REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2019

ISSN: 2395-955X

Págs.

ARTÍCULOS

EL APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 × 2 MEDIANTE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON GEOGEBRA
Verónica Vargas Alejo
José Zambrano Ayala
Oscar Mendoza Rivas 1-20

VIDEOS TUTORIALES PARA EL APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN
Eliezer Casado Ramírez
Jaime Ortegon Aguilar
Melissa Blanqueto Estrada 21-36

ENSEÑANZA DEL CÁLCULO VECTORIAL A TRAVÉS DEL SOFTWARE LIBRE GEOGEBRA
Juan R. Ruiz Guerra
Hugo Rodríguez Martínez
Monserrat del Carmen de León Cedillo
Carlos I. Espino Márquez 37-47

SUPERFICIES CUADRÁTICAS Y SU MANIPULACIÓN FÍSICA EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO
Marco Antonio Guzmán Solano
Karla Liliana Puga Nathal
María Eugenia Puga Nathal
Leopoldo Castillo Figueroa
Rafael Pantoja González 48-54

ANÁLISIS DE LA LONGITUD Y ÁREA DE LA CARDIOIDE USANDO GEOGEBRA
Citlalin Aurelia Ortiz Hermosillo
Sergio Marcial Palma
Jafet Gassen Tula Maldonado 55-65

LA INTEGRAL EN ESCUELAS DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR INCORPORADAS A UNISON
Erik Morales Mercado
Agustín Grijalva Monteverde 66-73

LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN LINEAL Y CUADRÁTICA HACIENDO USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA CON ALUMNOS DE TERCER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
Gerardo Carrillo Mata 74-87

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON GEOGEBRA
Edson Gilberto Pérez Pérez
Verónica Vargas Alejo 88-97

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 2, julio-diciembre de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

COMITÉ DE EVALUACIÓN

Karla Liliana Puga Nathal
Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán. Tecnológico Nacional de México

Elena Nesterova, Rafael Pantoja Rangel, Alexander Yakhno
CUCEI. Universidad de Guadalajara

J. Trinidad Ulloa Ibarra, María Inés Ortega Arcega
ACBI. Universidad Autónoma de Nayarit

Esnel Pérez Hernández, Armando López Zamudio
AMIUTEM

José Zambrano Ayala
Instituto Tecnológico de Milpa Alta, Tecnológico Nacional de México

Mónica del Rocío Torres Ibarra, Elvira Borjón Robles
Universidad Autónoma de Zacatecas

Eréndira Núñez Palenius, José Carlos Cortés Zavala
Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo

Noelia Londoño Millán
Universidad Autónoma de Coahuila

Claudia Sánchez García
Instituto Tecnológico Superior del Oriente del Estado de Hidalgo

Ángel Ezquerra Martínez
Universidad Complutense de Madrid

Ana Guadalupe del Castillo Bojorquez, Cesar Fabian Felix, María Teresa Dávila Araiza
Universidad de Sonora

Cesar Martínez Hernández
Universidad de Colima

Marleny Hernández Escobar
Escuela Normal Superior de México

Alicia López Betancourt, Angelina Alvarado Monroy
Universidad Juárez del Estado de Durango

Citlalin Aurelia Ortiz Hermosillo
Instituto Tecnológico de Matamoros. Tecnológico Nacional de México

Lilia López Vera
Universidad Autónoma de Nuevo León

Eduardo Carrasco Henríquez
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile

Mireille Zaboya, Fernando Hitt Espinoza
Universidad de Quebeq en Montreal

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2019

ISSN: 2395-955X

EL APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2 × 2 MEDIANTE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON GEOGEBRA

LEARNING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS 2-2 BY SOLVING PROBLEMS WITH GEOGEBRA

[1]Verónica Vargas Alejo, [2]José Zambrano Ayala, [2]Oscar Mendoza Rivas

Universidad de Guadalajara[1], Instituto Tecnológico de Milpa Alta[2]

veronica.vargas@academicos.udg.mx, jose.zam@itmilpaalta.edu.mx, oscarmendoza@itmilpaalta.edu.mx

Para citar este artículo:

Vargas, V., Zambrano, J., Mendoza, O. (2019). El aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales 2 × 2 mediante resolución de problemas con GeoGebra. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 2, pp. 1-20. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 2, julio-diciembre de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

EL APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2×2 MEDIANTE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON GEOGEBRA

LEARNING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS 2-2 BY SOLVING PROBLEMS WITH GEOGEBRA

[1]Verónica Vargas Alejo, [2]José Zambrano Ayala, [2]Oscar Mendoza Rivas

Universidad de Guadalajara[1], Instituto Tecnológico de Milpa Alta[2]

veronica.vargas@academicos.udg.mx, jose.zam@itmilpaalta.edu.mx, oscarmendoza@itmilpaalta.edu.mx

Resumen

Presentamos resultados de una investigación relacionada con el aprendizaje de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales (SEL) 2×2 consistentes e inconsistentes, a través de *conversiones* entre los registros: verbal, algebraico-simbólico y gráfico y *tratamiento* en ellos con el apoyo de software (*e. g.*, GeoGebra). Los datos fueron analizados por tres conceptos los cuales obtuvimos de confluir las teorías *Cambio de atención* y *Representaciones semióticas*. En el estudio participaron 25 estudiantes de nivel superior de entre 19 y 23 años. La metodología fue de tipo cualitativo. Se describen las respuestas de dos equipos al resolver tres problemas. Los resultados indican que los equipos lograron resolver los problemas asociados a SEL 2×2 consistentes con solución única, mediante la conversión entre el registro verbal y el registro gráfico, pero tuvieron dificultades al resolver los problemas asociados a SEL 2×2 inconsistentes y consistentes con infinidad de soluciones.

Palabras clave: Sistema de ecuaciones lineales 2×2, Problemas de enunciado verbal, GeoGebra.

Abstract

We present the results of an investigation related to the learning of solving consistent and inconsistent linear equations systems (SEL) 2×2, through the conversions among the verbal, algebraic-symbolic, and graphic registers, and the treatment with the support of software (*e. g.*, GeoGebra). The data were analyzed by three concepts obtained from the convergence of the theories Shifts of Attention and Register of Semiotic Representations. The study involved 25 high school students between 19 and 23 years old. The methodology was qualitative. The responses of the teams are described. The results indicate that the teams found the solution of the problems associated with consistent SEL 2×2 with a single solution, by converting between the verbal and the graphic register, but they had difficult to solve problems associated with inconsistent and consistent (with infinity of solutions) SEL 2×2.

Keywords: System of linear equations 2×2, Problems of verbal enunciation, GeoGebra.

Introducción

Investigaciones de tipo diagnóstico llevadas a cabo por Dorier, Rorbert, Robinet y Rogalsky entre 1987 y 1994, muestran dificultades de aprendizaje por los estudiantes en conceptos relacionados con espacios vectoriales. Entre las causas destaca la dificultad para vincular las definiciones y conceptos con conocimientos previos (Dorier, Rorbert, Robinet y Rogalsky, 2011). Dorier, *et. al.* (2000, 1999) junto con Sierpinska (2000) reportaron dificultades de aprendizaje en conceptos de Álgebra lineal.

Dorier, *et. al.* (1999) hicieron una contribución importante en la enseñanza de conceptos de Álgebra lineal, ellos llamaron a estas dificultades *obstáculo del formalismo*. Para Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) el obstáculo del formalismo se produce en los estudiantes debido a la forma abstracta en la que el maestro o el libro de texto, presenta la matemática por medio de simbolismo matemático.

De acuerdo con Uicab y Oktaç (2006) el obstáculo del formalismo se presenta cuando los estudiantes no entienden los conceptos, independientemente de la manipulación algebraica: ellos ignoran el significado y las reglas de las matemáticas. Asimismo, Haddad (1999) atribuye que éste se presenta cuando el estudiante lleva a cabo manipulación simbólica, aunque carezca de significado. Por otra parte, Dorier *et. al.* (1999) atribuyen el obstáculo del formalismo a: la gran cantidad de definiciones nuevas y abrumadoras y la dificultad para vincularlas con conocimientos previos, falta de entendimiento de la presentación hipotética-deductiva del conocimiento, falta de dominio de lenguaje matemático y manejo de teorías abstractas y formales.

Entonces ¿cómo evitar el obstáculo del formalismo? De acuerdo con Dorier *et. al.* (1999) si dichas dificultades son propias del álgebra lineal, tienen que ser superadas en este contexto, de modo que muchos investigadores han visto en el uso de la tecnología la posibilidad de sobrepasar dicho obstáculo.

Con la aparición de los Sistemas de Computación Algebraicos (CAS por sus siglas en inglés; *e. g.*, Mathematica, Maple, Matlab, Derive) a principios de la década de los 70, y de los Software de Geometría Dinámica (DGS por sus siglas en inglés; *e. g.*, Cabri, Sketchpad, GeoGebra) al final del siglo pasado y principios del actual, algunos investigadores como Harel (1997), Dreyfus, Hillel y Sierpinska (1999), Sierpinska (2000), Hillel (2001), Uicab y Oktaç (2006), Pruncut (2008), Gol y Sinclair (2010), Soto y Romero (2011), Gol (2012), Ayşegül (2013), Aydin (2014) y Guzmán y Zambrano (2016) han implementado el uso de tecnología para sobrepasar el obstáculo del formalismo. Por ejemplo, Harel (1997) reporta que los resultados obtenidos con el uso de CAS son satisfactorios y Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) observaron que con el uso de Cabri los estudiantes aprendieron conceptos matemáticos de álgebra lineal.

En este artículo mostramos resultados derivados de una investigación relacionada con la pregunta cómo sobrepasar el obstáculo del aprendizaje del concepto de solución de SEL 2×2 mediante problemas de enunciado verbal que implican la construcción y solución de SEL con el uso de GeoGebra. En seguida describimos la investigación mencionada y las preguntas de investigación que se responden en este artículo.

El problema de investigación

De acuerdo con Bednarz y Janvier (1994), Haspekian (2005), Kieran (2014, 2007), Vargas y Guzmán (2012) y Vargas y Cristóbal (2012), resolver problemas enunciados en forma verbal es un reto que enfrentan los estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad cuando se trata de utilizar sistemas de ecuaciones lineales. Con base en este hecho, en la presente investigación interesó dar respuesta al problema: ¿Cómo contribuye el uso de GeoGebra en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales, vía la resolución de problemas enunciados en forma verbal, por estudiantes de ingeniería?

Para responder el problema precedente de investigación, se diseñaron actividades derivadas de problemas enunciados de forma verbal que implicaron la construcción y resolución de SEL 2×2 con apoyo de GeoGebra, con ellas se pretendió conocer las dificultades de aprendizaje de los estudiantes de nivel superior de los primeros años de ingeniería, así como el proceso de comprensión del concepto "solución de un sistema de ecuaciones lineales" y de conceptos matemáticos relacionados (*e. g.*, ecuación, función, sistemas de ecuaciones lineales, solución).

Interesó utilizar ambientes de aprendizaje colaborativos que promovieran la discusión de ideas, construcción de conjeturas, uso de ejemplos y contraejemplos, argumentación y evaluación de resultados.

Objetivo general de la investigación

Analizar y describir la modificación, extensión y refinamiento del conocimiento de estudiantes de los primeros semestres de nivel superior sobre SEL, simultánea al desarrollo de habilidades, para resolver problemas enunciados en forma verbal, mediante el uso de GeoGebra.

Objetivos específicos de la investigación

a) Identificar las ideas matemáticas previas de los estudiantes en torno a los conceptos asociados con SEL y la habilidad para utilizarlos en la resolución de problemas de enunciado verbal.

b) Analizar y describir los procesos de cambio en los conocimientos asociados a sistemas de ecuaciones lineales, en los estudiantes, al utilizarlos en la realización de actividades derivadas de problemas de enunciado verbal, diseñadas con apoyo de GeoGebra.

c) Analizar y describir cómo influyen las representaciones en el desarrollo de habilidades de los estudiantes al realizar actividades derivadas de problemas de enunciado verbal, diseñadas con apoyo de GeoGebra.

En este artículo interesa mostrar resultados en cuanto a los logros obtenidos relacionados con los objetivos b) y c). Se responden las siguientes preguntas de investigación.

1. ¿Cómo influye en estudiantes de ingeniería el uso de representaciones y GeoGebra en la resolución de problemas de enunciado verbal?

2. ¿Cómo se modifica el conocimiento de SEL 2×2 de los estudiantes de ingeniería con el uso de la secuencia de tareas correspondientes a la Actividad 3 aquí descrita que se apoya en representaciones y GeoGebra para la resolución de problemas de enunciado verbal? Específicamente, en cuanto a Asociación de objetos, Posición cognitiva, y Toma de sentido a lo que quieren conocer.

Marco conceptual

Esta investigación se apoya en dos teorías de tipo cognitivo: *Cambio de atención* de Mason (2008) y *Teoría de Representaciones* de Duval (1999, 2003, 2006), las cuales describimos continuación:

Cambio de atención

Esta teoría está compuesta por tres conceptos: atención, conciencia y estar consciente de…, actitud. Se describen a continuación.

Atención. De acuerdo con Mason (2008, p. 4) este concepto es el medio por el cual se lleva a cabo la observación [de objetos matemáticos del profesor o de los estudiantes]. Para este investigador cuando un estudiante atiende –en el sentido de su análisis y reflexión– se posibilita la percepción de las propiedades del objeto u concepto atendido, con ello se favorece el razonamiento matemático. Mason (2008) clasifica este concepto en *Estructura macro* y *Estructura micro*; la primera intenta responder *qué atiende* el estudiante, mientras que la segunda *cómo lo atiende*. Con la Estructura micro se verifica *cómo* el estudiante: *visualiza*, *discierne detalles*, *reconoce relaciones*, *percibe y razona propiedades* de los objetos de estudio. Este autor afirma que sin la atención es imposible dar sentido a lo que el estudiante aprende (p. 4).

Conciencia o *Estar consciente de…* Mason (2008) usa la palabra *conciencia* para referirse al *grado de conciencia* que todo ser humano muestra ante una situación que lo lleve a tomar decisiones. Este investigador clasifica el concepto en *conciencia explícita* y *conciencia implícita* (Mason, 2008, p. 3). La primera se refiere a la conciencia mediante la cual es posible *articular* objetos u conceptos matemáticos; mientras que en la segunda es una *conciencia no articulable*. Por ejemplo, un estudiante evidencia tener *consciencia implícita* si ellos logran deducir que un SEL 2×2 es inconsistente sin *estar consciente de …* que las rectas de las ecuaciones que lo conforman son paralelas y separadas, pues ellos no articulan (relacionan) el registro algebraico con el gráfico. Sin embargo, la conciencia implícita de los estudiantes puede dejar de serlo y pasar a una conciencia explícita, siempre que les permita “ver” (en el sentido de Duval) y manejar de forma *consciente* los objetos matemáticos (p. 9). Mason (2008) afirma que si los estudiantes logran cambiar de conciencia implícita a explicita, entonces ocurre en ellos lo que Vygotsky llamó Zona de Desarrollo Próximo (p. 8).

Actitud. Mason usa el término actitud en sentido afectivo emocional del ser humano, y como la disposición por parte de los estudiantes para lograr su aprendizaje. De acuerdo con este autor, actitud no sólo debe conceptualizarse como la fuerza interior que los estudiantes requieren para aprender, sino también como la forma en que se procesa esa actitud a través de esa fuerza (p. 13). También afirma que las personas modifican su actitud de acuerdo con su entorno (momento y espacio). En particular, el estudiante manifiesta un cambio de actitud por medio de: gestos, posturas, tono de voz, vocabulario, manera de relacionarse con los demás, forma de atender la tarea encomendada.

Teoría de Representaciones

Esta teoría se sustenta en dos conceptos: semiosis y noesis.

Semiosis. Duval (1999) define este concepto como: aprehensión o producción de representaciones semióticas: lenguaje natural, fórmulas algebraicas, figuras geométricas, tablas, entre otros.

Noesis. Es el aprendizaje de un objeto mediante actos cognitivos.

La Semiosis es aquella que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis: "No hay noesis sin semiosis; por el contrario, si hubiera noesis sin semiosis sería como si fuera separado el contenido del objeto de su forma" (Duval, 1999, p. 28). Este autor (2003) afirma que cuando la aprensión de un objeto [*e. g.*, matemático] es inmediata, permite a los individuos [estudiantes] distinguir e identificar los diferentes registros de representación del objeto. Así "ver" [en matemáticas] es reconocer los objetos a simple vista. Por otro lado "visualizar" es una forma de aprehender los objetos de estudio, es producir una representación semiótica que da lugar a la aprehensión inmediata de los objetos representados.

Puntos en que confluyen las teorías (Cambio de atención, Mason, 2008; Representaciones, Duval, 1999, 2003, 2006)

Estas teorías coinciden en tres conceptos que se describen a continuación:

Asociación de objetos (A). Ambas teorías son de tipo cognitivo inmersas en el aprendizaje de objetos (conceptos) matemáticos, los cuales pueden mostrarse a través de varias representaciones semióticas, cuyo aprendizaje no se garantiza sin la debida *atención* de los estudiantes. De acuerdo con Mason (2008) y Duval (1999), el cambio de representación de algún objeto matemático, por ejemplo, de forma algebraica a geométrica o viceversa, puede promover el aprendizaje del objeto en estudio.

Posición cognitiva (P). En la Teoría de Cambio de Atención (Mason, 2008) se explica cómo los estudiantes pueden pasar de conciencia implícita a explícita. Este proceso ocurre cuando ellos pueden "ver" y manejar de manera consciente los objetos de estudio. Asimismo, Duval (2003) afirma que el aprendizaje sucede cuando ocurre la aprehensión del objeto matemático, ello porque permite a los estudiantes distinguir e identificar los diferentes registros de representación semiótica del objeto.

El estudiante le da sentido a lo que quiere conocer (S). Para Mason (2008) un estudiante evidencia aprendizaje óptimo de un objeto en estudio, cuando éste muestre *atención* en él, si mantiene la *actitud* de aprender y es capaz de *ser (estar) consciente de… qué y cómo* es este objeto, lo cual puede ser evidenciado si el estudiante es capaz de pasarlo de un registro a otro.

Los conceptos A, P y S donde confluyen la Teoría de Cambio de atención (2008) y la Teoría de Representaciones (1999, 2003, 2006) previamente comentados se utilizaron como criterios para el análisis de los datos.

Metodología

La investigación fue de tipo cualitativa porque interesaba analizar y describir la modificación, extensión y evolución del conocimiento de los estudiantes, simultánea al desarrollo de habilidades, para resolver problemas enunciados en forma verbal, mediante el uso de GeoGebra.

Participantes

Los estudiantes que participaron en la investigación tenían entre 19 y 23 años de edad, estos estaban cursando la materia de álgebra lineal en el tema Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales, en un instituto tecnológico ubicado al sur de la Ciudad de México.

Actividades

Para este trabajo de investigación fueron diseñadas tres actividades:

Actividad 1. Trabajo con papel-y-lápiz. Esta actividad fue diseñada de modo que las tareas fueran ejecutadas en papel-y-lápiz, cuyo contenido introdujo al estudiante en un ambiente de resolución de problemas con enunciado verbal, que incluyera ecuaciones de la forma $ax + by = c$; es decir, SEL 1×2.

Actividad 2. Uso de comandos básicos de GeoGebra. Las tareas para el estudiante en esta actividad, fueron diseñadas para familiarizar al usuario con los *applets* y con los problemas enunciados de forma verbal.

Actividad 3. SEL 2×2. En esta actividad fueron diseñadas tareas de enunciado verbal que invitaban al estudiante a construir SEL 2×2, las cuales fueron resueltas con el apoyo de GeoGebra.

Para dar respuesta a las preguntas de investigación, en este artículo reportamos resultados sólo de la Actividad 3, la cual está compuesta por:

Problema 1 (SEL 2×2 consistente solución única): Tarea 1a), Tarea 1b), Tarea 1c), ...,

Problema 2 (SEL 2×2 inconsistente): Tarea 2a), Tarea 2b), Tarea 2c), ...,

Problema 3 (SEL 2×2 consistente con infinidad de soluciones): Tarea 3a), Tarea 3b), Tarea 3c), ...

Es importante mencionar que en el Análisis y discusión de los datos, sólo reportamos las respuestas de aquellas tareas que son relevantes como evidencia para el propósito de este artículo.

Forma de trabajo en el aula

La implementación de las tres actividades se llevó a cabo en un salón de clases durante 12 horas-clase. Los estudiantes fueron agrupados por su profesor en equipos de dos y tres integrantes; cada equipo llevaba *laptop*, en la cual fue cargado el programa GeoGebra y los applets.

Applets

El diseño de los applets se llevó a cabo en términos de una situación problemática de mezclas denominada "La Granola", tomada de Cristóbal y Vargas (2013). La granola es un producto alimenticio elaborado con semillas, frutos secos y miel (Tabla 1). Los valores nutrimentales de la granola pueden variar, dependiendo de los ingredientes que componen la mezcla. Los datos que se utilizaron en los applets corresponden a los de la Tabla 1.

Tabla 1

Características nutrimentales y costos de ingredientes que se utilizan para la elaboración de granola

			Cantidad de nutrimentos por cada 1000 gramos de producto									
			Calorías	proteína	grasa	Carbohidratos	calcio	hierro	zinc	vit. a	vit. b	vit. c
	Especificación	costo (pesos) por kg	Kcal	g	g	g	mg	mg	mg	UI	mg	mg
producto	Avena	60	3900	170	70	560	540	47.2	40	10	2	0
	Ajonjolí	100	5650	170	280	250	980	150	70	9	8	0
	Uva pasa	120	2960	25	6	78	280	26	30	12	2	54
	Almendras	85	5780	210	420	200	2480	43	34	50	1300	0
	Cacahuate	35	5940	173	454	253	700	37	38	50	3	4
	Ciruela pasa	76	1130	12.3	3	300	240	13	3	523	2	0
	Coco rayado	32	3540	33.3	335	150	140	25	20	8	6	33
	Fresa seca	135	690	5.8	6	180	210	3.5	0	900	4	370
	Manzana seca	86	670	2	5	170	40	3.5	5	560	4	2

Los problemas asociados a los applets que se plantearon a los estudiantes, consistieron en la obtención de mezclas con cantidades específicas de ingredientes, así como la determinación de la cantidad de cada ingrediente necesaria para obtener mezclas con ciertas características. La solución de estos problemas se puede relacionar con conceptos como: funciones lineales en una y varias variables, sistemas de ecuaciones lineales con una y varias incógnitas y métodos de solución.

En los applets se construyeron sistemas de ecuaciones lineales en su representación geométrica y algebraica que los estudiantes podían manipular mediante el uso de datos de la Tabla 1 para resolver problemas propuestos por el investigador.

Problema 1 (SEL 2×2 *consistente solución única)*

> ¿Qué cantidad de $kg\ de\ avena$ y $kg\ de\ ajonjolí$ se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga un $costo\ de$ \$53 y contenga 87 $g\ de\ grasa$?

El problema se relaciona con el SEL $\begin{cases} 60x + 100y = 53 \\ 70x + 280y = 87 \end{cases}$.

Nótese que x y y representan la cantidad de kilogramos de avena y de ajonjolí, respectivamente; los coeficientes de x y y del SEL se obtienen de los datos de la Tabla 1. En la primera ecuación, los coeficientes de x y y representan el *costo por kg* de la avena y el *costo por kg* del ajonjolí y son, respectivamente: 60 de la fila de *avena* (columna costo) y 100 de la fila de *ajonjolí* (columna costo); la ecuación representa la mezcla de estos productos cuyo *costo total (pesos)* es de \$53; mientras que los coeficientes de x y y de la segunda ecuación son: 70 de la fila de *avena* (columna grasa) y 280 de la fila correspondiente de *ajonjolí* (columna grasa). La segunda ecuación representa la mezcla de estos productos cuyo gramaje total en grasa es de 87.

La Figura 1 muestra la interfaz del applet; en ésta, el estudiante puede capturar, en las diferentes casillas de entrada, los productos en los ejes cartesianos (*avena* y *ajonjolí*), las especificaciones, *costo de* para la primera ecuación y *g de grasa de* para la segunda ecuación; el término independiente respectivamente, 53 y 87 de cada ecuación; así como los coeficientes que corresponden a x y y –de cada ecuación–, ello de acuerdo con el problema antes mencionado. Con los datos capturados en el applet, el usuario puede arrastrar el botón de cada deslizador con la intención de localizar puntos de intersección (si existen) entre las rectas cuyas gráficas fueron definidas como f y g. Asimismo, la ventana Cálculo Simbólico (CAS) de GeoGebra muestra el registro simbólico con el cual se resuelve el sistema por medio del Método de reducción de Gauss.

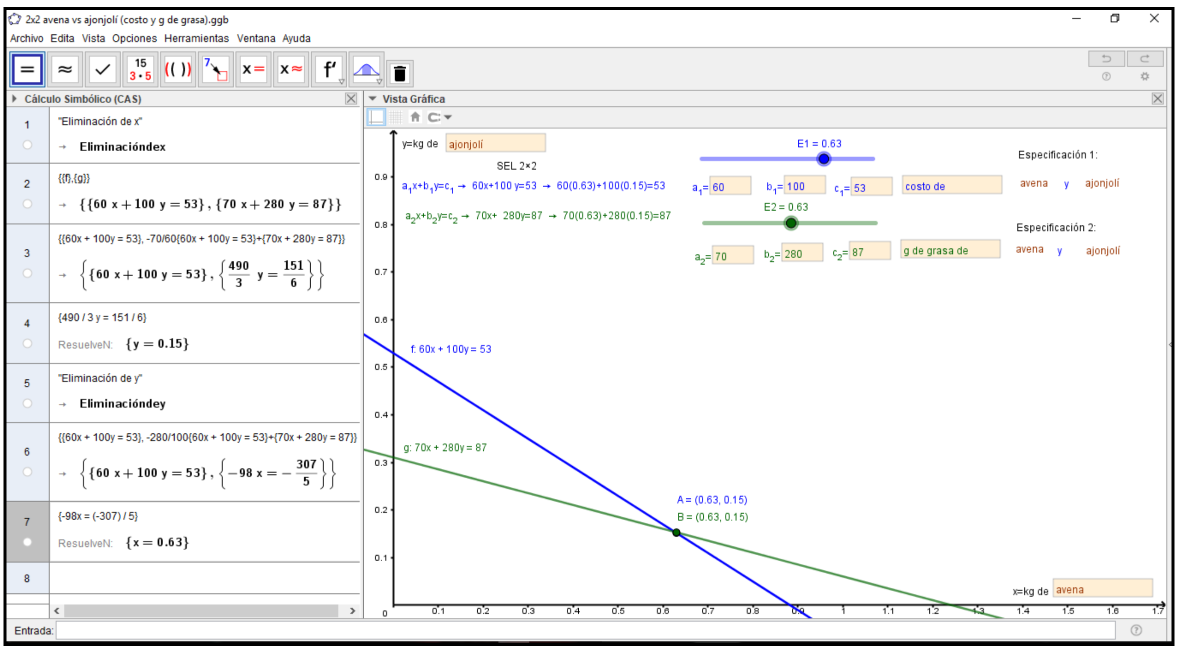


Figura 1. Interfaz del applet: SEL solución única.

Con estos registros, el geométrico y el simbólico, se esperaba que el estudiante diera respuesta a la pregunta antes planteada, de acuerdo con la siguiente idea:

> Para encontrar los valores buscados se requiere resolver el SEL $\begin{cases} 60x + 100y = 53 \\ 70x + 280y = 87 \end{cases}$, cuya solución es $x = 0.63$, $y = 0.15$. Es decir, para que la mezcla tenga un costo de \$53 y contenga 87 *g de grasa*, se requiere de 0.63 *kg de avena* y 0.15 *kg de ajonjolí*.

Problema 2 (SEL 2×2 inconsistente)

Con la modificación de los datos ingresados en las casillas de entrada del applet (Figura 2), los estudiantes procedieron a la solución del problema siguiente:

> ¿Qué cantidad de *kg de avena* y *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga 163 *g de grasa* y 7 *mg de vit b*?

El SEL correspondiente no tiene solución. Se esperaba que los estudiantes dieran una respuesta como:

> Al plantear y resolver el SEL $\begin{cases} 70x + 280y = 163 \\ 2x + 8y = 7 \end{cases}$ se obtiene que no existen valores de x y de y de manera que la mezcla de *avena* y *ajonjolí* contenga 163 *g de grasa* y 7 *mg de vit b*.

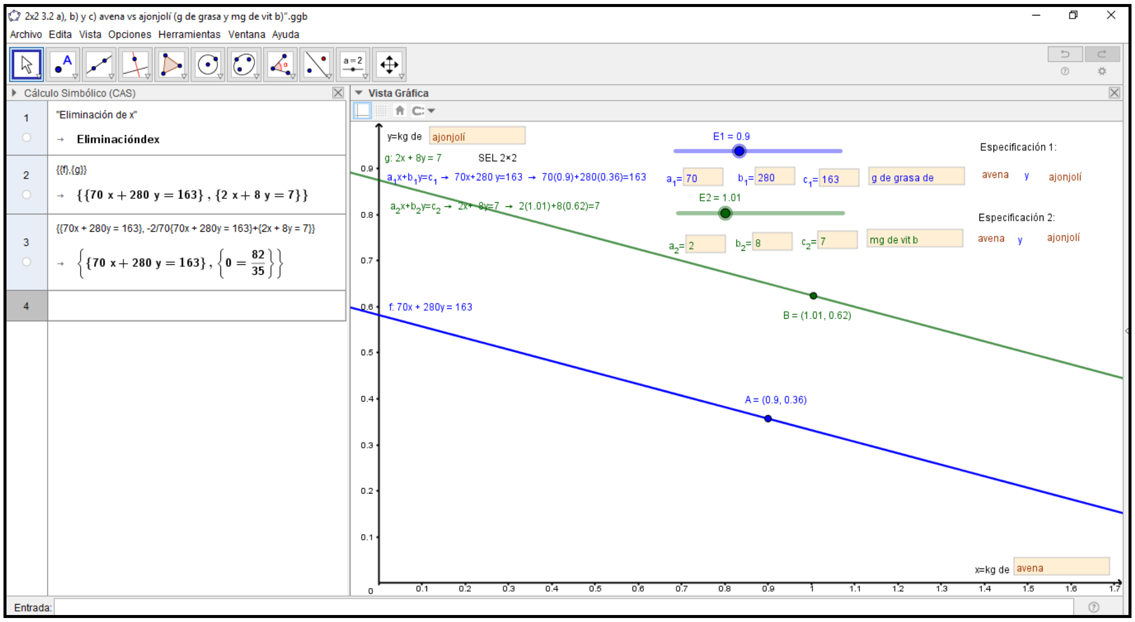


Figura 2. Interfaz del applet*:* SEL sin solución.

Problema 3 (SEL 2×2 *consistente con infinidad de soluciones)*

Un procedimiento, similar al planteamiento de SEL sin solución, se dio para resolver el siguiente problema que implicaba la resolución de un SEL con infinidad de soluciones (véase Figura 3).

> ¿Cuántos *kg de fresa seca* y *kg de manzana seca* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que un *kg* de la mezcla tenga 4 *mg de vit b*?

Se esperaba una respuesta como la siguiente:

Resolver el problema implica dar solución al SEL $\begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$. El SEL tiene una cantidad infinita de soluciones determinadas por el par $(x, 1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$; lo cual indica que, para cualquier par de estos, $1\ kg$ de la mezcla tiene $4\ mg\ de\ vit\ b$.

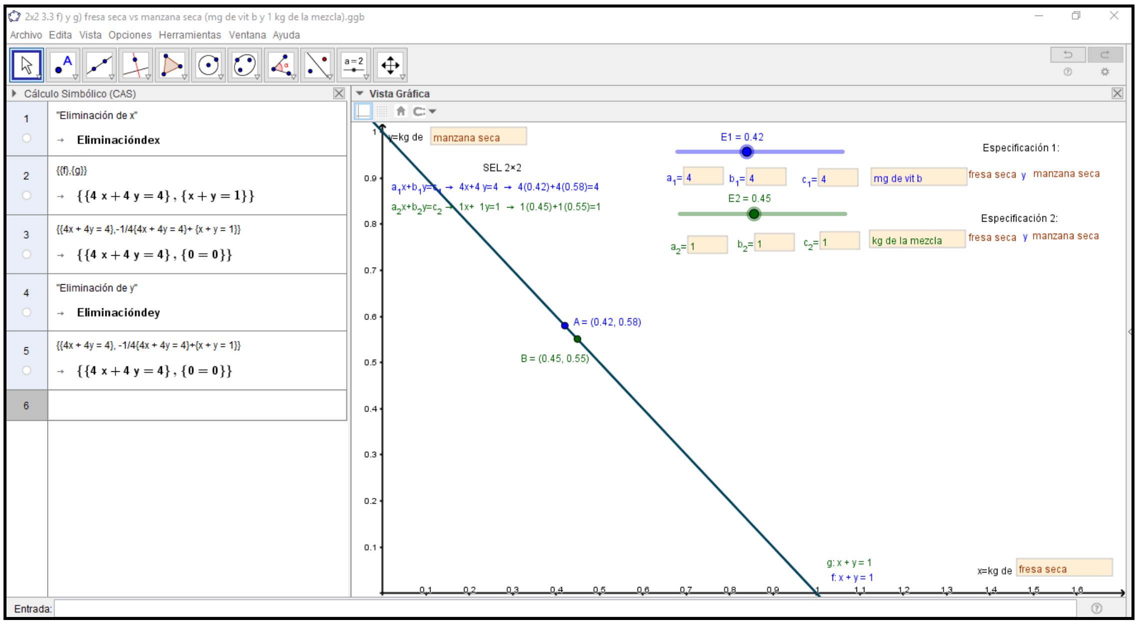


Figura 3. Interfaz del applet: SEL con infinidad de soluciones.

Resultados y discusión

En este artículo son analizados y discutidos sólo los datos de dos equipos participantes: Equipo 4 y Equipo 9, en adelante E4 y E9, respectivamente. Todas las tareas son analizadas de acuerdo con el Marco conceptual comentado en este documento. Por ejemplo, en la Columna 3 de la Tabla 2 se analizaron los datos (descritos en la Columna 2 de dicha tabla) que E4 y E9 reportaron. En otros casos se revisan los comentarios de los estudiantes y entre paréntesis se indica si su respuesta corresponde a: Asociación de objetos (A), Posición cognitiva (P), El estudiante le da sentido a lo que quiere conocer (S), combinación de estos conceptos o su negación mostrada en este documento respectivamente como (~~A~~), (~~P~~) o (~~S~~).

Respuesta al Problema 1 (SEL 2×2 consistente solución única)

1a) ¿Por qué si arrastras el punto A sobre la recta $f: 60x + 100y = 53$ y/o el punto B sobre la recta $g: 70x + 280y = 87$ éstos no pasan del primer cuadrante?

Tabla 2

Resultados de E4 y E9 de la Tarea 1a)

E4	Porque en las cantidades dadas no existen cantidades ni costos negativos. “Porque en las cantidades dadas no existen cantidades ni costos negativos.”	E4 y E9 interpretaron de manera adecuada la representación geométrica del problema. Aunque no lo señalaron de manera explícita, identificaron y le dieron significado al dominio de las funciones lineales graficadas. Es decir, le dieron sentido a lo que quisieron conocer (S).
E9	Cuándo arrastras el punto "A" y el "B"; No pasan de 1er cuadrante porque; No hay números negativos “Cuando arrastras el punto “A” y el “B”; No pasan del 1er cuadrante porque: No hay números negativos”	

Después de construir el SEL $\begin{cases} 60x + 100y = 53 \\ 70x + 280y = 87 \end{cases}$ en el applet, de observar que las rectas se intersecan en el punto $(0.63{,}015)$ y de resolver éste por el Método de reducción de Gauss en la ventana Cálculo Simbólico (CAS) de GeoGebra (véase Figura 1), E4 y E9 no tuvieron dificultad para reportar que el SEL es consistente con solución única. Asociaron las representaciones geométricas y algebraicas para dar solución al SEL y la respuesta la relacionaron con el problema enunciado en forma verbal (Asociación de objetos). De esta manera, en la Tabla 3 los equipos respondieron el problema representado en forma verbal (con ayuda de tecnología):

1d) ¿Qué cantidad de *kg de avena* y *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga un *costo de* \$53 y contenga 87 *g de grasa*?

Tabla 3

Resultados de E4 y E9 de la Tarea 1d)

E4	0.154 Kg de Ajonjolí 0.625 Kg de Avena “0.154 Kg de Ajonjolí” “0.625 Kg de Avena”	Los equipos asociaron de manera adecuada el problema enunciado en forma verbal con el registro geométrico y simbólico del applet. Asociación de objetos (A).
E9	“y”- Avena = 0.154 “x”- Ajonjolí = 0.627 “y”-Avena = 0.154 [kg]” “x”-Ajonjolí – 0.627 [kg]”	

De acuerdo con los resultados precedentes, algunos equipos mostraron cómo responder problemas de enunciado verbal con el apoyo de GeoGebra; a saber, cuando se les planteó en la Tarea 1d) modificaran en el applet el costo de la mezcla de \$83 y 57 *g de grasa* por \$80 y 150 *g de grasa* respectivamente, y con ello resolvieran la Tarea 1e):

1e) ¿Qué cantidad de *kg de avena* y *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga un costo de \$80 y contenga 150 *g de grasa*?

E4 acertó Avena 0.755 (“Avena 0.755 [*kg*]“) y Ajonjolí 0.347 (“Ajonjolí 0.347 [*kg*]“) (Asociación de objetos); mientras que por falta de *atención* (Mason, 2008) E9 falló su intento al reportar Sería 0.8 Kg de avena y 0.5 Kg de Ajonjolí (“Sería 0.8 Kg de avena y 0.5 kg de Ajonjolí”). Este equipo no hizo los cálculos adecuados en la ventana de Cálculo Simbólico (CAS). Ellos sólo reportaron en su hoja de trabajo, sin sentido: Es valido (“Es válido”). E9 no le dio sentido a lo que quiso conocer (~~S~~).

En la Tarea 1g):

1g) ¿Qué cantidad de *kg de avena* y *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga un costo de \$52 y contenga 150 *g* de grasa?

Fue necesario plantear el SEL $\begin{cases} 60x + 100y = 52 \\ 70x + 280y = 150 \end{cases}$ cuya solución –única– es $(-0.04{,}0.55)$. Aunque la respuesta de E4 no es completa (Tabla 4); es decir, no mencionan que las cantidades (coordenadas) correspondientes al punto de intersección de las rectas graficadas son negativas, identificaron que el problema no tenía solución; en otras palabras, lograron asociar, ver y manejar los registros a partir de la experiencia en la solución de los problemas previos. Se observa cierta aprehensión del objeto matemático SEL 2×2 y por tanto Posición cognitiva.

Tabla 4

Resultados de E4 y E9 de la Tarea 1g).

E4	No hay un punto de intersección por lo tanto no existe una solución para esta justificación. “No hay un punto de intersección [se refieren al cuadrante positivo] por lo tanto no existe una solución para esta justificación [se refieren al problema].”	E4 interpreta la solución de forma adecuada (Posición cognitiva), y no como se pudiera pensar, en término de si las rectas se intersectan.
E9	Avena – X = 0.627 “Avena – x=0.27” Ajonjolí – y = 0.154 “Ajonjolí – y=0.154”	E9 no respondió de forma correcta. No pudo darle sentido al problema y asociarlo con una representación algebraica adecuada. No le dio

		sentido a lo que quiso conocer (~~S~~).

La primera respuesta de E9 no fue adecuada (Tabla 4); sin embargo, este equipo corrigió su error cuando hizo uso del CAS y reportó: Tiene una interseccion en el segundo Cuadrante, No tiene solucion (“Tiene una intersección en el segundo cuadrante, [el SEL] No tiene solución”) E9 asoció el problema en su representación verbal con la representación geométrica, le dio sentido al resultado y lo interpretó en términos del problema. E9 asoció objetos (A) y le dio sentido a lo que quiso conocer (S).

La Tarea 1i) causó confusión entre los estudiantes ya que E4 y E9 (así como ninguno de los equipos participantes) lograron plantear el SEL $\begin{cases} 60x + 100y = 77 \\ x + y = 1 \end{cases}$ y, por tanto, no obtuvieron la solución correcta en los registros gráfico y simbólico por medio de Cálculo Simbólico (CAS) de dicho problema; el enunciado de esta tarea es el siguiente:

1i) ¿Cuántos *kg de avena* y de *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que un *kg* de la mezcla tenga un costo de $77?

Para este tipo de problemas los estudiantes no les fue posible asociar el enunciado en forma verbal con el SEL correspondiente en su forma algebraica. Fallaron en la Asociación de objetos (~~A~~). Ahora bien, de acuerdo con el resultado para la siguiente Tarea 1k):

1k) ¿Qué cantidad de *kg de cacahuate* y *kg de coco rayado* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga 25 *g de proteína* y 73 *g de carbohidratos*?

Se puede argumentar lo siguiente: por un lado, E4 hizo el ajuste adecuado en el applet y planteó el SEL $\begin{cases} 173x + 33.3y = 25 \\ 253\,x + 150y = 73 \end{cases}$. Este equipo reportó de forma correcta el ponto de intelseccion es 0.075, 0.36 (“el punto de intersección es 0.075, 0.36”) tanto en la ventana Vista Gráfica como en Cálculo Simbólico (CAS) de GeoGebra (Asociación de objetos), pero no mencionó (interpretó) el significado del par ordenado en términos de la cantidad de kilogramos de los productos con las especificaciones del problema, prueba de que posiblemente los estudiantes no asociaron el lenguaje simbólico con el verbal y no le dieron sentido. E4 no le dio sentido a lo que quiso conocer (~~S~~).

Por otro lado, E9 respondió Kg Cacahuate – (“Kg Cacahuate –”), Kg Coco Rayado – (“Kg Coco Rayado”) y 98g de Mezcla (“98 g de Mezcla”). Este equipo dejó de *ser (estar) consciente* (Mason, 2008); es decir, de articular los objetos y representaciones matemáticas que estaba manipulando y dio respuestas sin significado o sentido en términos de las preguntas y el problema. E9 no le dio sentido a lo quiso conocer (~~S~~).

Reflexión. En los resultados descritos puede observarse que E9 a diferencia de E4 presentó más dificultades para asociar representaciones, dar sentido o significado a resultados y por lo tanto, menor aprehensión del objeto matemático SEL 2×2 consistente con única solución (Posición cognitiva).

Problema 2 Respuesta (SEL 2×2 inconsistente)

En seguida se analizan los datos del grupo de tareas 2 de SEL 2×2 inconsistentes (véase Figura 2), para ello se diseñaron preguntas que buscaban este fin. La Tabla 5 ilustra la respuesta de E4 y E9 del SEL $\begin{cases} 70x + 280y = 163 \\ 2\,x + 8y = 7 \end{cases}$ que correspondió a la Tarea 2c):

2c) ¿Qué cantidad de *kg de avena* y *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que la mezcla tenga 163 *g de grasa* y 7 *mg de vit b*?

Tabla 5

Resultados de E4 y E9 de la Tarea 2c)

E4	1kg de avena y 1kg de ajonjolí	La respuesta está fuera de contexto, E4 no le dio significado al problema. Este no le dio sentido a lo que quiso conocer (~~S~~).
E9	No tiene solución y SEL No es consistente Kg de Ajonjoli y Avena en grasa (0.5, 0.457) mg de vitamina b (0.1 y 0.85) "No tiene solución y SEL No es consistente Kg de Ajonjoli y Avena en grasa (0.5,0.457) mg de vitamina b (0.1 y 0.85)"	En un inicio, el equipo contestó de forma adecuada que el SEL no era consistente, aparentemente le dio significado al problema. E9 le dio sentido a lo que quiso conocer (S); sin embargo, pareciera que E9 estuvo buscando valores por ensayo y error para encontrar su respuesta. $(0.5, 0.457)$ y $(0.1, 0.85)$ son puntos respectivamente, de las rectas $70x + 280y = 163$ y $2x + 8y = 7$ los cuales es posible que los hayan localizados en el applet. E9 no encontró el resultado, quizás no supo cómo resolver el problema, no asoció significado a la representación gráfica del SEL. E9 no le dio sentido a lo que quiso conocer (~~S~~).

En los resultados de la precedente tarea se ve reflejada ausencia de *consciencia* en E4 (Mason, 2008), es decir, falta de aprehensión del concepto SEL 2×2 inconsistente o falta de Posición cognitiva (~~P~~). Pareciera que E9 sólo "ve" inconsistencia en un SEL2×2 (en el sentido de Duval, 2003) si las rectas no se intersecan (véase comentario de E9 en la Tabla 5) sin identificar cómo puede asociar esta representación gráfica con el registro simbólico. Falta de Asociación de objetos (~~A~~).

Reflexión. En los resultados descritos puede observarse que ambos equipos presentaron dificultades para resolver este problema. Les fue difícil asociar representaciones, dar sentido o significado y, por lo tanto, no se observa una aprehensión del objeto matemático SEL 2×2 inconsistente: falta de Posición cognitiva (~~P~~).

Problema 3 Respuesta (SEL 2×2 consistente con infinidad de soluciones)

Finalmente, se analizan datos de SEL 2×2 consistentes con infinidad de soluciones. Para ello se diseñaron tareas como:

3a) Arrastra los puntos A y B y determina si el SEL $\begin{cases} 70x + 280y = 140 \\ 2x + 8y = 4 \end{cases}$ es consistente. En el siguiente rectángulo justifica tu respuesta.

3b) Contesta la Tarea 3a) con el uso de "Cálculo Simbólico (CAS)" de GeoGebra por medio del método de reducción (eliminación) de Gauss. En el siguiente rectángulo justifique el resultado obtenido.

3d) ¿Cuántos *kg de avena* y *kg de ajonjolí* se requiere si se desea elaborar una mezcla con esos ingredientes de manera que 1 *kg* de la mezcla tenga 170 *g de proteína*?

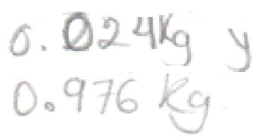
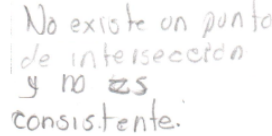
3e) Contesta la Tarea 3d) con el uso de "Cálculo Simbólico (CAS)" de GeoGebra por medio del método de reducción (eliminación) de Gauss. En el siguiente rectángulo has comentarios que justifiquen el resultado obtenido.

La Tabla 6 muestra las respuestas de E4 correspondientes a las tareas precedentes. Obsérvese en los comentarios, de la última columna de esta tabla, cómo E4 se contradice: por un lado, la respuesta de las tareas 3a) y 3b) son aceptables al responder en el registro geométrico que las rectas se "empalman"; por otra parte, las Tareas 3d) y 3e) contradice las respuestas de estas tareas. Además, da a entender que las rectas sólo se intersecan en el punto (0.024,0.976), y menciona que no existe un punto de intersección, además asegura que el SEL (que no plantearon) es inconsistente. Por lo tanto, en esta declaración de E4 se observa falta de *sentido* (Mason, 2008) o significado de un SEL 2×2 incosistente. Es falta de sentido de E4 de lo que quiso conocer (~~S~~) ya que no le dieron significado al registro gráfico y, por tanto, no lograron resolver el problema de SEL 2×2 cuyas rectas son una misma. No se incluyen las respuestas de E9 debido a que fueron incorrectas y no aportan algo relevante para el propósito de este artículo.

Tabla 6

Resultados de E4 de las tareas 3a), 3b), 3d) y 3e).

	Registro geométrico	Registro simbólico (CAS)	Comentarios
E4	Tarea 3a) Teoría $\begin{cases} 70x + 280y = 140 \\ 2x + 8y = 4 \end{cases}$	Tarea 3b) Planteamiento del SEL	Las respuestas de E4 fueron aceptables. E4 le dio sentido a lo que quiso conocer (S). Pudo asociar las representaciones gráficas y simbólicas.
	Sí es consiste porque ambas rectas empal man y existen infinidad de soluciones "Sí es consistente porque ambas rectas [se] empalman y existen infinidad de soluciones"	La ecuación principal no cambia y no refleja infinitas soluciones "La ecuación principal no cambia y no refleja infinitas soluciones"	

E4	Tarea 3d) E4 no plantea el SEL $\begin{cases} 170x + 170y = 170 \\ x + y = 1 \end{cases}$	Tarea 3e) E4 no hace un trabajo adecuado en CAS	Por un lado, en la Tarea 3d) E4 se limitó a contestar un resultado que no explicaron cómo lo obtuvieron, sobre todo porque no dieron evidencia de haber planteado el SEL, además no asociaron su respuesta con las correspondientes a las tareas 3a) y 3b): falta de Asociación de objetos (~~A~~). Por otro lado, E4 no supo desarrollar el trabajo con CAS y responde de forma inadecuada la Tarea 3d). E4 no le dio sentido de lo que quiso conocer.
	 "0.024 Kg y 0.976 Kg"	 "No existe un punto de intersección y no es [un SEL] consistente"	

Reflexión. En los resultados descritos puede observarse que E4 logró asociar representaciones gráficas y simbólicas, pero no pudo interpretarlas en términos del problema y asociar o no, a partir de ellas, la existencia de soluciones. Por lo tanto, no se aprecia una aprehensión del objeto matemático SEL 2×2 inconsistente: falta de Posición cognitiva (~~P~~).

Conclusiones

El análisis de datos nos arroja que los estudiantes de los equipos E4 y E9, revisados en este artículo, tuvieron errores, pero también lograron avances significativos. Por ejemplo, al inicio de la Actividad 3, interpretaron de manera adecuada problemas de enunciado verbal relacionados con planteamiento y solución de SEL 2×2; sobre todo de SEL con solución única, ello bajo la influencia de representaciones gráficas y algebraicas mediante el uso de GeoGebra. Particularmente, destacamos el trabajo de E9 en el registro simbólico, ya que el uso de CAS les permitió modificar su respuesta equivocada y darle sentido al problema en términos de una nueva Asociación de objetos (Mason, 2008; Duval, 1999, 2003, 2006) a través del uso de más representaciones. Este aporte de E9 permitió observar cómo influyó en estudiantes de ingeniería el uso de representaciones y GeoGebra en la resolución de problemas de enunciado verbal, lo cual está relacionado con la primera pregunta de investigación a responder en este artículo.

A medida que los equipos avanzaron en sus actividades, y de acuerdo con los datos reportados, se observó una falta de *consciencia* (Mason, 2008), es decir, falta de aprehensión del concepto SEL 2×2 inconsistente, principalmente en E9. Lo mismo ocurrió con los SEL 2×2 consistentes con infinidad de soluciones, ello reflejado en la poca conexión entre los registros geométricos y simbólicos (CAS).

La falta de *consciencia* (Mason, 2008) o falta de aprehensión y de asociación de registros semióticos (Duval, 2003), nos llevó a coincidir con resultados obtenidos en otros estudios de autores como Oktaç, (2009), Radford, Edwards y Arzarello (2009), Kieran (2006), entre otros, quienes mencionan que es difícil para los estudiantes comprender conceptos relacionados con las diferentes opciones de solución de un SEL 2×2 y con el concepto de solución. De aquí las dificultades que los estudiantes exhibieron para modificar con éxito el aprendizaje de SEL, reflejado principalmente en el aprendizaje de SEL inconsistentes o consistentes con infinidad de soluciones. Esto responde la segunda pregunta de investigación respecto de cómo se modificó el conocimiento del aprendizaje de SEL 2×2 inconsistentes y SEL 2×2 consistentes con infinidad de soluciones.

Creemos que si se incluyen más tareas, la actividad de La Granola podría apoyar a mejorar la comprensión de SEL 2×2. Por lo tanto, nuestro compromiso es rediseñar las actividades aquí planteadas con la intención de lograr que los estudiantes no solo reporten comprensión de problemas de enunciado verbal y tecnología en el aprendizaje de SEL 2×2, sino que también lo lleven a cabo con otras dimensiones, como SEL 3×2 en el que se incluya el sentido inverso; es decir, dado un SEL relacionarlo con un problema de enunciado verbal.

Referencias bibliográficas

Aydin, S. (2014). The role of technology in the teaching linear algebra. *Studies in Modern Society*, *5*(1), 117-128.

Aysegül, Y. U. (2013). Teaching the diagonalization concept in lineal algebra with technology: a case study at Galatasaray university. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, *12*(1), 119-130.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context: an analysis of problems. *Proceedings of the 18 Internacional Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 64-71). Lisboa, Portugal.

Cristóbal-Escalante, C. & Vargas-Alejo, V. (2013). The Development of Mathematical Concept Knowledge and of the Competence to use this Concept to Create a Model. En G. Kaiser & G. Stillman (Eds.), *Teaching Mathematical Modeling: Conectting to Research and practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling series* (pp. 517-526). Holanda: Springer.

Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2011). On a research programme concerning the teaching and learning of linear algebra in the first-year of a French science university. *International Journal of Mathematical Education in Schiece & Technology*, 2000, *3*(1), 27-35. doi: 10.1080/002073900287354

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. En Dorier, J-L. (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 85-124).

Dorier, J. L, Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (1999). Teaching and learning linear algebra in the first years of French science university. *European Research in Mathematics Education*, *1*. Recuperado de https://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html

Dreyfus, T., Hillel, J. & Sierpinska, A. (1999). Cabri based linear algebra: transformations. *European Research in Mathematics Education*, *I*, 209-221.

Gol, T. S. (2012). *Using Dynamic geometry to explore linear algebra concepts: the emergence of mobile, visual thinking* (Tesis doctoral). Simon Fraser University, Canada.

Gol, T. S., & Sinclair, N. (2010). Shifts of attention in DGE to learn eigen theory. En Pinto, M.F. & Kawasaki, T.F. (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 33-40). Bello Horizonte: Brasil.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131.

Duval, R. (2003). «Voir» en mathématiques. En Filloy, E. (coordinador), *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Fondo de Cultura Económica.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* [Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Peter Lang S. A. Editions scientifiques européennes, 1995]. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Guzmán H. J, & Zambrano A. J. (2016). Vector subspaces generated by vectors of $\mathbb{R}^n$: Role of technology. *Proceedings of the 67 International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching* (pp. 473-486). Aosta, Italia.

Haddad, M. (1999), *Difficulties in the learning and teaching of linear algebra. A Personal experience* (Tesis de maestría). Concordia University, Montreal, Canadá.

Harel, G. (1997). The linear algebra curriculum study group recommendations: Moving beyond concept definition. En Carlson D., Johnson, C, Lay, D., Porter, D., Watkins, A, \& Watkins, W. (Eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra*. MAA Notes, *42*, (pp. 107-126). Whashington D. C.: Institute of Education Science.

Haspekian, M. (2005). *Integration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathematiques, etude du cas des tableurs*. Université Paris-Diderot.

Hillel, J. (2001). Computer algebra systems in the learning and teaching of linear algebra: some examples. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 371-380). Holanda: Kluwer Academic Publisher.

Kieran, C. (2014). Algebra teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Educations* (pp. 27-32). Dordrecht, The Netherlands: Springer Reference.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Charlotte, N.C,: Information Age.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the psychology of mathematics education* (pp. 11–49). Rotterdam: Sense Publishers.

Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners: attention, awareness and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers and learners. En

T. Wood & B. Jaworski (Eds.), *The International handbook of mathematics teachers education, 4*. (pp. 31-56). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher.

Oktaç, A., & Trigueros, M. (2009). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II): 373-385.

Pruncut, A. (2008). *A study of students' theoretical thinking in a technology-assisted environment* (Tesis de maestría). Concordia University: Montreal.

Radford, L., Edwards, L., & Arzarello, F. (2009). Introduction: beyond words. *Educational studies in mathematics*, *70*(2), 91–95.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra in question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Sierpinska, A., Dreyfus, T., & Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(1), 7-10.

Soto, J. L., & Romero, F. C. (2011). El concepto de transformación lineal: una aproximación basada en la conversión gráfico-algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt & C. Cortés (Eds.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 38-49). Canada: Loze-Dion.

Uicab, R., & Octaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(3), 459-490.

Vargas-Alejo, V., & Guzmán-Hernández, J. (2012). Valor pragmático y epistémico de técnicas en la resolución de problemas verbales algebraicos en ambiente de hoja de cálculo. *Enseñanza de las ciencias*, *30*(3), 89-107.

Vargas-Alejo, V., & Cristóbal-Escalante, C. (2012). Developing mathematical competences, learning linear equations, functions and the relation among these concepts. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(7), 48-54.

ONE REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2019

ISSN: 2395-955X

VIDEOS TUTORIALES PARA EL APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

TUTORIAL VIDEOS FOR LEARNING FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

[1]Eliezer Casado Ramírez, [2]Jaime Ortegon Aguilar, [2]Melissa Blanqueto Estrada

Instituto Tecnológico Superior de Escárcega[1], Universidad de Quintana Roo[2]

casado-ramirez@hotmail.com, jortegon@uqroo.edu.mx, melissa@uqroo.edu.mx

Para citar este artículo:

Casado, E., Ortegon, J. Blanqueto, M. (2019). Videos tutoriales para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales de primer orden. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 2, pp. 21-36. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 2, julio-diciembre de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

VIDEOS TUTORIALES PARA EL APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

TUTORIAL VIDEOS FOR LEARNING FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

[1]Eliezer Casado Ramírez, [2]Jaime Ortegon Aguilar, [2]Melissa Blanqueto Estrada

Instituto Tecnológico Superior de Escárcega[1], Universidad de Quintana Roo[2]

casado-ramirez@hotmail.com, jortegon@uqroo.edu.mx, melissa@uqroo.edu.mx

Resumen

Este trabajo aborda el uso de videos tutoriales de apoyo para el aprendizaje de EDO de primer orden. Se desarrollaron videos en colaboración con los estudiantes del tercer semestre de la Ingeniería en Industrias Alimentarias del Instituto Tecnológico Superior de Escárcega. Se trabajó con dos grupos, A y B, donde en las primeras cuatro sesiones en ambos grupos se impartieron clases en forma de seminario, sin embargo, en la tres últimas sesiones: en el grupo A se implementaron videos tutoriales con teoría preliminar de EDO, su solución por el método de separación de variable y aplicación, mientras en el grupo B las clases continuaron de la manera tradicional. Durante el análisis de los resultados, se presentaron diferencias significativas entre los dos grupos. Al finalizar, se aplicó a los estudiantes una encuesta de satisfacción sobre el uso de videos en clases; de esta encuesta, se concluye que existe una motivación adicional al saber que profesores y compañeros han participado en la elaboración de los videos.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), video educativo, aprendizaje multimedia, motivación para el aprendizaje.

Abstract

This work deals with the use of tutorial videos to support the learning of ODE of first order. Videos were developed, in collaboration with the students in the third semester of the Engineering in Food Industries of the Higher Technological Institute of Escárcega. We work with two groups, A and B, where the first four sessions are taught in the form of a seminar, however, in the last three sessions: in the group Tutorial videos with preliminary theory of ODE, solution for the method are implemented of separation of the variable and the application, while in group B the classes continued in the traditional way. During the analysis of the results, the differences between the two groups are shown. At the end, a satisfaction survey on the use of videos in classes is applied to students; of this survey, it is concluded that there is an additional motivation to know that teachers and classmates have participated in the making of the videos.

Keywords: Ordinary differential equations (ODE), Educational video, Multimedia learning, Motivation for learning.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) tienen numerosas aplicaciones a la ciencia y a la ingeniería, de modo que los esfuerzos de los científicos se dirigieron, en un principio, a la búsqueda de métodos de resolución y de expresión de las soluciones en forma adecuada.

En general, cuando un modelo matemático está formulado con base en la razón de cambio de una variable con respecto a otra, las ecuaciones diferenciales aparecen. En las ciencias e ingeniería, se desarrollan modelos matemáticos para comprender mejor los fenómenos físicos, con frecuencia, estos modelos producen una ecuación que contiene derivadas de una función incógnita, y con ello se obtiene una ecuación diferencial.

El curso inicial de ecuaciones diferenciales tiene un papel significativo en la formación matemática de los estudiantes de nivel superior. Este curso proporciona a los estudiantes instrumentos que les permiten obtener funciones que modelan situaciones en contextos no matemáticos, partiendo de conocer aspectos de la situación relacionados con su rapidez de variación y algunos valores particulares de las variables que intervienen.

Por lo general, los cursos relacionados incluyen la definición de EDO, definición de solución de una EDO, tipos de ecuaciones, teoremas relacionados con la existencia, y no existencia, de soluciones y de su multiplicidad, métodos para obtener las soluciones, entre otros tópicos. La metodología, que siguen ciertos cursos sobre ecuaciones diferenciales, suele ser metódica y rigurosa, en el sentido de que no existe una interacción entre el aprendizaje del estudiante y la enseñanza del profesor. Por lo regular, cuando se consideran las aplicaciones en un curso de EDO, se procede a resolver la ecuación diferencial asociada a la situación y no se explica el impacto de la solución en su contexto, es decir, no se discute sobre la importancia o implementación misma.

Se ha observado que los estudiantes mecanizan ciertos procedimientos para resolver una ecuación diferencial de primer orden, pero nunca logran plantear la ecuación y obtener su solución, a partir de que se les proporciona información sobre la variación de cantidades variables de una situación real, solamente memorizan las soluciones propuestas en diversas fuentes bibliográficas.

Este trabajo presenta una secuencia didáctica que proporciona al estudiante los conocimientos y habilidades para resolver problemas en contextos no matemáticos, cuya solución lleve a plantear y resolver una EDO de primer grado.

Referente teórico

Las investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales se pueden dividir en dos grandes grupos: aquellas centradas en la detección y análisis de dificultades en el proceso de aprendizaje y las que proponen modelos de enseñanza alternativos al modo tradicional, basado en el tratamiento algebraico del concepto, la clasificación de las ecuaciones en diferentes tipos y el uso de métodos algebraicos de resolución específicos para cada tipo de ecuación (Perdomo , 2011).

Distintos trabajos señalan este concepto como elemento que provoca la aparición de dificultades en el tratamiento de las EDO, considerando dos posibles causas: (i) el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial es un espacio formado por funciones y no por valores numéricos y (ii) el uso de métodos de resolución o de cálculo en el que se consideran las variables como símbolos que se deben manipular, sin tomar en cuenta su significado (Rasmussen, 2001).

Carmona, Flores, Ruiz, Salazar, Chávez (2010) desarrollaron una propuesta didáctica con la cual se pretende que el alumno tenga un aprendizaje significativo de la ecuación diferencial por medio de la manipulación del fenómeno a estudiar en situaciones en contexto de física.

Morales (2010) nos habla de la enseñanza de las matemáticas desde las perspectivas de resolución algebraica, método geométrico y método numérico, en el que determina que la mayoría de los estudiantes creen que resolver una EDO, significa realizar una serie de pasos algebraicos.

Desde la perspectiva de uso de las Tecnoligías de la Información y Comunicación (TIC) en la enseñanza de las EDO, se pueden mencionar trabajos como: Oviedo (2013), quien realiza una propuesta didáctica de las EDO de primer grado en un enfoque cuantitativo-gráfico y analítico apoyado con el software Mathematica 9.0; Sandoval y Díaz Barriga (2002) plantean desde una perspectiva didáctica con geometría dinámica la enseñanza de las EDO de primer grado. Menárguez y Cánovas (2010) muestran la utilidad del Excel desde el punto de vista didáctico, en la aplicación de diferentes métodos numéricos a la resolución de problemas de valor inicial de EDO. Perdomo (2011) nos presenta el estudio de dos módulos de enseñanza de las EDO: uno de forma tradicional y el otro en un ambiente de resolución de problemas con el uso de las TIC; en ellos, se dio a los estudiantes la formación formal de conceptos, clasificación y métodos algebraicos de resoluciones de las EDO, al final de cada módulo resolvían problemas en contexto no matemático similares al resuelto antes por el profesor.

La literatura del estudio de las EDO se enfoca bajo las perspectivas de resolución analítica, cualitativa y numérica. La perspectiva analítica busca encontrar la solución a la EDO de forma algebraica-algorítmica. En la perspectiva cualitativa, se busca dar solución a la EDO explorando la geometría del comportamiento del modelo. Por último, la perspectiva numérica busca una solución aproximada a la EDO, con la ayuda de un método numérico y la computadora; actualmente hay una gran variedad de métodos numéricos para dar solución a EDO.

Las EDO de primer grado tienen en común el estudio de cuatro problemas de aplicaciones las cuales son: ley de enfriamiento de Newton, ley de Malthus, mezcla de dos sustancias y un circuito RL. Al resolver las EDO de primer grado como las anteriores, se utiliza el método de separación de variables que involucra una expresión algebraica como método de solución de estas, el cual permite despejar la primera derivada de la variable dependiente (Zill, 2009; Carmona y Filio, 2011).

El aprendizaje

El aprendizaje es un tema que ha sido objeto de estudio desde años atrás por diversos investigadores, teóricos y profesionales del área de la educación, Feldman (2005) define al aprendizaje como un proceso de cambio relativamente permanente en el comportamiento de una persona generado por la experiencia. Esta definición supone que el aprendizaje implica un cambio conductual o un cambio en la capacidad conductual; dicho cambio es duradero y el aprendizaje ocurre, entre otras vías, través de la práctica o de otras formas de experiencia.

Aprendizaje multimedia

A finales de 80´s, con el apogeo de la multimedia y las nuevas posibilidades que brindaba la computadora en cuanto a gráficas y sonido, una infinidad de investigadores empiezan a realizar estudios sobre la manera en que estas herramientas podrían favorecer el aprendizaje. De lo anterior surge la la teoría de aprendizaje multimedia, siendo su principal exponente Richard Mayer de la Universidad de California quien desarrolla la teoría cognitiva del aprendizaje multimedia (Andrade, 2012). Por multimedia se entiende video, texto, gráficos, audio y animación controlados por computadora.

Para Mayer (2005), el aprendizaje multimedia es aquel en el que un sujeto logra la construcción de representaciones mentales ante una presentación multimedia, es decir, logra construir conocimiento. En la Tabla 1 se presentan los 12 principios del aprendizaje multimedia (Mayer, 2010).

Aprendizaje efectivo

El aprender es una constante en la vida de cualquier individuo, algunas cosas se aprenden más rápido que otras o con menos esfuerzos y para lograr un aprendizaje se tiene que tomar en cuenta factores sociales, emocionales y culturales. El aprendizaje es efectivo si se cumplen cuatro características: un entorno creativo con múltiples herramientas y materiales (sonidos, imágenes, vídeos, etc.) que envuelven al estudiante en la adquisición de conocimiento, logrando un compromiso activo con cada integrante del aula; facilitan el contacto entre alumnos y profesor, permitiendo que realice actividades en conjunto y que compartan sus ideas (Hernández, 2008).

Tabla 1

Principios del aprendizaje multimedia, adaptación de Mayer (2010)

Principio	Descripción
Coherencia	Eliminación de imágenes, palabras o sonidos no relevantes.
Señalización	Agregar señales para focalizar la atención.
Redundancia	Mejora el aprendizaje con imágenes narradas o con texto, pero no ambas modalidades.
Segmentación	Contenidos divididos en apartados que permiten libre navegación.
Pre-entrenamiento	Introducción preliminar de conceptos clave de la formación.
Modalidad	Mejora del aprendizaje con imágenes y narración.
Multimedia	Mejora del aprendizaje con contenidos que incorporan imágenes y textos.
Personalización	El tono utilizado en la narración es familiar.
Voz	Uso de voz humana amigable.
Contigüidad temporal	Uso de palabras e imágenes correspondientes de forma sincronizada.
Contigüidad espacial	Las palabras e imágenes correspondientes se presentan en un mismo espacio.
Imagen	Las personas no necesariamente aprenden mejor en ambientes multimedia cuando pueden visualizar al locutor que acompaña la narración.

Ambrose et. al. (2008) resumen en siete principios el aprendizaje desde una perspectiva holística, es decir, que interactúa y se intersecta con otros procesos de desarrollo de la vida del estudiante. Los siete principios interactúan entre si y, en cada caso se puede destacar algún principio sobre los otros.

1. El conocimiento previo de los estudiantes influye en su aprendizaje, facilitando o impidiéndolo.
2. La forma como los estudiantes organizan internamente el conocimiento influye en el aprendizaje y su aplicación práctica.
3. Factores que motivan a los estudiantes determinan, dirigen y sostienen lo que los estudiantes están dispuestos a hacer para aprender. Hay dos conceptos importantes que son fundamentales para atender la motivación: el valor subjetivo de una meta y las expectativas de éxito. Esto se ejemplifica en la Figura 1.
4. Las competencias se adquieren y desarrollan de una manera sistemática: los estudiantes deben aprender destrezas elementales, practicar su integración y saber cuándo aplicar lo aprendido.
5. La práctica y la retroalimentación deben estar dirigidas hacia metas y deben articularse entre sí.
6. El nivel de desarrollo de los estudiantes interactúa con el clima social, emocional e intelectual del curso, impactando en el aprendizaje.
7. El autoaprendizaje o aprendizaje autodirigido debe ser adquirido. Para ello es estudiante debe monitorear y ajustar su aproximación al proceso de aprendizaje. Los estudiantes deben afrontar variados procesos metacognitivos durante su aprendizaje, evaluando sus fortalezas y debilidades.

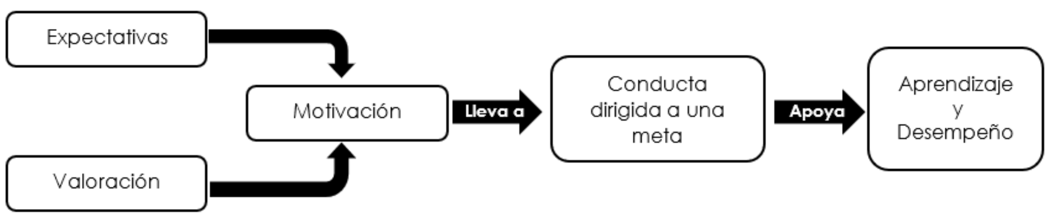


Figura 1. Impacto de la valoración y expectativas en el aprendizaje y desempeño.

Representaciones semióticas

Para las matemáticas, la adquisición conceptual de objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. Para Tamayo (2006) las representaciones semióticas son aquellas representaciones de sistemas de expresión y representación que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc., las cuales cumplen funciones comunicación, expresión, objetividad y tratamiento. Por otro lado, para Duval (2000) los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, consecuentemente pasa su estudio y tratamiento se requieren representaciones de carácter geométrico, algebraico y numérico del objeto; así como actividades de formación, tratamiento y conversión.

Durante el aprendizaje de un objeto matemático, los estudiantes pueden realizar un registro (representación semiótica), algunos de los cuales pueden ser (Macías, 2014): el Registro Numérico (RN) para representaciones numéricas de características y elementos identificados de los objetos matemáticos y su posible vinculación y relación con representaciones gráficas y geométricas; el Registro Algebraico (RA) que permite las generalizaciones, modelizaciones y señalar características particulares del objeto que representa; y el Registro Gráfico (RGr), para inferir el comportamiento que va seguir una determinada función, así como efectuar tratamientos como traslaciones, reflexiones, simetrías, contracciones, dilataciones, etc.

Video educativo

El desarrollo tecnológico en las últimas décadas ha producido un cambio en nuestra sociedad en aspectos, laborales, sociales y en la educación. La comunicación audiovisual se ha convertido en una herramienta para transmitir o recibir información de manera rápida y sencilla. Se puede definir al video educativo como:

"*Aquel que cumple un objetivo didáctico previamente formulado*" (Bravo, 1996).

Los docentes ocupan los videos como medio de enseñanza, para reducir el tiempo de explicación de los temas o mejorar la compresión de los temas. Los videos ofrecen demostraciones, ejemplos, información con la finalidad de alcanzar los objetivos académicos de diferentes niveles. El video con fines educativos debe ser usado como una herramienta de apoyo en la enseñanza, un instrumento o un recurso según contenidos y objetivos previstos en la estrategia didáctica, sin sustituir al profesor.

El video en línea es un video corto por las restricciones de tamaño de los archivos impuestas por los servicios de alojamiento como Youtube, que sólo permite videos de aproximadamente 10 min. El diseño instruccional a pequeña escala se ajusta al paradigma del nivel micro diseño instruccional. Según Snelson y Elison-Bowers (2007) "El diseño educativo de nivel micro se refiere a la práctica de diseñar y producir pequeñas unidades de instrucción". Este nivel se centra en los procesos de diseño y desarrollo de grano fino que se producen al crear un producto educativo, como un video instructivo. En la Tabla 2 se pueden observar algunas de las ventajas y desventajas en el uso del video.

Tabla 2

Ventajas y desventajas en el uso de video, adaptado de Jiménez y Marín (2012); (Guzmán, 2011)

Ventajas	**Desventajas**
Motivación del alumno y profesor. Cercanía de los estudiantes hacia lo visual y auditivo. Facilidad de reproducción y repetición. Adaptación a los objetivos planteados por el profesor. Facilita visualización grupal de objetos pequeños.	Tiende a la pasividad si el diseño de actividades no es motivador. Tiempo en la elaboración de videos.

El uso de los videos con fines educativos en los últimos años es utilizado con mayor frecuencia por parte de los profesores como recurso en su práctica por las ventajas anteriormente mencionadas. M. Cebrián (1987) distingue entre cuatro tipos de videos diferentes:

- Curriculares, se adaptan expresamente a la programación de la asignatura.
- Divulgación cultural, presentan a una audiencia dispersa aspectos relacionados con determinadas formas culturales;
- Carácter científico-técnico, se exponen contenidos relacionados con el avance de la ciencia y la tecnología o se explica el comportamiento de fenómenos de carácter físico, químico o biológico.
- Videos para la educación, tienen una intencionalidad didáctica, son utilizados como recursos didácticos y que no han sido específicamente realizados con la idea de enseñar.

Metodología

Este trabajo de investigación corresponde al tipo de investigación experimental, teniendo un grupo experimental y un grupo de control, los grupos A y B, respectivamente. Se aborda la resolución de ecuaciones diferenciales de primer grado en 30 estudiantes de tercer semestre de la carrera de Ingeniería en Industrias Alimentarias que cursaron la materia “Ecuaciones Diferenciales” durante el ciclo Febrero - Julio 2018 en el Instituto Tecnológico Superior de Escárcega. Las edades de los estudiantes comprenden entre 19 y 21 años y han cursado cálculo diferencial e integral, cálculo vectorial y álgebra elemental. En la unidad ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, se abordan los temas: definición de ecuación diferencial, soluciones de las ecuaciones diferenciales y aplicaciones.

Diseño

Para el diseño de los videos y de los instrumentos (cuerstionarios), se plantearon 3 problemas acordes a la carrera de ingeniería en Industrias Alimentarias que a continuación se describen, junto con una sinopsis del video:

Problema # 1 “Ley de enfriamiento de Newton”. *En el proceso de elaboración de queso, la leche debe de hervirse hasta los 80 °C, posteriormente, se deja enfriar hasta que alcanza los 35 ° C para poder agregarle el cuajo, el cual tiene una enzima encargada de separar la caseína de su fase líquida. ¿Cuánto tiempo tardará en enfriarse la leche de la temperatura 80 °C a 35 °C si la temperatura en la habitación donde se realiza el proceso es constante?*

Se presenta las problemáticas, posteriormente tres estudiantes contestaron sobre cómo estimar el tiempo que tardaría en enfriarse la leche en el proceso de elaboración de queso, luego el maestro resolvió la problemática utilizando la ley de enfriamiento de Newton, acto seguido muestra el tiempo real y tiempo estimado en enfriarse la leche y por último los estudiantes proponen cómo la aplicarían en otros contextos.

Problema # 2 “Ley de Malthus”. *Se sabe que la tasa de crecimiento de una determinada población de bacterias es directamente proporcional al número de bacterias existentes. Se realizó un estudio a una muestra de carne, se le introdujeron 120 bacterias. La muestra se introdujo en un medio esterilizado para su estudio, el cual se observó que la población de bacterias se duplica cada 3 horas. ¿Cuál será la población de bacterias después de haber transcurrido 48 horas?*

El maestro presentó la problemática, posteriormente, pregunta a los alumnos cómo resolverla, acto seguido, el profesor empieza a resolver el problema con la ley de Malthus, al final los estudiantes enfatizan su importancia y sus futuras aplicaciones.

Problema # 3 “Mezcla de 2 sustancias”. *Un tanque grande de mezcla inicialmente contiene 400 galones de salmuera. Otra solución de salmuera se introduce en el tanque a una velocidad de 4 galones por minuto; en este flujo la concentración de sal es de 2 libras por galón. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae al mismo ritmo que la solución de entrada. Encuentre el número A (t) de gramos de sal presentes en el tanque en el tiempo t.*

Se presenta la opinión de un estudiante sobre el curso de ecuaciones diferenciales, posteriormente el maestro en un laboratorio presenta la problemática y empieza a resolver el problema usando una ecuación de diferencial, al final los estudiantes enfatizan su importancia y sus futuras aplicaciones.

Los video tutoriales realizados para los estudiantes del Instituto Tecnológico Superior de Escárcega fueron alojados en YouTube para facilitar el acceso externo en el enlace https://tinyurl.com/videotutoralesEDO.

Los instrumentos consisten en cuestionarios, los cuales constan de un conjunto de reactivos cuya finalidad pretenden explorar y buscar los diferentes errores o dificultades que presenta los estudiantes al resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de separación de variable, y resolver problemas de aplicación ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de separación de variables.

Implementación

Se tuvo cuatro sesiones cuyo objetivo fue presentar el contenido e importancia de la unidad (ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden) en el curso; hacer un breve repaso de álgebra, funciones, así como, cálculo diferencial e integral.

En las sesiones posteriores, con el grupo experimental (A) se utilizaron video tutoriales, por otro lado, con el grupo de control (B) no se utilizaron videos, impartiendo los temas en forma de seminario. De estas sesiones, la quinta trata la teoría preliminar de ecuaciones diferenciales, donde se explicó qué es una ecuación diferencial, como se clasifican según su tipo, orden, grado y linealidad.

Durante la sexta sesión, se explicó la solución de ecuaciones diferenciales de primer grado por el método de separación de variable. Finalmente, la séptima sesión sirvió para instruir sobre el modelado de ecuaciones diferenciales de primer orden como la ley de enfriamiento de Newton, Mezcla de dos sustancias y Ley de Malthus.

Resultados

En la sexta sesión, los estudiantes visualizaron 3 videos tutoriales de la solución de ecuaciones diferenciales de primer grado por el método de separación de variable. Se reprodujo dos veces cada video, donde el profesor atendió las dudas de los estudiantes, para poder conocer las habilidades o los errores que comenten los estudiantes al resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de separación de variables, se aplicó el cuestionario 5 compuesto de 10 ejercicios, en la

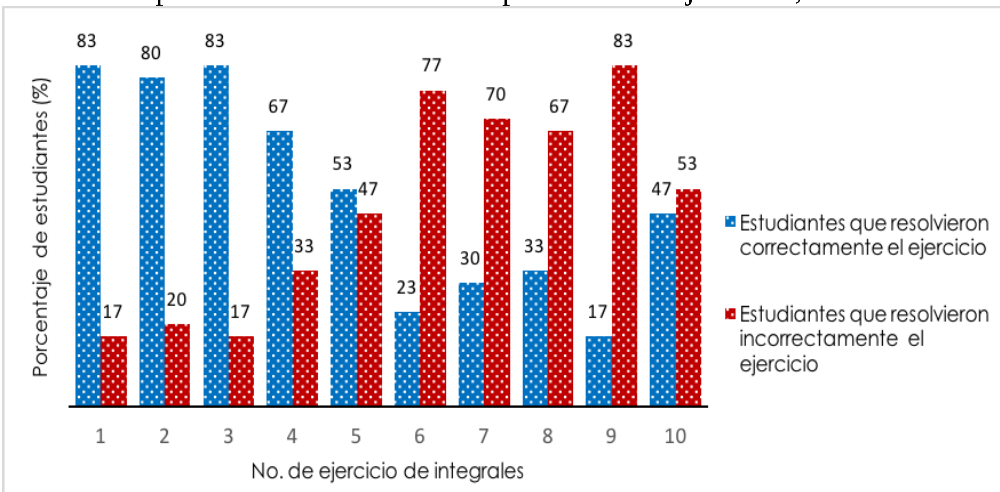


Figura 2. Se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes.

En los ejercicios 4, 5 y 10 los estudiantes lograron realizar la separación de variables correctamente, sin embargo, al momento de resolver la ecuación cometen errores algebraicos al replantear las integrales o resolver erróneamente la integral.

Un alto porcentaje de estudiantes resolvieron incorrectamente los ejercicios 6, 7, 8 y 9. La principal causa fue que al realizar la separación de variables de la ecuación diferencial de primer orden cometían errores algebraicos de despejes, factorización, dejaban las variables *x* e *y* en algún lado de la ecuación, resolución errónea de la integral con raíz cuadrada o despejar erróneamente con raíz.

De la solución de los ejercicios del cuestionario 5, se puede decir que los estudiantes comprendieron el procedimiento del método de separación de variables para solución de EDO, pero los errores más comunes que cometieron son los siguientes: errores algebraicos en la separación de variables, errores de integración de las variables de la ecuación, errores algebraicos al tratar de despejar ***y*** de la solución, errores por manipulación de las propiedades de logaritmos de naturales de base e.

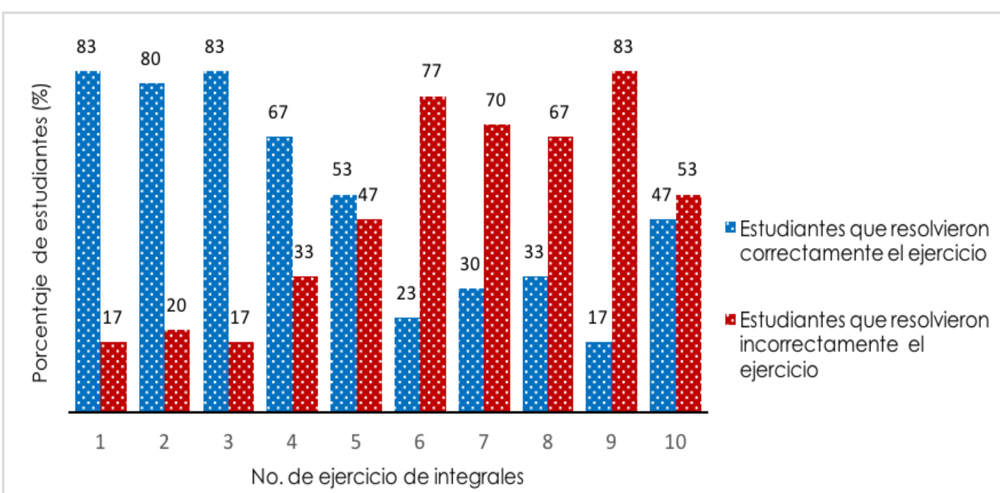


Figura 2. Resultados de los estudiantes en los ejercicios del cuestionario 5.

Para el grupo de control no se utilizaron los video tutoriales, es decir, la clase se impartió de la manera tradicional donde el maestro explica cómo se resuelven los ejercicios usando la pizarra como apoyo didáctico. En la **¡Error! La autoreferencia al marcador no es válida.** se observa que el grupo A tuvo mejores resultados que el grupo B.

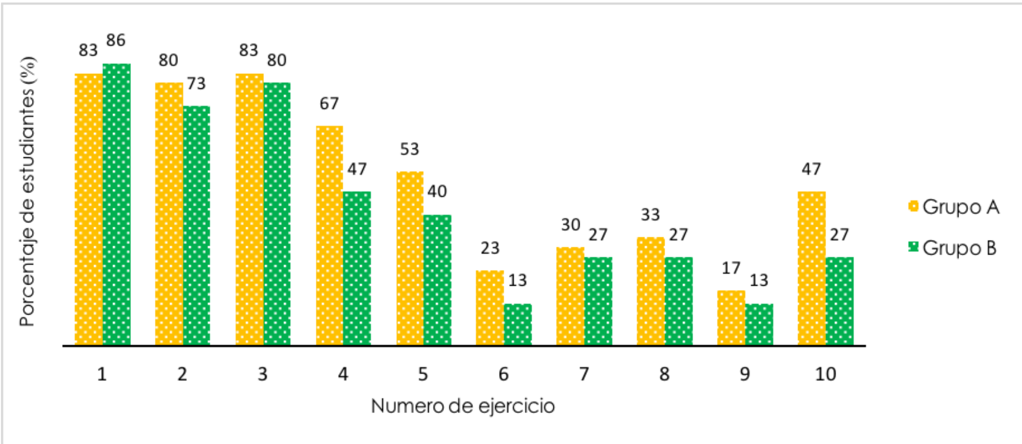


Figura 3. Resultados obtenidos de estudiantes de los grupos A y B en los ejercicios del cuestionario 5.

En la séptima sesión, como primera acción, se abordó la importancia del modelado matemático con ecuaciones diferenciales. Posteriormente, los estudiantes vieron 2 veces seguidas el video tutorial llamado ley de enfriamiento, donde los estudiantes expusieron y aclararon sus dudas. Posteriormente, se les entregó el problema 1 a resolver en un tiempo de 20 minutos. De igual manera se realizó para los problemas 2 y 3, es decir, los estudiantes veían los videos tutoriales y después se aplicaron los problemas del cuestionario 6. Los resultados de los estudiantes en los problemas 1,2 y 3 se pueden ver en la

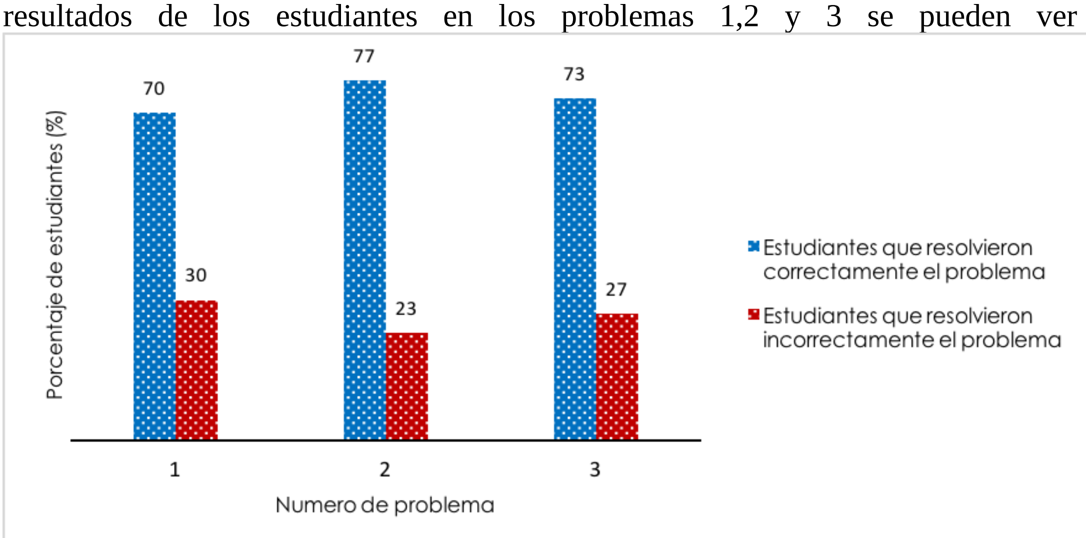


Figura 4.

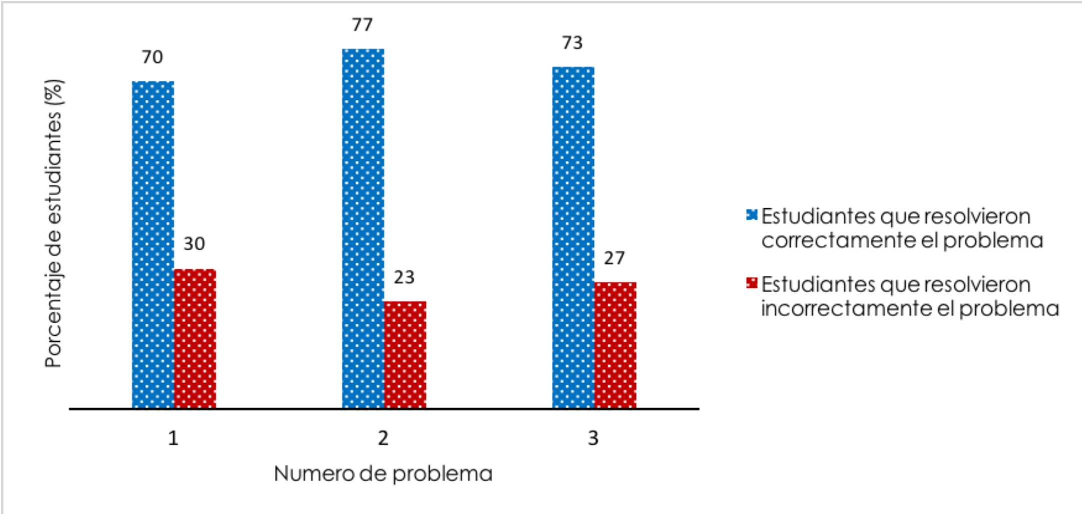
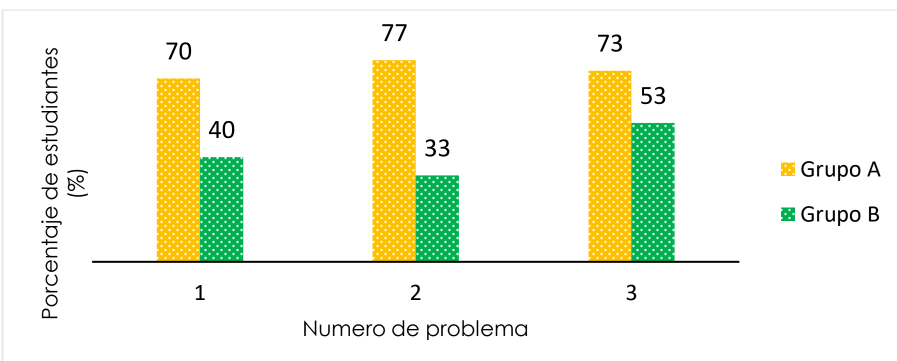


Figura 4. Resultados de los estudiantes en los problemas del cuestionario 6.

Los errores más comunes fueron: selección incorrecta de condiciones iniciales, mal uso de las propiedades de los logaritmos natural o de base e, desconocimiento total de cómo resolver la ecuación de diferencial de primer orden que modela la problemática y algún error algebraico en la solución de la ecuación.

Para el grupo B, no se utilizaron los videos tutoriales como apoyo para resolver los problemas de aplicación de modelos de ecuaciones diferenciales. La Figura 5, muestra los resultados obtenidos por los estudiantes del grupo B, en comparación con los del grupo A, en los tres problemas del cuestionario 6. De la Figura 5, se puede decir que los estudiantes del grupo B tuvieron menor porcentaje de acierto, comparado con el grupo A; en general, los errores cometidos por los estudiantes del grupo B fueron similares a los del grupo A.



.

*Figura 5***.** Resultados de los estudiantes del grupo A y B que resolvieron correctamente los problemas del cuestionario 6.

5.3 Análisis de la opinión de los estudiantes sobre los videos tutoriales

Para saber la opinión de los estudiantes sobre el empleo de los videos tutoriales, se aplicó una encuesta de satisfacción, la cual se compone de 10 preguntas con respuestas en la escala de Likert. Además, se incluyó una pregunta abierta donde el estudiante expresó sus observaciones, comentarios o sugerencias sobre la utilización de los videos tutoriales.

Las preguntas que se realizaron a los estudiantes fueron las siguientes:

1. Presté mucha atención a los videos tutoriales.
2. El video tutorial despertó mi interés por su contenido.
3. El video tutorial ha sido un complemento útil a lo que hemos visto en clase.
4. El video tutorial me ayudó a la hora de realizar las tareas en clases.
5. El video tutorial debería incluirse como herramienta de aprendizaje en otros temas de la asignatura.
6. Me llevó poco tiempo obtener una comprensión profunda del contenido del video tutorial.
7. Aprendí con rapidez cómo desarrollar la actividad propuesta a partir del video tutorial.
8. A partir de lo que he aprendido a través del video tutorial, podré resolver otras actividades que sigan la misma línea.
9. Consideras que los videos tutoriales tienen una secuencia que facilita tu proceso de aprendizaje.
10. Consideras que el tiempo de los videos tutoriales es el adecuado.

La Figura 6 muestra los resultados de los estudiantes de las cinco primeras preguntas del cuestionario de satisfacción, en ella podemos ver que el 87% de los estudiantes prestó atención a los videos tutoriales, una de las posibles causas es que al 86% de los estudiantes les despertó el interés por su contenido. Por otro lado, el 97% de los estudiantes dice estar de acuerdo en que los videos tutoriales han sido un complemento útil de las clases y el 84% dice estar de acuerdo que fueron de utilidad para realizar las tareas propuestas en clases. Cabe destacar que el 70% de los estudiantes está totalmente de acuerdo que los videos tutoriales se deben de emplear en otros temas de la asignatura.

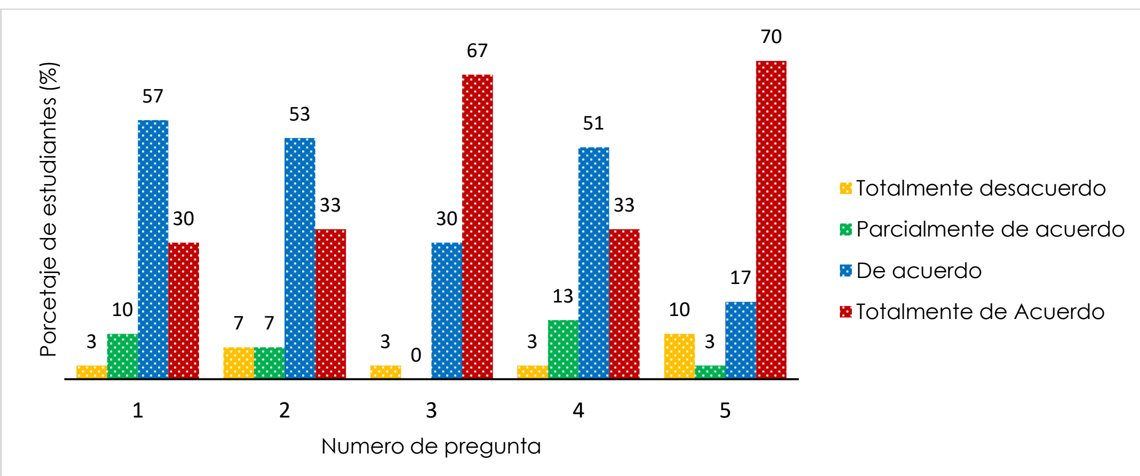


Figura 6. Respuesta de los estudiantes de la pregunta 1-5.

La Figura 7 muestra los resultados de los estudiantes de la preguntas 6 a la 10 del cuestionario de satisfacción, de la cual se puede decir que el 73% de los estudiantes está de acuerdo en el tiempo corto para obtener una comprensión profunda del contenido del video tutorial, el 70% dice estar de acuerdo con que aprendió con rapidez cómo desarrollar la actividad propuesta a partir del video tutorial, el 86% dice estar de acuerdo con que a partir de lo que ha aprendido a través del video tutorial, podrá resolver otras actividades que sigan la misma línea, el 94% está de acuerdo en considerar que los videos tutoriales tienen una secuencia que facilita el proceso de aprendizaje y el 93% está de acuerdo en que el tiempo de los videos tutoriales es el adecuado.

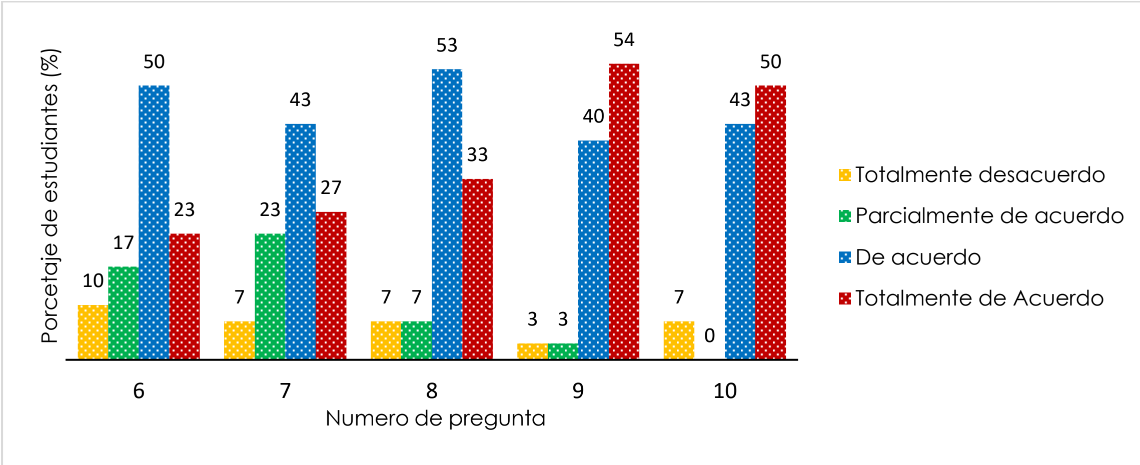


Figura 7. Repuesta de los estudiantes de la pregunta 6-10.

De la pregunta abierta donde el estudiante expresó sus observaciones, comentarios o sugerencias sobre la utilización de los videos tutoriales se obtuvieron las respuestas siguientes:

- Les gustó que compañeros participaron como autores en los videos tutoriales.
- Los videos tutoriales fueron de gran apoyo para el aprendizaje de los temas.

5.4 Participación de los estudiantes

En la elaboración de los videos se contó con la ayuda de cinco estudiantes de la carrera de ingeniería en industrias alimentarias, tres participaron como actores en el video tutorial la "ley de enfriamiento de Newton", un cuarto estudiante prestó su voz al video tutorial llamado "Ecuaciones Diferenciales Teoría Preliminar ", un quinto estudiante realizó tareas de apoyo como: cuidar el orden en el laboratorio que fungió como set de grabación.

Al momento de implementar los videos tutoriales en el grupo A, se pudo notar el interés por verlos sin saber el contenido de éstos. Una de las razones que argumentaron fue saber de la participación de algunos de sus compañeros en los videos tutoriales.

De lo anterior, y de pláticas informales con los estudiantes, se concluye que la participación de los estudiantes en los videos tutoriales, influenció en gran medida la visualización de los videos por primera vez, sin embargo, el interés de volver a visualizarlos cambió al momento de resolver las tareas, ya que les ayudó a mejorar la comprensión de los temas y la aplicación de las ecuaciones diferenciales en la vida cotidiana, misma que su pudo notar en el desempeño del grupo.

Conclusiones

Los videos con mayor reproducción en la web se presentan en los escenarios siguientes: el experto explicando la temática en una pizarra, explicación en hojas blancas y al momento de usar los programas informáticos. La explicación a través de programas informáticos presentó ventajas sobre aquellos que no los utilizan, es decir, presentan una variedad de herramientas y dinamismo al momento de estar desarrollando los ejercicios. Asimismo, en pláticas informales con los estudiantes, estos comentan que se apoyan mucho en este tipo de escenario para la elaboración de sus tareas, lo cual confirma y sugiere que en la impartición de asignaturas de ecuaciones diferenciales, se utilicen este tipo de video tutoriales para el complemento de sus clases.

Se realizaron siete videos tutoriales utilizando Microsoft Power Point y Camtasia 8.0. La implementación de los tutoriales, reveló que una de las principales causas que conlleva a los estudiantes a cometer errores es su falta de conocimiento en álgebra elemental, en particular, al despejar ecuaciones, uso incorrecto de las propiedades de los exponenciales, ley de los signos y manejo inadecuado en las propiedades de los logaritmos naturales o logaritmos de base.

Los videos tutoriales facilitaron la comprensión del procedimiento de solución de ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de separación de variable, en menor tiempo, a comparación de las clases tradicionales. Los estudiantes manifestaron que la participación de sus compañeros en la elaboración de los videos, influenció el interés por ver los videos y posteriormente fueron de utilidad al momento de hacer sus tareas, por lo que quisieran implementar video tutoriales para otros temas de la asignatura.

De lo anterior, se concluye de manera general que esta investigación contribuyó en la mejora de impartición de clases de las asignaturas de ecuaciones diferenciales, por lo que se recomienda el uso de videos tutoriales, lo que favorece en el aprovechamiento escolar de esta asignatura y la disminución en los índices de reprobación.

Bibliografía

Ambrose, S., Bridges, M. W., DiPietro, M., Lovett, M. C., Norman, M. K. (2008). *How Learning Works: Seven Research-Based Principles for Smart Teaching*. San Francisco: Jossey-Bass.

Andrade, L. (2012). Teoría de la carga cognitiva, diseño multimedia y aprendizaje: un estado del arte, Magis. *Revista Internacional de Investigación en Educación*, Vol. 5, Núm. 10, Págs. 75-92.

Bravo, JL. (1996). ¿Qué es el video educativo? *Revista Comunicar*, Núm. 6, Págs. 100-105.

Carmona, I. y Filio, E. (2011). *Ecuaciones diferenciales*, México D.F., México: Pearson

Carmona, K., Flores, S., Ruiz, J., Salazar, M. y Chávez, J. (2010). Ecuaciones diferenciales en un contexto físico, *Revista CULCyT: Cultura Científica y Tecnológica*, Vol. 7, Núm. 36-37, Págs. 40-50.

Cebrián, M. (1987): El vídeo Educativo, en *II Congreso de Tecnología Educativa.* Madrid: Sociedad Española de Pedagogía.

Duval, R. (2000). *Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento matemático.* Université du Littoral Côte-d'Opale, Boulogne, et Centre IUFM Nord Pas-de Calais, Lille.

Feldman, R. (2005). *Psicología: con aplicaciones en países de habla hispana.* México: McGrawHill.

Guzmán, M. (2011). El video como recurso didáctico en educación infantil. *Revista Pedagogía Magna,* Vol. 10, Págs.132-139.

Hernández, S. (2008). El modelo constructivista con las nuevas tecnologías: aplicado en el proceso de aprendizaje. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, Vol.5, Núm. 2, Págs. 26-35.

Jiménez, D. y Marín, G. (2012). Asimilación de contenidos y aprendizaje mediante el uso de videotutoriales. *Revista Enseñanza & Teaching*, Vol.30, Núm. 2, Págs. 63-79.

Macías, J. (2014). Los registros semióticos en matemáticas como elemento de personalización en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa Conect*, 2, 27-57.

Mayer, R. (2005). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning*. New York: Cambridge University Press.

Mayer R. (2010). Applying the science of learning to medical education. *Medical Education*. 44: Págs. 543-549.

Menárguez, M. y Cánovas, F. (2010). Métodos de un paso para ecuaciones diferenciales ordinarias: recursos didácticos. *I Jornada Internacional: Matemáticas*. Madrid, España: Everywhere.

Morales (2010). Enfoques y dificultades en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, *Revista Premisa,* Vol. 12, Núm 45, Págs. 25-36.

Oviedo, N. (2013). Abordaje cualitativo-gráfico y analítico de ecuaciones diferenciales ordinarias primer orden con apoyo software Mathematica 9.0, *Actas del VII CIBEM*, Montevideo, Uruguay, Págs. 1017-1024.

Perdomo, J. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. *Revista Números*, Vol.78, Págs. 113-134.

Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55-87.

Sandoval, I y Díaz-Barriga, E. (2002). Ecuaciones diferenciales de 1er. Orden una perspectiva didáctica con geometría dinámica. *Memorias de la XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*, pp. 189-196.

Snelson, C., y Elison-Bowers, P. (2007). Micro-level design for multimedia-enhanced online courses. *MERLOT Journal of Online Learning and Teaching*, pp. 383-394

Tamayo, Ó. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, 18(45), 37-49.

Zill, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: Cengage Learning.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2019

ISSN: 2395-955X

ENSEÑANZA DEL CÁLCULO VECTORIAL A TRAVÉS DEL SOFTWARE LIBRE GEOGEBRA

TEACHING OF THE VECTOR CALCULUS THROUGH THE SOFTWARE FREE GEOGEBRA

Juan R. Ruiz Guerra, Hugo Rodríguez Martínez, Monserrat del Carmen de León Cedillo, Carlos I. Espino Márquez

Tecnológico Nacional de México. Instituto Tecnológico de Aguascalientes. Departamento de Ciencias Básicas.

intrepit_10@hotmail.com, hugoroma2001@yahoo.com, ing.monsedeleon@yahoo.com.mx, eime_282000@hotmail.com

Para citar este artículo:

Ruiz, J. Rodríguez, H., De León, M. del C., Espino, C. (2019). Enseñanza del cálculo vectorial a través del software libre GeoGebra. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 2, pp. 37-47. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 2, julio-diciembre de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

ENSEÑANZA DEL CÁLCULO VECTORIAL A TRAVÉS DEL SOFTWARE LIBRE GEOGEBRA

TEACHING OF THE VECTOR CALCULUS THROUGH THE SOFTWARE FREE GEOGEBRA

Juan R. Ruiz Guerra, Hugo Rodríguez Martínez, Monserrat del Carmen de León Cedillo, Carlos I. Espino Márquez

Tecnológico Nacional de México. Instituto Tecnológico de Aguascalientes. Departamento de Ciencias Básicas.

intrepit_10@hotmail.com, hugoroma2001@yahoo.com, ing.monsedeleon@yahoo.com.mx, eime_282000@hotmail.com

Resumen

La presente investigación desarrolla una propuesta didáctica a través de la construcción de ambientes de aprendizaje, que generen en los alumnos las competencias matemáticas que les permitan identificar, interpretar, argumentar y obtener con ello aprendizajes significativos de los conocimientos teóricos que se tratan en Cálculo Vectorial a través del uso de software libre GeoGebra; así de manera detallada, los profesores podrán dar seguimiento al proceso de construcción de los conocimientos de sus alumnos.

Palabras clave: Ambientes de aprendizaje, Aprendizajes significativos, Software libre, GeoGebra.

Abstract

This research aims to develop a didactic proposition through the construction of learning environments, which generate in students mathematical skills that enable them to identify, interpret, argue, and get this significant learning of theoretical knowledge discussed in Vector calculus through the use of free software GeoGebra; so in detail, teachers can follow the process of construction of knowledge in their students.

Key words: Environments of learning, Meaningful learning, Free software, GeoGebra.

Introducción

La enseñanza de las matemáticas, así como su aprendizaje, no ha sido tarea fácil a través de los años, lo cual se debe al carácter abstracto que se le confiere a la misma, o bien a la forma en la cual el estudiante recibe su enseñanza, basada muchas veces en enfoques tradicionales.

En esta nueva sociedad basada en el conocimiento, en la que se reconoce que la calidad, rapidez, seguridad y acceso a la información juegan un papel trascendental, la incorporación de las computadoras en los diferentes ámbitos del quehacer humano es inevitable y su evolución pareciera no detenerse, incluyendo la educación en todos los niveles.

La introducción de la computación en el proceso del docente, permite contribuir al perfeccionamiento y optimización del sistema educativo y dar respuesta a las necesidades de la sociedad en este campo.

Estas herramientas se pueden usar para hacerle llegar al estudiante formas, métodos y prácticas que permitan mejorar el entorno de aprendizaje y por tanto contribuir a la adquisición de habilidades necesarias para él.

Los contenidos que se manejan e incluyen en Cálculo Vectorial, giran en torno a las gráficas en dos y tres dimensiones por lo que la interpretación, asimilación y comprensión de los conceptos estudiados están asociados con procesos de visualización de las superficies, eliminando toda confusión entre el objeto y su representación, asegurando el entendimiento matemático por parte del estudiante. Una de las funciones como docentes, es renovar las estrategias de enseñanza utilizando las computadoras y diferentes softwares que se encuentran disponibles, para hacer de las prácticas acciones llamativas e interesantes para los jóvenes de hoy.

Referente teórico

Muchos problemas requieren manipular modelos, donde las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) generan y permiten la visualización y utilización de diagramas dinámicos, donde los estudiantes a través de estas herramientas aprenden, toman decisiones a partir de su intuición y posteriormente verifican estas conjeturas (Baugh y Raymond, 2006).

Kutzler (2003, p. 12), el creador del programa Derive, expresó acerca del uso de la tecnología en la educación matemática lo siguiente, para lo cual citó lo mencionado por William Shakespeare: “Nada es bueno o malo por sí mismo, únicamente se piensa que es así”. Al considerar lo anteriormente mencionado se puede indicar lo siguiente: “Las calculadoras y los computadores no son ni buenas ni malas herramientas para la enseñanza, solamente se utilizan para hacer esto”.

Infante, Quintero y Logreira (2010, p. 36), consideran que “estas experiencias matemáticas pueden ser fructíferas siempre que se tenga en cuenta la complejidad del conocimiento matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas, teniendo en cuenta las dificultades y las necesidades de los estudiantes, aprovechen la tecnología para crear espacios en los que se pueda construir un conocimiento matemático más amplio y potente”.

Con relación a estas herramientas, Balacheff y Kaput (1996, p. 469) han señalado “los objetos virtuales que aparecen sobre la pantalla se pueden manipular de forma tal que se genera una sensación de existencia casi material, dando la posibilidad de introducir cambios y comprobar el efecto de los mismos”.

La vista es nuestra fuente más importante de información sobre el mundo. La mayor parte del cerebro está involucrada en la visión: el control visual del movimiento, así como la percepción de las palabras impresas, forma y color de los objetos. Arcavi (2003, p. 26) define la visualización como “la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o en software, con el fin de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas antes desconocidas y avanzar en la comprensión”.

Se considera que “los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran” (Duval, 2006), ya que no hay otras formas de acceder a los objetos matemáticos que no sea produciendo alguna representación caracterizada de esta manera.

Para Tamayo (2006, p. 41) "las representaciones semióticas hacen referencia a todas aquellas construcciones de sistemas de expresión y representaciones que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc. Cumplen funciones de comunicación, expresión, objetivación y tratamiento".

Para mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos u objetos matemáticos del saber, se emplean representaciones que permiten la asimilación de estructuras complejas, lo que implica, desde una perspectiva cognitiva, que para la total comprensión de las nociones matemáticas es preciso emplear y coordinar más de un sistema de representación (Macías, 2014).

Vicente Carrión, establece: "Obsérvese que no se habla de visualizar un diagrama sino de visualizar un concepto o problema. Esto último significa formar una imagen mental del diagrama; una buena observación de un problema significa entenderlo específicamente". La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas" (Carrión, 1999).

Cuando el estudiante adquiere un concepto a través de registros visuales, y es capaz de manejarlos a través de un razonamiento matemático, se dice que se ha dado la comprensión de imágenes de un determinado tema.

Lo anterior pone de manifiesto la importancia que representa incluir los conceptos lógicos, aritméticos, geométricos o algebraicos en formas ilustrativas a través del software y con ello mejorar la asimilación de conjeturas complejas.

Por tanto, el objetivo de la investigación, fue determinar el efecto que tiene el uso didáctico del Software matemático GeoGebra, en el rendimiento académico de los estudiantes de Ingeniería.

Se establecen las siguientes hipótesis:

H_o: Los alumnos del grupo experimental tratados a través de procesos de enseñanza innovadora con software matemático, no evidencian mejores resultados académicos en Cálculo Vectorial, en comparación con los que tienen un proceso de enseñanza tradicional.

H_1: Los estudiantes pertenecientes al grupo experimental tratados a través de procesos de enseñanza innovadora con software matemático, evidencian mejores resultados académicos en Cálculo Vectorial, en comparación con los que tienen un proceso de enseñanza tradicional.

Metodología

El experimento se llevó a cabo en el Instituto Tecnológico de Aguascalientes, con alumnos inscritos en cuarto semestre en la materia de Cálculo Vectorial. Inicialmente, se totalizó una muestra de 61 estudiantes, distribuidos en dos grupos, un grupo de Ingeniería Industrial (40 alumnos), considerados como el grupo experimental (GE) y un grupo de Ingeniería Química y Bioquímica (21 alumnos), considerados como el grupo control (GC). El investigador no intervino en la selección ni en la composición de la muestra. El jefe del Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Aguascalientes asignó al investigador los grupos. Antes de que se formaran los grupos, ninguno de los 61 estudiantes tuvo conocimiento de que se iba a realizar un estudio de esta naturaleza en Cálculo Vectorial. Por ello, al inicio del semestre, a los estudiantes, se les informó sobre el experimento y su finalidad, y todos aceptaron por escrito formar parte del estudio. Se les aplicó un cuestionario exploratorio, con la finalidad de determinar sus experiencias en el uso de tecnología digital, y se demostró que ninguno había usado el software GeoGebra, en sus cursos previos a Cálculo Vectorial. El investigador fue el profesor del curso, junto con los responsables del diseño del experimento que se realizó en este estudio. La investigación es cuantitativa y su diseño cuasi-experimental.

Resultados

Se observa que de los 61 alumnos que conforman los dos grupos, el 34.426% son mujeres y el 65.574% son hombres. Por otro lado, en su consulta en referencia a su autoevaluación con respecto a Cálculo Diferencial, el 4.918% se considera excelente, 14.754% muy bien, 22.951% bueno, el 42.623% regular y el 14.754% malo respecto a sus conocimientos previos en esta asignatura. Al revisar Cálculo Integral en la autoevaluación se encontró que el 4.918% se considera excelente, el 13.115% muy bien, el 11.475% bueno, el 45.902% regular y el 24.590% malo. De manera global el 4.918% se considera en una situación de excelente, el 13.934% en muy bien, el 17.213% en bueno, el 44.262% en regular y el 19.672% en malo con respecto a sus conocimientos previos.

En la segunda sesión de inicio de clases, se aplica un examen diagnóstico, que permitió reflejar los conocimientos previos en Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, con los que cuentan los estudiantes, el cual se integró con:

a) 6 preguntas informativas: nombre, edad, número de control, carrera a la que pertenece, semestre, opción en la que se ha llevado la asignatura (primera, segunda, tercera o especial).

b) 8 preguntas teóricas: una a dominio, una a rango, una a función, dos a límites, una a continuidad, una a derivación, una a integración.

c) 20 preguntas prácticas: tres de cálculo de límites, siete referidas a derivadas de funciones reales y diez a integrales de funciones reales.

Esta evaluación se aplicó en un mismo día en horarios diferentes, según su horario de asignación de la materia.

Tabla 1

Análisis estadístico de las calificaciones obtenidas en el examen diagnóstico

	GC	GE
Número de alumnos	21	40
μ	73.7214	70.0926
Mediana	74.0741	70.3704
Modas	77.7778	70.3704 ,74.0741
Menor valor	62.9630	55.5556
Mayor valor	81.4815	85.1852
Rango	18.5185	29.6296
σ^2	19.4719	42.7896
σ	4.4127	6.5413
Desviación media	3.6113	4.9768

El 90.48% del GC acreditó el examen, al igual que el 62.5% del GE. El test incluyó 27 preguntas.

Una vez que se analizan los resultados, se determina los temas que requieren de reforzamiento; se llevó a cabo 4 sesiones de repaso de Cálculo Diferencial (una para cálculo de límites y 3 para derivada con fórmula) y 6 clases de Cálculo Integral (una con fórmula y 5 para los métodos de integración).

Tabla 2

Análisis estadístico de las calificaciones obtenidas después del examen diagnóstico

	GC	GE
Número de alumnos	21	40
μ	79.1887	77.9629
Mediana	81.4815	77.7778
Modas	85.1852	77.7778
Menor valor	62.9630	59.2593
Mayor valor	92.5926	92.5926
Rango	29.6296	33.3333
σ^2	65.9430	54.8352
σ	8.1205	7.4051
Desviación media	6.8531	5.6111

El 95.24% del GC acreditó el examen, al igual que el 95% del GE. Del test, comprendió el 62.96% de Calculo diferencial y el 37.04% correspondió a Cálculo Integral.

Como se observa, se obtuvieron mejoras sustanciales en los promedios de calificaciones de los alumnos con respecto al examen diagnóstico, como consecuencia de una mejora en su aprovechamiento individual.

Tabla 3

Prueba de Levene para el análisis de resultados después del curso de homogenización

	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	
	F observado	significancia
Se han asumido varianzas iguales	2.145	0.149

α =0.05

Para las varianzas de los dos grupos, concluimos con una F de 2.145 y una significancia de p=0.149 (p>α), mediante el test de Levene que las varianzas se pueden suponer iguales, es decir, los grupos son homogéneos.

Se procede al desarrollo del curso aplicando el software GeoGebra.

El software se emplea para la enseñanza de los temas, el cual ofrece una perspectiva en dos y en tres dimensiones, sin necesidad de recurrir al diseño en el pizarrón. El alumno debe obtener los resultados con el paquete matemático e incluir la comprobación manual. El estudiante podrá manipular la imagen obtenida, obteniendo diferentes perspectivas.

A continuación, se incluyen ejemplos de reportes por parte del estudiante.

1. Vectores y puntos en R^2:
   a) Dibuja, haciendo uso de GeoGebra, los siguientes puntos: A=(4,2), B=(-1,3), C=(-3,-5), D=(1,-5). Ver figura 1.
   b) Dibuja los siguientes vectores: $\vec{a}$ =(4,2), $\vec{b}$=(-1,3), $\vec{c}$=(-3,-5), $\vec{d}$=(1,-5). Ver figura 1.

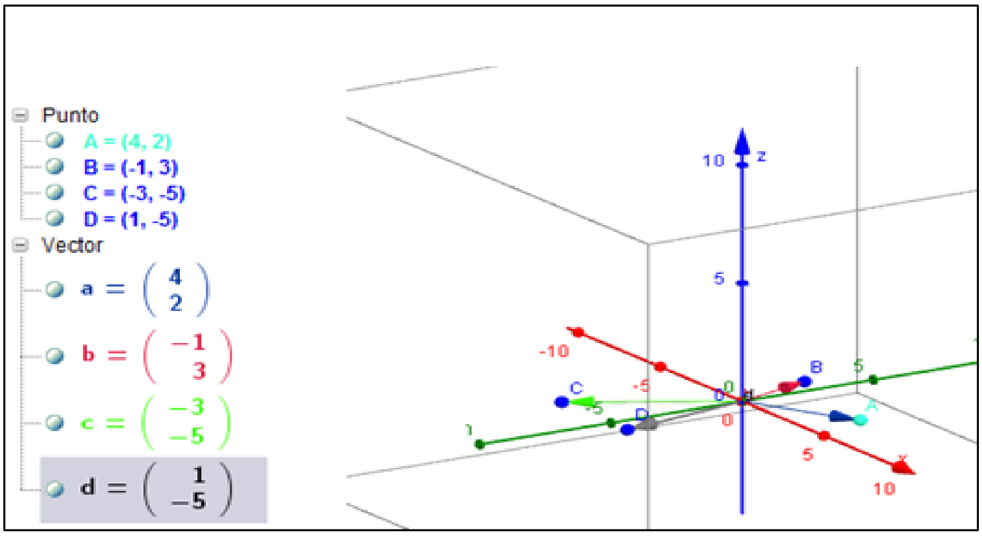
c) 

Figura 1. Percepción de la ubicación de puntos y vectores en dos dimensiones.

2. Vectores y puntos en R^3:
   a) Dibuja los siguientes puntos: A=(-3,5,-2), B=(-4,-3,-5), C=(1,-3,2), D=(-4,4,2).
   b) Dibuja los siguientes vectores: $\vec{a}$=(-3,5,-2), $\vec{b}$=(-4,-3,-5), $\vec{c}$=(1,-3,2), $\vec{d}$=(-4,4,2).
3. Dados $\vec{a} = (3,-4{,}5)$ y $\vec{b} = (-1{,}5{,}2)$, determina: $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$

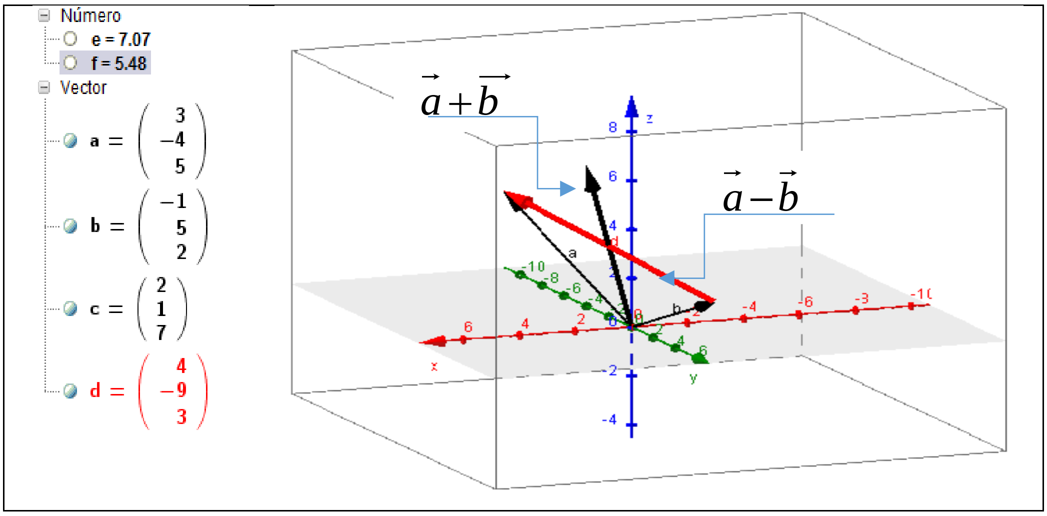


Figura 2. Representación con GeoGebra.

de donde e= $|\vec{a}|$, f= $|\vec{b}|$, c=$\vec{a} + \vec{b}$, d=$\vec{a} - \vec{b}$ que son los resultados obtenidos a través de GeoGebra.

Comprobación por parte del estudiante:

$$e = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (5)^2}$$
$$=\sqrt{9 + 16 + 25}$$
$$=\sqrt{50}$$
$$=7.071$$
$$f = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2 + (2)^2}$$
$$=\sqrt{1 + 25 + 4}$$

$$c = (3,-4{,}5) + (-1{,}5{,}2)$$
$$=(3-1,-4+5,5+2)$$
$$=(2,1,7)$$
$$d = (3,-4{,}5) - (-1{,}5{,}2)$$
$$=(3+1,-4-5,5-2)$$
$$=(4,-9,3)$$

$=5.477$

4. Determina los ángulos directores del vector $\vec{a}$=(3,4,6)

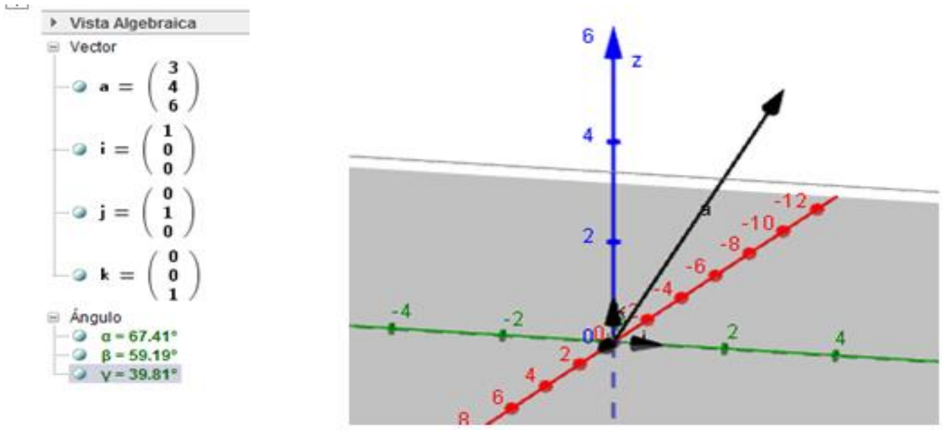


Figura 3. Representación en GeoGebra de los Vectores.

En GeoGebra, se generan primeramente los vectores unitarios sobre los ejes.

Comprobación por parte del estudiante:

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{(3)^2+(4)^2+(6)^2}}\right) = 67.4115^o$$

$$\beta = cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{(3)^2+(4)^2+(6)^2}}\right) = 59.1930^o$$

$$\gamma = cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{(3)^2+(4)^2+(6)^2}}\right) = 39.8056^o$$

5. Dados los vectores: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -3i - 4j - 5k$ determina:

a) Su producto escalar $p = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

b) Ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$

c) Su producto vectorial $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$.

d) El producto mixto $\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

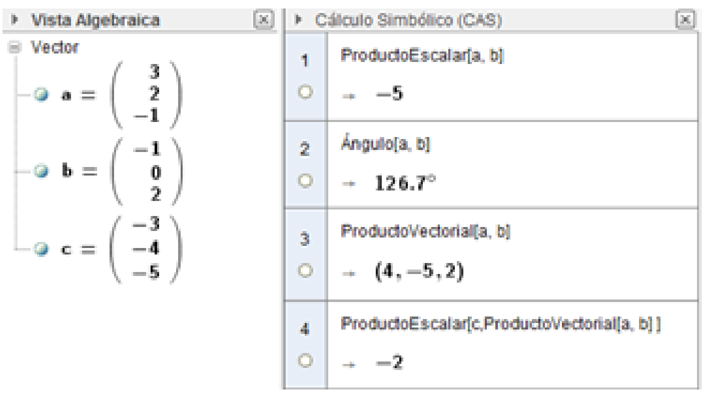


Figura 4. Pantalla generada por GeoGebra.

Comprobación por parte del estudiante:

$$p = (3,2,-1) \bullet (-1,0,2) = (3)(-1) + (2)(0) + (-1)(2) = -5$$

$$\theta = Cos^{-1} \frac{(3,2,-1) \bullet (-1,0,2)}{\sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-1)^2}\sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (2)^2}}$$

$$= Cos^{-1} \frac{-5}{8.3666} = 126.6992^{o}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4i - 5j + 2k = (4,-5,2)$$

$$\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) = (-3,-4,-5) \bullet (4,-5,2) =$$

$$= -12 + 20 - 10 = -2$$

6. Determina la longitud de arco de la curva en el intervalo dado si $x=e^{-t}\cos(t)$; $y=e^{-t}$ sen(t), considerando $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

Graficando con GeoGebra 5.0, se obtiene la imagen mostrada en la figura 5, así como los cálculos respectivos para determinar la longitud de la curva en el intervalo dado

Figura 5. Longitud de la curva.

Se introducen las funciones, enseguida se parametriza y posteriormente se calcula la longitud deseada. Obteniéndose un resultado de d=1.12 con GeoGebra.

Comprobación por parte del estudiante:

$$x = e^{-t}Cos(t) \rightarrow \frac{dx}{dt} = -e^{-t}Cos(t) - e^{-t}Sen(t)$$

$$= -e^{-t}(Cos(t) + Sen(t)) = -e^{-t}(-Cos(t) + Sen(t))$$

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(-e^{-t}(Cos(t) + Sen(t))\right)^2 + \left(-e^{-t}(-Cos(t) + Sen(t))\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2e^{-2t}(Cos^2(t) + Sen^2(t))}\, dt$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}\, dt = -\sqrt{2}[e^{-t}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{2}\left[e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{0}\right] = 1.1202$$

El resultado de s=1.12 obtenido con los cálculos por parte del estudiante es igual al de d=1.12 con GeoGebra 5.0.

Resultados

Una vez aplicados los instrumentos de evaluación en cada una de las unidades, después de ser utilizado el software, los resultados obtenidos indican que el 90.48% de los estudiantes del GC y el 100% del GE acreditaron. A continuación, se muestran en la tabla 5 los datos estadísticos de los promedios finales reportados en las actas correspondientes que se encuentran en el departamento de Control Escolar.

Tabla 4**.**

Datos estadísticos de los resultados obtenidos.

	GC	GE
Número de alumnos	21	40
μ	80.3095	90.5563
σ^2	119.2256	31.2734
σ	10.9190	5.5923

Definimos como:

μ_0 = Media del GC.

μ_1= Media del GE.

Planteamiento de hipótesis:

H_0: $\mu_0 = \mu_1$ y no hay diferencia significativa en los grupos.

H_1: $\mu_0 \neq \mu_1$ y existe diferencia significativa entre los grupos.

Con un ensayo bilateral con nivel de significancia de $\alpha = 0.05$ y con 57 grados de libertad, t=-4.436 y p=0.0001<α, se acepta la hipótesis alterna, es decir, los grupos son significativamente diferentes. El intervalo de confianza para la diferencia de medias es de (-14.173,-5.356), al cual 0 no pertenece, nos indica que las medias son diferentes y podemos considerar que el incremento de las calificaciones de los estudiantes al utilizar software educativo GeoGebra, es probablemente significativo, ya que μ_o<μ_1 en 10.2468. El riesgo de rechazar la hipótesis nula H_o cuando es verdadera es inferior al 0,01%. Ver Tabla 5.

Tabla 5

Prueba t

Prueba t para la igualdad de medias	
t	-4.436
Grados de libertad (gl)	57
Significancia (bilateral)	<0.0001
Diferencia de medias	-10.2468
95% intervalo de confianza para la diferencia	-14.173
	-5.356

$\alpha = 0.05$

Conclusiones

Se demostró que los estudiantes pertenecientes al grupo experimental tratados a través de procesos de enseñanza innovadora con software matemático evidencian mejores resultados académicos en Cálculo Vectorial, en comparación con los que tienen un proceso de enseñanza tradicional (para el GE con μ=90.5563 y para el GC con μ=80.3095). Así como, el empleo de software, permitió una mejor conceptualización y fundamentación de los procesos matemáticos, con lo cual los estudiantes lograron una mayor motivación hacia el estudio.

Los resultados obtenidos demostraron que la computadora es un eficaz instrumento en el proceso de enseñanza del Cálculo Vectorial, ya que a los estudiantes se les da una atención diferenciada, se obtienen mejoras en su actividad cognoscitiva al no ser solamente espectadores; les permite hacer comprobaciones, generar variaciones en los cálculos, velocidad de trabajo, versatilidad y flexibilidad, favorece la retroalimentación y perfeccionamiento de los productos.

Biobliografía

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52, pp. 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077.

Balacheff, B., Kaput J. (1996). Computer-Based Learning Environment in Mathematics, En Bishop, A. J. et al, *International Handbook of Mathematical Education,* 1996, pp. 469-501.

Baugh, Raymond, A. (2003). Making Math Success Happen: The Best of Learning &Leading with Technology on Mathematics, EE.UU: The International Society for Technology in Education (ISTE) EE.UU. http://popbooks.xyz/?book=1564841804.

Carrión, V. (1999). Álgebra de Funciones mediante el proceso de visualización. *Revista Iberoameciana de Educación.*

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* (2006) 61: 103–131 DOI: 10.1007/s10649-006-0400-z C Springer. http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm_2008_v68/5semiotic.pdf

http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf, 2006. [En línea]. [Último acceso: 10 Octubre 2015].

Infante, P., Quintero H., Logreira C. (2010). Integración de la Tecnología en la Educación Matemática. *Revista Electrónica de Estudios telemáticos*, vol. 9, nº 1, p. 5.

Kutzler, B. (2000). The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, v7 n1 p5-23. https://eric.ed.gov/?id=EJ647974. Traducido por Jímenez, J. R. 2003. *El uso del sistema de cómputo simbólico* Voyage 200™ *como recurso didáctico.* http://mat.uson.mx/calculadora/KUTZLERJRJR.htm#_ftn1.

Macías, J. (2014). Los registros semióticos en matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa Conect@2*, pp. 27-57.

Tamayo, O. E. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, vol. XVIII, nº 45, pp. pp. 37-49.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2019

ISSN: 2395-955X

SUPERFICIES CUADRÁTICAS Y SU MANIPULACIÓN FÍSICA EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO

QUADRATIC SURFACES AND THEIR PHYSICAL MANIPULATION IN THE CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL MODEL

Marco Antonio Guzmán Solano, Karla Liliana Puga Nathal, María Eugenia Puga Nathal, Leopoldo Castillo Figueroa, Rafael Pantoja González

Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán, TecNM, SEP. Jalisco, México

guzmansma@yahoo.com.mx, *karlalpn4@gmail.com* , kenapn@hotmail.com, *polin86@prodigy.net.mx*, *rpantoja3@hotmail.com*

Para citar este artículo:

Guzmán, M. A., Puga, K. L., Puga, M. E., Castillo, L., Pantoja, G., R. (2019). Superficies cuadráticas y su manipulación física en la construcción de un modelo matemático. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 2, pp. 48-54. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 2, julio-diciembre de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

SUPERFICIES CUADRÁTICAS Y SU MANIPULACIÓN FÍSICA EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO

QUADRATIC SURFACES AND THEIR PHYSICAL MANIPULATION IN THE CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL MODEL

Marco Antonio Guzmán Solano, Karla Liliana Puga Nathal, María Eugenia Puga Nathal, Leopoldo Castillo Figueroa, Rafael Pantoja González

Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán, TecNM, SEP. Jalisco, México

guzmansma@yahoo.com.mx, *karlalpn4@gmail.com* , kenapn@hotmail.com, *polin86@prodigy.net.mx*, *rpantoja3@hotmail.com*

Resumen

Se presentan los resultados de una investigación, que consiste en la implementación de un escenario lúdico en el que se promueven aprendizajes mediante descubrimiento guiado, en donde los actores principales desarrollen actividades que implican manipulaciones virtuales y físicas de objetos matemáticos en R^3, con el objetivo principal de promover en estudiantes de ingeniería electrónica construcciones conceptuales y habilidades de visualización de superficies cuadráticas. La investigación se fundamenta a partir de la Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas, ya que es necesario estudiar los objetos matemáticos a partir de sus diversos registros de representación y es de interés para la investigación describir cómo los estudiantes transitan de un registro de representación geométrico a un registro algebraico.

Palabras clave: Visualización, registros de representación, superficies cuadráticas, cilindros.

Abstract

The results of research are presented, consisting of the implementation of a playful scenario in which learnings are promoted through guided discovery, in which the main actors develop activities involving virtual and physical manipulations of mathematical objects in R^3, with the main objective of promoting in electronic engineering students conceptual constructions and visualization skills of quadratic surfaces. The research is based on the Theory of the Semiotic Representations Register, since it is necessary to study mathematical objects from their various representation records and it is of interest to research to describe how students move from a geometric representation registers to an algebraic register.

Keywords: Visualization, Semiotic Representation Registers, Quadratic surfaces, Cylinders.

Introducción

En la actualidad, la formación matemática de un individuo dentro de las aulas, debe tener lugar no solo como la adquisición de un conjunto de reglas, procedimientos y conocimientos; las matemáticas en la escuela deben proveer al individuo los elementos necesarios para que desarrolle su capacidad para analizar, criticar, razonar y comunicar ideas matemáticas de un modo efectivo, al plantear, formular y resolver problemas matemáticos en diferentes situaciones, sean en un terreno personal, educativo, profesional, social o científico, esto es haber desarrollado la *competencia matemática* (OCDE/PISA, 2003).

Cuando se introduce al estudiante de ingeniería por primera vez al estudio de objetos matemáticos representados en R^3, sean puntos, vectores, rectas, planos, gráficas de superficies, de cilindros, etc., se ha observado que presenta dificultades en la construcción de conceptos matemáticos y en la interpretación geométrica de tales objetos (Hitt, 1998). Esta situación se torna como un inconveniente en la matematización (Niss, 2002) de situaciones que involucran principalmente superficies y cilindros.

Por lo anterior, surge la pregunta ¿Cómo promover la apropiación de conceptos matemáticos? ¿Cuáles son los efectos que producen estrategias didácticas basadas en la manipulación de objetos físicos y virtuales en la apropiación y aplicación de conceptos matemáticos? Por tal motivo, con la investigación se genera un escenario en donde, a partir de la manipulación de objetos físicos y a través de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) se promueva, primero la comprensión de conceptos matemáticos y segundo, la solución de situaciones problema que le impliquen interpretar, modelar, tomar decisiones acertadas, discernir y explicar el modelo matemático de diversos objetos físicos.

Marco Teórico

La Teoría de Representaciones Semióticas (Duval, 1993, 1999) que establece que los conceptos matemáticos, a diferencia de otros conceptos, son tratados desde diversos registros de representación, por lo que la semiótica juega un papel fundamental en la enseñanza de las matemáticas, ya que permiten acceder y relacionarlos con los objetos matemáticos. Parte de la Teoría de Duval (1999) plantea como objeto de estudio, un análisis de los procesos cognitivos que tiene lugar cuando un individuo transita de un registro de representación a otro de un mismo concepto.

La investigación toma como punto de partida la manipulación de objetos físicos (impresiones 3D de diversas figuras) y virtuales (mediante el uso de visores) como mediadores para promover la apropiación de conceptos involucrados con cilindros y superficies cuadráticas donde un estudiante podrá visualizar una representación gráfica y algebraica de dichos conceptos. Algunos ejemplos de dichas impresiones se muestran en la figura 1.

a) Cilindros y superficies cuadráticas impresas b) Visor para RA

Figura 1. Materiales propuestos.

Metodología

En la investigación fue importante, por un lado, describir los elementos conceptuales que tienen lugar en los procesos de los estudiantes, para la apropiación de conceptos matemáticos y por otro, los efectos que produce el diseño instruccional basado en la manipulación de objetos físicos y virtuales sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos mencionados. Se requiere un estudio cualitativo basado en entrevistas a profundidad y un estudio cuantitativo, cuya hipótesis se perfila a que la propuesta promueve habilidades de visualización y la apropiación de conceptos matemáticos que involucran al espacio tridimensional. Para esto se diseñó un estudio cuasiexperimental, en donde participaron dos grupos de tercer semestre de la carrera de ingeniería electrónica, los cuales fueron considerados como los grupos de control y experimental.

Previo a la aplicación de la propuesta, se realizó un estudio piloto con la intención de evaluar la pertinencia de los materiales, así como la promoción de construcciones mentales que estos conllevan. Este trabajo piloto dio como resultado la creación de la versión preliminar de los materiales, los que fueron sometidos a un estudio para conocer el impacto que tiene como alternativa para promover la apropiación de conceptos matemáticos y desarrollo de habilidades de visualización en estudiantes del tercer semestre de la carrera de Ingeniería Electrónica.

Resultados

Se aplicó un examen diagnóstico, a ambos grupos con la finalidad de conocer los conocimientos previos de los estudiantes, necesarios para abordar el tema de superficies cuadráticas como son; plano cartesiano, funciones, gráficas, dominio y rango. Posteriormente se proporcionó el material de trabajo para los participantes del curso. En el material se incluyeron una serie de actividades diseñadas con el objetivo que los estudiantes desarrollen habilidades sobre la visualización de objetos matemáticos en 3D, que marca el programa de trabajo de los institutos tecnológicos, referente a los temas de superficies cuadráticas. Estas actividades fueron diseñadas para promover el estudio de los conceptos matemáticos desde dos registros semióticos: el algebraico y el geométrico (visual). Se les explicó detalladamente la metodología de trabajo, la cual estaba impresa en el cuaderno de trabajo que les fue proporcionado con anterioridad. El trabajo en aula fue de aproximadamente 5 horas presenciales y el tiempo necesario extraclase, que se planteó en proporción por cada hora en el aula, correspondían dos de trabajo.

El cuaderno de trabajo presenta una estructura con teoría y actividades que refuerzan el aprendizaje del participante y permite una colaboración entre los alumnos e instructor. Estas actividades incluyen al análisis de las diferentes superficies que relacionan el modelo matemático con la superficie cuadrática y sus diferentes trazas con sus respectivos planos. Estos conocimientos se logran mediante el uso de diferentes estrategias diseñadas con ese firme propósito. Una de ellas involucró el uso del software **GeoGebra**, también se incluyó una aplicación en realidad aumentada que requirió el uso de un Smartphone o una tableta, así como impresiones 3D de las diferentes superficies cuadráticas.

La aplicación para los teléfonos móviles está disponible en la **play store, (Cvectorial ITCG)** y fue pensada para complementar el material de trabajo elaborado con el objetivo de ampliar las posibilidades de los estudiantes en la visualización de las superficies cuadráticas. Esta aplicación permitió al participante observar la superficie desde diferentes ángulos, además de observar las diferentes trazas de la superficie y sus diferentes intersecciones con los ejes coordenados.

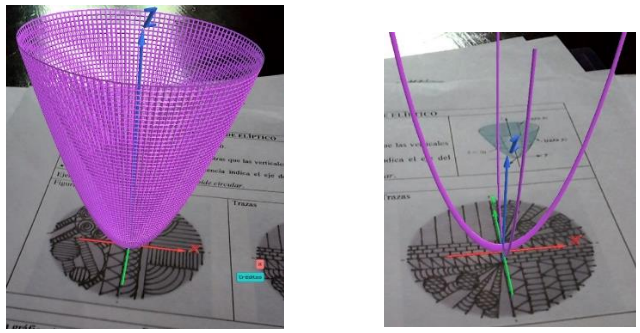


Figura 2. Superficies en ambiente RA.

También se desarrollaron y se imprimieron superficies cuadráticas mediante impresoras 3D, con el objetivo de apoyar el aprendizaje de las diferentes superficies, estas impresiones se mostraron y prestaron a los participantes para el análisis y comparación de las diferentes vistas o trazas respecto a los planos cartesianos.

Figura 3. Ejemplo de impresiones 3D

El otro complemento que se utilizó, fue el software **GeoGebra,** para observar que sucede con los diferentes parámetros involucrados en las diferentes superficies, ya que, con el uso de algunos elementos propios del software como deslizadores, se pueden hacer animaciones que permiten al alumno la modificación de los parámetros y la observación directa en la modificación tanto de la superficie como del modelo matemático involucrado.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Figura 4. Uso de GeoGebra.

Al término de la actividad, se aplicó un examen postest a ambos grupos, con el objetivo de analizar los avances de los participantes en la visualización de superficies cuadráticas y su relación con su correspondiente modelo matemático. Y de esta manera poder contrastar las medias de ambos grupos mediante una prueba de hipótesis de extremo superior.

Los resultados que arroja el estudio son alentadores para el grupo de investigadores, ya que el análisis estadístico realizado, demuestra que la propuesta favorece a la apropiación y manipulación de los conceptos de superficies cuadráticas. El estudio arroja también información referente a la evaluación de los materiales de trabajo, así como del ambiente virtual creado.

Algo importante que se observó durante la investigación fue el entusiasmo presentado por la mayoría de los estudiantes en el uso de las nuevas tecnologías como es el uso del software Geogebra, la interacción y construcción de los conceptos, ya que resultó accesible para ellos poder analizar las diferentes trazas de las superficies, la superficie en sí y el efecto que tienen en el modelo matemático cuando se varía algunos de sus parámetros.

Sin embargo, la herramienta que más notoriamente motivó los estudiantes fue la aplicación diseñada en Realidad Aumentada para ser empleada mediante tabletas y Smartphone. Esta aplicación permitió a los estudiantes observar las características geométricas de las superficies cuadráticas desde su entorno natural como se observa en la figura 2. Cabe mencionar que incluso estudiantes de otros semestres que no llevaban la materia, descargaron la aplicación y la instalaron en sus smartphones con el objetivo de visualizar las superficies.

Otra de las herramientas incorporadas en la propuesta que hizo impacto de manera positiva fue proporcionar a los estudiantes las superficies cuadráticas impresas en 3D (figura 3), ya que de esta manera no fue necesario únicamente imaginar sus formas en el espacio, sino que pudieron, palparlas, sentirlas y rotarlas, lo que hacía que fuese más significativo el proceso de visualización y la construcción de los correspondientes modelos matemáticos.

Conclusiones

Los resultados que arroja la investigación se analizan en el marco de la planeación didáctica del curso de Cálculo Vectorial de las carreras de Ingeniería que se oferta en el Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán. Además promueven el desarrollo de materiales didácticos mediados por las TIC para el aprendizaje de las matemáticas -punto medular en la investigación- y para el fortalecimiento de la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes. Sin embargo, la principal satisfacción como docentes y como investigadores, es el hecho de haber logrado captar la atención de los estudiantes involucrados directamente y los no involucrados en el análisis del tema de las superficies cuadráticas. Además de darle un sentido didáctico al Smartphone, ya que en la actualidad los estudiantes lo utilizan, en su mayoría para socializar en las redes y no para construir conocimiento.

Por otro lado, la alternativa presentada para ubicar superficies en el espacio, facilitó la apropiación de los conceptos tratados, ya que el estudiante no tuvo que imaginar la superficie ni sus diferentes trazas, ni como analizarla sin estarla observando, modificó parámetros y observo los efectos que esto provoca tanto en la superficie como en los modelos matemáticos de la misma.

Estadísticamente, los resultados observados muestran una mejora en el aprovechamiento del grupo experimental, comparado con los que se obtuvieron en el grupo de control; es necesario mencionar que el rediseño y mejora de los materiales de trabajo se continuará realizando de acuerdo a las sugerencias de los estudiantes, y de los propios investigadores basándose en los resultados obtenidos.

Bibliografía

Camarena Gallardo, Patricia (2006). Un enfoque de las Ciencias en contexto desde la didáctica. Innovación Educativa, 6(31),21-31.[fecha de Consulta 4 de Junio de 2020]. ISSN: 1665-2673. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=1794/179421073003Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives 5, 37-65.

Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. IUFM de Lille*. Consultado el 25 enero de 2014 de http://www.didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html. ISSN 1292-8763.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática*. Vol. 10, No. 2, pp. 23-45.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics*: The danish kom project (Proyecto KOM. The national academies: The national academies).

OCDE. (2003). The PISA 2003. *Assessment Framework Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OCDE.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2019

ISSN: 2395-955X

ANÁLISIS DE LA LONGITUD Y ÁREA DE LA CARDIOIDE USANDO GEOGEBRA

ANALYSIS OF CARDIOID LENGTH AND AREA USING GEOGEBRA

[1]Citlalin Aurelia Ortiz Hermosillo, [2]Sergio Marcial Palma, [2]Jafet Gassen Tula Maldonado

citlalin.ortiz@itmatamoros.edu.mx, *sergio.marcial@itcelaya.edu.mx*, *jafet.tula@itcelaya.edu.mx*

Tecnológico Nacional de México/ Instituto Tecnológico de Matamoros[1],

Tecnológico Nacional de México/ Instituto Tecnológico de Celaya[2].

Para citar este artículo:

Ortiz, C., Marcial, S., Tula, J. (2019). Análisis de la longitud y área de la cardioide usando GeoGebra. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 2, pp. 55-65. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 2, julio-diciembre de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

ANÁLISIS DE LA LONGITUD Y ÁREA DE LA CARDIOIDE USANDO GEOGEBRA

ANALYSIS OF CARDIOID LENGTH AND AREA USING GEOGEBRA

[1]Citlalin Aurelia Ortiz Hermosillo, [2]Sergio Marcial Palma, [2]Jafet Gassen Tula Maldonado

citlalin.ortiz@itmatamoros.edu.mx, *sergio.marcial@itcelaya.edu.mx*, *jafet.tula@itcelaya.edu.mx*

Tecnológico Nacional de México/ Instituto Tecnológico de Matamoros[1],

Tecnológico Nacional de México/ Instituto Tecnológico de Celaya[2].

Resumen

La presente investigación muestra un caso de éxito en el Instituto Tecnológico de Matamoros, con un grupo de jóvenes estudiantes de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales. Haciendo uso del software de GeoGebra como herramienta didáctica dentro del bloque de Ciencias Básicas en la asignatura de Cálculo Vectorial se logró la adquisición del conocimiento en los temas de la longitud y área de ecuaciones paramétricas y polares, el desarrollo de competencias específicas y genéricas establecidas en el programa de estudio y el aprendizaje del software. Además, encontrará algunas de las actividades que se desarrollaron con el software, así como los resultados favorables obtenidos en los estudiantes con el uso de la herramienta.

Palabras Clave: Enseñanza, Estrategia didáctica, Curvas planas, GeoGebra.

Abstract

The present investigation shows a case of success in the Technological Institute of Matamoros, with a group of young students of the race of Engineering in Computational Systems. Making use of the GeoGebra software as a teaching tool within the Basic Sciences block in the subject of Vector calculus for the acquisition of knowledge in the topics of the length and area of parametric and polar equations, the development of specific and generic skills established in the study program, and software learning. Some of the activities that were developed with the software, as well as the favorable results obtained in the students with the use of the tool.

Key Word: Teaching, Didactic strategy, Flat curves, GeoGebra.

Introducción

En el Instituto Tecnológico de Matamoros se está haciendo uso de la tecnología, aplicando GeoGebra. Pero ¿Qué es GeoGebra?, es un software dinámico para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas y para educación en todos sus niveles. Combina geometría, álgebra, análisis y estadística, en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo. Además, ofrece herramientas y representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas y planillas, y hojas de datos dinámicamente vinculadas. Fue creado por Markus Hohenwarter, con el objeto de hacer una calculadora de uso libre para trabajar el Álgebra y la Geometría. Fue un proyecto iniciado en el 2001 en un curso de Matemática en la Universidad de Salzburgo en Austria.

Hoy lo estamos aplicando como herramienta didáctica para la enseñanza de la asignatura de Cálculo Vectorial en el bloque de Ciencias Básicas de Ingenierías ofertadas en la institución. En los temas correspondientes a la unidad dos denominada "Curvas en R2 y ecuaciones paramétricas", se busca desarrollar en los estudiantes la competencia específica de construir gráficas de una curva plana en forma paramétrica y polar, entre las cuales destaca la cardioide.

Referente teórico

La educación ofertada en el Tecnológico Nacional de México se sustenta sobre los pilares el modelo educativo del siglo XXI, el cual está estructurado en tres dimensiones como se muestra en la figura 1

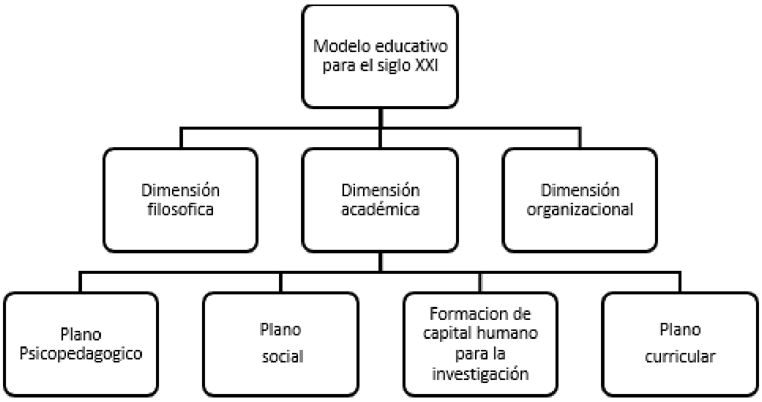


Figura 1. Modelo educativo para el sigo XXI

El plano Psicopedagógico define a las estrategias didácticas como el conjunto de actividades diseñadas por el docente que, además de generar espacios creativos, favorecen el logro de aprendizajes y dan sentido a la relación didáctica. Que además se ajustan permanentemente a un concepto de aprendizaje, a los objetivos, los contenidos educativos y al contexto en que se realizan y vinculan, de manera armoniosa, la relación docente-contenido-realidad-estudiante.

Haciendo uso de GeoGebra como estrategia didáctica, se aprovechan los recursos que la tecnología ofrece, para el desarrollo de competencias educativas como se describe en el programa de Cálculo vectorial.

Desarrollo de competencias genéricas:

- Propiciar, en el estudiante, el desarrollo de actividades intelectuales de inducción-deducción y análisis-síntesis, las cuales encaminan al alumno hacia la investigación.
- Propiciar el uso de Software de matemáticas o la calculadora graficadora como herramientas que faciliten la comprensión de los conceptos, la resolución de problemas e interpretación de los resultados.
- Desarrollar actividades de aprendizaje que propicien la aplicación de los conceptos, modelos y metodologías que se van aprendiendo en el desarrollo de la asignatura.

Competencias específicas a desarrollar:

- Construir la gráfica de una curva plana en forma paramétrica eligiendo la técnica más apropiada.

Metodología

La investigación es de tipo cualitativa, desarrollada mediante un estudio de caso, aplicada con un grupo de tercer semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales bajo el Modelo Educativo para el Siglo XXI: Formación y desarrollo de competencias profesionales, como se muestra en la figura 2.

Tecnológico Nacional de México.

InstitutoTecnológico de Matamoros.

Ingeniería en Sstemas Computacionales

Grupo de tercer semestre

Bloque de Ciencias Básicas
Asignatura: Cálculo Vectorial

Unidada 2. Curvas planas en R2 y ecuaciones parametricas.

Longitud y área de la cardiode.

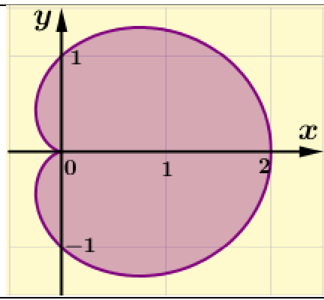
Uso de Geogebra como herramienta didáctica**.**

Figura 2. Aplicación de GeoGebra en estudio de caso.

¿Qué es la cardioide?

La cardioide es un caso especial de limaçon o caracol de Pascal, fue obtenida por La Hire, en el año 1708. Cardioide, es un nombre que proviene del griego «καρδια», y significa "corazón", el nombre que recibe la gráfica de una ecuación polar de la forma:

$$r = a \pm b\ \cos\theta \ \text{ o } \ r = a \pm b \sin\theta \quad \text{donde } a > 0 \text{ y } b > 0. \text{ Y la razón } \frac{a}{b} = 1.$$

Características de la gráfica.		
Ecuación Polar	Dirección	Ilustración
$r = a + a\ \cos\theta$	Simetría con respecto al eje polar; apunta hacia la derecha.	

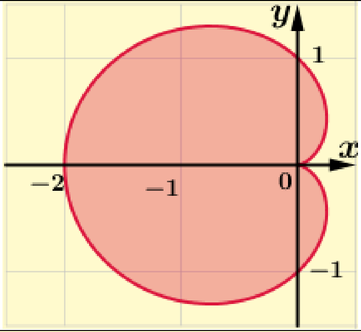
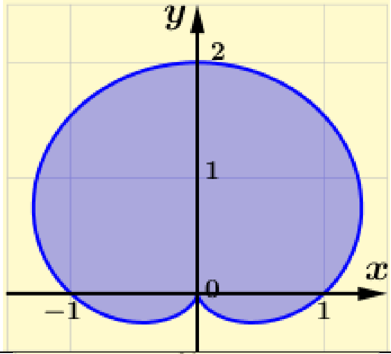
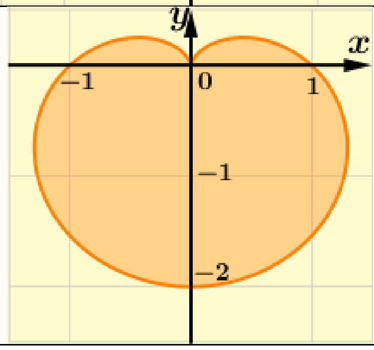
$r = a - a\ \cos\theta$	Simetría con respecto al eje polar; apunta hacia la izquierda.	
$r = a + a\ \sin\theta$	Simetría con respecto al eje $\frac{1}{2}\ \pi$; apunta hacia arriba	
$r = a - a\ \sin\theta$	Simetría con respecto al eje $\frac{1}{2}\ \pi$; apunta hacia abajo	

Figura 3. Características de la cardioide.

Debido a la razón $\frac{a}{b} = 1$, entonces $a = b$, podemos escribir la ecuación polar como:

$$r = a \pm a\ \cos\theta \ \text{ o } \ r = a \pm a \sin\theta$$

Longitud de arco de la Cardiode

Teorema 1

Sea f una función cuya derivada es continua en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$. La longitud de la gráfica de $r = f(\theta)$ desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$ es

$$\boldsymbol{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta}$$

Ejemplo 1

Hallar la longitud de arco de la cardioide cuya ecuación polar es $\boldsymbol{r = a(1 + \cos\theta)}$

$\boldsymbol{r = a(1 + \cos\theta)}$

$r' = -a\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$\boldsymbol{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta}$$

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(a + a\cos\theta)^2 + (-a\ \text{sen}\,\theta)^2}\, d\theta$$

$$L = 2\sqrt{2}\, a \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta$$

$$L = 4a \int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$L = 8a \left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$L = 8a \text{ Unidades}$$

Cabe mencionar que, en la integral anterior, el intervalo de integración $[\alpha, \beta]$ corresponde a $[0, \pi]$. Además, el escalar 2 antes de la integral, se debe a la simetría de la gráfica de la función respecto al eje polar. Si deseamos obtener la longitud de arco de la gráfica de la función polar para diferentes valores de a, se pueden usar las siguientes tablas (ver figura 4 y 5), correspondientes a las diferentes formas en las ecuaciones de la cardioide.

$\boldsymbol{r = a(1+\cos\theta)}$	a	$\boldsymbol{\frac{dr}{d\theta}}$	$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$	L
$\boldsymbol{r = a(1+\cos\theta)}$	a	$r' = -a\,sen\,\theta$	$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(a + a\cos\theta)^2 + (-a\ sen\,\theta)^2}\, d\theta$	$L = 8a$
$\boldsymbol{r = 1 + \cos\theta}$	1	$r' = -sen\,\theta$	$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + (-a\ sen\,\theta)^2}\, d\theta$	$L = 8$
$\boldsymbol{r = 2 + 2\cos\theta}$	2	$r' = -2\,sen\,\theta$	$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(2 + 2\cos\theta)^2 + (-2\ sen\,\theta)^2}\, d\theta$	$L = 16$
$\boldsymbol{r = 3 + 3\cos\theta}$	3	$r' = -3\,sen\,\theta$	$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(3 + 3\cos\theta)^2 + (-3\ sen\,\theta)^2}\, d\theta$	$L = 24$
.	.	.	.	.
$\boldsymbol{r = n(1+\cos\theta)}$	n	$r' = -n\,sen\,\theta$	$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(n + n\cos\theta)^2 + (-n\,sen\,\theta)^2}\, d\theta$	$L = 8n$

Figura 4. Longitud de arco para la ecuación polar $\boldsymbol{r = a(1 + \cos\theta)}$.

$\boldsymbol{r = a(1 + sen\,\theta)}$	a	$\boldsymbol{\frac{dr}{d\theta}}$	$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$	L
$\boldsymbol{r = a(1 + sen\,\theta)}$	a	$r' = a\cos\theta$	$L = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a + a\,sen\,\theta)^2 + (a\cos\theta)^2}\, d\theta$	$L = 8a$
$\boldsymbol{r = 1 + sen\,\theta}$	1	$r' = \cos\theta$	$L = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 + sen\,\theta)^2 + (\cos\theta)^2}\, d\theta$	$L = 8$
$\boldsymbol{r = 2 + 2\,sen\,\theta}$	2	$r' = 2\cos\theta$	$L = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(2 + 2\,sen\,\theta)^2 + (2\cos\theta)^2}\, d\theta$	$L = 16$
$\boldsymbol{r = 3 + 3\,sen\,\theta}$	3	$r' = 3\cos\theta$	$L = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3 + 3\,sen\,\theta)^2 + (3\cos\theta)^2}\, d\theta$	$L = 24$
$\boldsymbol{r = n\,(1 + sen\,\theta)}$	n	$r' = n\cos\theta$	$L = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(n + n\,sen\,\theta)^2 + (n\cos\theta)^2}\, d\theta$	$L = 8n$

Figura 5. Longitud de arco para la ecuación polar $\boldsymbol{r = a(1 + \text{sen}\,\theta)}$

Área de la cardioide

Teorema 2

Sea R la región limitada por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y la curva cuya ecuación es $r = f(\theta)$, donde f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$. Entonces, si A unidades cuadradas es el área de la región R,

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} [f(w_i)]^2 \Delta_t \theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta$$

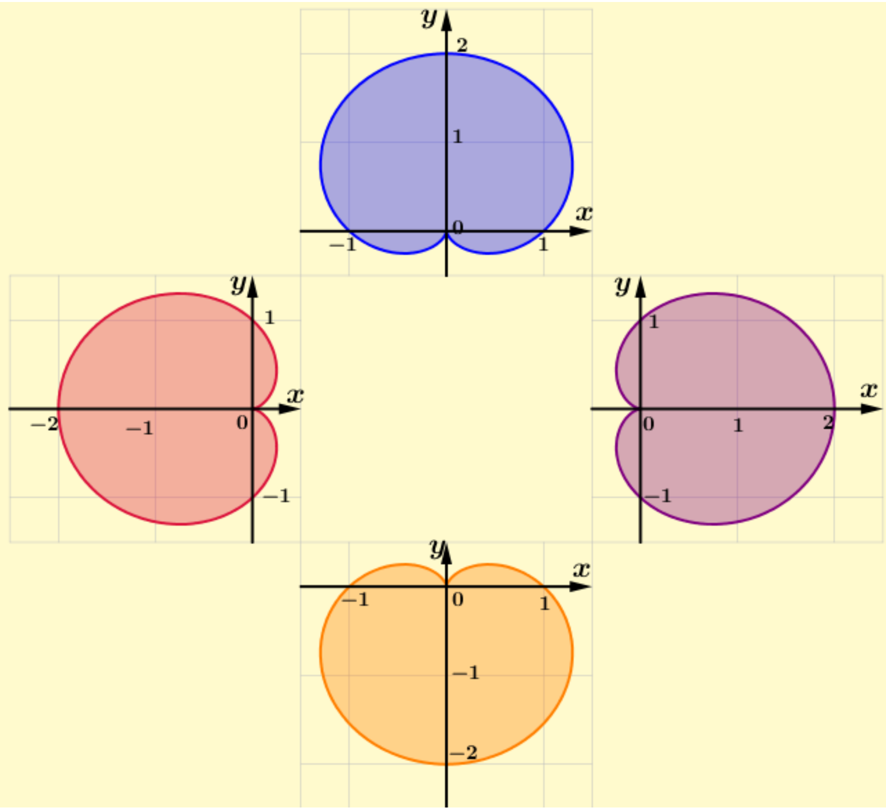


Figura 6. Cuatro orientaciones de la Cardioide en el plano.

Ejemplo 2

Encuentre el área de la superficie formada al girar la curva polar $r = a + a \cos\theta$ en el intervalo $[0, \pi]$ alrededor del eje polar.

$$A = \left[\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta\right]$$

Como la gráfica es simétrica, multiplicamos por 2.

$$A = 2\left[\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta\right]$$

$$A = \int_{0}^{\pi} (a + a \cos\theta)^2 d\theta$$

$$A = a^2 \int_0^{\pi} d\theta + 2a^2 \int_0^{\pi} \cos\theta \, d\theta + a^2 \int_0^{\pi} cos^2\theta \; d\theta$$

$$A = \; a^2\theta + 2a^2 \; \sin\theta + \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{4} \; \sin 2\theta \Big|_0^{\pi}$$

$$A = \frac{3}{2}a^2\pi$$

Si deseamos obtener el área para cualquier valor de a, podemos aplicar las tablas (ver figura 7 y 8) de acuerdo a la función polar según sea caso.

r = a + a cos θ	a	se denota por: $A = \left[\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \; d\theta\right]$	$A = \frac{3}{2}a^2\pi$	$A = \frac{3}{2}a^2\pi$
r = 1 + cos θ	1	$A = \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta$	$A = \frac{3}{2}1^2\pi$	$A = \frac{3}{2}\pi$
r = 2 + 2 cos θ	2	$A = \int_0^{\pi} (2 + 2\cos\theta)^2 \, d\theta$	$A = \frac{3}{2}2^2\pi$	$A = 6\pi$
r = 3 + 3 cos θ	3	$A = \int_0^{\pi} (3 + 3\cos\theta)^2 \, d\theta$	$A = \frac{3}{2}3^2\pi$	$A = \frac{27}{2}\pi$
.	.	.	.	.
r = n + n cos θ	n	$A = \int_0^{\pi} (n + n\cos\theta)^2 \, d\theta$	$A = \frac{3}{2}n^2\pi$	$A = \frac{3}{2}n^2\pi$

Figura 7: Área de la ecuación polar **r = a + a cos θ.**

r = a + a sen θ	a	se denota por: $A = \left[\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \; d\theta\right]$	$A = \frac{3}{2}a^2\pi$	$A = \frac{3}{2}a^2\pi$
r = 1 + sen θ	1	$A = \int_0^{\pi} (1 + \operatorname{sen}\theta)^2 \, d\theta$	$A = \frac{3}{2}1^2\pi$	$A = \frac{3}{2}\pi$
r = 2 + 2 sen θ	2	$A = \int_0^{\pi} (2 + 2\operatorname{sen}\theta)^2 \, d\theta$	$A = \frac{3}{2}2^2\pi$	$A = 6\pi$
r = 3 + 3 sen θ	3	$A = \int_0^{\pi} (3 + 3\operatorname{sen}\theta)^2 \, d\theta$	$A = \frac{3}{2}3^2\pi$	$A = \frac{27}{2}\pi$
.	.	.	.	.
r = n + n sen θ	n	$A = \int_0^{\pi} (n + n\operatorname{sen}\theta)^2 \, d\theta$	$A = \frac{3}{2}n^2\pi$	$A = \frac{3}{2}n^2\pi$

Figura 8. Área de la ecuación polar r = a + a sen θ

Resultados

Cabe mencionar que la generalización de la ecuación de la longitud mostrada en la figura es aplicable en este estudio es para valores enteros y positivos, no se realizó en análisis para valores decimales ni negativos.

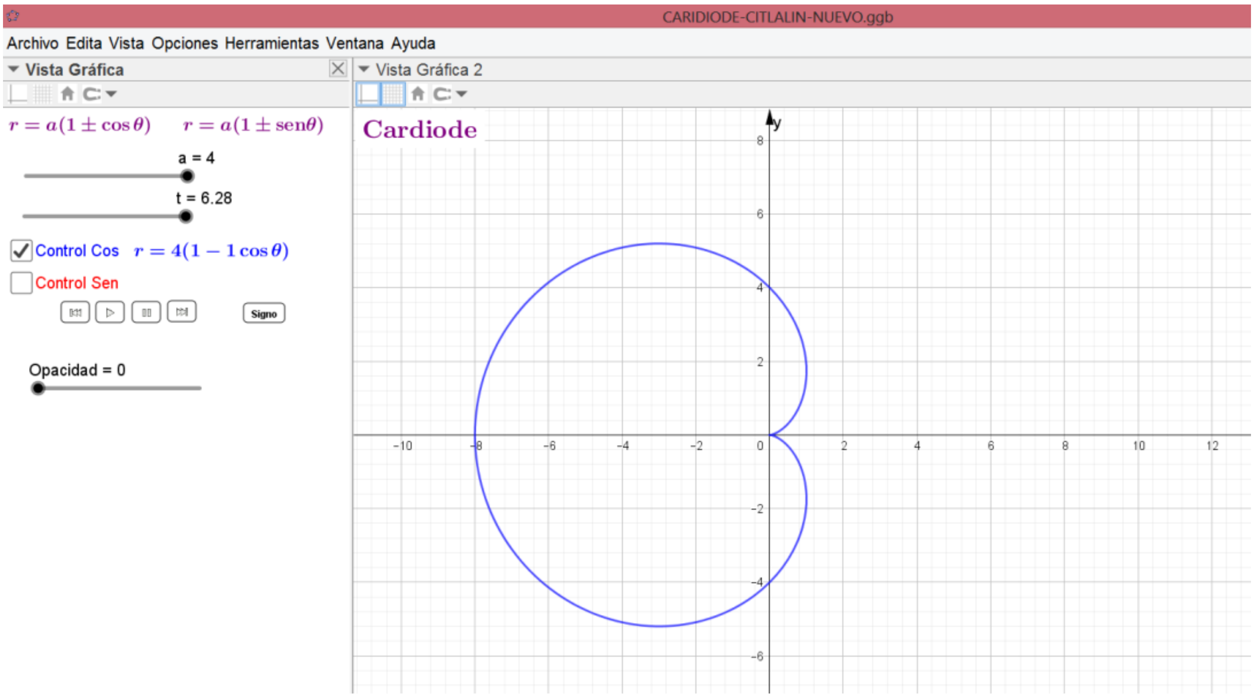


Figura 9: Longitud de la cardioide.

Para obtener la longitud correspondiente a las ecuaciones polares de la forma $r = a \pm a\ \cos\theta$ o $r = a \pm a\sin\theta$, podemos aplicar lo explicado en la tabla 1.

Tabla 1

Longitud de arco para las diferentes ecuaciones polares de la cardioide

r = f(θ)	$\frac{dr}{d\theta}$	$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$	L
r = a + a cos θ	$r' = -a\,sen\,\theta$	$L = 2\int_0^\pi \sqrt{(a + a\cos\theta)^2 + (-a\ sen\,\theta)^2}\, d\theta$	$L = 8a$
r = a - a cos θ	$r' = a\,sen\,\theta$	$L = 2\int_0^\pi \sqrt{(a - a\cos\theta)^2 + (a\ sen\,\theta)^2}\, d\theta$	$L = 8a$
r = a + a sen θ	$r' = -a\cos\theta$	$L = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a + a\sin a)^2 + (-a\cos\theta)^2}\, d\theta$	$L = 8a$
r = a - a sen θ	$r' = -a\,sen\,\theta$	$L = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a - \ a\sin a)^2 + (-a\,sen\theta\,)^2}\, d\theta$	$L = 8a$

Al igual que la longitud la ecuación analizada para el área de curva, se generalizo y aplico en este estudio solo para números positivos y enteros como se muestra en la figura 10.

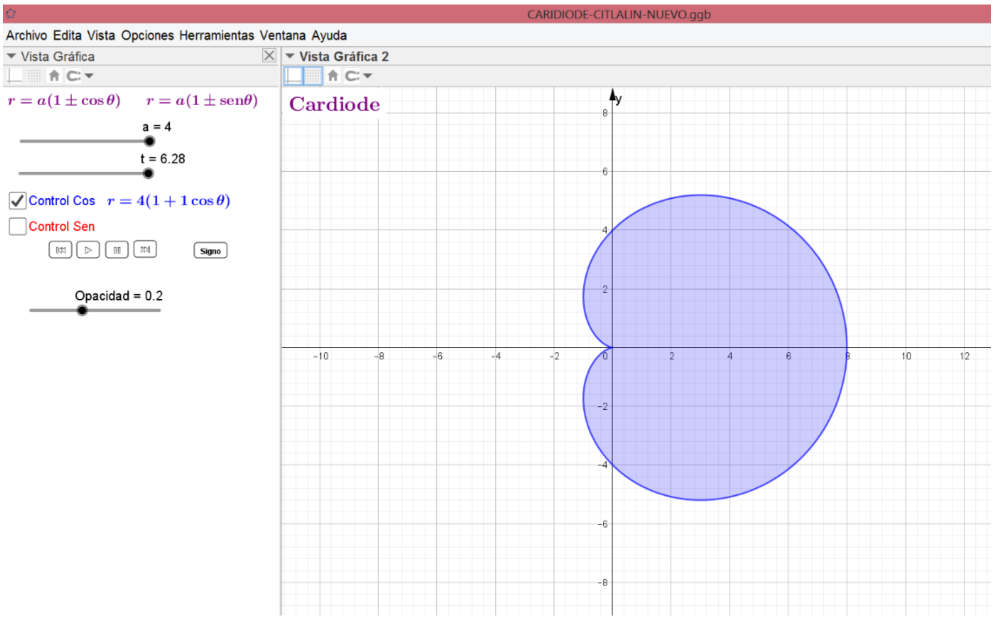


Figura 10. Área de la cardioide.

Para obtener el área de la cardiode, correspondiente a las ecuaciones polares de la forma $r = a \pm a\ \cos\theta$ o $r = a \pm a \sin\theta$, se puede aplicar lo expuesto en la tabla No. 2.

Tabla 2

Área para diferentes ecuaciones polares de la cardioide

r = f(θ)	**Se denota por:** $A = \left[\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\ d\theta\right]$	**Área (A)**
r = a + a cos θ	$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^\pi (\mathrm{a} + \mathrm{a}\cos\theta)^2\, d\theta\right]$	$A = \frac{3}{2}a^2\pi$
r = a - a cos θ	$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^\pi (\mathrm{a} - \mathrm{a}\cos\theta)^2\, d\theta\right]$	$A = \frac{3}{2}a^2\pi$
r = a + a sen θ	$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^\pi (\mathrm{a} + \mathrm{a}\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\, d\theta\right]$	$A = \frac{3}{2}a^2\pi$
r = a - a sen θ	$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^\pi (\mathrm{a} - \mathrm{a}\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\, d\theta\right]$	$A = \frac{3}{2}a^2\pi$

Haciendo uso de GeoGebra, se logró analizar la generalizar y conceptualizar la longitud y el área de la cardioide como se muestra en la figura 11.

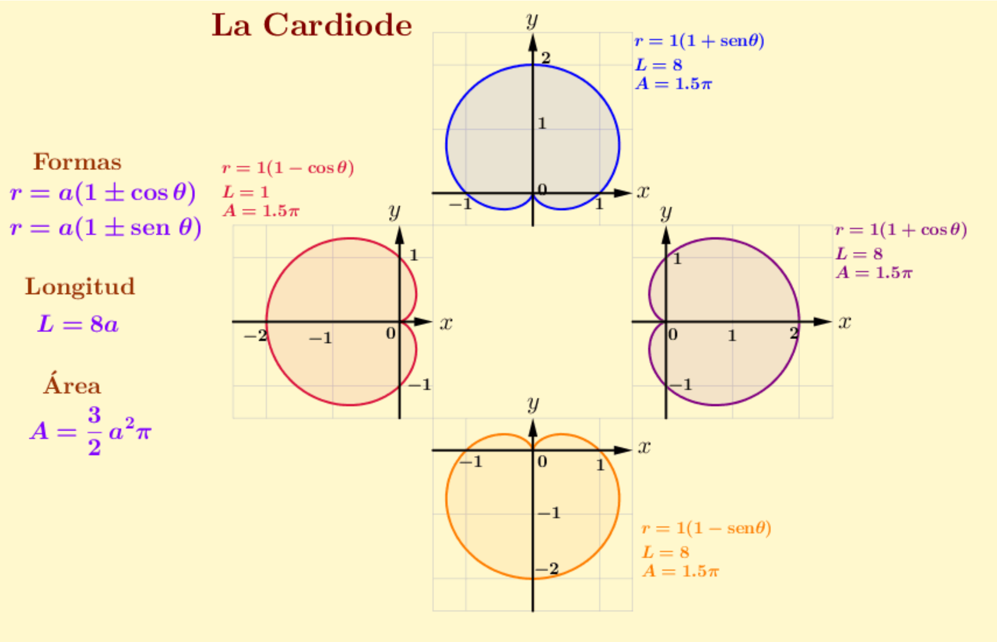


Figura 11. Longitud y área de la cardioide usando GeoGebra.

Conclusiones

De manera general el uso de GeoGebra proporcionó herramientas tecnológicas de enseñanza aprendizaje a estudiantes y docentes en la Institución, favoreciendo la adquisición de competencias en el área de Cálculo Vectorial.

El uso de esta herramienta didáctica tecnológica, permitió a los estudiantes una forma más práctica y visual del análisis de la curva cardiode.

Se logró la competencia genérica en los estudiantes: propiciar el uso de Software de matemáticas como herramientas que faciliten la comprensión de los conceptos, la resolución de problemas e interpretación de los resultados. Así como la competencia específica de construir la gráfica de una curva plana en forma paramétrica mediante el software.

Bibliografía

Akopyan, A. V. (2015). Geometry of the cardioid. *The American Mathematical Monthly*, 122(2): 144-150.

Ayres, F. Mendelson, E. (2000). *Calculo Diferencial e Integral*. 3ª. Edición. México: Mc Graw-Hill.

Heyd D. (2000) *Guía de Cálculo. 3ª. Edición. Schaum*. México: Mc Graw-Hill.

Larson, R. Hostetler, R. Edwards, B. (2012). *Cálculo* Vol. 2. 6ª Edición. México: Mc Graw-Hill.

Leithold, L. (2005). *El cálculo*. 7ª Edición. Págs. 752-774 y 1052-1059. México: Editorial Oxford University Press.

TecNM. Tecnológico Nacional de México (2009). Planes y Programas de estudio. México: SEP.

DGEST (2012). Modelo educativo para el siglo XXI, formación y desarrollo de competencias, TecNM. México: SEP.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2019

ISSN: 2395-955X

LA INTEGRAL EN ESCUELAS DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR INCORPORADAS A UNISON

THE INTEGRAL IN HIGHER MIDDLE SCHOOLS INCORPORATED INTO UNISON

Erik Morales Mercado, Agustín Grijalva Monteverde

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

erikmorales@hotmail.com, guty@mat.uson.mx

Para citar este artículo:

Morales, E., Grijalva, A. (2019). La integral en escuelas de educación media superior incorporadas a UNISON. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 2, pp. 66-73. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 2, julio-diciembre de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

LA INTEGRAL EN ESCUELAS DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR INCORPORADAS A UNISON

THE INTEGRAL IN HIGHER MIDDLE SCHOOLS INCORPORATED INTO UNISON

Erik Morales Mercado, Agustín Grijalva Monteverde

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

erikmorales@hotmail.com, guty@mat.uson.mx

Resumen

La integral es uno de los conceptos matemáticos más relevantes en educación media superior, pero se tiene poca comprensión de sus usos y aplicaciones. Nuestra propuesta consiste en diseñar una secuencia didáctica sobre la integral, con apoyo de un software de geometría dinámica para estudiantes de nivel medio superior que pueden ser utilizadas en el libro de texto de Cálculo Integral para escuelas incorporadas a la Universidad de Sonora que cumplan con los requerimientos del nuevo modelo educativo. El uso de tecnologías de información en el desarrollo de este trabajo se maneja como primordial para mostrar diferentes representaciones al abordar el concepto de la integral, en este caso utilizaremos Software GeoGebra con el cual se elaborarán Applets para que el alumno y el docente puedan realizar variaciones y observar la aproximación al área bajo la curva.

Palabras clave: Secuencia didáctica, Integral, applet, GeoGebra.

Summary

The integral is one of the most relevant mathematical concepts in higher middle education, but you have little understanding of its uses and applications. Our proposal is to design a teaching sequence on the integral, supported by dynamic geometry software for higher middle-level students that can be used in the textbook of Integral Calculus for schools incorporated into the University of Sonora that meet the requirements of the new educational model. The use of information technologies in the development of this work is managed as primary to show different representations when addressing the concept of integral, in this case we will use GeoGebra Software with which Applets will be developed so that the student and the teacher can make variations and observe the approach to the area under the curve.

Keywords: Didactic Sequence, Integral, Applet, GeoGebra.

Introducción

El Cálculo Integral es una asignatura de gran relevancia dada su trascendencia en el proceso formativo, académico y como herramienta de resolución de problemas; sin embargo, en investigaciones realizadas sobre la comprensión de la integral de una función se reportan dificultades de los estudiantes para su aprendizaje. Como señalan Llorens y Santonja (1997. P. 62), son frecuentes las siguientes complicaciones en la asignatura de Cálculo Integral: "*Generalmente, los estudiantes identifican "integral" con "primitiva*". La integral, para ellos, no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico". También señalan que "*Las integrales 'definidas' se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando ésta no pueda aplicarse*". es decir, el símbolo

$$\int_a^b f(x)dx$$

cual representa *solo un paso más* en el cálculo de primitivas, la aplicación de la regla de Barrow". No se conecta el concepto de área con el de integral. Ciertamente, los estudiantes han oído que existe una relación entre las integrales (definidas) y el área, pero no se produce una adecuada unión entre ambas, de modo que persiste una interpretación puramente algebraica de la integral. (Llorens, Santonja, 1997, pp. 61-76).

Referente teórico

En el diseño de esta propuesta didáctica se utilizará el Enfoque Onteosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino 2008), en específico se tratarán los siguientes elementos:

- Prácticas matemáticas y sistemas de prácticas.
- Objetos matemáticos primarios y elementos de significado.
- Configuraciones y Trayectorias, particularmente epistémica y cognitiva.
- Criterios de idoneidad didáctica.

Metodología

Se determina el significado institucional de referencia, el cual está marcado en el programa de la materia de Calculo Integral para escuelas incorporadas a la Universidad de Sonora, por lo que realizamos un análisis de los objetos matemáticos primarios que intervienen en el programa, para tener una visión del significado institucional que propone el mismo. También se hace uso de los indicadores de la idoneidad didáctica en sus facetas epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica. De esta manera se establece una guía para la selección de situaciones problema y la potenciación de los recursos digitales proporcionados por GeoGebra.

Resultados

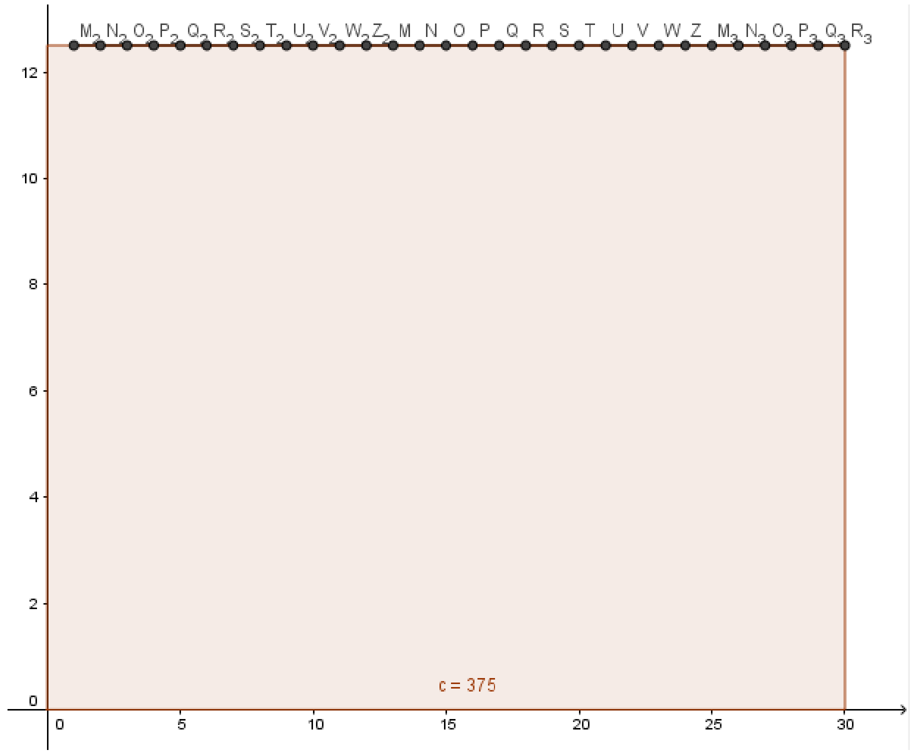
En la actualidad no se cuenta con libros de texto en escuelas incorporadas a la Universidad de Sonora en el nivel medio superior, por lo que se basan en cualquier libro que cumpla con el programa de cada asignatura, el cual está regido por la Dirección General de Bachillerato (DGB).

Atendiendo a las exigencias del Nuevo Modelo Educativo que plantea el impulso a la transversalidad, se ubicaron contextos relacionados con otras áreas del conocimiento como Física y Economía para la presentación de una noción intuitiva de la integral.

Actividad 1 Precio del dólar.

Al finalizar la guerra de independencia en México, se estableció el precio por dólar de $1.00 peso por $1.00 dólar, a partir de esta fecha el peso comenzó a devaluarse (pérdida de valor de una moneda nacional frente a otra extranjera).

En los gobiernos de Adolfo López Mateos y Gustavo Díaz Ordaz no hubo inflación, por lo que el precio del peso mexicano mantuvo su valor con respecto al dólar $12.50, tal como se muestra en la gráfica 1:

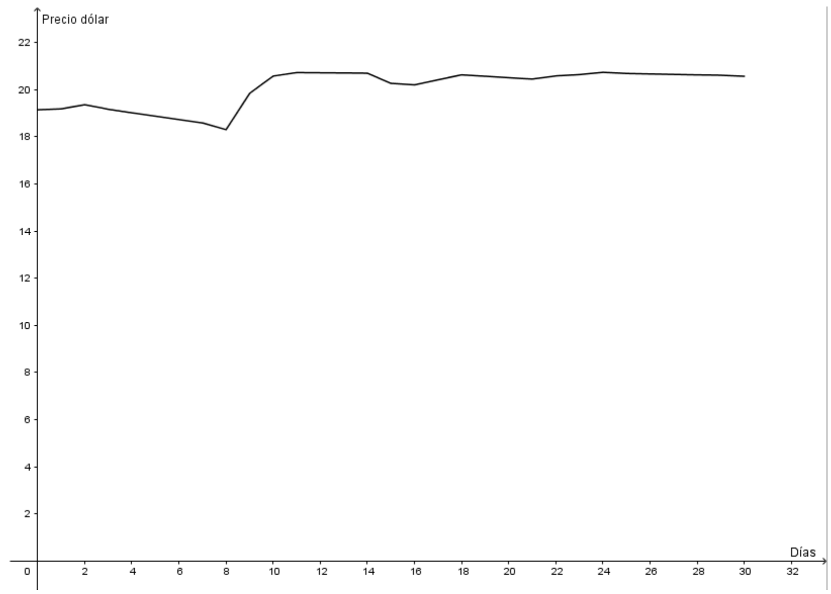


Gráfica 1. Precio del dólar a $ 12.50.

1. Si Francisco compró un dólar diario durante el mes de noviembre de 1960 (en Gobierno de Adolfo López Mateos). ¿Cuánto gastó al final de mes?
2. Realiza la gráfica del gasto de los 30 días.
3. ¿Y en el periodo de1 12 al 15 de noviembre? Realiza el procedimiento algebraico y geométrico.
4. ¿Cómo determinas la cantidad que pago en un periodo determinado?
5. ¿Que representa geométricamente el pago?

Actividad 2 Devaluación del dólar.

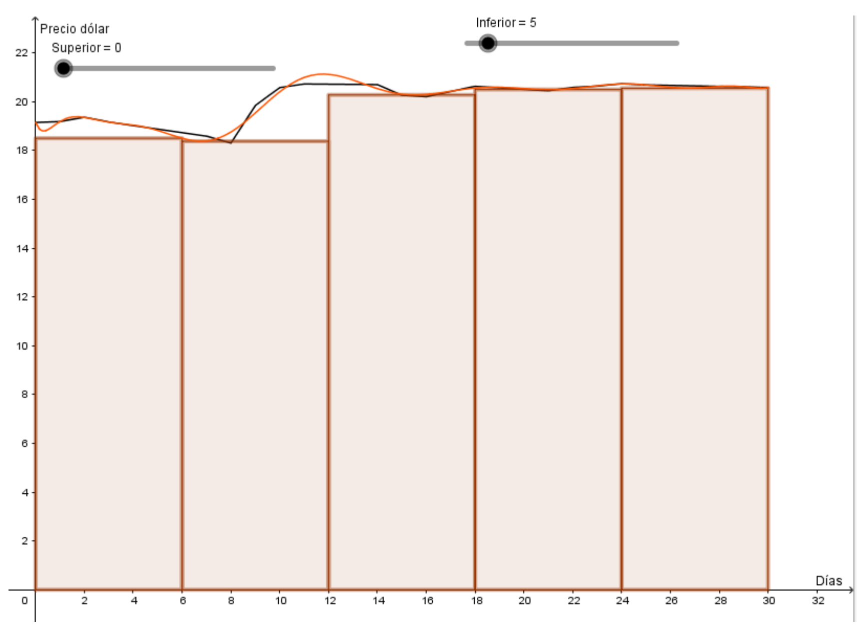
El peso mexicano ha sufrido varias devaluaciones a lo largo de su historia, en fechas recientes las elecciones a presidente de los Estados Unidos de América, trajo una gran volatilidad en el precio del dólar, a continuación, se presenta el gráfico 2 con el comportamiento del dólar en el mes de noviembre de 2016, fecha en la cual se llevaron a cabo dichas elecciones.



Gráfica 2. Comportamiento del dólar en el mes de noviembre de 2016.

Como puedes darte cuenta, el cálculo para determinar el gasto al comprar un dólar diario durante un mes ya no es tan sencillo, dado que el precio se encuentra variando constantemente.

Con apoyo del applet de GeoGebra Devaluación del dólar encuentra el gasto que tendríamos al comprar un dólar diario durante el mes en cuestión, por medio de seccionar el área bajo la curva. Analizaremos el área seccionando nuestra función por debajo de curva. Primero con 5 rectángulos por debajo de la curva con el deslizador $Inferior = 5$. Gráfica 3.

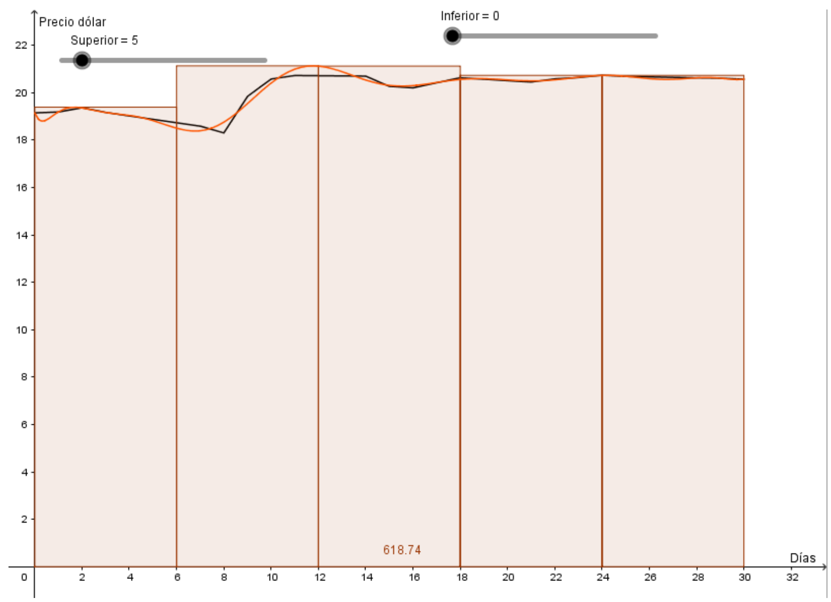


Gráfica 3. Representación con rectángulos del área.

Encuentra el $g(x)$ correspondiente al valor de dx de cada rectángulo colocando en Entrada la función $g(x)$, donde x es el valor inicial de cada rectángulo. El valor aparecerá en la Vista algebraica como $a = 18.76$, cada vez que realices este procedimiento borra (dando clic derecho en a y seleccionando borrar) el resultado para no saturar de información el applet.

- Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura.
- Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes.
- Repetimos del paso 1 al 4 con 10 rectángulos.
- Ahora seccionaremos nuestra función en rectángulos por arriba de curva.

Primero con 5 rectángulos por debajo de la curva con el deslizador $Superior = 5$. Gráfica 4.



Gráfica 4. Manipulación del Applet.

- Encuentra el valor $g(x)$ más grande en cada rectángulo para obtener la altura de este, si se encuentra en $x = 12$, coloca en Entrada $g(12)$, borra el resultado de a para no saturar el applet.
- Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura.
- Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes.
- Repetimos del paso 1 al 4 con 10 rectángulos.
- Volvamos con el deslizador $Inferior$, que secciona nuestra función en rectángulos por debajo de la curva.
- Ponemos el deslizador $Inferior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica $Sumainf$ que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.
- Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador $Inferior = 30, 40\ y\ 50$. Llenando la tabla con los datos recabados.

- Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior, que secciona nuestra función en rectángulos por arriba de la curva.
- Ponemos el deslizador $Superior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica $Sumasup$ que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.

Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador $Superior = 30, 40\ y\ 50$. Llenando la tabla 1 con los datos recabados.

Tabla 1. *Concentrado de datos numéricos a partir de la manipulación del Applet.*

Número de rectángulos	Suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva	Suma de áreas de rectángulos por arriba de la curva
5		
10		
20		
30		
40		
50		

Entonces el gasto total que realizaremos en este mes se encuentra entre la suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva y la suma de rectángulos por arriba de la curva.

$$\underline{g} \leq g \leq \overline{g}$$

Conclusiones

Al aplicar la secuencia didáctica se espera que el estudiante construya la concepción de área bajo la curva y lo relacione con la representación geométrica de la integral.

En la primera actividad se desea que el estudiante se familiarice con el área bajo la curva, en las actividades de desarrollo se realiza una aproximación al área bajo la curva al segmentar la función en rectángulos por debajo y por arriba de la curva, determinar la suma de sus áreas y con esto aproximar al área real por arriba y por debajo de la curva.

En las actividades de cierre se pretende que el estudiante pueda observar que independientemente del contexto del cual se trate, ya sea de trabajo mecánico, distancia recorrida, costo de la compra de dólares u otro, la solución nos lleva siempre a seguir un mismo procedimiento, en el que calculamos el área entre el eje X, la gráfica de la función que modela la situación y las rectas verticales que limitan el intervalo considerado.

Así, al seccionar la función en rectángulos con bases dx y alturas f(x), podemos encontrar el área de cada uno de estos rectángulos como f(x)dx, como pudiste observar si la partición de la curva tiende a ser más grande, la suma de las áreas de estos tiende a aproximarse cada vez más al valor real.

La suma de las áreas de los rectángulos con una partición infinita de rectángulos nos proporciona el valor exacto del área bajo la curva se le denomina integral y se expresa de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Este procedimiento se aplica a otras situaciones, como el cálculo del trabajo realizado por una fuerza variable y volúmenes de sólidos de revolución.

Referencias Bibliográficas

Llorens, J. L., Santonja, F. J. (1997). Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del concepto de la Integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 61-76, p 62.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 111-132.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2019

ISSN: 2395-955X

LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN LINEAL Y CUADRÁTICA EN UN AMBIENTE GEOGEBRA CON ALUMNOS DE TERCER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

BUILDING THE NOTION OF LINEAR AND QUADRATIC FUNCTION IN A GEOGEBRA ENVIRONMENT WITH THIRD GRADE STUDENTS IN SECONDARY EDUCATION

Gerardo Carrillo Mata

mateprofegera@hotmail.com

Escuela Secundaria Federal "Ignacio M. Altamirano", Zacapu, Mich., México.

Para citar este artículo:

Carrillo, M. (2019). La construcción de la noción de función lineal y cuadrática haciendo uso del software GeoGebra con alumnos de tercer grado de educación secundaria. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 2, pp. 74-87. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 2, julio-diciembre de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN LINEAL Y CUADRÁTICA HACIENDO USO DEL SOFTWARE GEOGEBRA CON ALUMNOS DE TERCER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

BUILDING THE NOTION OF LINEAR AND QUADRATIC FUNCTION USING GEOGEBRA SOFTWARE WITH THIRD GRADE STUDENTS IN SECONDARY EDUCATION

Gerardo Carrillo Mata

mateprofegera@hotmail.com

Escuela Secundaria Federal "Ignacio M. Altamirano", Zacapu, Mich., México

Resumen

El diseño de situaciones de aprendizaje donde el protagonista es el alumno, permite trabajar con conocimientos previos, tanto en las posibles estrategias de solución de la situación problema, como en la organización y sistematización de toda la información que los alumnos pueden recabar en la situación, por lo que se considera de gran importancia el empleo de la metodología ACODESA (Aprendizaje en Colaboración, Debate Científico y Auto-Reflexión), la cual plantea cinco etapas en las cuales los alumnos juegan un papel protagónico en la construcción de sus propios aprendizajes. La construcción del concepto de función lineal y cuadrática se construye a través de la realización de situaciones didácticas en este caso la actividad se titula construyendo corrales la cual se desarrolla en dos momentos.

Palabras clave: Función, Lineal, Cuadrática, Colaborativo.

Abstract

The design of learning situations where the protagonist is the student, allows to work with previous knowledge, both in the possible strategies for solving the problem situation, as well as in the organization and systematization of all the information that the students can gather when presenting themselves to said situation, for which I consider of great importance the use of the ACODESA methodology (Collaborative Learning, Scientific Debate and Self-Reflection) which poses five stages in which students play a leading role in the construction of their own learning. The construction of the concept of linear and quadratic function is built through the realization of didactic situations in this case the activity is titled building pens which develops in two moments.

Keywords: Function, Linear, Quadratic, Collaborative.

Introducción

El artículo es el resultado de un proyecto de intervención, que está diseñado con un enfoque metodológico constructivista para alumnos de tercer grado de secundaria, en el cual se articulan contenidos matemáticos con situaciones problemáticas reales del contexto en donde viven los alumnos para desarrollar competencias para la vida, las cuales les permiten emplear conocimientos previos, desarrollar sus habilidades, favorecer actitudes positivas hacia las matemáticas y favorecer los aprendizajes significativos, que les permiten tomar decisiones en la solución de problemas en su vida diaria, involucrándolos en todas las situaciones en donde vean la aplicación de las matemáticas.

En esta actividad se presenta la situación de aprendizaje construyendo corrales donde se busca que los alumnos descubran de manera más óptima como aprovechar de mejor manera los espacios donde pueden construir casas, corrales, bodegas etc. Y de manera más importante, la relación de estas realidades con el análisis matemático de las relaciones funcionales de dos variables como la altura y la base de los rectángulos y cuadrados, para encontrar su modelación matemática en una expresión algebraica (función lineal) y la relación de dos variables que no crecen o disminuyen de manera proporcional, como el área y la base de las figuras propuestas en esta actividad, para llegar a la modelación matemática para el análisis de los coeficientes en una ecuación cuadrática. En lo general, el estudio intenta mostrar como los alumnos a partir de actividades, haciendo uso de software GeoGebra, construyen la noción del concepto de función.

A pesar de que la noción de ecuación lineal y cuadrática se presenta en la currícula matemática de manera clara, como tal de los principios de la educación secundaria y se reafirma en segundo de secundaria y se consolida en tercer grado de secundaria, diversas investigaciones han demostrado que las dificultades de aprendizaje que plantean no son simples (Duval 1992; Hitt 1996). La mayor problemática en los estudiantes de tercer grado de la Escuela Secundaria Federal "Ignacio M. Altamirano", presenta serias deficiencias para construir la noción de función lineal, cuando resuelven diversos problemas de la vida cotidiana, donde tienen que trabajar con el uso de funciones lineales y cuadráticas. Debido a la dificultad de interpretación de problemas de lenguaje común y convertirlos en representación algebraica, pasando por diferentes momentos como la representación geométrica, el uso de tablas para organización y sistematización de la información, así mismo, la interpretación de gráficas de líneas rectas y parábolas. Por lo anterior se diseñan situaciones de aprendizaje haciendo uso del software GeoGebra donde se lleva a los alumnos al análisis, a la reflexión y la observación de dos variables en relación de dependencia lineal y cuadrática.

Metodología

Partiendo de una realidad para identificar los problemas en el contexto escolar, podemos realizar un diagnóstico el cual nos permite hacer una forma de investigación, explicando el problema y buscando la solución. El diagnóstico es una investigación en donde se describen ciertos problemas de la realidad (Astorga, 1991). En la Escuela Secundaria Federal "Ignacio M. Altamirano" de la ciudad de Zacapu, Mich., encontramos la problemática con los alumnos de tercer grado de educación secundaria, en relación a la interpretación y elaboración de tablas, gráficas y expresiones algebraicas, que relacionan dos o más variables de manera directa o indirecta, por lo que consideramos que es de gran importancia realizar una propuesta, que permita que los alumnos construyan la noción de la función lineal.

De los diferentes problemas que conforman la problemática escolar en la asignatura de matemáticas, decidimos elegir el problema, qué desde nuestra experiencia, hemos visto que no poder construir la noción de función por parte de los alumnos de nivel secundaria, limita sus posibilidades de desarrollar su pensamiento crítico. Para lo cual se elabora un cuestionario de 10 preguntas, que permita reconocer los alcances y las limitaciones de los alumnos referente a la noción de función, así como todos los conocimientos previos en relación al problema detectado en la interpretación de la función. Cómo emplean la noción de función, donde y cuando la emplean para resolver problemas del contexto donde viven.

Se aplica el cuestionario a 26 alumnos de tercero “A” de la escuela secundaria federal “Ignacio M. Altamirano” para recolectar la información, tratando de entender el problema con mayor intensidad y poder realizar las propuestas que permitan solucionar de la manera más completa la posible problemática encontrada.

Se recoge y se organiza la información recabada por medio del cuestionario que se aplicó a los alumnos y se sistematiza en una tabla, en la cual se puede observar los conocimientos previos con que cuentan los alumnos en relación a la noción de la función lineal. A continuación, se realizó un análisis de dicho cuestionario según categorías preestablecidas en el análisis, que han permitido conocer las concepciones de los alumnos sobre las expresiones algebraicas de las funciones y su representación gráfica, así como los errores que cometen. Tras la revisión de las respuestas de los alumnos se elabora una tabla de doble entrada (alumno/ítem) donde se recoge si la respuesta ha sido correcta o incorrecta y si el alumno aporta justificación alguna o no. El análisis ha sido cualitativo, considerando los porcentajes de aciertos, pero nos da información acerca del tipo de preguntas más fáciles para los alumnos y cuáles les resultan más difíciles. Considerando el análisis de los resultados de los cuestionarios aplicados a los alumnos del tercer grado sección “A”, se logra identificar las deficiencias para enunciar las dificultades que presentan los alumnos con referencia a la construcción de la noción de función por lo que se consideran los resultados del 50% hacia 0% como la problemática prioritaria para encontrar propuestas de solución, en seguida se enumeran las principales dificultades que se encuentran en los alumnos.

Los alumnos tienen dificultades para identificar la noción de función, ya que en el cuestionario que se les aplicó, el 85% de los alumnos no identifican el enunciado que relaciona la respuesta correcta de la noción de función. Dificultades para justificar y explicar la diferencia entre una función y una ecuación, aquí solamente el 20% de los alumnos no encuentran problemas para encontrar la diferencia entre una ecuación de una función. Problemas para relacionar los coeficientes que determinan la pendiente de una recta donde solo el 15% de los alumnos contestaron correctamente cuando una ecuación es constante determinando que la pendiente de la recta es cero. Además, cometen numerosos errores al asociar la expresión algebraica de una función a partir de su gráfica, no sólo no identificando correctamente sus coeficientes, sino incluso confundiendo el tipo de función que están analizando. Algunos alumnos tienden a utilizar el mismo tipo de justificación en todas las respuestas, bien sean tablas de valores, gráficas o coeficientes de la fórmula. De acuerdo al análisis del cuestionario aplicado encontramos también un 20% de los alumnos contestaron correctamente las cuestiones que se refieren al interpretar funciones donde la pendiente es cero o indefinida.

Como consideración final podemos establecer a la vista de los resultados anteriores “que los alumnos manejan el concepto de función desde un punto de vista operativo” (Sfard, 1991), es decir, como un proceso, por lo que necesitarían que se diseñaran actividades de instrucción específicas, para que manejaran las funciones como un objeto por lo que consideramos como una prioridad para esta investigación, que los alumnos a través de una serie de actividades puedan construir la noción de función.

Del análisis de la información recabada de la problemática inicial, donde los alumnos tienen problemas para trabajar e interpretar de diferentes formas, las relaciones que se pueden establecer entre dos variables. Se elabora la actividad "Construyendo corrales" por medio de la cual se pretende ofrecer a los alumnos, diferentes formas de visualizar e interpretar de manera dinámica todas las posibilidades posibles de construir los corrales, con las características que se especifican en el diseño de la actividad.

Metodología ACODESA (Aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión).

La metodología ACODESA integra varias situaciones problema interrelacionadas unas con otras y toma en consideración el trabajo individual, trabajo en equipo, debate en el aula y auto-reflexión. Es una adaptación a un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas (Hitt, 2008). En la metodología ACODESA, la manipulación de materiales y trabajo con papel y lápiz es sumamente importante. En este caso, los estudiantes utilizan una cuerda para la construcción de todos los posibles corrales que se pueden hacer con las características establecidas en el problema. Utilizan hojas de trabajo en donde registran y dibujan todos los datos y las variables.

En el caso de los estudiantes de secundaria, ello les permite convencer a sus compañeros, además, la etapa de debate científico permite a algunos estudiantes modificar sus versiones originales, llegando a resultados más refinados.

En el presente trabajo se describen los elementos considerados para el diseño de una secuencia de actividades didácticas, diseñadas para promover un acercamiento intuitivo a la noción de función lineal y cuadrática, con alumnos de la escuela secundaria federal "Ignacio M, Altamirano" de la ciudad de Zacapu. La secuencia de actividades didácticas forma parte de un trabajo de tesis de desarrollo docente para obtener el grado en la Maestría en educación y diseño curricular, de la Universidad Pedagógica Nacional.

Considerado para el diseño e implementación de la secuencia de actividades didácticas, fue la metodología ACODESA (Hitt y Cortez, 2009) que es una adaptación a un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas. Es importante señalar que, en esta metodología, el profesor presenta una situación problema que provoque la reflexión, no se pretende explicitarles a los estudiantes la matemática que debe ser utilizada, ni dictaminar sobre lo realizado por los mismos en las primeras etapas, salvo al final en el proceso de institucionalización.

En las primeras fases el profesor es un moderador y son los estudiantes quienes argumentan y validan sus producciones, en el proceso de institucionalización es donde el profesor resalta las diferentes representaciones y presenta las representaciones institucionales.

Otro elemento teórico considerado en el diseño es la traslación de registros en el razonamiento y la generación especulativa de datos. Bajo las consideraciones de ACODESA, se ha diseñado una propuesta didáctica compuesta de una actividad divida en dos momentos, organizada siguiendo la metodología ACODESA con adaptaciones menores y en las cuales se incorpora el uso de la tecnología GeoGebra.

El planteamiento para abordar la actividad como una alternativa de enseñanza, se sugiere con el uso de la metodología ACODESA (Hitt, 2006). Aunque cada una de estas etapas conlleva un referente teórico y una programación de actividades, se enfatiza en la importancia de la etapa de Auto reflexión, que retoma los conceptos adquiridos por los estudiantes en las etapas anteriores y que puede establecerse como una actividad que evidencia parámetros de evaluación.

El diseño de situaciones de aprendizaje donde el protagonista es el alumno, permite trabajar con conocimientos previos, tanto en las posibles estrategias de solución de la situación problema, como en la organización y sistematización de toda la información que los alumnos pueden recabar al presentarse a dicha situación y en las cuales los alumnos juegan un papel protagónico en la construcción de sus propios aprendizajes.

Resultados

Se presenta la situación de aprendizaje a los alumnos para desarrollarla por medio de la metodología ACODESA.

Situación problema: Pedro tiene 20 metros de malla ciclónica y quiere construir un corral para sus ovejas, que tenga forma rectangular o cuadrada pero que cubra la mayor área posible. Los lados del corral deben medir metros completos. Vamos ayudarle a Pedro a construir su corral. Recuerda que Pedro debe colocar una borrega por metro cuadrado.

PRIMERA FASE: TRABAJO INDIVIDUAL. COMPRENDER EL PROBLEMA

Se presenta la situación de aprendizaje a los alumnos de manera individual y a papel y lápiz. El alumno argumenta, plantea y desarrolla la solución. En la figura 1 se presentan algunas de las representaciones de los corrales que dibujaron los alumno así como la tabla donde sistematizan y organizan la información recabada.

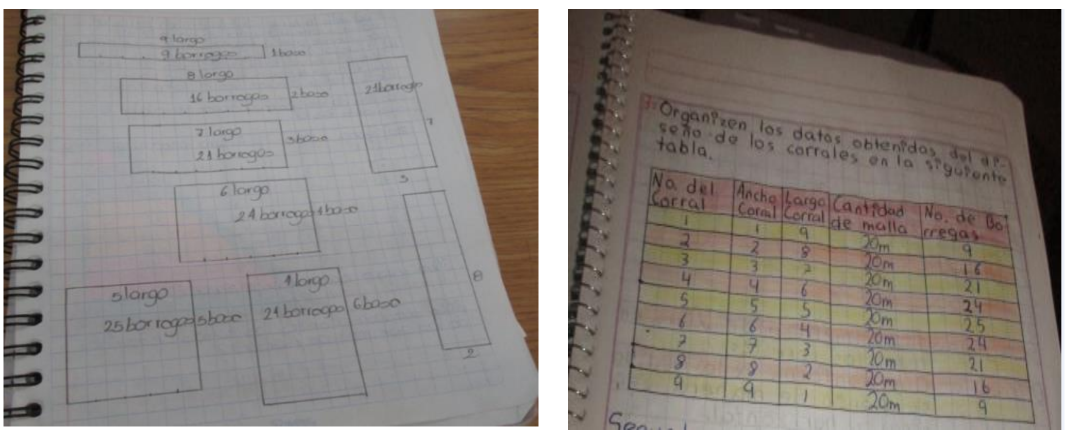


Figura 1. Representaciones de los corrales y la tabla donde sitematización y organizan la información recabada

SEGUNDA FASE: TRABAJO EN EQUIPO. PROCESOS DE DISCUSIÓN Y VALIDACION

Los alumnos organizados en equipos representan en el patio de la escuela (Figura 2) todos los posibles corrales con la malla se pueden construir encomtrando un total de nueve corrales.

Figura 2. Representaciones en el patio de la escuela los posibles corrales.

Los alumnos dibujan en su cuaderno (Figura 3) todos los cuadriláteros que se pueden construir y anotan sus dimensiones.

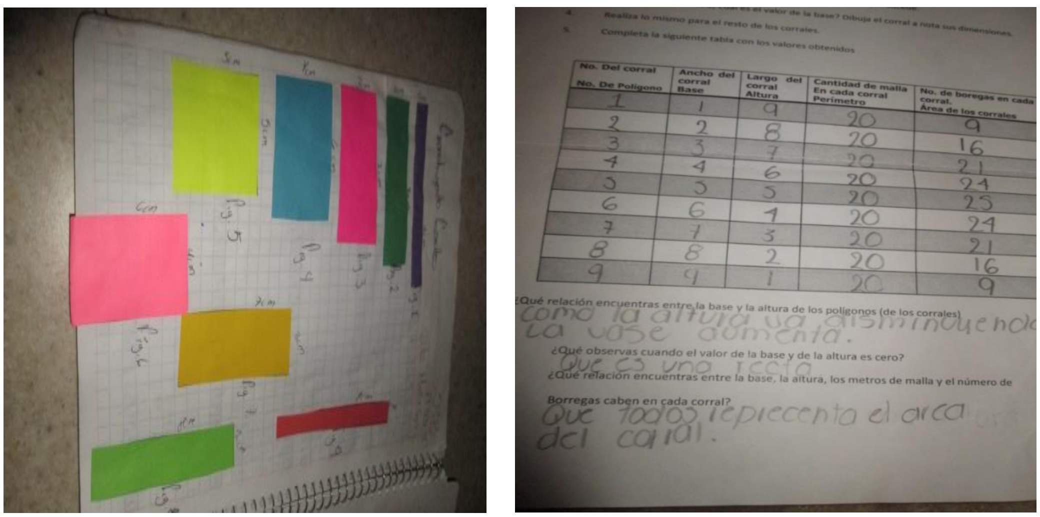


Figura 3. Cuadriláteros que se pueden construir y sus dimensiones.

TERCERA FASE: TRABAJO EN EQUIPO, DEBATE, PROCESOS DE DISCUSIÓN Y VALIDACION.

TERCER MOMENTO CONSTRUYENDO CORRALES USANDO TECNOLOGÍA SOFTWARE GEOGEBRA.

En este tercer momento, se representan las hojas de trabajo y los videos de construyendo corrales haciendo uso de GeoGebra.

Se presenta la actividad de construyendo corrales, en la cual los alumnos manipulan dicha actividad por medio de la cual los alumnos analizan, observan las diversas posibilidades de construir los corrales, sin perder de vista el número de corrales que se pueden construir y cuál es el corral de mayor área que se puede construir. Como se puede observar esta actividad propicia la sistematización, la organización y la graficación de los datos obtenidos.

En seguida se presenta la pantalla de la actividad construyendo corrales con la cual los alumnos inician la actividad. Luego, los alumnos al mover el botón b del deslizador, pueden observar todas las posibilidades de corrales que se pueden construir con el rollo de malla como se presentan en las pantallas de computadora. Al observar todas las combinaciones posibles entre la variable base y la variable altura, los alumnos completan una tabla en la cual ordenan y sistematizan la información.

Las preguntas que se plantean en esta hoja de trabajo, buscan conducir a los alumnos a construir el concepto defunción lineal, al relacionar las variables de la actividad construyendo corrales. En seguida se presenta por medio del software GeoGebra, la posibilidad de observar todos los corrales que se pueden construir al mismo tiempo y las ventajas que presenta esta representación. Así como la posibilidad de observar todos datos posibles, así como las variables que intervienen en la construcción de corrales.

En la figura 4 se presentan todos los corrales resaltando el corral de mayor área que se puede construir con el rollo de malla.

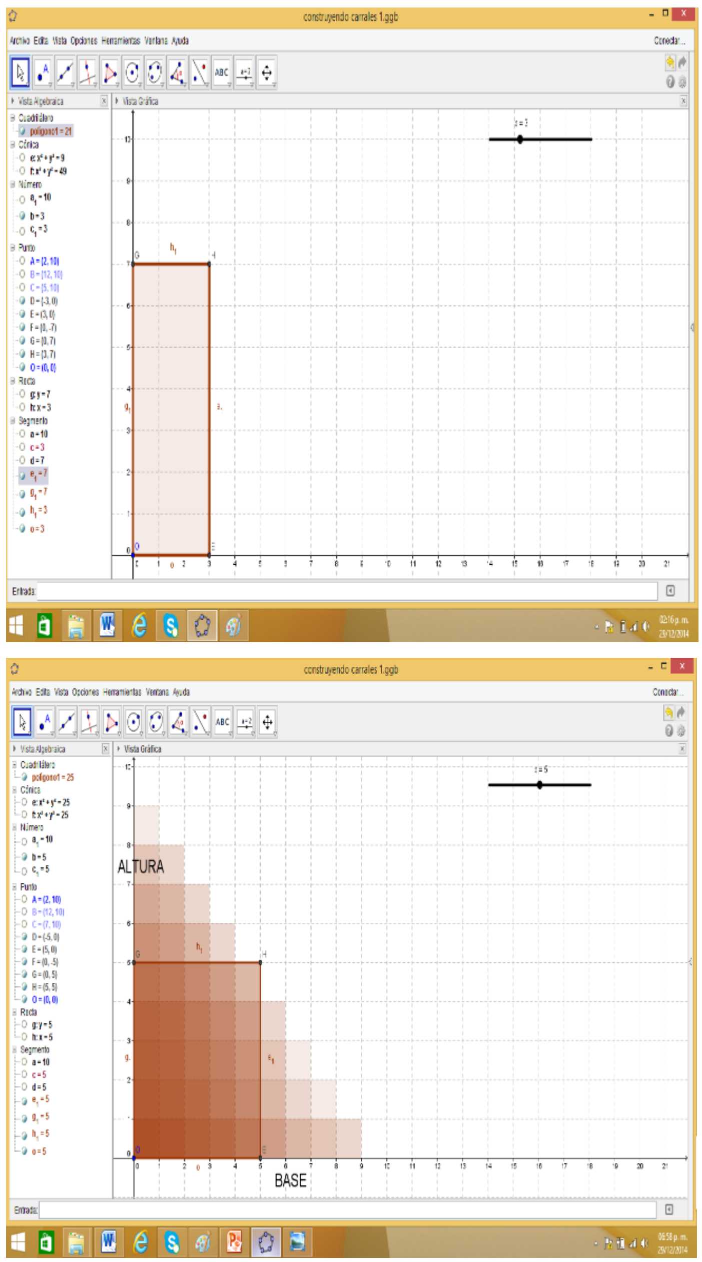
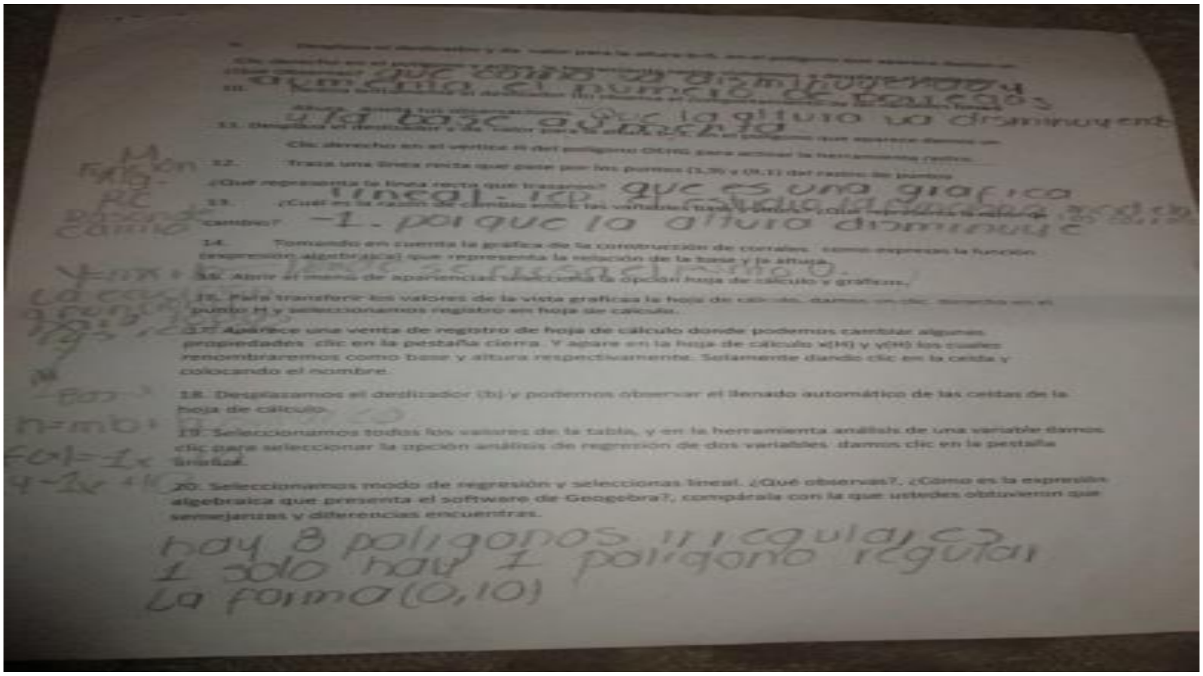


Figura 4. Applet de GeoGebra.

CUARTA FASE: TRABAJO INDIVIDUAL. RECONSTRUCCION Y AUTOREFLEXION

En la figura 5 se presenta la hoja número dos de la actividad con GeoGebra, donde los alumnos de manera individual reflexionan las estrategias, los procedimientos y comprueban los resultados



Otras de las pantallas importantes que se les presenta a los alumnos durante el desarrollo de la actividad es la Figura 6. En esta pantalla, los alumnos tienen la posibilidad de observar los datos en vista Algebraica, donde se encuentran todos los puntos que permiten graficar la línea recta, que representa el comportamiento de cómo crece la altura con respecto a la base.

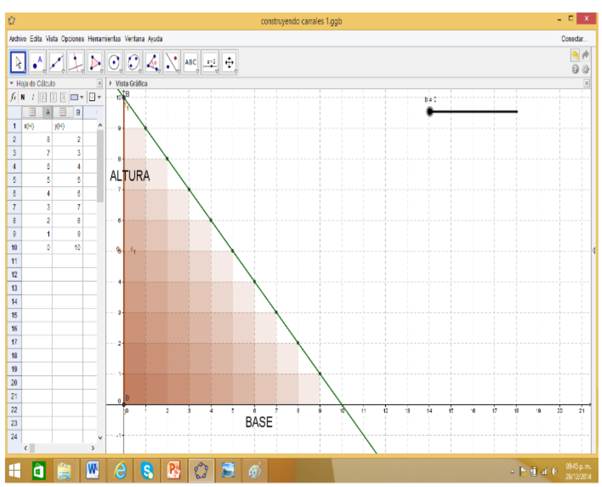


Figura 6. Comportamiento de cómo crece la altura con respecto a la base.

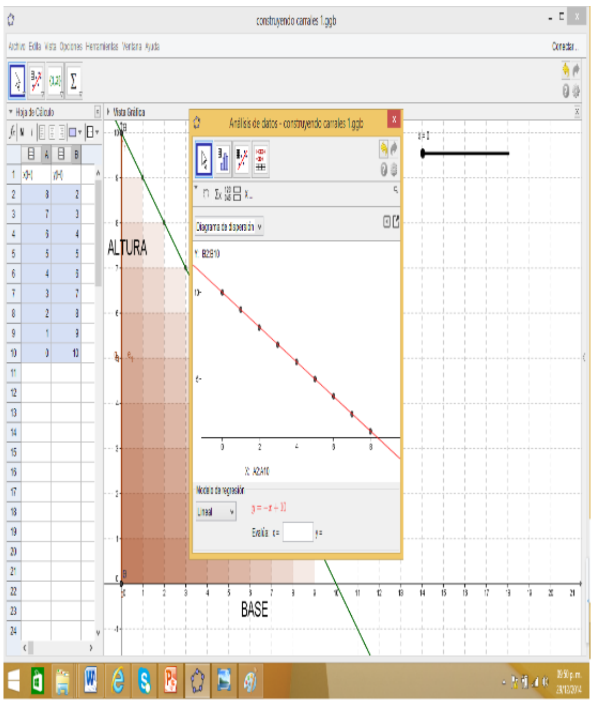
Otra gran ventaja que presenta usar el programa de GeoGebra es poder insertar una hoja de cálculo donde podemos vincular el movimiento de las variables en la parte gráfica y tabular los datos del comportamiento de las variables base y altura que se trabajan en la construcción de corrales.

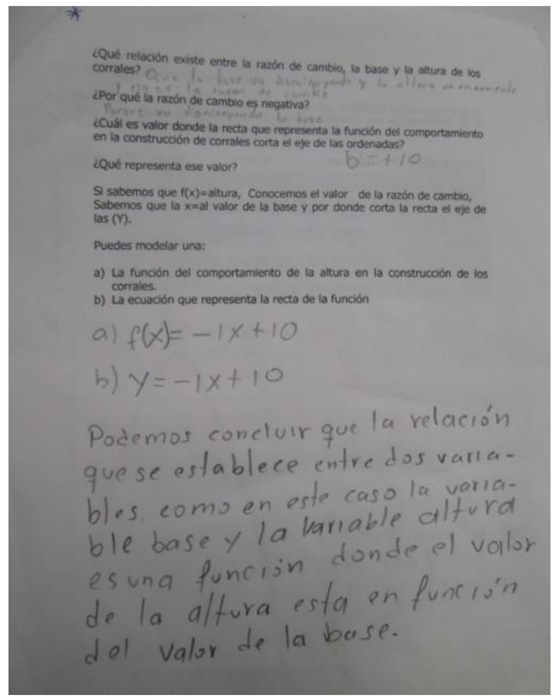
En el siguiente momento podemos observar como los alumnos pueden manipular el botón del deslizador b y como se tabulan de manera automática los valores de las variables base y altura en la hoja de cálculo que se encuentra en la parte izquierda de la hoja de trabajo.

QUINTA FASE: INSTITUCIONALIZACION.

INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO.

Haciendo uso de la herramienta de análisis de dos variables GeoGebra, nos presenta la posibilidad de encontrar la expresión algebraica que modela la función del comportamiento de los corrales al manejar dos variables como lo es la base y la altura de los corrales.





¿Qué relación existe entre la razón de cambio, la base y la altura de los corrales?

¿Por qué la razón de cambio es negativa?

¿Cuál es valor donde la recta que representa la función del comportamiento en la construcción de corrales corta el eje de las ordenadas?

b=+10

¿Qué representa ese valor?

Si sabemos que f(x)=altura, Conocemos el valor de la razón de cambio, Sabemos que la x=al valor de la base y por donde corta la recta el eje de las (Y).

Puedes modelar una:

a) La función del comportamiento de la altura en la construcción de los corrales.
b) La ecuación que representa la recta de la función

a) $f(x) = -1x + 10$

b) $y = -1x + 10$

Podemos concluir que la relación que se establece entre dos variables como en este caso la variable base y la variable altura es una función donde el valor de la altura esta en función del valor de la base.

Figura 7. Función del comportamiento de los corrales al manejar dos variables

Ecuaciones cuadráticas

PRIMERA FASE: TRABAJO INDIVIDUAL.

COMPRENDER EL PROBLEMA.

Se presenta la actividad a los alumnos resaltando la capacidad máxima del corral que se puede construir, en la hoja de trabajo se pide que trabajen con los datos del ancho del corral (base) y el área de la tabla No. 1 como se muestra en la figura 8.

Se les pide que con los datos base y área realicen la respectiva gráfica en la cual deben identificar la variable dependiente y la variable independiente, para analizar el comportamiento de dependencia de dichas variables.

Polígono	Base	Altura	Perímetro	Área
1	9	1	20	9
2	8	2	20	16
3	7	3	20	21
4	6	4	20	24
5	5	5	20	25
6	4	6	20	24
7	3	7	20	21
8	2	8	20	16
9	1	9	20	9

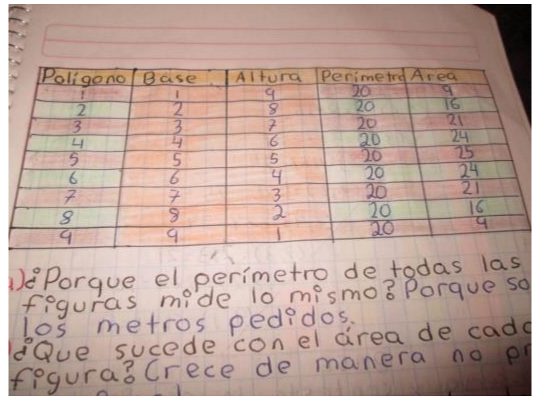


Figura 8. Datos del ancho del corral (base) y el área de la tabla No. 1.

SEGUNDA FASE: TRABAJO EN EQUIPO

PROCESOS DE DISCUSIÓN Y VALIDACION

Se forman equipos de cuatro elementos y con la situación de aprendizaje discuten y analizan la gráfica, tratando de ubicar el corral de mayor área en los puntos que forman la parábola de la expresión $y=-x^2 + 10x$. Figura 9.

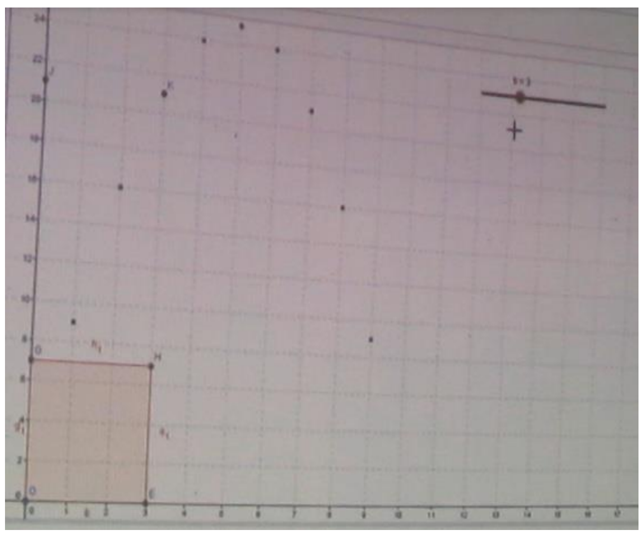


Figura 9. Corral de mayor área y la parábola $y=-x^2 + 10x$.

TERCERA FASE: TRABAJO EN EQUIPO DEBATE.

PROCESOS DE DISCUSIÓN Y VALIDACION.

Los alumnos discuten y debaten los datos del área con respecto a la base y como se entiende la relación de las áreas y su crecimiento no lineal.

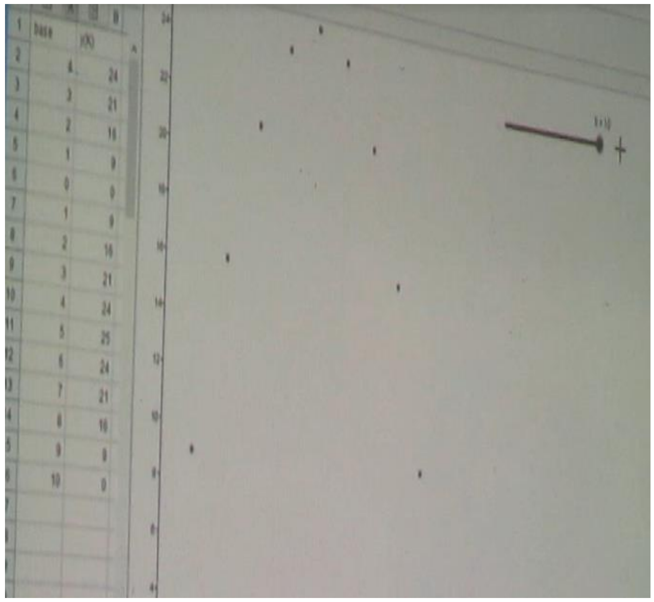
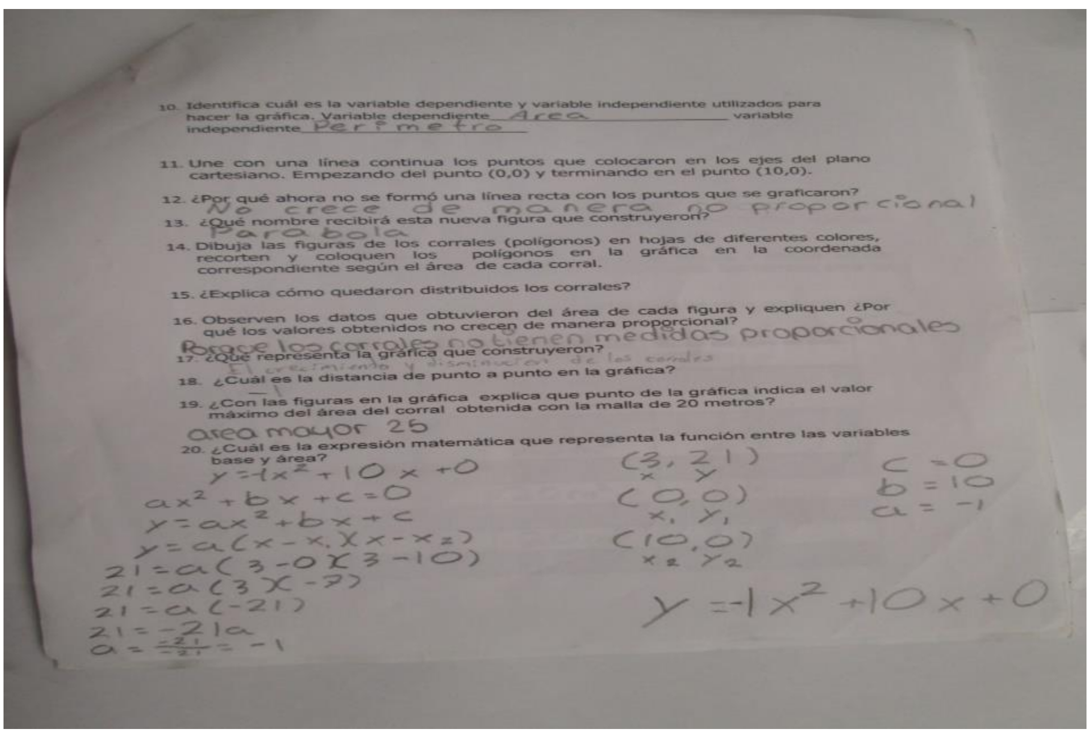


Figura 10. Relación de las áreas y su crecimiento no lineal.

CUARTA FASE: TRABAJO INDIVIDUAL.

RECONSTRUCCION Y AUTOREFLEXION.



10. Identifica cuál es la variable dependiente y variable independiente utilizados para hacer la gráfica. Variable dependiente Area variable independiente Perímetro

11. Une con una línea continua los puntos que colocaron en los ejes del plano cartesiano. Empezando del punto (0,0) y terminando en el punto (10,0).

12. ¿Por qué ahora no se formó una línea recta con los puntos que se graficaron?
No crece de manera no proporcional

13. ¿Qué nombre recibirá esta nueva figura que construyeron?
Parabola

14. Dibuja las figuras de los corrales (polígonos) en hojas de diferentes colores, recorten y coloquen los polígonos en la gráfica en la coordenada correspondiente según el área de cada corral.

15. ¿Explica cómo quedaron distribuidos los corrales?

16. Observen los datos que obtuvieron del área de cada figura y expliquen ¿Por qué los valores obtenidos no crecen de manera proporcional?
Porqe los corrales no tienen medidas proporcionales

17. ¿Qué representa la gráfica que construyeron?
El crecimiento y disminucion de los corrales

18. ¿Cuál es la distancia de punto a punto en la gráfica?
−1

19. ¿Con las figuras en la gráfica explica que punto de la gráfica indica el valor máximo del área del corral obtenida con la malla de 20 metros?
area mayor 25

20. ¿Cuál es la expresión matemática que representa la función entre las variables base y área?

$y = -1x^2 + 10x + 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$y = ax^2 + bx + c$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$21 = a(3 - 0)(3 - 10)$

$21 = a(3)(-7)$

$21 = a(-21)$

$21 = -21a$

$a = \frac{-21}{-21} = -1$

$(3, 21)$ x y

$(0, 0)$ x_1 y_1

$(10, 0)$ x_2 y_2

$c = 0$

$b = 10$

$a = -1$

$y = -1x^2 + 10x + 0$

Figura 11. Hoja de trabajo.

QUINTA FASE: INSTITUCIONALIZACION

INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO.

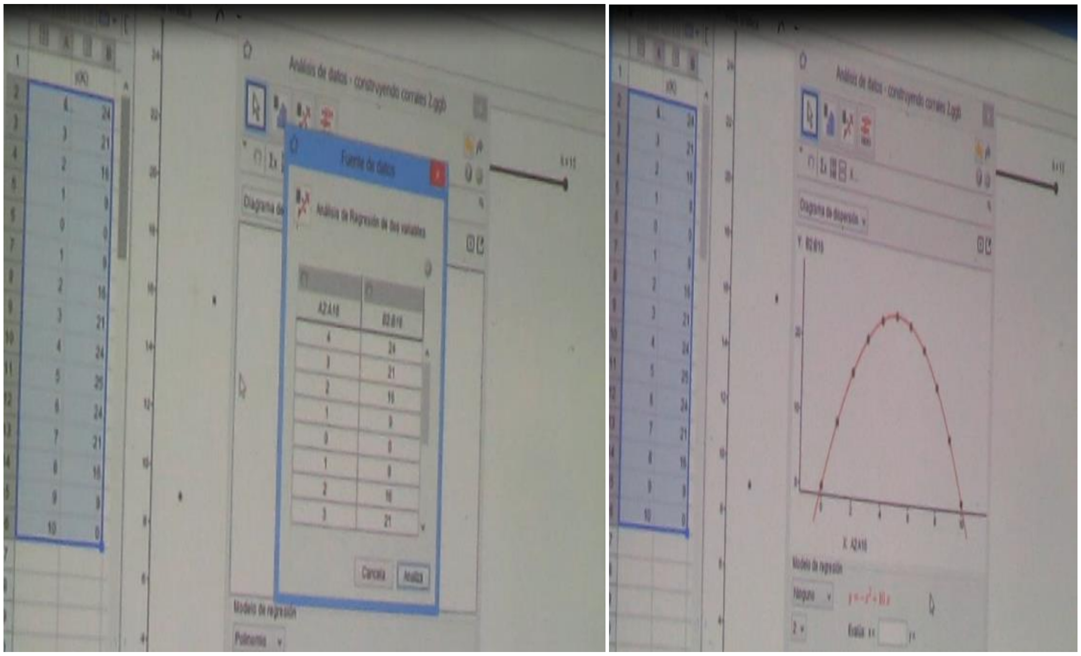


Figura 12. Representación en GeoGebra.

Conclusiones

El trabajar con esta propuesta de intervención pedagógica nos permite reconocer la importancia de diseño de situaciones de aprendizaje en la construcción de la noción de función lineal y cuadrática haciendo uso de software de GeoGebra.

En el desarrollo de las diferentes fases de la investigación se logra el desarrollo en los alumnos habilidades y conocimientos en la aplicación de ecuaciones lineales y cuadráticas en diferentes situaciones de la vida cotidiana en que se desarrollan los alumnos.

El uso de GeoGebra para construir actividades que permiten a los alumnos el análisis, la reflexión y la construcción de conceptos a partir de poder manipular las variables que conforman el problema, el poder manipular las variables ancho y largo de los corrales, observando su comportamiento en la visualización gráfica el comportamiento de la relación de dos variables.

En la actividad de ecuaciones lineales los alumnos construyen la noción de función “como la relación de dependencia de dos variables, donde el valor de la variable dependiente depende del valor de la variable independiente” textualmemte los alumnos plantean que cuando una variable ancho disminuye la variable lagor aumenta de manera directamente proproporcional.

En la actividad de funciones cuadráticas los alumnos pueden observar con claridad cual es la figura de mayor área que unas de las interrogantes del problema inicial ya que la figura queda en la parte más alta de la parábola es el punto más de la gráfica,

La modelación de la función $y = -x + 10$ que representa la variación directamente proporcional permite a los alumnos construir la noción del concepto de función en donde a traves de la relación de la bariable base van observando como crece o disminuye la variable altura.

La modelación de la función $y = -x^2 + 10x$ que representa la variación no proporcional, permitió a los alumnos observar que no todas las variables crecen de manera proporcional, como en este caso la variable área no crece uno a uno en la relación con la variable base. Arturo uno de los alumnos describe que las variables se estan comportando de una forma curiosa, por la forma en que va creciendo el área de los corrales, de esta forma los alumnos construyen la noción del concepto de función cuadrática.

La importancia del uso de GeoGebra en la construcción de la noción de función, el uso de GeoGebra permite tener una visualización del comportamiento de las variables, de tal forma que se puede apreciar como se transforman los corrales, primero cuando se relacionan las variables base y altura o ancho y largo de los corrales, se observa con gran claridad que si la base aumenta uno la altura disminuye uno o cuando la altura aumenta uno la base dismininuye, de aquí que la pendiente de la función que modela este comportamiento sea negativa.

Destacar como los alumnos antes construir la noción de función hace uso e interpretación de tablas, la representación de problema a partir de graficas y la modelación del problema pasando de un lenguaje común a un lenguaje algebraico hasta costruir la noción de función linal y cuadrática. Primero mostras las nociones construidas para funcion lineal.

Cuando un dato depende de otro, en este caso la altura depende de la base, si la base cambia uno la altura cambia uno.

Es la relación de dos variables donde el valor de la variable dependiente altura como su nombre lo dice depende del comportamiento de la variable independiente llamada base.

Función es la relación de la base y la altura o la relación de dos variables.

En seguida se presenta la noción de función cuadrática.

Porque las variables que se están relacionando no crecen de manera proporcional, lo anterior quiere decir que cuando la base aumenta una unidad el área crece más que una unidad, esto se debe que cambia la forma de las figuras por eso cambia de manera no proporcional su área.

La noción de función cuadrática es la relación de dos variables una de ellas llamada variable independiente la cual determina los valores de la variable dependiente los cuales no crecen de manera proporcional, lo cual quiere decir que si la base aumenta uno la variable área no aumenta uno.

Alcances de la propuesta es de gran importancia que los alumnos de secundaria desarrollen habilidades para construir conceptos, así como la noción de función, la cual es la preparación para que los alumnos trabajen funciones y limites, calculo integral y calculo diferencial en la educación medio superior y superior.

En la educación secundaria es de gran importancia que los alumnos aprendan a interpretar y comprender el lenguaje común o los enunciados de los problemas para convertirlos y transfórmalos en lenguajes matemáticos que van desde un lenguaje aritmético, geométrico hasta llegar al lenguaje algebraico el cual de manera más abstracta representa situaciones de la vida cotidiana en expresiones algebraicas, ecuaciones lineales y cuadráticas.

Bibliografía

Astorga, A. y Der, B. (1991). *Manual de diagnóstico participativo*. 2da. Edición. Buenos Aires: Humanitas. CEDEPO,

Ausubel, D., Novak, J., Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. México: Ed. TRILLAS

Duval, R. (1993). Registres de representation sémiotiqueet functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactiqueet de Science Cognitives. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 37-65). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (1994). Visualization, anchorage, availability and natural image: polygonal numbers in computer environments. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 25, No. 3, 447-455.

Hitt, F. & Cortés, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación et Internet*, 10(1), 1-30.

Meece, J. (2000). Desarrollo del niño y del adolescente. *Compendio para educadores, SEP*. pág. 101-127. México, D. F.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2019

ISSN: 2395-955X

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON GEOGEBRA

DIDACTICS SEQUENCE FOR LEARNING OF LINEAR EQUATIONS SYSTEMS WITH GEOGEBRA

Edson Gilberto Pérez Pérez, Verónica Vargas Alejo

edzoon@hotmail.com, veronica.vargas@academicos.udg.mx

CUCEI, Universidad de Guadalajara, México

Para citar este artículo:

Pérez, E. G., Vargas, V. (2019). Secuencia didáctica para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con GeoGebra. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 2, pp. 88-97. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 2, julio-diciembre de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON GEOGEBRA

DIDACTICS SEQUENCE FOR LEARNING OF LINEAR EQUATIONS SYSTEMS WITH GEOGEBRA

Edson Gilberto Pérez Pérez, Verónica Vargas Alejo

edzoon@hotmail.com, veronica.vargas@academicos.udg.mx

CUCEI, Universidad de Guadalajara, México

Resumen

En este artículo se presentan resultados de una investigación relacionada con el aprendizaje de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) para estudiantes de bachillerato. En particular, se describe una secuencia didáctica, basada en la teoría de registros de representación semiótica de Duval y el uso de GeoGebra. La secuencia es el resultado de versiones anteriores, modificadas, ampliadas y refinadas al implementarlas con estudiantes, primero de nivel superior y, posteriormente, de nivel bachillerato. Se compone por applets y hojas de trabajo. Encontramos que aprender SEL implica el uso de diferentes registros de representación asociados con un conjunto de conceptos matemáticos como función, variación, ecuación, incógnita y solución. El uso del software dinámico como GeoGebra se consideró importante porque apoya el aprendizaje de conceptos como variación y función lineal.

Palabras clave: Sistemas de ecuaciones lineales, GeoGebra, solución, estudiantes de bachillerato.

Abstract

In this article we present the findings of a research related to the learning of systems of linear equations for high school students. In particular, a didactic sequence is described, based on Duval's semiotic representations theory and the use of GeoGebra. The sequence is the result of previous versions, modified, extended and refined when it was implemented with undergraduated and high school students. It consists of applets and worksheets. We found that learning SEL involves the use of different representation registers associated with a set of mathematical concepts such as function, variation, equation, unknown and solution. The use of dynamic software such as GeoGebra was considered important because it support the knowledge about the concepts of variation and linear function.

Keywords: Systems of linear equations, GeoGebra, Solution, High school students.

Introducción

En la literatura de investigación internacional (DeVries y Arnon, 2004; Ochoviet, 2009; Segura, 2004) se menciona que los estudiantes de nivel medio superior tienen dificultades con la comprensión del concepto de sistemas de ecuaciones lineales [SEL] y de solución de un SEL. Por ejemplo, los alumnos interpretan que un SEL 2x2, consistente determinado, tiene dos soluciones, en lugar de interpretar al par ordenado (x, y) como la solución; se observa que los estudiantes generalizan aspectos como este, que han construido en el ámbito de los sistemas 2x2, a sistemas 3x3 y reportan que existen SEL 3x3 con tres soluciones relacionadas con el número de variables involucradas. Algunas de estas dificultades están relacionadas con el proceso de enseñanza y la forma tradicional algorítmica como se trabaja el tema en el aula. ¿Cómo apoyar el aprendizaje de SEL por estudiantes de bachillerato?

Existen estudios (Haspekian, 2005; Kieran, 2006; Sutherland y Rojano, 1993; Vargas-Alejo y Guzmán-Hernández, 2012) cuyos resultados muestran que el uso de la tecnología puede apoyar el aprendizaje de SEL y proponen que se realice más investigación que permita proponer el diseño de secuencias didácticas para apoyar con soluciones a la problemática del nivel medio superior en cuanto al aprendizaje del concepto de sistemas de ecuaciones lineales, con apoyo de tecnología. En particular, se necesitan investigaciones apoyadas en resultados de estudios vigentes (García e Izquierdo, 2017), como las que señalan que el software dinámico, como GeoGebra, tiene potencial para apoyar la comprensión de conceptos como variable, función y ecuación, a través del uso de varios registros de representación. ¿Cómo debe diseñarse una secuencia didáctica, basada en GeoGebra, para apoyar el aprendizaje de SEL?

En este artículo se propone y analiza una secuencia didáctica, la cual se sustenta en el uso de representaciones semióticas (Duval, 1993, 1999) y GeoGebra para apoyar el aprendizaje de SEL. El diseño de la secuencia didáctica es parte de una investigación en proceso cuyo objetivo es conocer las dificultades de aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 por estudiantes de nivel bachillerato y apoyar este aprendizaje, mediante el uso de representaciones gráficas, verbales y de la integración de conceptos relacionados como función, ecuación y variación.

Marco Teórico

Un marco teórico que aportó elementos a esta investigación y, por lo tanto, al diseño de la secuencia didáctica es la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1993, 1999). En ella –la teoría– se reitera que para aprender un concepto matemático los estudiantes deben utilizar varios registros de representación y desarrollar habilidades para cambiar de un registro a otro. Duval (1993) afirma que el proceso de comprensión de un concepto matemático implica la coordinación de diversos registros de representación semiótica como lenguaje natural, gráficas, tablas de datos, expresiones algebraicas y representaciones icónicas.

En un análisis cognitivo de dificultades de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas, Duval (2006a) resalta los retos que representa la educación para preparar mejores estudiantes, que hoy se enfrentan a un entorno tecnológico: “los procesos de adquisición de conocimiento matemático son tan complejos que parece ser necesario tener diferentes enfoques” (p.103). Los enfoques a los que se refiere Duval (*ibid*), son las diferentes representaciones que puede tener un objeto matemático.

Para Duval el aprendizaje de las matemáticas requiere un análisis de las actividades cognitivas como son: la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión. Enseñar y aprender matemáticas, requiere de estas actividades cognitivas, además del lenguaje natural y simbólico, y de la utilización de diferentes registros de representación. La actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación. No se puede aprender un concepto matemático sin pasar por el necesario *tratamiento* y *conversión* de diferentes registros de representación semiótica (Duval, 2006b). De acuerdo con esta teoría aprender sistemas de ecuaciones lineales y el concepto de solución implicaría el tratamiento y conversión de distintas representaciones por los estudiantes, lo cual es un elemento esencial considerado en la investigación cuya secuencia didáctica se describe en este artículo.

Por otra parte, GeoGebra es un software de carácter dinámico, que posibilita el uso de diferentes registros de representación semiótica. Se pueden construir applets que apoyen el uso simultáneo de estos por los estudiantes. Además, es una de las herramientas tecnológicas que se sugiere utilizar (García e Izquierdo, 2017; Iranzo y Fortuny, 2009; Tamayo, 2013) para apoyar el aprendizaje de SEL. Pero ¿qué significa aprender SEL? ¿En qué conceptos se debe hacer énfasis al utilizar las distintas representaciones?

De acuerdo con Ochoviet (2009) los alumnos que logran tener éxito al interpretar el número de soluciones de un SEL, son aquellos que han logrado construir la noción de solución a partir de representaciones gráficas asociadas con las representaciones algebraicas. Esta investigadora recomienda que los estudiantes analicen primero un SEL 1X2, es decir, la ecuación lineal con dos incógnitas, lo que representan estas incógnitas, y las soluciones de la misma; hacer énfasis (mediante el uso de distintas representaciones) en que la ecuación lineal tiene una cantidad infinita de soluciones y cada pareja ordenada es una solución y no dos soluciones.

Por otra parte, Greeno (1991) menciona que un concepto no se puede aprender de manera aislada a otros conceptos, incluso a fenómenos y procesos relacionados. Esto nos conduce a observar que aprender sistemas de ecuaciones lineales implica aprender conceptos como ecuación lineal, incógnita, variación, función lineal y solución, en el marco de problemas que requieran el uso de este conocimiento matemático.

Metodología

La población para la cual se diseñó la secuencia didáctica son estudiantes de nivel bachillerato, con una edad aproximada de dieciséis años. En particular, se pensó en los alumnos que se encuentren estudiando la materia "Matemática y vida cotidiana II" de segundo semestre de bachillerato de la universidad de Guadalajara.

La secuencia didáctica se elaboró en el ambiente de GeoGebra, por el carácter dinámico de la herramienta ya que permite interactuar, no sólo con distintas representaciones semióticas, sino con conceptos como función, ecuación y variación. Se compone de actividades que se deben resolver con applets (figuras 1-4), y tiene como propósito propiciar que el alumno aprenda los diferentes conceptos asociados con sistemas de ecuaciones lineales: como son variable, función lineal, incógnita, ecuación lineal y solución. Todas las actividades se incluyen en hojas de trabajo que acompañan a cada applet. La secuencia está diseñada con base en la teoría de representaciones semióticas de Duval (1993, 1999, 2006a, 2006b). Las actividades requieren que, al resolverlas, el alumno interactúe con diferentes registros de representación (verbal, gráfico y simbólico), de manera que ello le permita comprender e integrar los conceptos matemáticos involucrados durante procesos de *tratamiento* y *conversión* (Duval, 2006).

La secuencia se diseñó para implementarse en 6 sesiones. Los conceptos matemáticos que se abordan se describen a continuación sesión por sesión. Se tomaron en cuenta elementos identificados en el marco teórico por Duval (2006) y Ochoviet (2009).

Sesión 1	Identificación de conocimientos previos.
Sesión 2	Resolución de un problema que implica la interacción con un Applet (Figura 1) que involucra los conceptos: ecuación lineal de dos variables, solución, función lineal y variación. Coincidimos con Ochoviet (2009) en que es importante introducir actividades que impliquen la solución de una ecuación lineal de dos variables, previo a la introducción de un SEL 2x2.
Sesión 3	Realización de actividades que implican la interacción con un Applet (Figura 2) que incluye representaciones de ecuaciones lineales de dos variables equivalentes.
Sesión 4	Realización de actividades que implican la interacción con un Applet (Figura 3) que promueve que el alumno construya SEL y analice cuándo un SEL es consistente o inconsistente, determinado o indeterminado.
Sesión 5	Resolución de un problema, que implica utilizar lo aprendido mediante el uso de un Applet (Figura 4), el cual involucra los conceptos de variación, función lineal, ecuación lineal, incógnita y solución del SEL 2x2 y mx2. Coincidimos con Ochoviet (2009) en que es importante apoyar el proceso de transferencia del conocimiento aprendido relacionado con solución de un SEL 2x2.
Sesión 6	Evaluación de los conocimientos adquiridos.

Los applets diseñados fueron introducidos en cada una de las sesiones, las cuales se describen a continuación.

Sesión 1. Los objetivos son: a) conocer los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre sistemas de ecuaciones lineales (SEL) y conceptos relacionados como variable, función lineal, ecuación lineal, incógnita y solución; b) detectar las dificultades que los alumnos tienen con el uso de estos conceptos y los registros de representación semiótica.

Sesión 2. Se solicita que el estudiante resuelva un problema (Figura 1) que involucra los conceptos: variación, ecuación lineal de dos variables, solución y función lineal. Ello implica que identifique datos, incógnitas y relaciones entre estos. Se propicia que el estudiante trabaje en la *conversión* de diferentes registros de representación semiótica (lenguaje natural, lenguaje algebraico, representación tabular y representación gráfica) e identifique que una ecuación lineal de dos variables tiene infinitas soluciones. Este applet, así como los que se describen en las siguientes sesiones, se acompañan de hojas de trabajo que contienen actividades a realizar con cada applet.

El profesor debe enfatizar en la importancia del *tratamiento* (Duval, 2006) que se le debe dar a la ecuación lineal para expresarla como una función, así como en la *conversión* (Duval, 2006) de las diferentes formas de representación para encontrar la solución de la ecuación lineal de dos variables. El papel del applet construido con GeoGebra es apoyar el proceso de solución y la *conversión* de registros. En la hoja de trabajo aparece una familia de problemas relacionadas con el problema inicial; cambian los datos y se pide al estudiante resolver de nuevo.

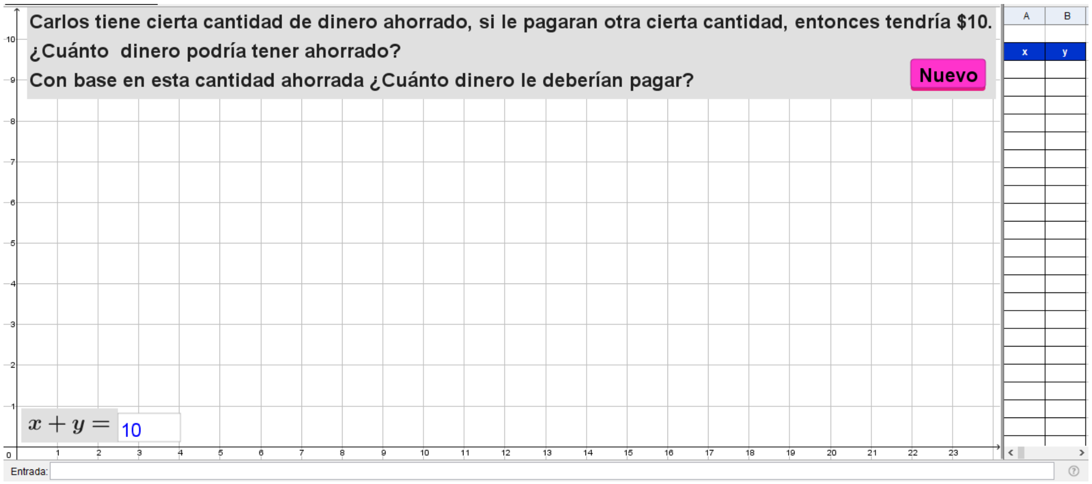


Figura 1. Applet de GeoGebra de la Sesión 2.

Sesión 3. Se propicia que el estudiante retome la representación algebraica de la ecuación lineal proveniente del applet anterior (Figura 1, Sesión 2); obtenga ecuaciones equivalentes y reconozca cuando una ecuación es múltiplo de la otra. Con esta actividad (Figura 2) se busca que el alumno comprenda el concepto de ecuaciones lineales equivalentes. Los estudiantes representarán las ecuaciones lineales mediante los registros: algebraico, gráfico y tabular; conjeturarán y explicarán la construcción de ecuaciones equivalentes.

El profesor deberá enfatizar que la representación gráfica de ecuaciones equivalentes es la misma recta, este conocimiento le servirá como base para la siguiente Sesión 4, donde se trabajará el concepto de SEL. El papel del applet construido con GeoGebra es facilitar el cálculo de múltiplos y divisores de una ecuación lineal de dos incógnitas (*tratamiento*) para que el alumno no realice estos cálculos manualmente y se concentre en el razonamiento asociado con la *conversión* de registros.

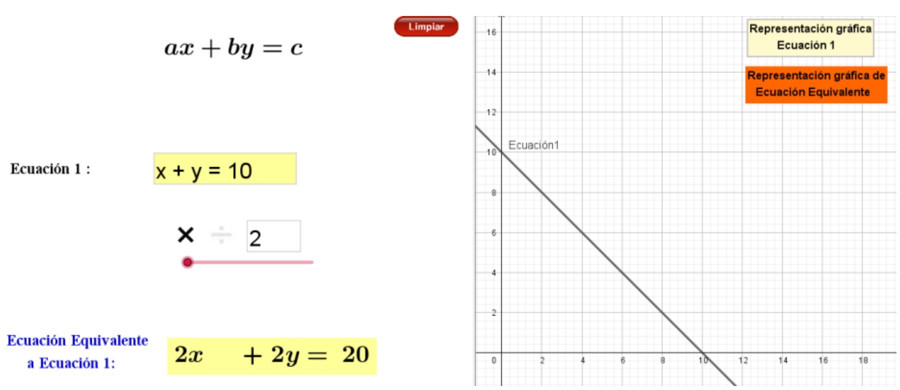


Figura 2. Applet de GeoGebra de la Sesión 3.

Sesión 4. Dado un SEL 2x2, el estudiante manipulará los coeficientes de las variables para crear sistemas de ecuaciones lineales consistentes (determinados e indeterminados) e inconsistentes (Figura 3). El estudiante identificará las posibles soluciones que tiene un SEL: infinitas soluciones, sin solución y solución única. El estudiante resolverá el SEL utilizando registros de representación: algebraico gráfico y tabular, apoyado por el proceso de *conversión*. Se espera que el estudiante profundice en los conceptos: sistemas de ecuaciones lineales 2x2, solución, variación y función lineal.

El profesor debe enfatizar los diferentes tipos de solución de un SEL: infinitas soluciones, sin solución y solución única. El papel del applet construido con GeoGebra es apoyar al estudiante a manipular los coeficientes de las ecuaciones lineales, la *conversión* de registros y la identificación de diferentes tipos de solución.

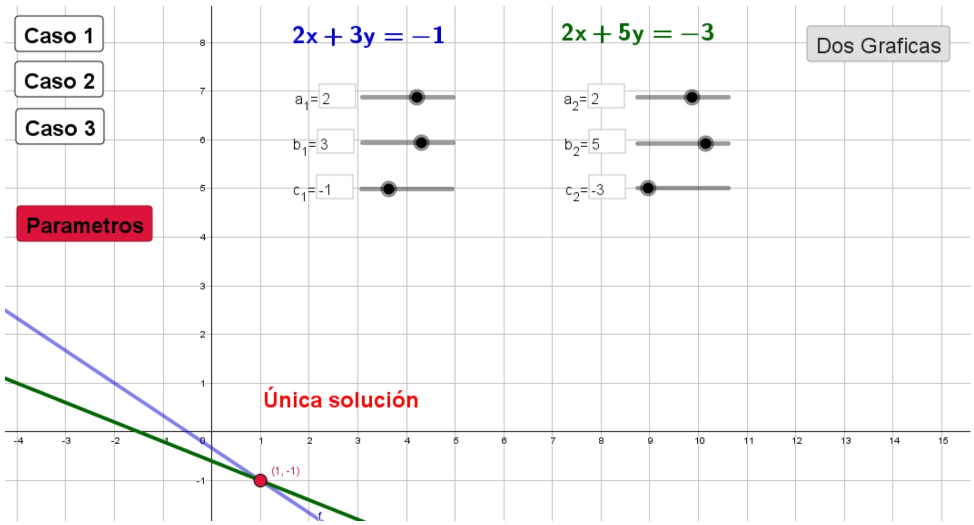


Figura 2. Applet de GeoGebra de la Sesión 4.

Sesión 5. Se solicita al estudiante resolver un problema que involucra: sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Los conceptos que el estudiante requiere utilizar, son los vistos a lo largo de la secuencia didáctica: variación, ecuación lineal de dos variables, función lineal, SEL 2x2 y solución, así como procesos de *conversión*. El estudiante deberá identificar datos, incógnitas y las relaciones entre estos, con el fin de solucionar el problema que se modela mediante un SEL, así como deberán utilizar registros de representación gráfica. Una vez que el estudiante resuelva el problema, se propiciará que transfiera su conocimiento para la resolución de SEL mx2.

El profesor debe enfatizar en el concepto de solución de un SEL 2x2 y SEL mx2. El papel del applet es servir al estudiante de apoyo para la comprensión del problema y del concepto solución de un SEL. Puede usarse para que el estudiante incorpore y represente SEL mx2.

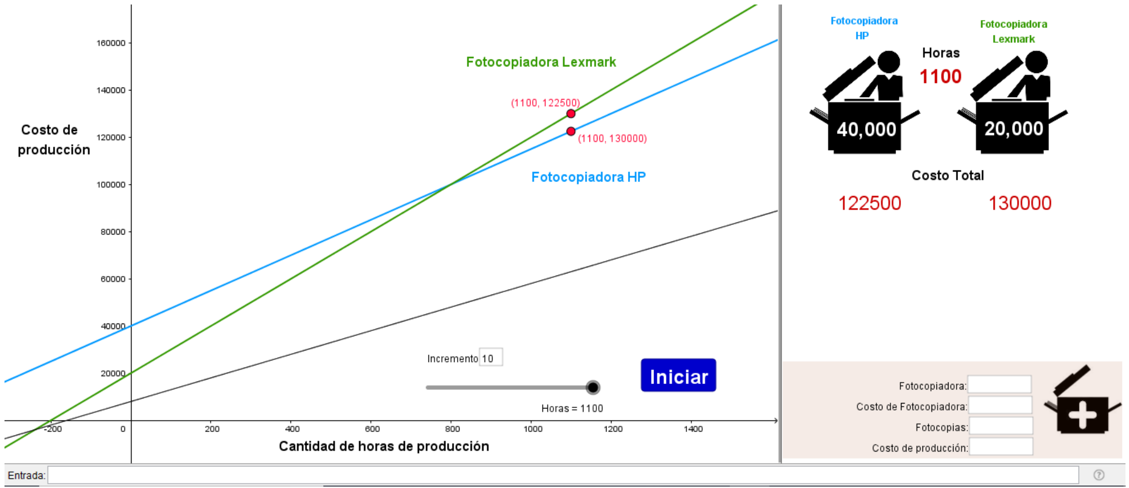


Figura 4. Applet de GeoGebra de la Sesión 5

Sesión 6. Los objetivos son: a) evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes sobre sistemas de ecuaciones lineales (SEL) y conceptos relacionados como variable, función lineal, ecuación lineal y solución, y b) determinar el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje establecidos para cada actividad.

Se propone que la secuencia se desarrolle en un ambiente colaborativo de aprendizaje, donde se propicie el trabajo en binas o equipo, durante la resolución de cada actividad planteada en las hojas de trabajo. Es importante, de acuerdo con ambientes de resolución de problemas (Santos, 2014), que los estudiantes interactúen con sus pares. La formulación de conjeturas, argumentación, comunicación de procedimientos permite que los estudiantes aprendan conceptos matemáticos. Se propone que al final de cada sesión se pase al frente a los estudiantes para que argumenten la solución encontrada. El papel del profesor debería ser de guía y apoyo en la institucionalización del conocimiento, para que el estudiante se apropie del objeto matemático.

Resultados

La secuencia descrita en este artículo, es el resultado de la modificación de dos versiones previas, las cuales fueron aplicadas en fase piloto a distintos estudiantes, primero a uno de nivel universitario y, posteriormente, a dos estudiantes de bachillerato. La primera versión no incluía los applets de las figuras 2 y 3, sino que sólo se componía por los applets de las figuras 1 y 4. En cada applet sólo se incorporaba un problema y no una familia de problemas como en la versión final. El estudiante de nivel universitario, a pesar de conocer el uso de GeoGebra, no pudo resolver el problema diseñado para el applet de la Figura 4, sólo resolvió el problema relacionadas con el applet de la Figura 1. Evidenció dificultades relacionadas con la comprensión de sistemas de ecuaciones lineales, al no poder asociarlo a la solución del problema, aún cuando el SEL se mostraba en forma gráfica en el applet.

Lo anterior implicó profundizar en la lectura de investigación para mejorar la secuencia didáctica. La segunda implementación consistió en el empleo de los cuatro applets en el orden aquí descrito. Sin embargo, las estudiantes no pudieron resolver las actividades, sin ayuda del docente. Esto implicó que se trabajara con más profundidad en las hojas de trabajo. Se buscó que fueran más detalladas en cuanto a las instrucciones y las actividades propuestas en ellas. Se mejoraron las instrucciones y presentación de cada applet y, finalmente, se obtuvo la secuencia que en este artículo se describe.

Actualmente, se encuentra en proceso la implementación de esta secuencia didáctica en su tercera versión. Se espera logar los objetivos de aprendizaje planteados y que los estudiantes, a través de la secuencia didáctica, utilicen y transiten entre los diferentes registros de representación semiótica con el apoyo de GeoGebra, dando significado a los conceptos matemáticos involucrados.

Conclusiones

La comprensión conceptual matemática de los estudiantes, de acuerdo con Duval, implica poder reconocer lo invariante entre distintos registros de representación semiótica. En este caso el alumno debería reconocer la solución o no solución de un sistema de ecuaciones lineales. La facilidad que adquieran los estudiantes en el tratamiento y conversión de registros es importante, así como en el manejo de conceptos como función lineal, variación, ecuación lineal, incógnita y solución de un SEL. Consideramos que la secuencia didáctica descrita y construida con base en el marco teórico señalado puede apoyar el desarrollo de conocimiento, es decir, la modificiacion, extensión y refinamiento del conocimiento de los estudiantes de bachillerato.

Referencias

DeVries, D., & Arnon, I. (2004). Solution- What does it mean? Helping Linear Algebra Students Develop the Concept While Improving Research Tools. Proceedings of the 28th *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 55-62.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *In Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*(1), 37-65.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Psychology of Mathematics Education – North America*, *21*(2), 3-26.

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.

García, J. G., & Izquierdo, S. J. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad*, *4*(7), 10-14.

Greeno, J. G., Collins, A. M., & Resnick, L. B. (1996). Cognition and Learning. In D. C. Berliner & R. C. Calfee, (Eds.), Handbook of Educational Psychology. New York: Macmillan.

Haspekian, M. (2005). Integration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathematiques, etude du cas des tableurs. Université Paris-Diderot.

Iranzo, D., N., & Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(3), 433-446.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the psychology of mathematics education* (p. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Ochoviet, C. (2009). Sobre la entrada al álgebra lineal en el nivel medio: El caso de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis de Doctorado. Cinvestav-IPN, Unidad Legaria. Montevideo, Uruguay.

Santos, L. M. (2014). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. México: Trillas.

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* (Relime). *7*(1), 49-78.

Sutherland, R., & Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 12*(4), 353-383.

Tamayo, E. (2013). Implicaciones didácticas de Geogebra sobre el aprendizaje significativo de los tipos de funciones en estudiantes de secundaria. *Apertura,* 58-69.

Vargas-Alejo, V., & Guzmán-Hernández, J. (2012). Valor pragmático y epistémico de técnicas en la resolución de problemas verbales algebraicos en ambiente de hoja de cálculo. *Enseñanza de las ciencias, 30*(3), 89-107.