución, infinitas soluciones o ninguna solución. Mostrar cuál de estas posibilidades es el caso sucesivamente transformar la ecuación dada en formas más simples, hasta que una ecuación equivalente de la forma $x = a, a = a, a \neq b$ resultados (donde a y b son números diferentes).
- Resolver ecuaciones lineales con coeficientes de números racionales, incluyendo ecuaciones cuyas soluciones requieren expandirse expresiones que utilizan la propiedad distributiva y recopilan términos similares.
- Explicar cada paso para resolver una ecuación simple como sigue de la igualdad de números afirmada en el paso anterior, partiendo del supuesto de que la ecuación original tiene una solución. Construya un argumento viable para justificar una solución.
- Resolver ecuaciones racionales y radicales simples en una variable, y dar ejemplos que muestren cómo las soluciones extrañas pueden surgir.
- Resolver ecuaciones lineales y desigualdades en una variable, incluyendo ecuaciones con coeficientes representados por letras.

Conclusiones

El plan que diseñamos se inició como 45 días antes de la pandemia, consistía en una secuencia de diez sesiones de trabajo las cuales iniciaban y terminaban con una evaluación. Dicha evaluación era muy importante ya que era un indicador del avance cognitivo matemático que desarrollaron los estudiantes al interactuar con ***Dragon Box***.

Debido a la pandemia no se pudieron concluir todas las sesiones, se realizó la evaluación inicial (como era de esperar tuvo resultados muy negativos), pero no se alcanzó a realizar la evaluación final, de hecho se realizaron solo 6 sesiones, pero de lo que el profesor observó en cada estudiante el trabajo con ***Dragon Box***, fue de fácil navegabilidad y los estudiantes realizaban los ejercicios con soltura y pocos errores. Por lo que concluimos que ***Dragon Box*** es una buena herramienta para la enseñanza de la operatividad en álgebra. Los estudiantes entendieron el proceso de sumar y restar; de que es necesario agregar lo mismo a un lado y otro; de agrupar; de dividir entre términos semejantes y de expandir entre otras cosas.

Dragon Box tiene una interfaz intuitiva de fácil manejo, ya que su menú está bien diseñado para encontrar justo lo que se busca, el diseño cumple con ser atractivo. Los gestos que se tienen que utilizar son bien explicados y fáciles de realizar. Los niveles van escalando de dificultad, y está muy completa, los niveles son suficientes, pero no muchos como para abandonarlos. A parte, el lado B complementa muy bien al lado A para hacer un buen cambio de símbolos a lenguaje matemático.

Referencias.

Bednarz N., Kieran C., Lee L. (1996) Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. In: Bernarz N., Kieran C., Lee L. (eds) *Approaches to Algebra.* Mathematics Education Library, vol 18. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_1

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research in mathematics education (pp. 669-705)*. Greenwich, United Kingdom: Information Age Publishing.

Dragon Box Algebra 12+. Software para álgebra. Kahoot DragonBox AS 2021. All Right Reserved.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390–419). Macmillan Publishing Co, Inc.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning (vol. 2, pp. 707-762)*. Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc., NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen IX Número 1 Fecha: enero-junio de 2021

ISSN: 2395-955X

DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS Y USO DE TECNOLOGÍA CON DOCENTES DE BACHILLERATO

Arturo Bueno Tokunaga, Noelia Londoño Millán, José Luis Véliz Torres, Juan Josué Enciso Cárdenas

arturobueno@uadec.edu.mx, noelialondono@uadec.edu.mx, jose.veliz@uadec.edu.mx, jenciso@uadec.edu.mx

Universidad Autónoma de Coahuila

Para citar este artículo:

Bueno, A., Londoño, N., Véliz, J. L., Enciso, J. (2021). Desarrollo de competencias matemáticas y uso de tecnología con docentes de bachillerato. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. IX, No. 1, pp. 57-76. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año IX, No. 1, enero-junio de 2021, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS Y USO DE TECNOLOGÍA CON DOCENTES DE BACHILLERATO

Arturo Bueno Tokunaga, Noelia Londoño Millán, José Luis Véliz Torres, Juan Josué Enciso Cárdenas

arturobueno@uadec.edu.mx, noelialondono@uadec.edu.mx, jose.veliz@uadec.edu.mx, jenciso@uadec.edu.mx

Universidad Autónoma de Coahuila

Resumen

El presente artículo está orientado a documentar los resultados obtenidos al implementar una metodología didáctica que promoviera el desarrollo de competencias matemáticas y uso de tecnología con profesores de bachillerato. Esta investigación tuvo lugar en Nueva Rosita Coahuila, en la cual participaron 25 docentes de Enseñanza Media Superior (EMS), estos contaban con experiencia docente y con una carrera profesional. La metodología didáctica consistió en diseñar y aplicar un conjunto de problemas en contexto que incluía un diagnóstico y varias tareas matemáticas que los docentes debían analizar, desarrollar, discutir, comunicar, para finalizar con una institucionalización. Parte de los resultados fueron los siguientes: en el diagnóstico se identificaron varias áreas de oportunidad en el uso de las distintas representaciones, así como también en la apropiación de los conceptos matemáticos involucrados. A medida que el proyecto avanzó pudo percibirse un avance significativo del desempeño de los docentes en los temas de variación y uso de tecnología, y en competencias matemáticas, de lo cual daremos cuenta en los párrafos siguientes.

Palabras clave: múltiples representaciones, competencias docentes, variación, problemas en contexto.

Abstract

This paper aimed to document the results obtained by implementing a didactic methodology that promotes the development of mathematical competencies and the use of technology in high school teachers. This research took place in Nueva Rosita Coahuila; Twenty-five teachers of Upper Secondary Education (High School) participated. They all had a teaching degree and teaching experience. The didactic methodology consisted of designing and applying a set of problems that included a diagnosis and various mathematical tasks that teachers had to analyze, develop, discuss, communicate, and get to an institutionalization. As part of the results, we identified several opportunities, using the different representations and the appropriation of the mathematical concepts involved. As the project progressed, we observed a significant advance in the teacher's performance in the subjects of variation, use of technology, and mathematical competencies, which we will report in the following paragraphs.

Keywords: multiple representations, teaching competencies, variation, problems in context.

Introducción

Varios países buscan elevar el nivel de logro académico de todo el estudiantado, en lo referente a los aprendizajes esperados del área de matemáticas, el propósito en el mundo actual es, que el alumno logre desarrollar sus competencias en el área de matemáticas, ya que eso le permitirá argumentar y estructurar de mejor manera sus juicios, ideas y razonamientos. Uno de los conceptos matemáticos importantes donde los alumnos presentan dificultades, no solo para comprender, sino también para identificar es el concepto de variación, por lo que es una problemática que se debe atender.

Con el fin de impactar en esta problemática, se plantea una propuesta metodológica basada en la teoría de las representaciones semióticas y la resolución de problemas en contexto (RP) y con ello propiciar el desarrollar competencias en los docentes del bachillerato, la metodología consiste en resolver problemas reales en contexto, en los que los docentes puedan incorporar una metodología que incluya: diagnóstico, uso de software, exploración, socialización, resolución de problemas, institucionalización y planteamiento de nuevos problemas.

Además, en un mundo globalizado con avances diarios en la tecnología, es importante y de gran ayuda la incorporación de ésta en el trabajo áulico, y sobre la base del modelo STEAM (*Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics)*, el cual brinda otras alternativas para visualizar más y mejor, permitiendo al estudiante herramientas y oportunidades para la comprensión, comunicación, argumentación y solución de problemas, además, propicia el tránsito entre los distintos RSR, lo que lleva hacia la aprehensión y asimilación del concepto que está en proceso de aprendizaje. Para el área del cambio o variación, que tiene la particularidad de utilizar distintos RSR. y que incide en las actividades esenciales del conocimiento como lo son: la conceptualización, el razonamiento, la RP y la comprensión de enunciados, generando así actividades fundamentales para el aprendizaje.

En el tema de variación matemática, las acciones deben ser detonantes para que el aprendizaje de los alumnos pueda ser aplicado en su contexto y esto fundamenta la metodología didáctica implementada en este trabajo de investigación.

En el ámbito nacional, se observan los resultados emitidos por la SEP (2017), dentro del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA), publicados en 2015 y 2016, dicha evaluación es el examen estandarizado que sustituye al examen ENLACE y los resultados que ahora se reportan (Figura 1), siguen indicando bajos índices de aprovechamiento de los alumnos mexicanos en el nivel bachillerato y el nivel de logro de nuestros estudiantes (casi el 50%), los clasifican en el "Nivel I", (el cual es el más bajo).

Comparativo 2015-2016

PLANEA MEDIA SUPERIOR 2015
RESULTADOS NACIONALES
MATEMÁTICAS

NIVEL DE DOMINIO	NÚMERO DE ALUMNOS EVALUADOS *	PORCENTAJE DE ALUMNOS DEL ÚLTIMO GRADO EN CADA NIVEL DE DOMINIO
I	526,919	51.3
II	307,013	29.9
III	126,850	12.4
IV	66,234	6.4
TOTAL	1,027,016	100

PLANEA MEDIA SUPERIOR 2016
RESULTADOS NACIONALES
MATEMÁTICAS

NIVEL DE LOGRO	PORCENTAJE DE ALUMNOS DEL ÚLTIMO GRADO EN CADA NIVEL DE LOGRO
I	49.2
II	30.0
III	14.4
IV	6.3
TOTAL	100.0

Figura 1. Resultados publicados (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación).

Referentes teóricos

Tanto importa el dominio del área del conocimiento matemático como las competencias docentes, estos dos aspectos se consideran esenciales para el ejercicio de la profesión, en cualquiera que sea el nivel escolar al que este dirigido, a este respecto nuestra idea es coincidente con los planteamientos hechos por Dolores, et al., (2014).

> Partimos de que el objetivo general de la formación profesional es desarrollar competencias para que los futuros profesores puedan propiciar o producir aprendizaje de la matemática. Para que esto sea posible es necesario dominar el saber matemático, conocer cómo aprenden los estudiantes y, sobre estas bases, poder utilizar o diseñar los métodos, procedimientos y medios didácticos que posibiliten el aprendizaje. Por tanto, la formación del profesor de Matemáticas se articula sobre la base de tres áreas fundamentales: matemática, pedagógica y docente (Dolores, et al., 2014, pág. 7).

Dado lo vasta que es la lista de competencias docentes, se hace necesario precisar el tipo de competencia al que se hará referencia en este artículo, en particular se abordaran dos, por un lado lo que respecta al dominio del uso de la tecnología y por otro el dominio matemático referido específicamente a tema de variación analizado desde distintos registros de representación, ya que estos elementos se conciben como parte fundamental de una estructura que permite darle sentido a los procesos de enseñanza en todos los niveles en particular en el medio superior.

Las competencias docentes de las que se hablarán tienen que ver con lo referido sobre “Organizar y animar situaciones de aprendizaje” planteado por Perrenoud (2000). En esta competencia se espera que el docente conozca la disciplina que debe enseñar, también hace alusión al quehacer pedagógico el cual implica tener capacidad para enunciar los objetivos de aprendizaje, conocer los errores de los estudiantes para trabajar sobre ellos, así como también que el docente pueda crear secuencias didácticas y proponer proyectos o investigaciones en los cuales los alumnos se conviertan en actores principales del proceso de aprendizaje. En lo referente al contexto matemático se contempla el estudio de la variación y los elementos que la componen.

Sobre la variación

La variación es uno de los temas centrales que se deben estudiar en matemáticas es considerado dentro de las matemáticas importantes que deben incluirse en todo currículo en los distintos niveles educativos (NCTM, 2000). Aunque este concepto sea utilizado mayormente en cálculo, es pertinente promoverse desde edades tempranas para que se logre su apropiación y pueda aplicarse en diferentes contextos, (SEP, 2019). Conocer sobre la variación permite el acercamiento a muchos temas de matemáticas ahí radica su importancia y como es casi imposible hablar de constructos matemáticos particularmente de la variación sin incluir las representaciones semióticas, aunque este no es un tratado de ellas dedicaremos un parte del documento para explicar desde que contexto se estuvieron utilizando.

¿Qué es una representación semiótica?

En el proceso de enseñanza de las matemáticas juega un papel concluyente el uso de símbolos, signos, gráficas, expresiones algebraicas, tablas figuras geométricas, lenguaje natural, entre otras. El uso de estos distintos signos y símbolos permite que se tengan elementos o herramientas para explicar un concepto matemático abstracto, (en particular el de variación) y quien aprende pueda asociar, juntar, convertir, esos elementos para comprender el concepto matemático. Desde esta perspectiva las representaciones semióticas son los medios o vías usados para dar a conocer o para entender un contenido o concepto matemático. Dada la naturaleza de constructos matemáticos se hace necesario usar distintas herramientas para acceder a ellos. Desde el punto de vista de Duval (1999) al comparar las herramientas con las que cuenta las matemáticas frente a otras áreas como la biología, física etc. expone:

> Los objetos matemáticos no son objetos reales, como pueden ser los propios de la biología y la física que pueden ser manipulables. De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría (Duval, 1999, p. 140).

En la enseñanza de las matemáticas es frecuente que se privilegie un registro de representación semiótico más que otros, bien sea porque se desconocen los demás, o porque algunos son más accesibles. También sucede que la mayor preocupación en muchos casos es concluir un programa prediseñado, y resulta más fácil, tratar de enseñar únicamente representaciones mentales. Lográndose con esto que se confunda el objeto que se quiere enseñar con su representación; en este sentido Duval (1993) indica que el uso exclusivo de uno y solo un registro de representación, restringe “el desarrollo de representaciones mentales, el cumplimiento de funciones cognitivas, así como también la producción de conocimientos”. Por lo que puede considerarse que un proceso educativo con estas características no contribuye a que se den las herramientas suficientes para que el alumno construya y se apropie de un conocimiento en forma consistente.

Rescatando las diferentes representaciones con las que se cuenta vale la pena considerar lo que plantea Kaput: "No hay actividad matemática significativa posible sin las formas materiales para su expresión". Kaput (1987), citado por Duval (1999) (la traducción es nuestra). Quien enseña debe ser consciente que estas formas materiales de las que se hablan son necesarias, pero no constituyen el objeto del conocimiento en sí mismo.

Transformaciones fundamentales en los registros semióticos

Al mencionar la teoría de las representaciones se considera como una necesidad referirse a dos transformaciones fundamentales, definidas por Duval: la primera de ellas es el *tratamiento* (transformación interna) definida así: "*Es la transformación de una representación en el registro mismo donde ha sido formada*", *Duval (1993) p. 121.* Desde luego que el tipo de transformación (tratamiento) que se haga debe obedecer a las necesidades que surjan en la consecución de un concepto, o solución de un problema esto estará determinado por el uso y no por reglas preestablecidas. A continuación, se muestra un esquema que hace alusión a los dos procesos mencionados.

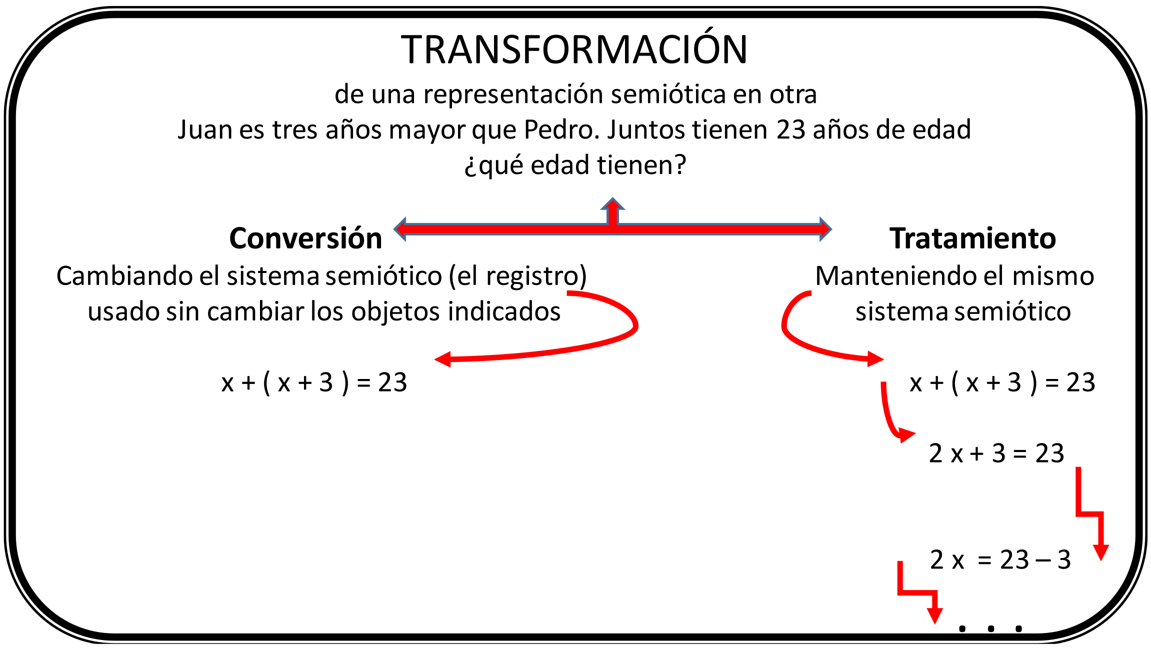


Figura 2. Esquema de los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento dentro de la teoría de representaciones.

Una segunda transformación fundamental de una representación es la *conversión* denominada también transformación *externa*; tiene que ver con el cambio entre diferentes registros de representación, que bien pueden ser verbales, gráficos, tablas y algebraicos. Aquí se requiere que la nueva representación a utilizar conserve las características del objeto. Como un ejemplo de la transformación externa se harán diferentes registros de representación de la función lineal. Es necesario dejar en claro que los distintos registros empleados no definen la función lineal, solamente son representaciones de ella.

$$y = 2x + 1$$

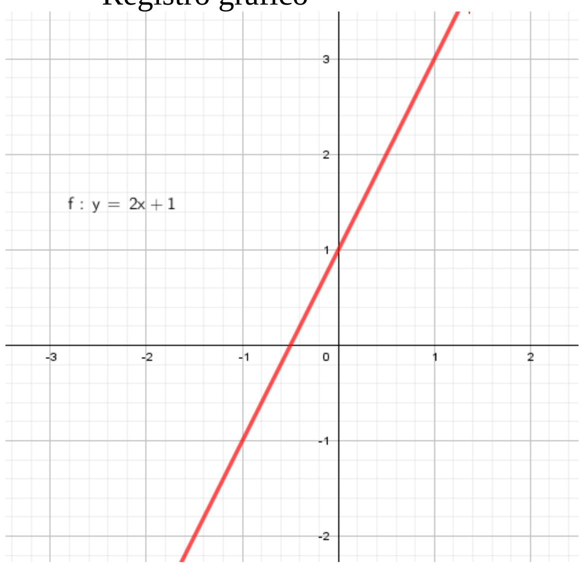
Tabla 1.

Tres distintos registros de representación de una misma función lineal.

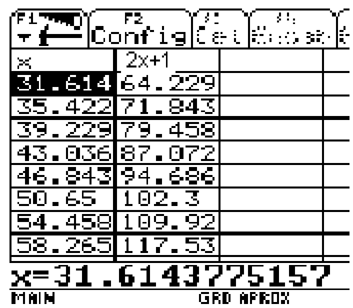
Registro algebraico

$$f(x) = 2x + 1$$

Registro gráfico



Registro tabular



x	2x+1
31.614	64.229
35.422	71.843
39.229	79.458
43.036	87.072
46.843	94.686
50.65	102.3
54.458	109.92
58.265	117.53

x=31.6143775157

Aunque no es un requisito realizar todas las transformaciones entre los diferentes registros de representación posibles de un mismo constructo matemático, este resultará más entendible en la medida que se tenga dominio de las diferentes transformaciones y el uso de las reglas de procesamiento que entre ellas exista, la figura 3 representa las diferentes formas en que pueden interactuar los registros semióticos de representación en lo que concierne a la conversión.

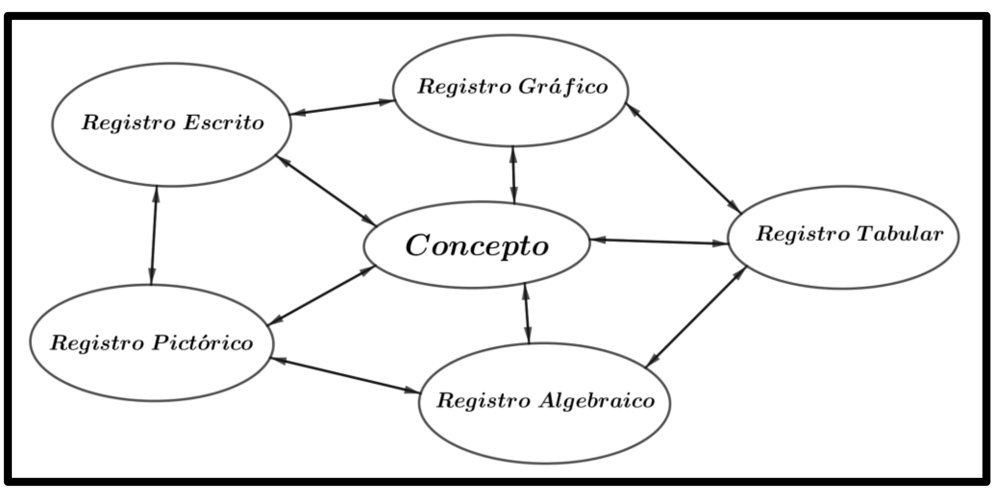


Figura 3. Interacciones entre distintos registros semióticos de representación.

Metodología

Cada uno de los elementos descritos anteriormente referidos a las representaciones se consideran pertinentes y necesarios en el dominio de los docentes en ejercicio, aunque el conocerlos no implica su uso, sí proporcionan más herramientas que le ayudarán a tomar decisiones importantes a la hora de impartir las clases. En este sentido y considerando que la elección y el uso de la tecnología debe ser un factor fundamental y predominante, durante el desarrollo de este proyecto de investigación se impartieron cursos de manejo de software tales que permitieran precisamente vincular diferentes registros de representación, entre ellos software de matemáticas dinámicas de GeoGebra, el uso del Excel, la calculadora graficadora Casio y también el uso de sensores.

Participantes en el estudio. En esta investigación participaron 25 maestros de matemáticas en ejercicio del nivel bachillerato de diversas escuelas de la zona norte del estado de Coahuila, México, todas las actividades se llevaron a cabo en una preparatoria pública, cada docente fue invitado a las sesiones de trabajo durante los meses de septiembre, octubre y noviembre de 2019. En el marco del "Diplomado en Desarrollo en Competencias Matemáticas". Al indagar acerca de sus profesiones se obtuvo en su mayoría son ingenieros 68% y el 24% cuenta con estudios de maestría, aunque hay personas con una carrera no afín ni a la docencia ni a la disciplina, estos resultados locales son coincidentes, en lo referente al perfil profesional expuesto por Martínez, (2007). La información obtenida se concentró en la tabla 2.

Tabla 2.

Perfil académico de los docentes participantes en el estudio. Fuente: elaboración propia.

Licenciatura	Ingeniería	Maestría	Licenciaturas no afines al área de matemáticas
1	17	6	1

Diseño de los instrumentos. Los instrumentos aplicados fueron de dos tipos, el primero fue un diagnóstico conformado por problemas de variación, que requerían la identificación de dos registros de representación el grafico y el icónico; mientras que los segundos estuvieron conformados por el diseño de las actividades para las cuales se tomó en cuenta el currículo de la SEP (2019) de la E. M. S., de la asignatura matemática IV que es "pensamiento y lenguaje variacional" y el contenido es "tratamiento de las representaciones del cambio en distintos contextos", dichas actividades para que los docentes mostraran sus esquemas sobre la variación aplicada en distintos contextos, además de que, tuvieran la oportunidad de buscar la solución apoyándose con los registros de representación y el uso de materiales didáctico concreto (Tabla 3); por cuestiones de espacio aquí solo abordaremos la actividad denominada problema de la caja de lácteos y la cual describiremos más adelante.

Tabla 3.
Resumen de los instrumentos diseñados para este estudio.

Actividad	Nombre	Representaciones utilizadas	Clase de trabajo	Instrumento recolectado
1	Diagnóstico	Icónica - gráfica	Individual	Hoja de trabajo escrita
2	Estructura del marco tragaluz	Lenguaje natural - icónico Algebraico	Equipos en binas	Hoja de trabajo escrita Fotografías
3	Problema de la caja de lácteos	Lenguaje natural - icónico Algebraico tabular	Equipos en binas	Hoja de trabajo escrita Fotografías

Descripción de la hoja de trabajo *problema de la caja de lácteos.* Se propone la construcción de un recipiente (el cual puede servir para contener o envasar lácteos), a partir de una hoja de papel tamaño carta (21.59 cm x 27.94 cm), la cual es unida en uno de sus lados (Figura 4), una parte encima de la otra y realizar la unión, construyendo así un cilindro. Posteriormente, a partir del cilindro construido, al aplanarse da forma a una figura rectangular doble y unida, a continuación, se le marcan cuadrados iguales a cada una de las esquinas y en estos cuadrados se marca su diagonal, esto permitirá al doblar siguiendo estas marcas diagonales, construir el paralelepípedo. Al realizar los dobleces se construye el recipiente, donde los cuadrados marcados en las esquinas determinan la mitad del espesor del recipiente (ya que al ser doble entonces se determina el espesor total).

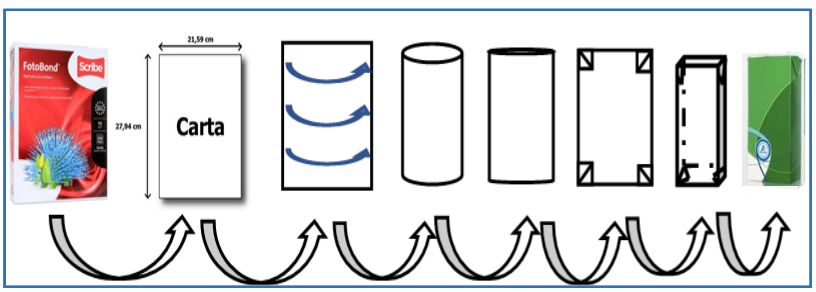


Figura 4. Secuencia de construcción y armado del recipiente paralelepípedo a partir de una hoja tamaño carta.

Se presentan las argumentaciones del proceso para el desarrollo, armado y construcción del recipiente para lácteos. El docente debe responder lo siguientes cuestionamientos: ¿Qué proceso utilizaste en la construcción y armado de tu caja de lácteos?; ¿Existe variación en el volumen final de la caja de lácteos?; ¿De qué depende el volumen?; ¿Cuáles son las variables dependiente e independiente?; ¿Se podrá encontrar un volumen máximo de la caja? ¿qué tipo de competencias se desarrollan al realizar el trabajo en equipo?

Descripción de la propuesta didáctica

Se puede considerar que la puesta en práctica de la actividad didáctica se mantuvo siempre respetando el siguiente protocolo: Organizar equipos de trabajo de preferencia en binas, proporcionar material concreto para la aplicación de la actividad al grupo, estos materiales incluyen también las hojas de trabajo. Parte de la tarea del investigador fue observar y registrar la interacción y comunicación de las ideas matemáticas en la resolución del problema planteado.

Propiciar la socialización de los procesos de resolución por parte de los equipos, en los cuales se verifican: las competencias que se están desarrollando, la comunicación de estrategias de control, la implementación de heurísticas, los patrones encontrados, los recursos empleados.

La institucionalización de los conocimientos por parte del docente en clase y preferentemente (si es posible) por parte de los alumnos del grupo. Generalizar el conocimiento tendrá el punto culminante de esta secuencia didáctica, puesto que ha logrado desarrollar sus competencias y tendrá la oportunidad de proponer nuevos problemas y adaptarlos en su vida diaria, y esto es lo que se está buscando que logren todos los estudiantes de todos los niveles educativos.

En el proceso y antes de la institucionalización, se puede visualizar la resolución del problema propuesto empleando la hoja electrónica de Excel, así como el GeoGebra haciendo aún más atractivo la transmisión de los conceptos matemáticos.

Resultados y análisis

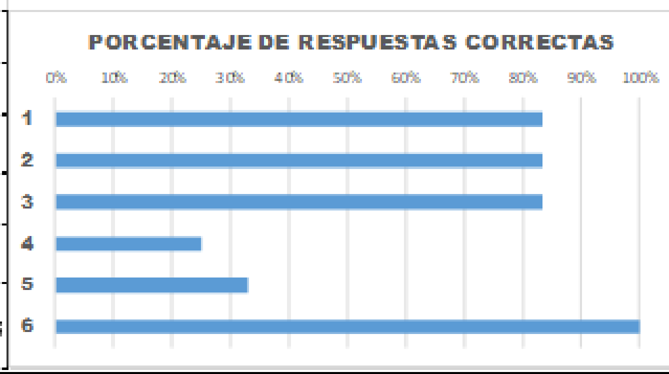
Con respecto a la primera pregunta, ¿Qué proceso utilizaste en la construcción y armado de tu caja de lácteos?, el 80% de los docentes logran visualizar que existe variación al interactuar con el material didáctico otorgado, y visualizar que los diferentes tipos de dobleces asignados, les determina diferentes respuestas del volumen.

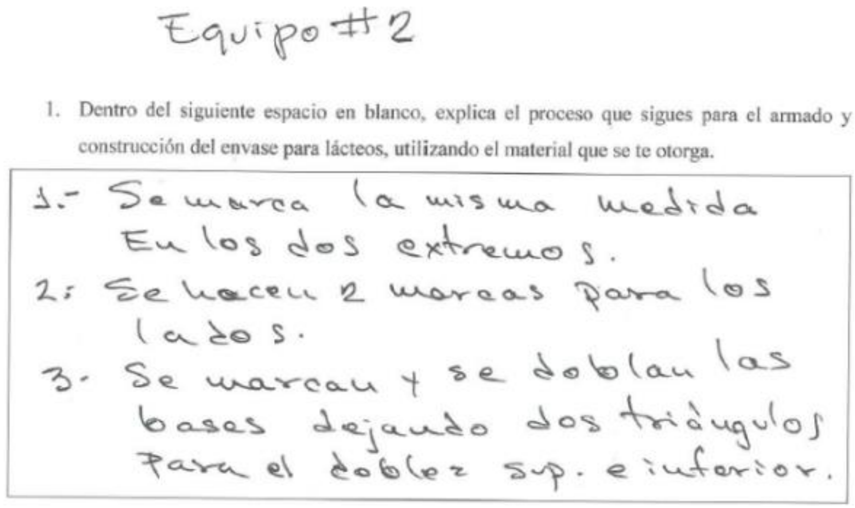
En el porcentaje del 80% de respuestas correctas (Tabla 4), se manifiestan y evidencian las competencias que hasta este momento han desarrollado los docentes, ya que sus argumentos satisfacen el requerimiento de evaluación esperado, así como las ideas matemáticas comunicadas, el proceso de armado y desarrollo de la caja, todas estas expectativas que se esperan de la gran mayoría de los docentes, se encuentra dentro del rango de respuestas aceptables (Figura 5).

Tabla 4.

Resultados de la actividad "caja de lácteos".

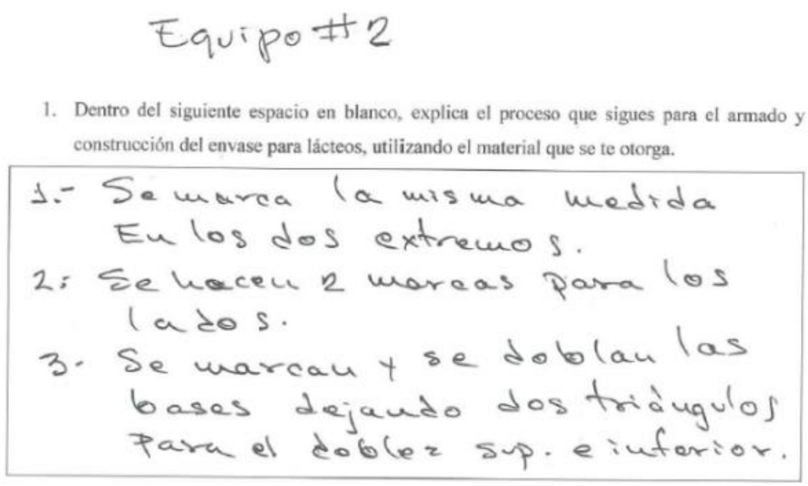
N°	PREGUNTA	HOJA DE TRABAJO CAJA DE LÁCTEOS
1	PROCESO DEL ARMADO	
2	MEDIDAS DE LOS DOBLECES	
3	VOLUMEN GENERADO CON MATERIAL DIDÁCTICO	
4	INDICA MEDIDA DE DOBLECES	
5	VOLUMEN DEL PROBLEMA PLANTEADO	
6	EL TRABAJO EN EQUIPO HA PROPICIADO QUE DESARROLLES COMPETENCIAS	




Equipo #2

1. Dentro del siguiente espacio en blanco, explica el proceso que sigues para el armado y construcción del envase para lácteos, utilizando el material que se te otorga.

1.- Se marca la misma medida
En los dos extremos.
2: Se hacen 2 marcas para los
lados.
3. Se marcan y se doblan las
bases dejando dos triángulos
para el doblez sup. e inferior.


Equipo #2

1. Dentro del siguiente espacio en blanco, explica el proceso que sigues para el armado y construcción del envase para lácteos, utilizando el material que se te otorga.

1.- Se marca la misma medida
En los dos extremos.
2: Se hacen 2 marcas para los
lados.
3. Se marcan y se doblan las
bases dejando dos triángulos
para el doblez sup. e inferior.

Figura 5. Respuestas aceptables del desarrollo y armado de un recipiente de lácteos.

La variación, ahora es para la mayoría docentes un tema de poca dificultad, ya que logran identificarla en cuanto se propone un problema en contexto. Se puede evidenciar que los docentes logran transitar dentro de diferentes registros semióticos de representación, operan el tratamiento de distintos registros y efectúan transformaciones de sus resultados dentro de los registros de representación que seleccionaron.

Se sigue fortaleciendo la decisión de seleccionar entre las teorías didácticas este marco teórico (Teoría de las múltiples representaciones de Raymond Duval), porque así se evidencia el aprendizaje y desarrollo de competencias de los docentes y las distintas formas, en que puede representar los datos hasta aquí expuestos y que son motivo de análisis, se observa que los docentes que asisten regularmente al diplomado, conciben que el seguir superándose les mantendrá eficientemente instruido en todas las corrientes didácticas contemporáneas y actualizado de los nuevos conocimientos matemáticos en el tema de la variación.

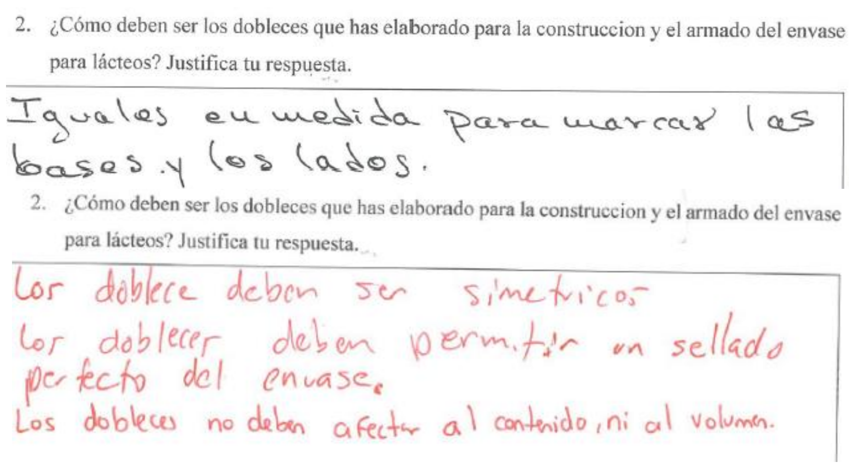
En lo referente a la segunda pregunta, con 100% de respuestas aceptables (Tabla), en la cual se les cuestiona acerca de las medidas de los dobleces empleados en la construcción del recipiente, los argumentos expresados, son ideas matemáticas que fortalecen las valoraciones, que se tienen de las respuestas que muestran, las dificultades halladas en el diagnóstico poco a poco están siendo superadas y se observa fluidez en sus respuestas aceptables, se muestran en la tabla 5, en dos grupos, en el primer grupo se agrupan las respuestas correctas, es decir respondieron bien y emplearon ya rigor matemático, mientras que en el segundo grupo se ubican a las respuestas regulares, es decir responden y fundamentan pero no emplean el rigor matemático.

Tabla 5.

Categorizaciones de las respuestas por equipos, aceptables de la pregunta 2.

Con fundamento y con rigor	Con fundamento y sin rigor
6	4

Este tipo de categorización se adopta para definir las ideas matemáticas que los docentes están expresando al contestar la pregunta planteada, ya que se piensa que, están utilizando en su resolución una gran cantidad de recursos matemáticos (Figura *61*6), por ejemplo: forma, espacio y medida, pensamiento y lenguaje variacional, sentido numérico y pensamiento algebraico, entre otros.


2. ¿Cómo deben ser los dobleces que has elaborado para la construccion y el armado del envase para lácteos? Justifica tu respuesta.

Iguales en medida para marcar las bases y los lados.

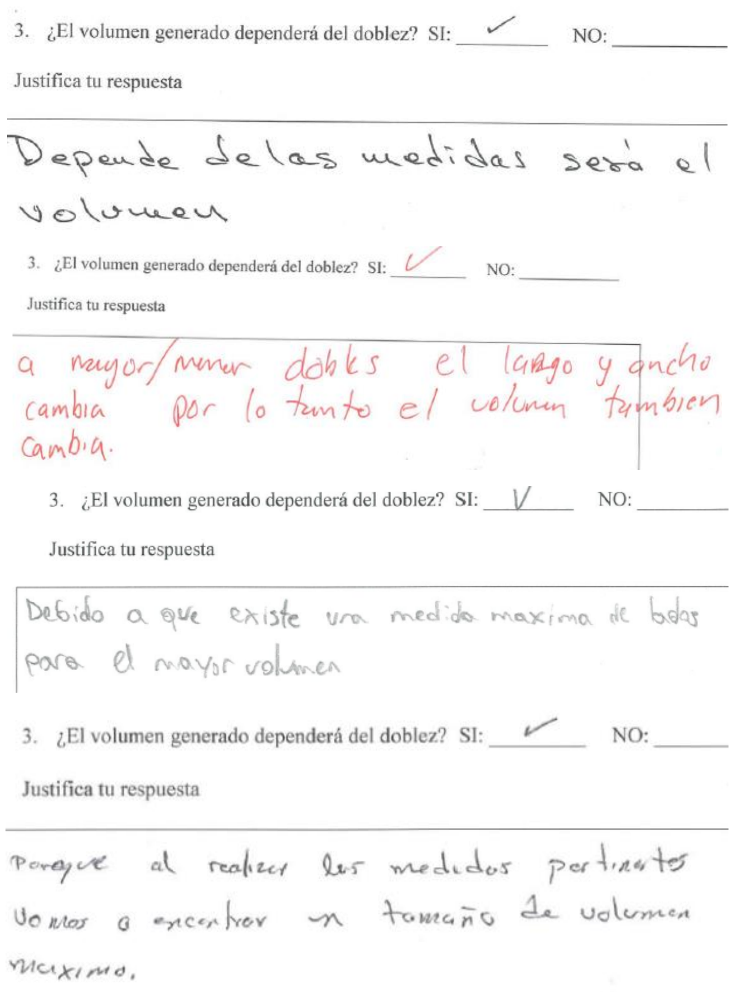
2. ¿Cómo deben ser los dobleces que has elaborado para la construccion y el armado del envase para lácteos? Justifica tu respuesta.

Los doblece deben ser simetricos
Los doblecer deben permitir un sellado perfecto del envase.
Los dobleces no deben afectar al contenido, ni al volumen.

Figura 61. Ejemplos de respuestas aceptables de la pregunta 2.

Con respecto a la tercera pregunta planteada, la cual es presentada así: ¿el volumen generado dependerá de la medida del doblez?

Se esperaba que los docentes contestaran esta pregunta de forma afirmativa y que la justificaran, al analizar las respuestas, de acuerdo a la categorización adoptada para esta hoja de trabajo se obtuvo un 60% de respuestas correctas y un 40% de respuestas regulares, en las cuales las ideas matemáticas expresadas, de manera escrita y comparadas con sus representaciones tabulares, gráficas y algebraicas, existe la concordancia así como se evidencia el tránsito entre distintos registros semióticos de representación (Figura 7).


3. ¿El volumen generado dependerá del doblez? SI: ✓ NO: ____

Justifica tu respuesta

Depende de las medidas será el volumen

3. ¿El volumen generado dependerá del doblez? SI: ✓ NO: ____

Justifica tu respuesta

a mayor/menor dobles el largo y ancho cambia por lo tanto el volumen tambien cambia.

3. ¿El volumen generado dependerá del doblez? SI: V NO: ____

Justifica tu respuesta

Debido a que existe una medida maxima de lados para el mayor volumen

3. ¿El volumen generado dependerá del doblez? SI: ✓ NO: ____

Justifica tu respuesta

Porque al realizar las medidas pertinentes vamos a encontrar un tamaño de volumen maximo.

Figura 7. Ejemplos de respuestas aceptables de la pregunta 3.

De la aplicación de las hojas de trabajo, se puede observar que el 60% de respuestas correctas y el 40% de respuestas restantes se clasifican en regulares, lo cual nos permite observar un aumento de respuestas aceptables, y se promueve que los docentes sigan manifestando sus habilidades para la resolución de problemas, persevere expresando sus ideas matemáticas en las cuales está implícita la variación, se mantenga exteriorizando sus argumentos, continúe demostrando sus actitudes para resolver problemas y sobre todo se siga apropiando del concepto de variación.

Sobre la base de esta hoja de trabajo, se observa que los docentes al responder y argumentar sus respuestas muestran el empleo la teoría de las múltiples representaciones, así como el desarrollo de competencias matemáticas, y esto es parte de las evaluaciones que se realizan al categorizar sus respuestas.

En la pregunta tres, se categorizan en dos grupos (Tabla 6), en el primer grupo se agrupan las respuestas correctas, es decir respondieron bien y emplearon ya el rigor matemático, mientras que en el segundo grupo se ubican a las respuestas regulares, es decir responden y fundamentan, pero no emplean el rigor matemático.

Tabla 6.

Categorizaciones de las respuestas aceptables de la pregunta 3.

Con fundamento y con rigor	Con fundamento y sin rigor
6	4

Para contestar la cuarta pregunta, se esperaba que en las respuestas presentadas se escribiera: “la misma cantidad” o “x cantidad en cada doblez”; se puede observar que se obtiene un porcentaje del 50% de respuestas correctas y un 50% de respuestas regulares (Tabla 6), esto permite precisar un 100% de respuestas aceptables, lo que nuevamente fundamenta la decisión de nuestro marco teórico, el cual promueve que en la medida en que se transite entre diferentes registros de representación, se apropia más rápido del concepto en proceso de aprendizaje, (Figura 8).

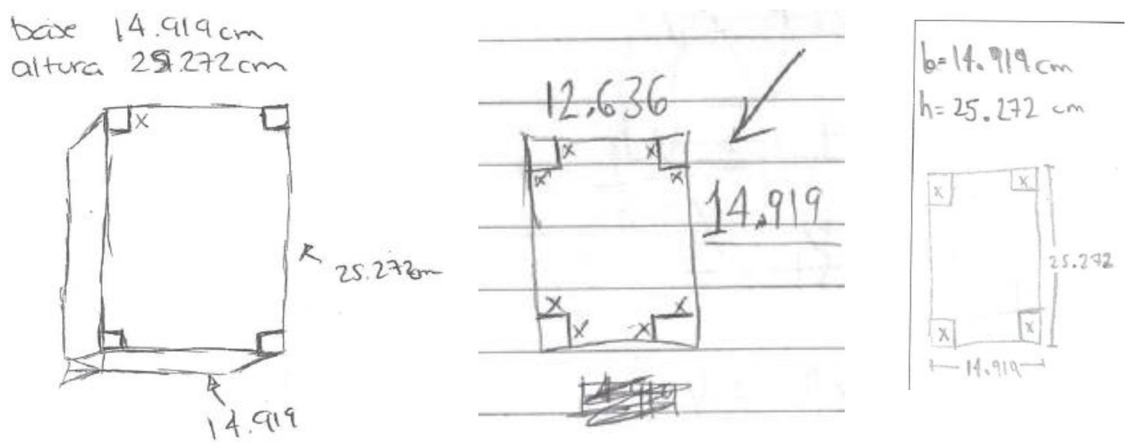
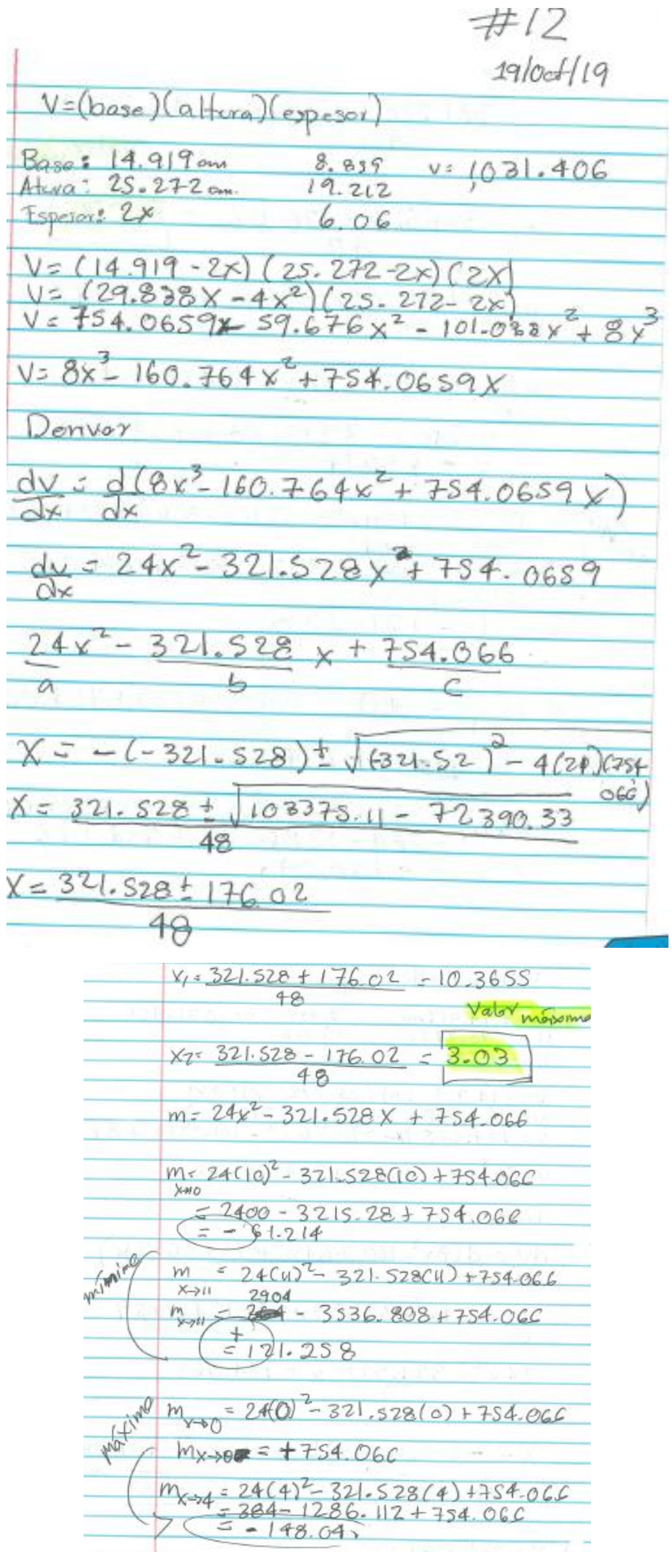


Figura 8. Ejemplos de respuestas consideradas aceptables de la pregunta 4.

La quinta pregunta propuesta en la hoja de trabajo a los docentes, quienes ya estaban por concluir la resolución del problema planteado, en el cual se solicitaba encontrar el máximo volumen que se puede obtener, con las medidas proporcionadas en el problema, el resultado obtenido fue de un 40% de respuestas correctas y un 30% de respuestas regulares, lo que nos arroja un 70% de respuestas aceptables

Las respuestas a la pregunta cinco realizada por los docentes en esta hoja de trabajo sirve para ejemplificar la manera que emplearon ellos al institucionalizar sus conocimientos matemáticos, quedando de manifiesto el dominio y la apropiación que ahora tienen sobre la variación, así como la manera de aplicar el rigor matemático y además es notorio ya el empleo y dominio del cálculo diferencial. Figura 9 (a, b) y figura 10 (a, b).



#12

19/oct/19

V=(base)(altura)(espesor)

Base: 14.919 cm 8.859 v: 1031.406
Altura: 25.272 cm 19.212
Espesor: 2x 6.06

$V=(14.919-2x)(25.272-2x)(2x)$
$V=(29.838x-4x^2)(25.272-2x)$
$V=754.0659x-59.676x^2-101.088x^2+8x^3$

$V=8x^3-160.764x^2+754.0659x$

Denvor

$\frac{dV}{dx}=\frac{d}{dx}(8x^3-160.764x^2+754.0659x)$

$\frac{dv}{dx}=24x^2-321.528x+754.0659$

$\underbrace{24x^2}_{a}-\underbrace{321.528}_{b}x+\underbrace{754.066}_{c}$

$x=-(-321.528)\pm\sqrt{(321.52)^2-4(24)(754.066)}$

$x=\frac{321.528\pm\sqrt{103375.11-72390.33}}{48}$

$x=\frac{321.528\pm176.02}{48}$

$x_1=\frac{321.528+176.02}{48}=10.3655$

Valor máximo

$x_2=\frac{321.528-176.02}{48}=\boxed{3.03}$

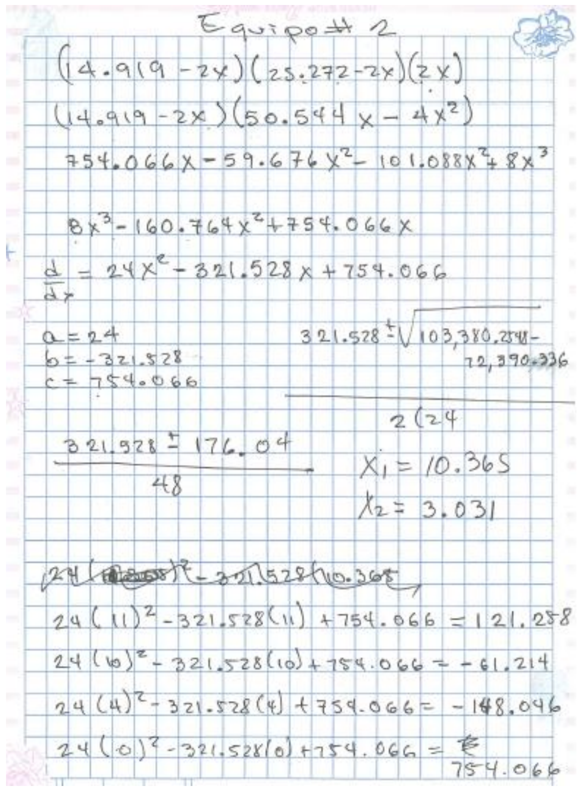
$m=24x^2-321.528x+754.066$

$m_{x\to10}=24(10)^2-321.528(10)+754.066$
$=2400-3215.28+754.066$
$=-61.214$

mínimo
$m_{x\to11}=24(11)^2-321.528(11)+754.066$
$m_{x\to11}=2904-3536.808+754.066$
$=+121.258$

máximo
$m_{x\to0}=24(0)^2-321.528(0)+754.066$
$m_{x\to0}=+754.066$
$m_{x\to4}=24(4)^2-321.528(4)+754.066$
$=384-1286.112+754.066$
$=-148.04$

Figura 9. Se observa el rigor matemático empleando herramientas de cálculo diferencial y álgebra (equipo 12).



5. El problema planteado implica la construccion y armado del envase para lácteos, obtén el volumen máximo usando procesos algebraicos.

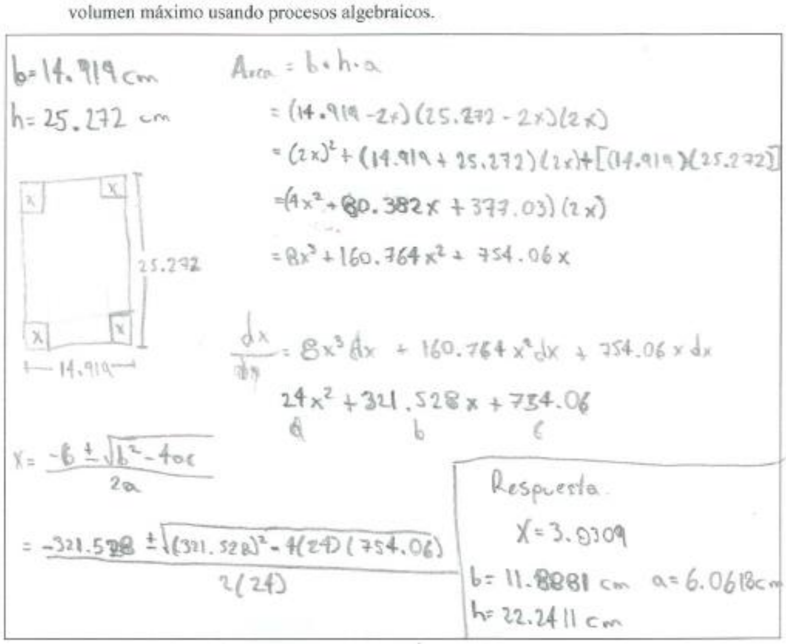


Figura 10. Se observa el rigor matemático empleando herramientas de cálculo diferencial y álgebra. (equipos 2 y 6)

Esto permite demostrar que, si se busca elevar el nivel de logro de los estudiantes de todos los niveles de educación y sobre todo el nivel E. M. S., el primer paso natural, debe de ser el empezar por elevar el nivel de todos los docentes inmersos en el proceso educativo, ya que el proceso de aprendizaje de todos los seres, no está finiquitado, sino que el aprendizaje es continuo y durante todas las etapas de la vida, por lo que se debe seguir fomentando la enseñanza y aprendizaje, aunque sean docentes en ejercicio.

Para concluir con la resolución de esta hoja de trabajo, en la pregunta seis planteada a los docentes, la cual es: *¿El trabajo en equipo ha propiciado que desarrolles tus competencias para la resolución de problemas?*, el 100% de ellos manifiesta que es excelente el contar con apoyo y que se debe seguir fomentando la relación tutorial, el trabajo colaborativo y el trabajo en equipo, ya que esta tarea ayuda a su formación académica y la de todos los seres inmersos en algún aprendizaje.

Esta hoja de trabajo, permite verificar que existen docentes que logran visualizar, reconocer y apropiarse de la variación, escenario que al principio en el diagnóstico se mostraban con bastantes dificultades, ahora se logra transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados, se amplia y profundiza en los conocimientos matemáticos, de manera que, se fortalece la comprensión y el uso eficiente de las herramientas tecnológicas y se avanza desde el requerimiento del trabajo colaborativo para la resolución de problemas hasta llevar esto a realizarlo mediante el trabajo autónomo.

La necesidad de introducir nuevas propuestas teórico-metodológicas, que apoyen los procesos de formación es urgente en México. Se sabe que las actuales reformas educativas, han centrado sus expectativas en la educación basada en desarrollo de competencias, por lo tanto, los docentes requieren implementar cambios y ajustes en los procesos de enseñanza, mismos que no podrán ser llevados a cabo sin sustentos teórico-metodológicos y técnicas de enseñanza, que les permitan diseñar, evaluar y tomar decisiones apropiadamente.

El trabajo que efectúan con sus alumnos en respuesta a las premisas que estas reformas exigen, en las cuales están inmersas la integración de saberes, transferencia de conocimientos, desarrollo de actitudes y capacidades, y sensibilidad ante las adversidades de esta globalización.

A partir de los resultados obtenidos se propone una *Secuencia didáctica que contribuya hacia* el acercamiento hacia la significación, la aprehensión y conceptualización del tema de variación, para la cual se sugiere:

- Efectuar un diagnóstico para saber: que es lo que los alumnos saben, que es lo que necesitan aprender y que es lo que realmente aprenden
- Buscar problemas en contextos que motiven el aprendizaje
- Para lograr aprendizaje significativo, utilizar material didáctico manipulable como un apoyo para la construcción del concepto.
- Leer, entender y comprender los problemas propuestos para su resolución.
- Permitir el uso de tecnología computacional adecuado, para explorar, corroborar o simplemente entender un problema a resolver.

- Comunicar los resultados en plenaria para conocer los distintos métodos empleados en la resolución del problema propuesto.
- Institucionalizar el conocimiento permite la apropiación del concepto motivo de estudio.
- Generalizar el conocimiento tendrá el punto culminante de esta secuencia didáctica, puesto que el alumno ha logrado desarrollar sus competencias y tendrá la oportunidad de proponer nuevos problemas y adaptarlos en su vida diaria, y esto es lo que se está buscando que logren todos los estudiantes de todos los niveles educativos.

Conclusiones

De los resultados del diagnóstico se pudo evidenciar varias dificultades que presentaron los maestros al resolver problemas que implicaba representar tanto gráfica como icónicamente situaciones en contexto sobre variación, de lo cual derivó la necesidad de plantear una metodología didáctica que contribuyera al desarrollo de competencias docentes y cada una implicara el uso de diferentes registros de representación y de la tecnología. Fue notorio que varias de las dificultades que se presentaron fueron siendo menor a medida que se avanzó en el proyecto de investigación.

Se motivó la enseñanza a través de la resolución de problemas en contexto, pero el empleo de la tecnología les permitió abordarlos y analizarlos de mejor manera, propiciando la transición entre diferentes registros de representación, desarrollando su sentido analítico, y aplicar estrategias de control. Al utilizar esta Metodología Didáctica, se reconoce la satisfacción que tienen los docentes hacia la resolución de las actividades y, por ende, la aprehensión y conceptualización del conocimiento motivo de aprendizaje.

Una pregunta clave que se le realizó a los docentes fue la siguiente: *¿El trabajo en equipo ha propiciado que desarrolles tus competencias para la resolución de problemas?*, el 100% de ellos manifiesta que es excelente idea contar con apoyo y que se debe seguir fomentando la relación tutorial, el trabajo colaborativo y el trabajo en equipo, ya que esta tarea ayuda a su formación académica y la de todos los seres inmersos en algún proceso de aprendizaje.

Una vez desarrolladas todas las actividades implementadas, en particular la que hacía referencia a la caja de lácteos, fueron llevados al salón de clases y puesta como práctica con estudiantes del nivel medio superior, y se obtuvieron grandes resultados donde se pusieron en práctica tanto los aprendizajes, el uso de diferentes registros de representación, así como también el uso de la tecnología computacional aplicando diversas estrategias de solución. Esto es gratificante dado que es hacia ellos, los estudiantes, a quienes beneficiaran los aprendizajes de sus docentes de matemáticas.

Agradecimientos:

Los autores agradecen al CONACYT por el apoyo económico recibido para la realización de la investigación y todas las actividades que se implementaron.

Los autores también agradecen a las siguientes instituciones: Centro de Investigación en Geociencias Aplicadas de la UAdeC, Presidencia Municipal San Juan de Sabinas, Coahuila, Universidad Tecnológica de la Región Carbonífera.

También se agradece a todos los 25 docentes del nivel medio superior que estuvieron participando de forma voluntaria en el diplomado en Desarrollo en Competencias Matemáticas.

Así mismo a los docentes e investigadores que tuvieron a bien aceptar la invitación y compartieron sus conocimientos, su experiencia y su tiempo y que fungieron como instructores durante el desarrollo del proyecto.

Referencias bibliográficas

Benítez, D., & Bueno, A. (2009). Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas. *En: El Cálculo y su Enseñanza.* México: CINVESTAV del Instituto Politecnico Nacional.

Bueno, A. (2009). *Desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de ingeniería.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Coahuila, México.

Campos, M., & Balderas, P. (2000). Las representaciones como fundamento de una didáctica de las matemáticas. Pensamiento Educativo. En *Revista de Investigación Educacional Latinoamericana*, 27(2), 169-194.

Dolores, C. Sosa, L. García, M. Hernández, J. (2014). *Matemática educativa: la formación de profesores.* México: Editorial Díaz de Santos.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Matemática Educativa II (Editor F. Hitt). (págs. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.

Hitt. F. (1996). Sistemas semióticos de representación de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. *En Investigaciones en Matemática Educativa.* México: Grupo Editorial Iberoaméricana.

INEE (2018a). La educación obligatoria en México. Informe 2018. Ciudad de México: INEE. Recuperado de https://bit.ly/2ZkGkQc

INEE (2018b). Principales cifras educación básica y media superior. Inicio del ciclo escolar 2016-2017. Ciudad de México: INEE.

Martínez, L. (2007). *Estudio sobre el perfil profesional de los profesores de matemáticas del nivel bachillerato y sus implicaciones didácticas.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Coahuila, México.

NCTM. (2000). *Principles and standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM. de https://bit.ly/2ZbeuVW

Perrenoud, P. (2000). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Recuperado de https://bit.ly/3E32J35

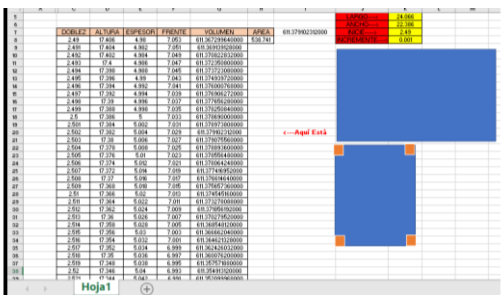
Polya, G. (1965). ¿*Cómo Plantear y resolver problemas de Matemáticas*? México: Trillas.

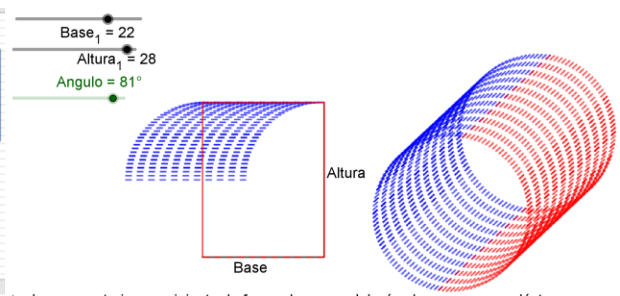
SEP (2017). Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes Planea en la Educación media superior 2017. Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/ms/

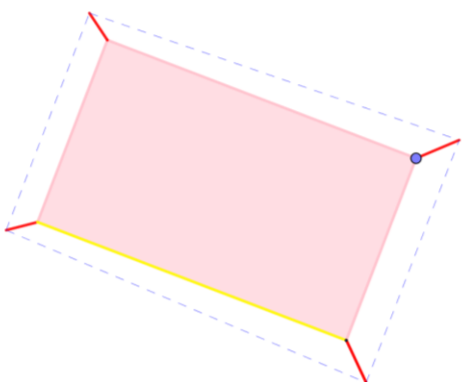
Veliz. J. (2020). *Desarrollo de competencias en docentes de bachillerato por medio de la resolución de problemas que involucran la variación.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Coahuila, México.

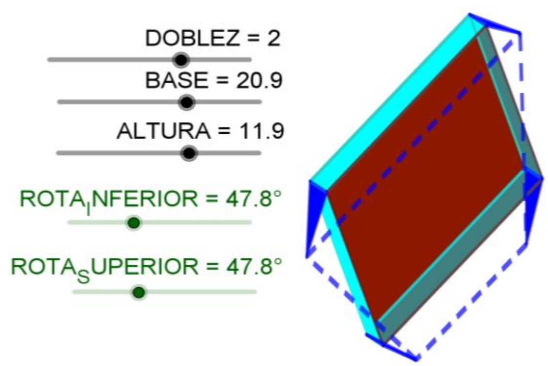
Apéndice

Solución del problema usando diferentes registros de representación









Institucionalización

Resolución algebraica

$$Volumen_{caja} = V_c = \{Base\}\{Altura\}\{Espesor\} = \{14.919 - 2x\}\{25.272 - 2x\}\{2x\}$$

$$V_c = 754.065936x - 160.764x^2 + 8x^3$$

$$\frac{dV_c}{dx} = \frac{d(754.065936x - 160.764x^2 + 8x^3)}{dx}$$

$$24x^2 - 321.528x + 754.065936 = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{+321.528 \pm 176.039552}{+48} = 3.031009;\ 10.365990$$

$$Volumen = [base][altura][anchura]$$

$$Volumen = [8.856982cm][19.209982cm][6.062018\ cm]$$

$$V_c = 1031.4066841\ cm^3$$