REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen VII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2020

ISSN: 2395-955X

Contenido Pág.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Volumen VIII, No. 2, julio-diciembre de 2020, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

.

COMITÉ DE EVALUACIÓN

Alicia López Betancourt
Universidad Juárez del Estado de Durango

Armando López Zamudio
CBTIS 94
Eduardo Carrasco Henríquez
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile

Esnel Pérez Hernández
AMIUTEM

Mireille Zaboya, Fernando Hitt Espinoza
Universidad de Quebeq en Montreal

Graciela Eréndira Núñez Palenius, José Carlos Cortés Zavala
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Silvia Ibarra Olmos, José Luis Soto Munguía, Irma Nancy Larios Rodríguez, Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez
Universidad de Sonora

José Trinidad Ulloa Ibarra, María Inés Ortega Árcega
Universidad Autónoma de Nayarit

José Zambrano Ayala
Instituto Tecnológico de Milpa Alta

Lilia López Vera
Universidad Autónoma de Nuevo León

Verónica Vargas Alejo, Humberto Gutiérrez Pulido, Elena Nesterova
CUCEI. Universidad de Guadalajara

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VIII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2020

ISSN: 2395-955X

PRÁCTICAS DE MODELACIÓN PARA EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS CON TRACKER Y GEOGEBRA

Maritza Elizabeth López Alcalá, Rafael Pantoja Rangel, José Francisco Villalpando Becerra

elizabeth_box@hotmail.com, profe.rpantoja@hotmail.com, francisco.villalpando@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara, México

Para citar este artículo:

López, M. E., Pantoja, R., R., Villalpando, J. F. (2020). Prácticas de modelación para el estudio de las ecuaciones paramétricas con Tracker y GeoGebra. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VIII, No. 1, pp. 14-24. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VIII, No. 1, enero-junio de 2020, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

PRÁCTICAS DE MODELACIÓN PARA EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS CON TRACKER Y GEOGEBRA

Maritza Elizabeth López Alcalá, Rafael Pantoja Rangel, José Francisco Villalpando Becerra

elizabeth_box@hotmail.com, profe.rpantoja@hotmail.com, francisco.villalpando@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara, México

Resumen

El artículo se centra en la comprensión del concepto de parámetro y visualizar una forma de generar ecuaciones paramétricas *f(t)= (x(t), y(t))* en su entorno, a partir de la grabación en video de situaciones problema de objetos cotidianos en movimiento, que será analizado con el software Tracker para obtener la representación analítica, visual, gráfica, numérica y verbal. Se hará uso del GeoGebra para ajustar a los datos que arroja el Tracker y encontrar una función que representa el movimiento. El objetivo es articular, en trabajo colaborativo, las representaciones semióticas del movimiento de tres juguetes: tren, caballo y un gato chino.

Palabras clave: Ecuaciones paramétricas, visualización, Video, GeoGebra, Tracker.

Abstract

The article focuses on understanding the concept of parameter and visualizing a way to generate parametric equations f (t) = (x (t), y (t)) in its environment, from the video recording of problem situations of everyday objects in motion, which will be analyzed with the Tracker software to obtain the analytical, visual, graphic, numerical and verbal representation. The GeoGebra will be used to adjust to the data that the Tracker returns and find a function that represents the movement. The objective is to articulate, in collaborative work, the semiotic representations of the movement of three toys: train, horse and a Chinese cat.

Keywords: Parametric equations, visualization, Video, GeoGebra, Tracker.

Introducción

Las ecuaciones paramétricas es un tema que se trata de una manera muy superficial en los libros de texto y por consiguiente en el aula. Por ejemplo en el libro de Geometría Analítica de Lehmann (1989) se escribe "En este capítulo consideraremos la representación analítica de una curva por medio de un par de ecuaciones en las cuales cada una de las dos variables está expresada en función de una tercera variable" y se ejemplifica con la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, que también se representa por dos ecuaciones en función de una tercera variable independiente t, que puede tomar cualquier valor real, a saber, $x(t) = \cos(t)$ y $y(t) = sen(t)$, ya que al elevar al cuadrado ambos miembros de cada ecuación y sumarlas término a término se obtiene la ecuación de la circunferencia. Más adelante se señala "no hay un método general para seleccionar un parámetro particular para un lugar geométrico y deducir entonces las ecuaciones paramétricas correspondientes. Usualmente se toma la representación paramétrica más sencilla o aquella que sea más útil y conveniente para nuestros propósitos.

Así en general, si $F(x,y)=0$ es la ecuación rectangular de la curva plana C, y cada una de las variables x y y, son función de una tercera t, $x=x(t)$ y $y=y(t)$ entonces, si para cualquier valor permisible de la variable independiente t, las ecuaciones determinan un par de valores reales de $x=x(t)$ y $y=y(t)$ se llaman ecuaciones paramétricas de la curva C.

No es claro pues, cómo se determina el parámetro para representar la curva C como un par de ecuaciones paramétricas. Una de las representaciones paramétricas ancestrales es la que desarrolló Galileo y que denominó descomposición del movimiento de un objeto esférico rodando por un riel sin fricción y lanzado en caída libre al abandonar el riel, debido a la aceleración de la gravedad. Galileo describe que el movimiento del objeto tiene una componente horizontal $x(t)=a_1t+b_1$ y una componente vertical $y(t)=a_2t^2+b_2t+c_2$, que son las ecuaciones paramétricas del tiro parabólico o caída libre.

Así como el ejemplo de caída libre de Galileo, existen otros ejemplos de la Física que se toman de ejemplo para obtener la representación de la curva plana por medio de ecuaciones paramétricas, como puede ser la trayectoria de un punto $\mathrm{P(x, y)}$ sobre la circunferencia que se mueve cuando una rueda que gira sobre su eje y que rueda sin resbalar, en la que se interpreta el tiempo t como el parámetro y de una manera natural surgen las ecuaciones paramétricas de un círculo $x=a\ \cos(t)$ y $y=a\ sen(t)$ y la cicloide $x(t)=a(t-sen(t))$ y $y(t)=a(1-\cos(t))$.

En este taller se emplean situaciones problema (Hitt y González-Martín, 2015) de la vida cotidiana de objetos en movimiento, en este caso juguetes, un tren, un caballo y un gato chino, que representan diversas curvas que en los libros de texto se describen, pero en este caso con el apoyo de un video digital (Jofrey, 2010; Ezquerra, Iturrioz, Díaz, 2011) y de los software Tracker y GeoGebra, se logra, de manera dinámica que los alumnos, primero, se den cuenta de la relación que existe entre la modelación matemática de una situación problema y la matemática escolar, y segundo, que comprendan lo que significa el concepto de parámetro y logren visualizar en la vida cotidiana las ecuaciones paramétricas.

Las actividades se realizan en un taller mediante un trabajo individual y colaborativo, que tienen como propósito que mediante el movimiento de objetos (Arrieta y Díaz, 2015, Pantoja et al, 2016) logren obtener las ecuaciones paramétricas de la forma ***f(t)= (x(t), y(t))***, que representan la forma matemática de sus trayectorias.

Referencia Teórica

La propuesta considera como referencia teórica el enfoque cognitivo basado en las representaciones semióticas de Raymond Duval (Duval, 2004), porque de una manera *"natural"*, a partir del análisis de video con el software Tracker, se presenta al alumno en pantalla, los registros de representación verbal, pictórica, escrita, gráfica, numérica y analítica relacionados con la situación problema. Se espera que el alumno logre transitar entre un mismo registro (Tratamiento) y entre dos registros (conversión) con la finalidad de lograr un aprendizaje significativo al responder la secuencia didáctica planeada para el taller. Bajo esta perspectiva, la teoría de las representaciones semióticas proporciona una herramienta útil para entender los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento variacional, tendientes a lograr la noesis a partir de la semiosis.

Metodología

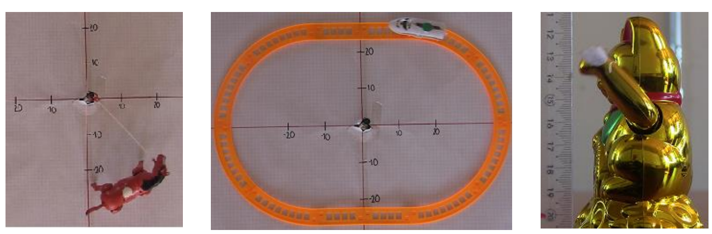
a. Se integran los equipos y a partir de un video, ya sea previamente grabado o que se filme en ese momento, alumnos y profesor manipulan el software Tracker y el GeoGebra.

b. En esta parte, cada grupo colaborativo selecciona una situación problema, diseña el set de grabación, graba el video y lo procesa con el Tracker. Los alumnos relacionan la situación problema con lo mostrado en pantalla por el software Tracker, que consiste en una tabla de datos, tres gráficas (***x vs. t, y vs. t, y vs. x***) y en su caso, un ajuste a las funciones. Se aclara que la rutina de ajuste de funciones de Tracker es limitada y se sugiere exportar los datos a GeoGebra para lograr una mejor aproximación a la trayectoria

c. En la última fase cada uno de los equipos presenta y discute ante el grupo su reporte.

d. Se describen tres de las situaciones problema tratadas:

- **Caballo de juguete**. Se mueve alrededor de un poste fijo con una trayectoria cercana a una circunferencia de radio R. Figura 1a.
- **Tren de juguete**. Es un tren cuyas vías se ubican en distintas trayectorias a velocidad constante, como es la trayectoria cercana a una elipse. Figura 1b.
- **Gato chino de juguete**. Se filma el movimiento del brazo del gato chino de juguete, que se relaciona con las funciones sinusoidales. Figura 1c.



a b c

Figura 1. Juguetes: Caballo, Tren y Gato chino.

Secuencia didáctica

1. **Identificación de la secuencia didáctica.**
    - **Nivel educativo:** medio superior y superior.
    - **Tipo:** Curso Taller.
    - **Palabras clave:** Ecuación paramétrica, Situación problema, Tracker, Video, GeoGebra.
    - **Asignatura:** Cálculo
    - **Tema**: Ecuaciones Paramétricas

- **Conocimientos previos:** Funciones sinusoidales, Polinomios, Cantidades físicas (Tiempo, Distancia, Velocidad).
- Duración: 4 horas

2. **Problema significativo del contexto:** Encontrar las ecuaciones paramétricas del movimiento del caballo, video que se te ha proporcionado en el archivo caballo 1. mp4 y cuya imagen se muestra en la figura 2:

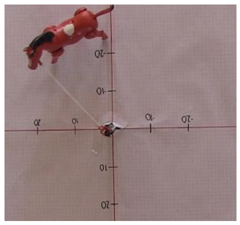



Figura 2. Situación problema: Caballo como motor de la molienda de agave (internet).

- Analizar el video con el software Tracker para obtener los datos y las gráficas relacionadas con la situación problema.
- Ajustar los datos obtenidos de la periferia del recipiente, con las rutinas de ajuste de funciones del Tracker o de GeoGebra.
- Elaborar un reporte de la actividad.

3. **Objetivos**

- Comprensión del concepto de parámetro.
- Determinar la ecuación paramétrica de la situación problema.
- Motivar la enseñanza y aprendizaje de ecuaciones paramétricas a partir de situaciones problema de la vida diaria.

4. **Metas**

- Analizar la videograbación de objetos en movimiento para el ajuste de las ecuaciones paramétricas con el Tracker y GeoGebra.
- Elaborar el reporte de la actividad.

5. **Saber conocer**

- Identidades trigonométricas, propiedades de los ángulos para seno y coseno. trazar el bosquejo de gráficas de funciones, ajuste de funciones, gráficas de datos y manipulación de la hoja de cálculo.

6. **Saber hacer**

- Modelación de situaciones problema y relacionarlo con la matemática escolar.

7. **Saber ser**

- Trabajar en equipo colaborativo para propiciar el aprendizaje de las ecuaciones paramétricas: Puntualidad, participación, honestidad, respeto, entre otros valores.
- Expone y elabora reportes por escrito de la actividad para presentarlo, discutirlo y defenderlo en la exposición grupal.

8. Recursos

- Hoja de trabajo, computadora, Tracker, GeoGebra, Videos digitales de la situación problema, objetos de la vida cotidiana (Caballo, Tren y gato chino).

9. Actividades con el docente

- Análisis de saberes previos, integración de los grupos colaborativos, selección de la situación problema y diseño de curso-taller.

10. Actividades para aprendizaje autónomo

- Diseño del set de grabación de la situación problema seleccionada para grabar y editar la fotografía o el video del objeto, en este caso, el recipiente.
- Manipulación de la fotografía o video con Tracker para el análisis de las gráficas y datos arrojados por el Tracker.
- Exportación y manipulación de datos obtenidos de Tracker para su tratamiento con GeoGebra y obtener la función ajustada.
- Discusión en grupo colaborativo de los resultados obtenidos del análisis del video de la situación problema.
- Elaboración del reporte escrito de la actividad.
- Presentación de los resultados ante el grupo para promocionar la discusión e interacción entre los participantes.

11. Instrucciones para el determinar las coordenadas.

a. Abrir el software Tracker.

b. Ajusta el video.

c. Elige el tamaño de paso (Opción Ajuste del corte). Selecciona el número de cuadros para señalar las marcas que harás con el Tracker, es decir, elegir el número de cuadros para señalar la trayectoria, de uno en uno, de dos en dos, etc.,

d. Selecciona la ubicación del sistema coordenado y marca el eje horizontal de tal forma que te facilite la visualización de la trayectoria.

e. Elige la opción ***Crear una masa puntual*** e iniciar la marca del contorno.

f. La instrucción para marcar los puntos es ***Shift+clic.*** En el momento de presionar la tecla ***Shift*** el puntero del ratón cambia de forma, indicativo de que Tracker está listo para iniciar la señalización.

g. Menú principal del Tracker (Figura 3): vista principal de video (1), vista de gráficas (2), vista de datos (3), barra de menús (4), barra de herramientas (5), deslizador de tiempo.

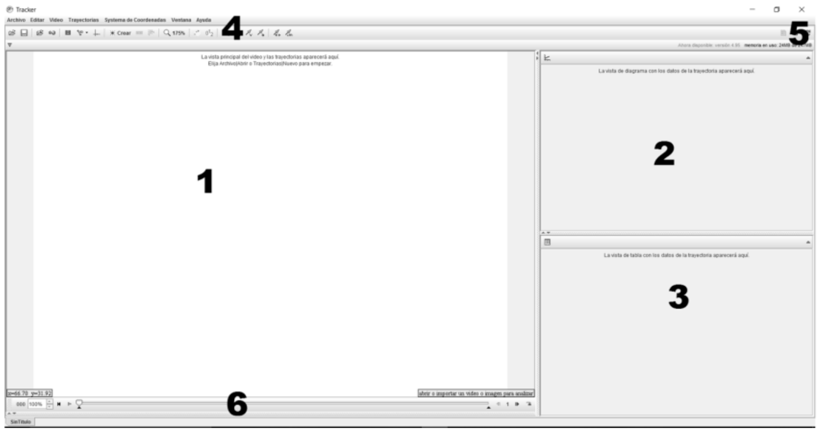


Figura 3. Menú principal de Tracker.

En la barra de menús, seleccionar ***Archivo*** y elije la opción ***Abrir***. Aparecerá una ventana en la cual se muestran archivos. Buscar la ubicación del video que se desea analizar y una vez encontrado, seleccionarlo y dar clic en el botón ***Open*** o bien, dar doble clic sobre el archivo. Figura 4.

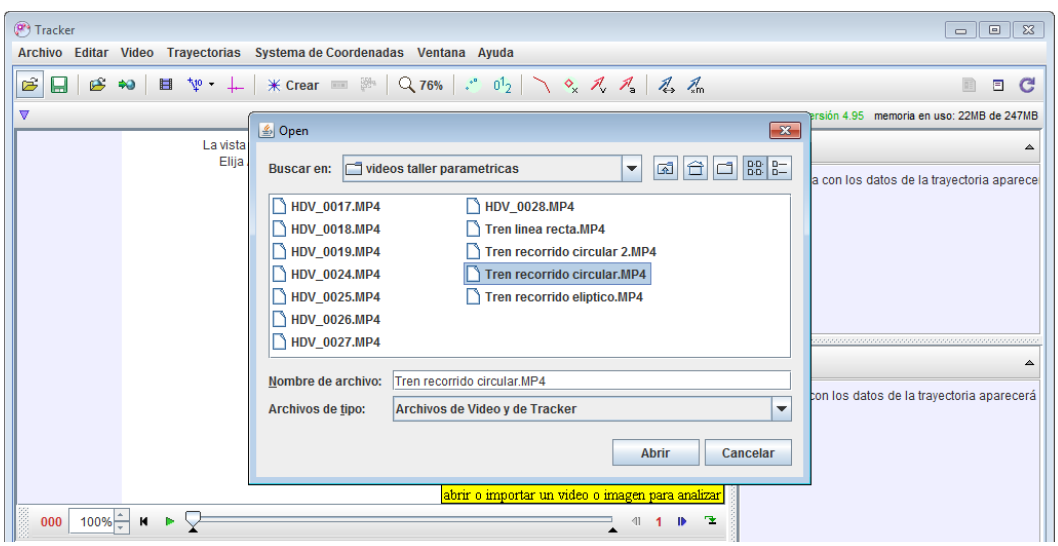


Figura 4. Seleccionar el video a analizar.

Al abrir el video seleccionado, ***vista principal de video***, se procede a definir el intervalo del video que será analizado. En el ***deslizador de tiempo*** se encuentran dos marcas como de punta de flecha negra, una al inicio del deslizador y otra al final. Ajustar tales marcas de modo que con ellas se delimite la parte del video que será analizada. Figura 5.

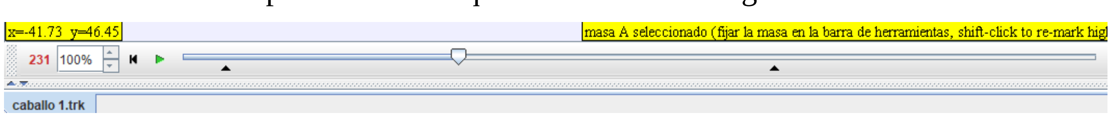


Figura 5. Herramienta del video y controles del video.

Definir el ***tamaño de paso*** significa determinar el número de cuadros del video que se consideran para la señalización de la trayectoria. De las *"**opciones de calibración**"*, se elige ***Nuevo*** y la ***Vara de Calibración***, que se ajusta a la longitud de la marca en el video. Con un clic sobre la vara de calibración se sustituye el valor de la marca interface entre la vida real y el Tracker. Figura 6.

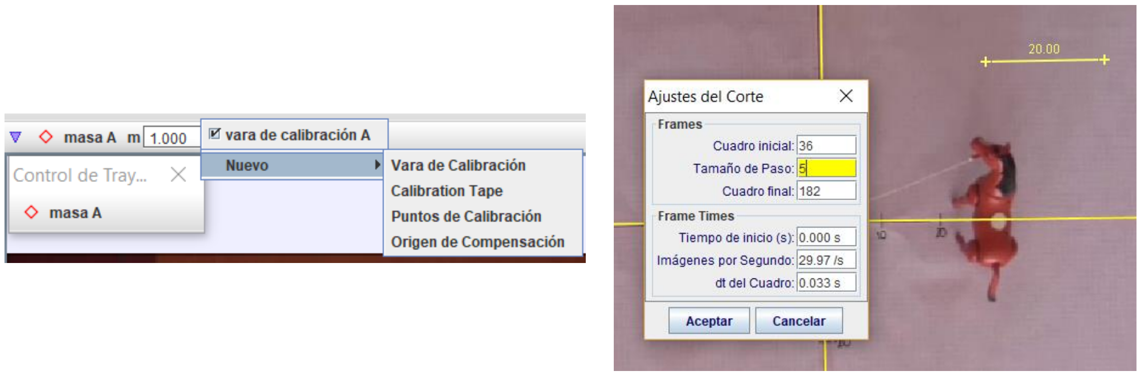


Figura 6. Selección de la vara de calibración y tamaño del paso.

Con un clic sobre los ***ejes de coordenadas*** aparece sobre la pantalla el sistema coordenado, que el usuario ubica donde mejor le convenga. El recorrido del caballo se identifica en Tracker como una ***Masa Puntual*** y se interpreta como el objeto en video a analizar.

Figura 7.

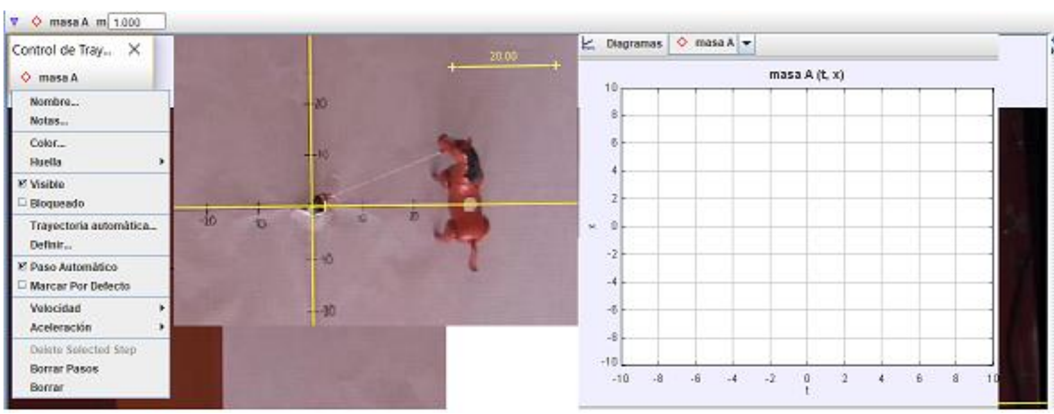


Figura 7. Herramienta de Masa Puntual.

Para señalar la trayectoria de la ***masa puntual*** se presiona ***Shift + clic***, que se manifiesta como un cambio en el puntero del cursor. La marca de la trayectoria es la correcta si aparece un punto sobre la gráfica y las coordenadas correspondientes en la tabla de datos. Se repite ***Shift + clic*** para señalar toda la trayectoria del corredor, de forma paralela se marcarán en el plano cartesiano y los datos se registran en la tabla. Figura 8.

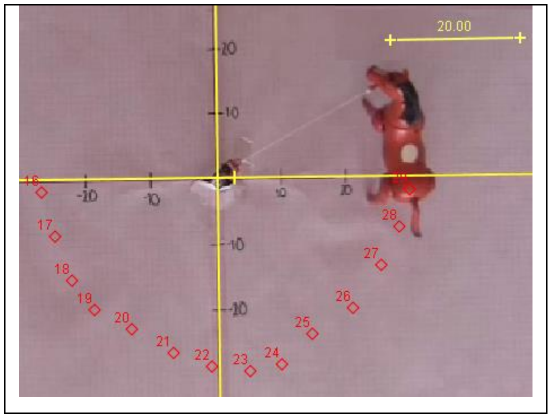
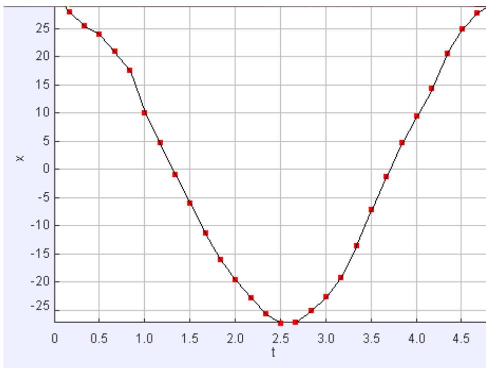


Figura 8. Marca de las primeras posiciones del cuerpo en movimiento.

En la Figura 9 se presenta la gráfica del cuerpo en movimiento de la distancia contra tiempo y la tabla con los datos correspondientes a las coordenadas ***t, x, y***.



t	x	y
0	31.028	-0.204
0.167	27.992	6.767
0.334	25.468	13.038
0.501	23.961	17.39
0.667	20.894	21.762
0.834	17.645	25.442
1.001	10.042	27.441
1.168	4.687	29.066
1.335	-0.849	30
1.502	-6.063	28.85
1.668	-11.299	25.967
1.835	-16.017	22.904
2.002	-19.529	19.133
2.169	-22.689	15.878
2.336	-25.52	11.232
2.503	-27.162	4.491
2.669	-27.066	-1.924
2.836	-25.069	-8.709
3.003	-22.551	-15.501
3.17	-19.139	-20.049

Figura 9. Vista gráfica y tabla de datos del desplazamiento del cuerpo respecto al tiempo.

12. Instrucciones para manipular los datos con el software GeoGebra.

Los datos calculados con el Tracker se exportan a GeoGebra para ello las instrucciones son las siguientes:

a. Se copian los datos del Tracker al GeoGebra.

b. En el GeoGebra se activa la opción de hoja de cálculo y se pegan.

c. Una vez que se han exportado los datos a GeoGebra, se selecciona la opción ***Análisis de Regresión de dos variables*** ➔ ***Modelo de regresión*** ➔ ***Polinomio*** ➔ ***Grado***➔ ***Copiar a Vista Gráfica***, y se ajusta a la función al recorrido. Figura 10.

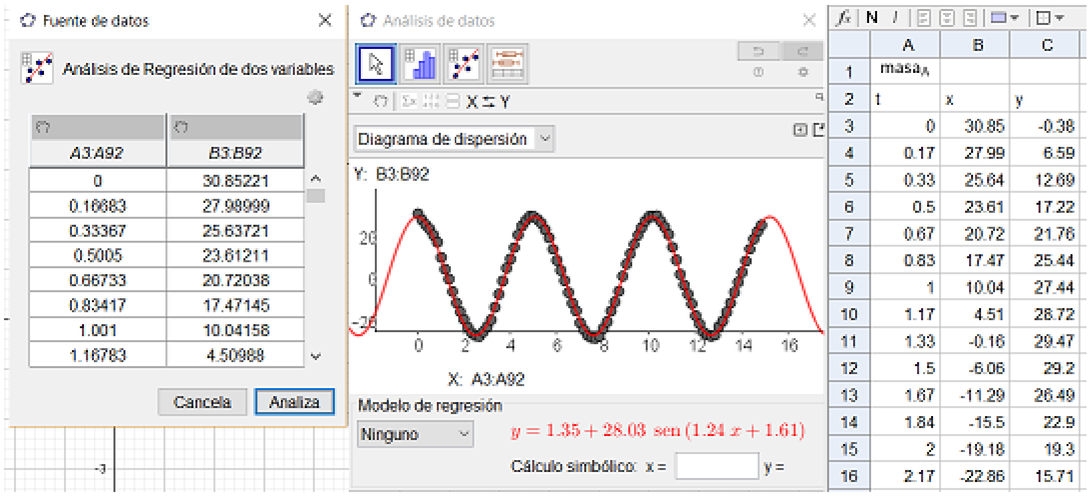


Figura 10. Modelación de la trayectoria del caballo con GeoGebra.

Al final de las actividades se le pide a lo alumnos que entreguen el cuaderno de trabajo, un informe de las actividades realizadas y una presentación que será planteada a todo el grupo.

Conclusiones

Se plantea en la actualidad que en un proceso educativo es ideal que se involucre a los actores de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, fortalecido con un ambiente adecuado con las TIC, en el que el estudiante, en trabajo individual y colaborativo, puede decidir qué y cómo va aprender, en el que tome la iniciativa y sea el responsable de su aprendizaje. Por otro lado, la importancia del aprendizaje colaborativo es primordial, ya que, mediante la interacción social con compañeros de clases, maestros y otros, propician la motivación para que construya su conocimiento.

Bibliografía

Arrieta, J., Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 19-48. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33535428002.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.

Ezquerra, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz*. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733. Recuperado de http://hdl.handle.net/10498/14733. http://reuredc.uca.es.

Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational studies in mathematics*, *88*(2), 201-219.

Jofrey, J. A. (2010). Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases. *Physics Education*. DOI 10.1088/0031-9120/1/005.

Lehmann, CH. (1989). *Geometría Analítica*, México: LIMUSA.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016). Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development*, 5(1), 62-76. Published by American Research Institute. Electronic Version. DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. IS**SN**: 2334-2978. Recuperado de http://jehdnet.com/.