REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen VII Número 1 Fecha: enero-junio de 2019

ISSN: 2395-955X

Contenido Pag.

Revista AMIUTEM, Año VI No. 1, Enero-Junio 2018, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 28 de Diciembre de 2016.

COMITÉ DE EVALUACIÓN

Felipe Santoyo Telles
Centro Universitario del Sur

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 1 Fecha: enero-junio de 2019

ISSN: 2395-955X

ANÁLISIS DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO RELACIÓN FUNCIONAL DESDE APOE

César Fabián Romero Félix

cesar.romero@unison.mx

Universidad de Sonora

Para citar este artículo:

Romero, C. (2019). Análisis del concepto de función como relación funcional desde APOE. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 1, pp. 1-16. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 1, enero-junio de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

ANÁLISIS DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO RELACIÓN FUNCIONAL DESDE APOE

César Fabián Romero Félix

cesar.romero@unison.mx

Universidad de Sonora

Palabras clave: Cálculo, Función, Teoría APOE, Representaciones semióticas

Resumen

En el presente trabajo se plantea como concepción ideal la función como *objeto* a la asociada a la definición como *relación funcional* y como ésta podría construirse de manera que incluya a otros significados. A partir de exploraciones apoyadas en ambientes dinámicos, realizadas con estudiantes de ciencias aplicadas en cursos de cálculo diferencial e integral, se presentan descripciones de las *concepciones* y *mecanismos mentales* previstos a partir del análisis del desarrollo del concepto de función. Lo anterior, partiendo de los resultados de investigaciones previas y de la hipótesis de que la articulación de registros de representación implica la coordinación de estructuras mentales correspondientes a cada registro. Es decir que, para lograr construcciones mentales universales, utilizables en diversos contextos semióticos, se requieren mecanismos mentales específicos aplicados sobre construcciones previas dependientes de registros particulares.

Key Words: Calculus, Function, APOS theory, Semiotic representations

Abstract

This paper presents the definition of function as a *relation* associated with the ideal conception of function as an object, and it is proposed to be constructed in a way that it includes other meanings of function. From explorations with students of applied sciences in courses of differential and integral calculus, supported in dynamic environments, descriptions of the conceptions and mechanisms foreseen from the analysis of the development of the concept of function are presented. This, based on the results of previous research and the hypothesis that the articulation of registers of semiotic representation requires the coordination of mental structures corresponding to each record. That is to say, in order to achieve universal constructions, usable in diverse semiotic contexts, specific mental mechanisms applied to previous constructions dependent on particular registers are required.

Introducción

El concepto de función es uno de los más estudiados dentro de la problemática del aprendizaje matemático. Su presencia en prácticamente todas las carreras de ciencias exactas y aplicadas demanda atención prioritaria a las dificultades de su enseñanza y aprendizaje. Aunque, se tienen ya significativos avances en la comprensión del desarrollo cognitivo de este concepto, aún no se tienen resultados contundentes que minimicen las dificultades de aprendizaje.

Las investigaciones sobre el aprendizaje del cálculo desde el punto de vista del desarrollo cognitivo, son guiadas principalmente (Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces & Törner, 2016) por los enfoques de *Concept Image and Concept Definition* (Vinner & Tall, 1981); la teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 1999); la teoría APOE como siglas de las construcciones mentales referidas: *Acción*, *Proceso*, *Objeto* y *Esquema* (Dubinsky,1991) y *The Three Worlds of Mathematics* (Tall, 2002). Ya que este trabajo se apoya principalmente en el marco de la teoría APOE (Arnon *et al*., 2014), resaltamos que el concepto de función es utilizado comúnmente en las descripciones de la teoría como el ejemplo más claro donde se pueden observar las distintas estructuras mentales. Sin embargo, no encontramos una investigación que muestre situaciones de aprendizaje para el desarrollo ideal de este concepto desde dicha teoría. En las publicaciones consultadas, se parte del análisis de la complejidad de la concepción del proceso de función (Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992; Dubinsky & Harel, 1992) para estudiar temas posteriores al de función, como sus límites (Maharaj, 2010); el papel de las representaciones gráficas en el aprendizaje de funciones de dos variables (Trigueros & Martínez-Planell, 2010); o la complejidad de los esquemas asociados a la función (Trigueros, 2005; Cooley, Trigueros & Baker, 2007). Aun así, no se han terminado de aclarar las causas de las dificultades de aprendizaje, ni los requerimientos para una enseñanza que promueva el desarrollo ideal del concepto de función.

Por otro lado, se ha estudiado la misma problemática desde el punto de vista de articulación de representaciones y se siguen generando estudios que muestran deficiencias en cuanto a las habilidades para usar distintas representaciones o para transitar entre ellas (ver por ejemplo, Prada, Hernández & Jaimes, 2017). Las consecuencias negativas previstas en la teoría de Duval (1999) han sido ampliamente confirmadas, sin embargo, no son tan claros ni contundentes los esfuerzos para contrarrestar los efectos de la falta de articulación de registros. En algunos casos, parece reducirse el problema a tal habilidad, pero consideramos que debe mantenerse, como mencionó Duval, como una condición necesaria. Se resalta aquí, que es sólo *una* de las condiciones necesarias que se han encontrado en el campo de la investigación educativa; se plantea entonces la necesidad de articularla con las encontradas desde otros marcos, específicamente con los resultados de APOE.

Teoría APOE

Esta teoría estudia las concepciones logradas a través de la abstracción reflexiva, idea que surge de Piaget, quien la identificaba como:

> El principal mecanismo para las construcciones mentales en el desarrollo del pensamiento y [al mismo tiempo] el mecanismo mental por medio del cual todas las estructuras lógico-matemáticas son desarrolladas en la mente de un individuo (visto en Arnon *et al*., 2014, p. 6).

Por tal razón, éste es el tipo de abstracción que se debería buscar en el aprendizaje de las matemáticas, pero no es el único posible. Piaget describía también abstracciones empíricas y pseudo-empíricas. Las diferencias entre los tres tipos de abstracción se pueden describir en términos de la actividad de los sujetos: la abstracción empírica genera conocimiento a partir de la observación de objetos externos, como la idea de color o peso que se obtienen después de percibir a través de los sentidos esas características intrínsecas de los objetos; la abstracción pseudo-empírica va un paso más allá, después de actuar sobre los objetos el sujeto les atribuye propiedades que no eran originalmente parte de estos, como la cardinalidad de un conjunto obtenida tras la correspondencia uno a uno con elementos de otro conjunto que el sujeto ha ordenado; por último, la abstracción reflexiva consiste en la coordinación general de acciones, obtener propiedades a partir de acciones mentales o físicas, de manera consciente pudiendo incluir la separación entre la forma y el contenido, obteniendo así, cada vez abstracciones situadas en un plano superior del conocimiento (visto en Dubinsky, 1991, pp. 97-99).

La teoría APOE extiende el análisis de la abstracción reflexiva en el aprendizaje de las matemáticas, describiendo las etapas de conocimiento mencionadas por Piaget mediante las construcciones mentales que le dan nombre a la teoría: *Acción, Proceso, Objeto* y *Esquema*; describiendo además los mecanismos para desarrollar cada una de éstas. Dicha teoría, describe la construcción del conocimiento matemático, en términos generales, como una progresión de estructuras mentales lograda a través de los mecanismos de abstracción reflexiva. Las relaciones entre estas estructuras y mecanismos son representadas con el siguiente diagrama.

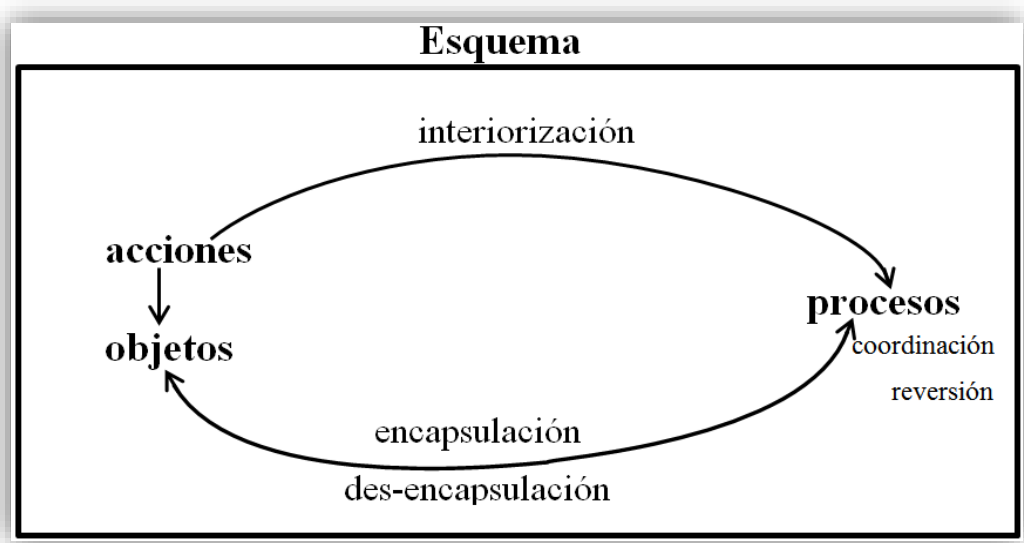


Figura 1. Estructuras mentales y mecanismos para la construcción de conocimiento matemático (Arnon *et al*., 2014, p. 18).

La teoría propone que el desarrollo de las construcciones mentales sigue un ciclo auto-retroalimentado, logrando con cada iteración concepciones de mayor complejidad y generalidad (Arnon et al., 2014. pp. 18-26). Se puede tomar como inicio del ciclo Acciones sobre Objetos ya existentes, éstas son realizadas de manera externa al sujeto manteniendo siempre los mismos pasos y en el mismo orden.

La manera inicial de desarrollar concepciones del Proceso es la interiorización de las Acciones. Teniendo una concepción del Proceso, dejan de ser necesarios los estímulos externos para poder realizar las Acciones y se obtiene también control interno sobre las partes de éstas; se pueden imaginar u omitir pasos y revertir el orden de éstos mentalmente. También, se pueden coordinar concepciones del Proceso para formar nuevos Procesos, por ejemplo, el Proceso de duplicación (multiplicar por dos) se puede coordinar con el Proceso de números naturales para obtener el Proceso de números pares.

Enfrentándose a la necesidad de aplicar Acciones a lo que se percibe como un Proceso, se inicia el mecanismo de *encapsulación*; con éste, los Procesos dejan de ser Acciones interiorizadas y llegan a ser entes por sí mismos: Objetos. Cuando se ve el Proceso como un todo, al cual se le pueden aplicar Acciones, y se construyen estas Acciones para aplicarlas de manera externa o mental, se dice que el Proceso ha sido encapsulado en un Objeto. Por ejemplo, para el caso de transformación lineal, la encapsulación permite realizar composiciones y también poder ver a las transformaciones como elementos de algún conjunto y con ello formar un espacio vectorial de transformaciones lineales entre otros dos espacios (Roa-Fuentes & Oktaç, 2012, p. 227).

Los mecanismos y construcciones mentales mencionados, son utilizados para plantear posibles caminos específicos de la construcción mental de conceptos matemáticos. Tomando como prerrequisito algunas construcciones mentales se propone una progresión de procedimientos de abstracción reflexiva, por ejemplo, una iteración del ciclo de la Figura 1, con los que se podría llegar a la concepción deseada.

Elementos de la teoría de representaciones semióticas

La teoría de Duval (1999) se dirige principalmente a aquellos sistemas de signos que pueden ser clasificados como registros de representación, en palabras del autor:

> Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis.
>
> La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado ... Esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar.
>
> El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada… Naturalmente, existen reglas de tratamiento propias de cada registro.
>
> La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. (Duval 1999, p. 4)

En matemáticas, la diversidad de registros de representación es prácticamente evidente, aunque es en general, considerada por algunos como útil pero finalmente trivial para el aprendizaje de matemáticas ya que la comprensión de algún objeto en una de sus representaciones sería suficiente para su utilización en cualquier contexto. Sin embargo, es muy frecuente el problema del encapsulamiento de los aprendizajes restringidos a los registros en los que estos se llevaron a cabo. El encapsulamiento obstaculiza la comprensión conceptual y “se manifiesta principalmente por el fracaso de la conversión en caso de no -

congruencia y por la ausencia de transferencia de los conocimientos más allá de las situaciones estándar de aprendizaje" (Duval 1999, p. 60). Duval afirma que la diversidad de registros no es sólo una útil casualidad, sino que es necesario utilizarla para el desarrollo de concepciones, en sus palabras: "la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación… [ya que] la comprensión conceptual aparece ligada al descubrimiento de una invarianza entre representaciones semióticas heterogéneas" (1999, p. 60).

La coordinación[1]o articulación de registros consiste en la movilización y utilización conjunta, de los registros de representación semiótica. Ésta supone como condición principal, la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en cada registro y se ve fuertemente afectada por los fenómenos de no congruencia entre representaciones. Con esta definición, se podría suponer que sólo hay articulación de registros cuando se utilizan explícitamente varios de ellos, sin embargo:

> Un sujeto que ha desarrollado suficientemente y de manera adecuada la coordinación de los registros puede atenerse a las representaciones de un sólo registro. Pero en realidad, él dispone potencialmente de representaciones que provienen de otros registros y que de manera latente permanecen asociadas a las que él utiliza. (Duval, 1999, p. 67)

De tal manera que, una persona que decida trabajar externamente con sólo un registro, también, podría estar ejerciendo una buena articulación de registros al considerar este acercamiento como la manera más eficiente de llegar a la solución, tomando en cuenta los datos que tiene, los tratamientos que podría realizar en otros registros disponibles y el tipo de solución a la que desea llegar. La articulación de registros de representación es vista por Duval como primordial para el aprendizaje de las matemáticas debido a que "toda representación es cognitivamente parcial en relación con lo que ella representa" (1999, p. 67). Por lo tanto, un aprendizaje realizado en un sólo registro, o que privilegie alguno en particular, limita la posible comprensión de los contenidos matemáticos estudiados; "incluso si han sido movilizados varios registros, simultánea o sucesivamente, esto no acarrea su articulación" (p. 72), lo que complica aún más la situación.

Uso conjunto de las teorías

La teoría de registros de representación no analiza construcciones y procesos mentales que no involucran directamente la utilización de representaciones externas, por tal razón, nos parecen convenientes los desarrollos teóricos de APOE; principalmente sus resultados al utilizar los conceptos de abstracción reflexiva para analizar el pensamiento matemático avanzado. Además, existe ya un acercamiento para el análisis del aprendizaje matemático que se apoya en ambas teorías: Trigueros y Martínez-Planell (2010) utilizaron un marco compuesto por la teoría APOE y la teoría de representaciones semióticas para analizar el aprendizaje de funciones de dos variables.

[1] Debido a que en APOE el término *coordinación* tiene un significado distinto, se utilizará "coordinación" para el mecanismo de APOE y "articulación" para la relación entre registros de representación.

Prevemos que el uso coordinado de las dos teorías como un solo marco permitiría ganar precisión y entendimiento sobre varios aspectos del aprendizaje de las transformaciones lineales: sobre el desarrollo de las estructuras mentales, el papel de la semiosis en el aprendizaje y la naturaleza de varias dificultades de aprendizaje.

Modelo de enseñanza propuesto

En términos de la teoría APOE (Arnon et al., 2014), el conocimiento del cálculo se puede interpretar como un Esquema centrado en el concepto de función. De tal manera, que el aprendizaje de Cálculo Diferencial e Integral se puede interpretar como el desarrollo de tal esquema, construyendo inicialmente el concepto de función, sus propiedades y posteriormente construir otros Objetos, como la Derivada e Integral, que se utilizan para conocer mejor a las funciones. Formando así, una red de conocimientos que se espera poder aplicar a diversos contextos, gracias a la diversidad de conexiones establecidas. Los avances que se tienen en el entendimiento de esta problemática muestran que "la evolución de los esquemas relacionados con el cálculo es un proceso complejo para la mayoría y requiere la exposición a una variedad de situaciones donde la reflexión sobre sus componentes se muestre necesaria" (Cooley, Trigueros & Baker, 2007, p. 388). En particular, los estudiantes tendrían que ser expuestos a la diversidad de representaciones disponibles y, más aún, lograr la articulación de éstas para desarrollar el apropiado esquema de función.

Antes de avanzar en el desarrollo del esquema de función, es necesario que la función por sí misma sea un objeto bien construido, aplicable en distintos contextos. Para tal efecto, se propone aquí el desarrollo de un Proceso general de función proveniente de Procesos gráficos y algebraicos previos. A su vez, los procesos dependientes de los registros provienen de Acciones en los mismos registros. La idea principal es que sería significativamente más complejo construir en primera instancia un solo proceso que actúe sobre cualquier registro, que la construcción de dos procesos *más simples* y su posterior coordinación.

Antes de mostrar las concepciones propuestas, resaltamos las características principales para distinguir las estructuras de APOE en situaciones de aprendizaje en la siguiente tabla.

Tabla 1. *Características principales de las concepciones.*

Concepción (estructura)	Característica	
Acción	Casos particulares	La función *hace algo*
Proceso	Casos generales	
Objeto	Propiedades y operaciones sobre las funciones	*Se le hace algo* a la función

Tomando en cuenta lo anterior, las concepciones propuestas se resumen en la figura 3 (leída de arriba hacia abajo).

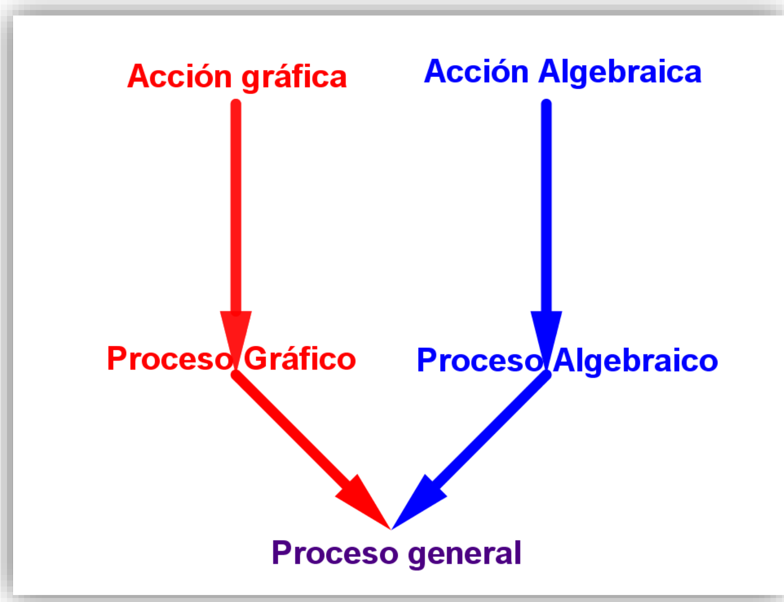


Figura 2. Concepciones para el proceso general de función.

Actividades de enseñanza

Para favorecer el desarrollo de las concepciones buscadas, se plantearon a los estudiantes actividades de resolución de problemas, sobre magnitudes cuantificables. Dentro de las hojas de trabajo, los estudiantes tenían que proponer y evaluar conjeturas y comunicar sus resultados. Para cada actividad se desarrollaron *hojas de trabajo dinámicas*[2] en la plataforma de GeoGebra, mismas que los estudiantes respondían dentro de un grupo virtual en sesiones presenciales y a distancia.

Cada hoja de trabajo, permite la manipulación dinámica de objetos específicos, para generar las concepciones deseadas y la articulación de registros al resolver problemas. Por ejemplo, para favorecer la coordinación de los procesos gráficos y algebraicos, se utilizan applets que permiten la manipulación numérica, algebraica y gráfica para resolver problemas de modelación (Figura 3).

[2] Ejemplos disponibles en https://www.geogebra.org/m/cmV267Yj

Figura 3. Ejemplo de applet.

A partir de la exploración dentro de los applets, los estudiantes tienen que responder a preguntas específicas, que les ayudan a reunir los elementos necesarios para resolver el problema. Para la hoja de trabajo de la figura anterior, algunas preguntas que se plantean son las siguientes.

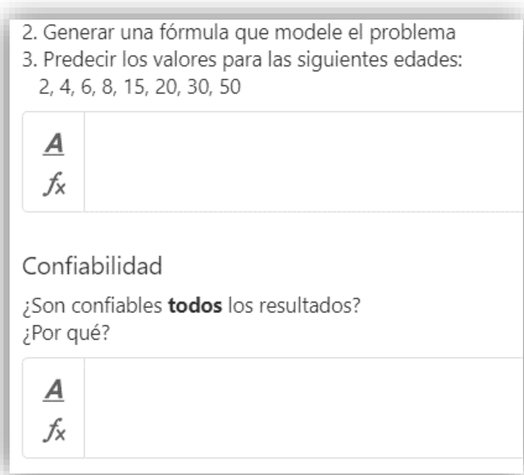


Figura 4. Tipos de preguntas en las hojas de trabajo.

El trabajo de los estudiantes fue registrado automáticamente por la plataforma de grupos de GeoGebra, permitiendo la evaluación individual y grupal de la efectividad de las actividades para los estudiantes. En la Figura 5 se muestra la presentación de esta información para uno de los grupos participantes.

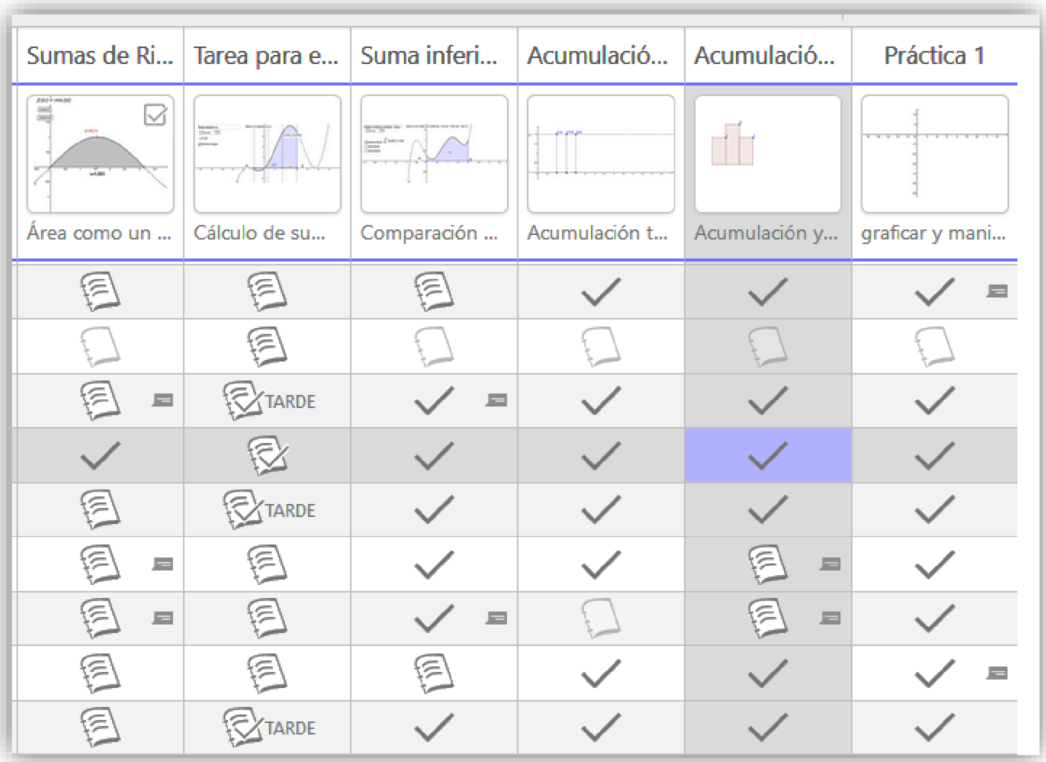


Figura 5. Control de participación de los estudiantes en la plataforma de grupos de GeoGebra.

Acción Gráfica

Para esta concepción, se plantearon actividades de modelación entre dos magnitudes cuantificables. Los estudiantes tenían que validar sus mediciones en una gráfica, hasta llegar a interpretar cada punto de una curva como una medición de una variable con respecto a la otra. En estas actividades se favorece el desarrollo del *criterio de la recta vertical* para gráficas de funciones, como la comprobación de que en los problemas estudiados las mediciones son únicas; también se fomenta la medición de valores no medidos, a partir de la ubicación de puntos en las gráficas.

Acción Algebraica

De manera similar a la concepción gráfica, se presentaron problemas de modelación de relaciones entre magnitudes, con el objetivo de validar mediciones. La característica principal de estas actividades es que la validación de las mediciones lleva al establecimiento de una fórmula, que inicialmente se utiliza para evaluar valores fijos y posteriormente para predecir valores no medidos.

Proceso Gráfico

Para generar un primer Proceso de gráfica de una función, se favoreció la comparación y contrastación de modelos de relaciones similares entre magnitudes, para generar una idea inicial de *familias de gráficas*. De esta manera, se establecieron las familias prototípicas de funciones (lineales, cuadráticas, cúbicas, polinómicas, trigonométricas, etc.) que fueron utilizadas para analizar las variaciones e invariantes gráficos de curvatura, corte con los ejes, posición relativa de crestas y valles, etc. Conviene aclarar que no se busca en este apartado cubrir todo un Esquema de graficación, ya que requeriría conocimientos posteriores a la construcción de función, como el de derivada (Trigueros & Escandón, 2008).

Proceso Algebraico

El proceso algebraico también se genera para comparar modelos de relaciones similares, pero en este caso, generando *familias de fórmulas* para los mismos tipos de funciones. Se analizan las variaciones e invariantes de los coeficientes y tipos de operaciones (lineales, no lineales, trigonométricas, exponenciales, etc) y su relación con las situaciones modeladas.

Proceso general de función

La articulación gráfico-algebraica de las representaciones utilizadas en las actividades previas, favorece a su vez la coordinación de los Procesos asociados a esas representaciones. Con estas relaciones se obtienen *familias de relaciones funcionales* cada una generando prototipos de gráficas acompañadas por fórmulas generales. Se plantea a los estudiantes la necesidad de predicciones universales que combinen elementos gráficos y algebraicos, como "siempre que $a>0$, la curva abre para arriba".

Siendo esta coordinación, significativamente complicada por la necesidad de la articulación de registros. Se provee a los estudiantes de una diversidad de ejemplos en ambientes dinámicos de exploración para que logren establecer las relaciones correctas entre los significados gráficos y algebraicos. Por ejemplo, en el caso de polinomios cúbicos se plantea primero la articulación de las representaciones, sin una situación de modelación, con applets como el siguiente:

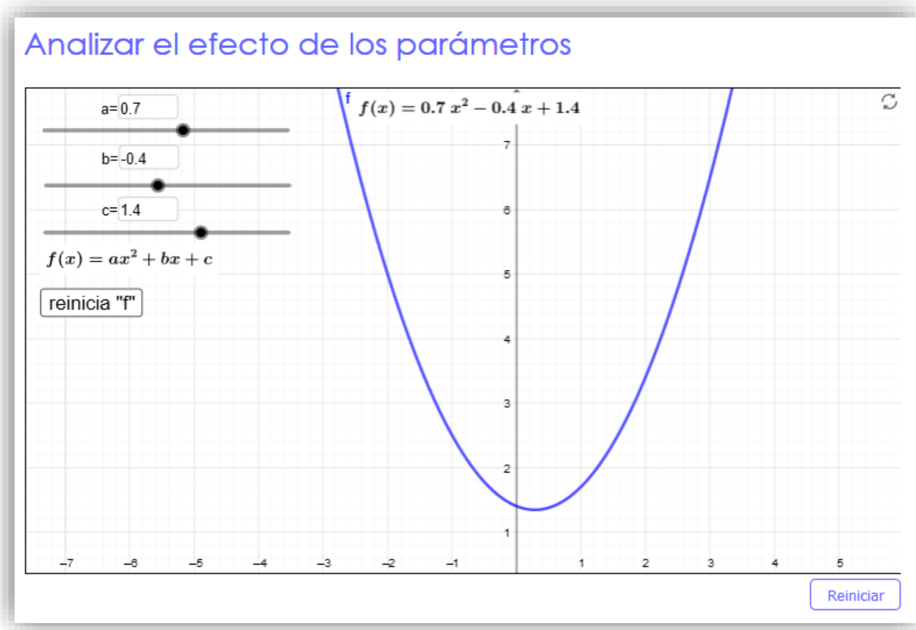


Figura 6. Articulación gráfico-algebraica.

En la hoja de trabajo[3] se presentan preguntas específicas para establecer relaciones entre las unidades significantes (Duval, 1999) gráficas y algebraicas, con preguntas como:

- Con $b=c=0$ ¿Qué efecto tiene mover "*a*"?
- Con $a=1$, $c=0$ ¿Qué efecto tiene mover "*b*"?
- Con $a=1$, $b=2$ ¿Qué efecto tiene mover "*c*"?
- Elige valores distintos de *0* para *a*, *b* y *c*, ¿cómo podrías encontrar los valores de *a*, *b* y *c* a partir de la gráfica?

En actividades posteriores, se añaden elementos al contexto de modelación para generar la necesidad de utilizar las relaciones entre fórmulas y gráficas de funciones y consecuentemente la construcción del Proceso general de función. Por ejemplo, se introduce el concepto de *error* en los modelos, inicialmente como la suma de las diferencias entre las mediciones reales y los valores generados por el modelo, para plantear el problema de elegir una *mejor aproximación* a la situación original.

[3] Disponible en https://ggbm.at/QvpgTxFb

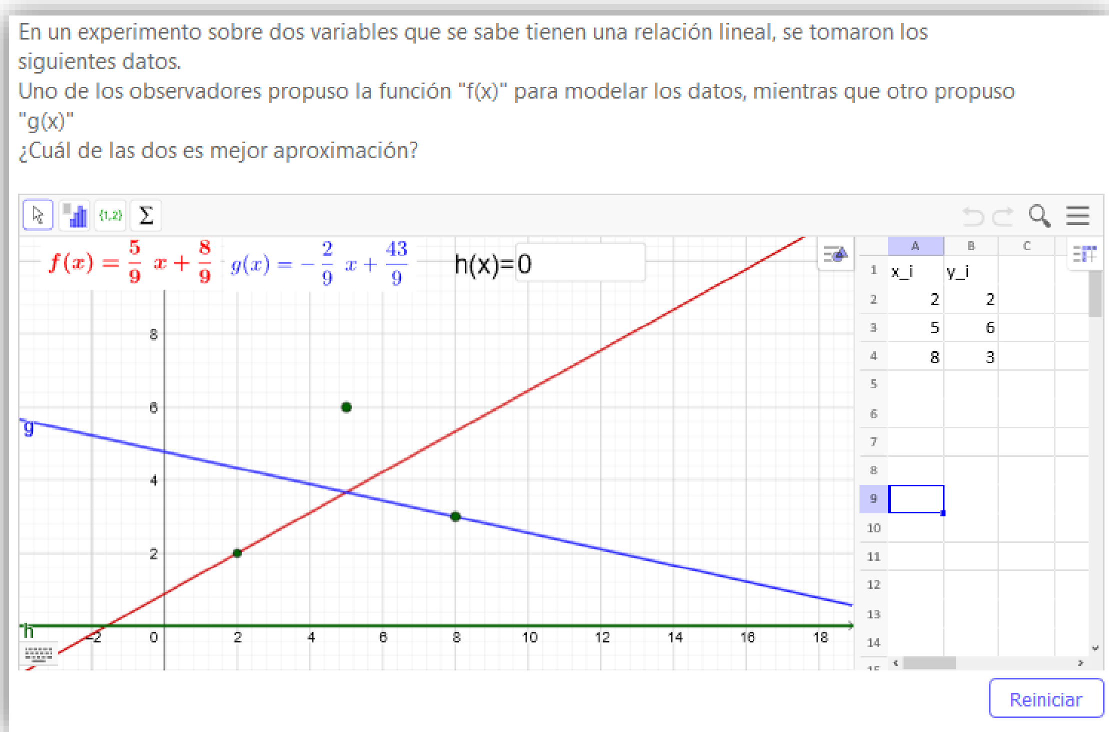


Figura 7. Introducción de "error" para comparar modelos de función.

En esta actividad[4], los estudiantes terminan respondiendo a la pregunta: *¿Qué relación observas entre las gráficas de las funciones, de los datos y el error de cada aproximación?* Para responder, se espera que utilicen propiedades gráficas y algebraicas en sus argumentos, mostrando un uso del Proceso general de función; ya que, en esta hoja de trabajo no se muestra numéricamente el error de los modelos.

Articulación de registros de representación

Cómo se puede observar en las descripciones de las actividades, las articulaciones se promueven hasta la etapa del Proceso general, dado que, en ésta es en dónde la teoría APOE dice que serían más efectivas; puesto que, no se pueden *coordinar* Acciones. En general, se favorecen articulaciones entre representaciones gráficas, algebraicas y tabulares (numéricas), en varios sentidos (Figura 8).

[4] Hoja de trabajo disponible en https://ggbm.at/hnB43pED

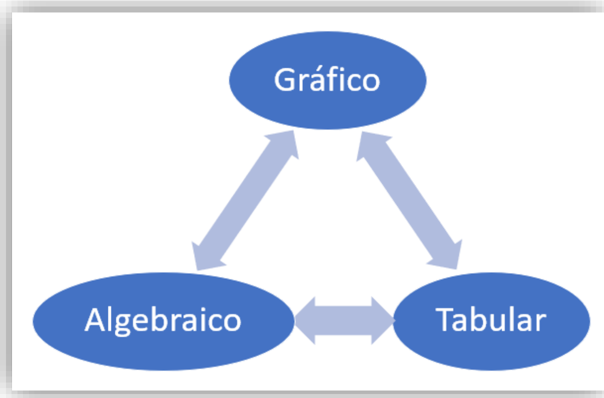


Figura 8. Articulaciones entre registros.

Resultados y Conclusiones

Tras la implementación de este tipo de actividades, se observaron resultados favorables en el desempeño de los estudiantes para interpretar, utilizar, comparar y manipular funciones como modelos de relaciones entre magnitudes variables. Se observó que la habilidad de articulación de registros se puede desarrollar de manera conjunta con el Proceso general de función y, que evitar la articulación de registros genera dificultades para el desarrollo de las concepciones mentales.

La problemática de distinguir entre funciones lineales y no lineales permitió plantear situaciones en las que los estudiantes no podían responder con un uso mecánico en las actividades del proceso general. La exploración de las características específicas de una fórmula que genera gráficas rectas para funciones de una variable, fue especialmente favorable para la articulación de los registros. Posteriormente, se extendió esta problemática para distinguir entre las funciones no lineales: periódicas, monótonas, exponenciales, etc.

Se confirmó que los tipos de funciones se pueden construir originalmente como Procesos distintos y aislados; para posteriormente coordinarlos. Que "la función" en general, puede desarrollarse como la coordinación de todos los tipos de funciones. Utilizando contextos de modelación, mezclados con contextos intra-matemáticos, se conservan las relaciones entre magnitudes en las concepciones posteriores.

Dificultades observadas

En general, cada mecanismo mental requiere un esfuerzo específico y no lograrlo genera dificultades de aprendizaje: generar Acciones, interiorizar Procesos, coordinar Procesos y encapsular Objetos. Si no se da oportunidad de realizar el mecanismo, se limitan las concepciones que pueden alcanzar los estudiantes. Por otro lado, se pueden manipular los símbolos sin referirse a los objetos matemáticos, aprendiendo únicamente las reglas de formación y tratamiento de las representaciones; por lo que se tuvo que poner especial atención en que las actividades para las concepciones Proceso no pudieran ser resueltas de forma mecánica.

En el desarrollo de la Acción gráfica, algunos estudiantes se mantuvieron sólo *dibujando* curvas sin establecer relaciones entre las magnitudes supuestamente representadas. En estos casos, las preguntas de validación de mediciones y predicción de medidas permitieron asociar las curvas dibujadas con relaciones funcionales.

Los problemas que requieren únicamente la articulación de los registros pueden ser rechazados por los estudiantes por percibirse como artificiales o poco útiles, fueron los problemas dónde las relaciones entre las representaciones eran necesarias los que validaron a los primeros.

Finalmente, se encontró que la concepción desarrollada permite abordar varios conceptos posteriores al de función, a partir del significado de relación funcional, como: función pendiente de una curva, función de acumulación y función inversa. Estas últimas funciones se mostraron significativamente más difíciles de construir, de manera acorde a la teoría teoría APOE, ya que son *funciones de funciones*.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Nueva York: Springer.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247–285.

Bressoud D., Ghedamsi I., Martinez-Luaces V., & Törner G. (2016). Teaching and Learning of Calculus. En: *Teaching and Learning of Calculus. ICME-13 Topical Surveys*. Springer, Cham.

Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema thematization: A theoretical framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 370–392.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del valle. (Traducido por Myriam Vega Restrepo).

Kabael, T. U. (2011). Generalizing Single Variable Functions to Two-Variable Functions, Function Machine and APOS. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *11*(1), 484-499.

Maharaj, A. (2010). An APOS Analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *Pythagoras*, *71*, 41-52.

Prada, R., Hernández, C.A., Jaimes L.A. (2017). Representaciones semióticas alrededor del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, *12*(2), 14-31. doi: 10.14483/23464712.10491.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical notions and the quandary of reification -the case of function. En E. Dubinsky & G. Harel (eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (59-84). Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky & G. Harel (eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (25-58). Mathematical Association of America.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5–31.

Trigueros, M., & Escandón, C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación: un análisis a través de la estadística implicativa. *Revista mexicana de investigación educativa*, 13(36), 59-85.

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356–366.

Tall. D. (1997). Functions and Calculus. *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325, Mathematics Education Research Centre. University of Warwick. Recuperado de: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1997a-functions-calculus.pdf

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*. 12, 151–169.

Tall, D. (2002). Three Worlds of Mathematics. *University of Warwick*, UK.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 1 Fecha: enero-junio de 2019

ISSN: 2395-955X

DISEÑO DE BICICLETA SOBRE POLÍGONOS DE REULEAUX CON GEOGEBRA

Juan Carlos Piceno-Rivera, Gema Rubí Moreno Alejandri, Efrén Marmolejo Vega

jcpicenorivera@uagrovirtual.mx; alejandrigemath@gmail.com; efrenmarmolejo@yahoo.com

Universidad Autónoma de Guerrero

Para citar este artículo:

Piceno, J. C., Rubí, G., Marmolejo, E. (2019). Diseño de bicicleta sobre polígonos de REULEAUX con GeoGebra. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 1, pp. 17-26. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 1, enero-junio de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

DISEÑO DE BICICLETA SOBRE POLÍGONOS DE REULEAUX CON GEOGEBRA

Juan Carlos Piceno-Rivera, Gema Rubí Moreno Alejandri, Efrén Marmolejo Vega

jcpicenorivera@uagrovirtual.mx; alejandrigemath@gmail.com; efrenmarmolejo@yahoo.com

Universidad Autónoma de Guerrero

Palabras Clave: curvas de ancho constante, planteamiento y resolución de problemas, construcción dinámica.

Resumen

Con la aplicación de los principios, categorías y métodos de la Enseñanza Problémica, se elabora una propuesta de curso taller que aborda la situación problémica de la construcción de curvas de ancho constante como los polígonos de Reuleaux, mediante el uso de GeoGebra, para el diseño de una bicicleta basado en diversos polígonos de este tipo.

Key Words: curves of constant width, approach and problem solving, dynamic construction

Abstract

With the application of the principles, categories and methods of The Problemic Teaching, a proposal of workshop course is made, such that deals with the problemic situation of the construction of curves of constant width like the polygons of Reuleaux, by means of the use of , for the design of a bicycle based on different polygons of this type.

Introducción

Sin duda, durante la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, se instalan en los alumnos conocimientos verdaderamente científicos, y otros más sustentados en creencias producto de limitados análisis que sobre los objetos matemáticos específicos se realizan. Es el caso del concepto de figuras de ancho constante, que por fuerza de la realidad visible se objetiviza en la mente de los estudiantes que, sólo el círculo cumple con ese principio, más aun, que ésta forma de los objetos hace posible su uso en diferentes móviles sin producir alteraciones al movimiento que se da en paralelo.

Lo anterior, generó el interés en diseñar un tratamiento metodológico fundamentado en la Enseñanza Problémica, a través del cual se profundice en la conceptualización, construcción y funcionalidad de figuras de ancho constante, mediante un sistema de actividades que motiven el descubrimiento y sustenten argumentaciones de propiedades que resultan de la experiencia de llegar a construir el modelo de bicicleta con figuras diferentes a las circulares.

Dicha secuencia de actividades, dan forma a un curso – taller mediado por el uso del software GeoGebra, dada la versatilidad de este para realizar simulaciones, lo que facilita la interacción entre los pares participantes y el facilitador, al “descubrir haciendo” con el uso de procedimientos heurísticos, y argumentando progresivamente hasta formalizar resultados.

La Enseñanza Problémica como concepción teórica subyacente

Como premisa del Enfoque Histórico Cultural, el hombre comienza a pensar sólo cuando aparece la *necesidad de comprender algo*. De modo que, el momento inicial del pensamiento es generalmente una situación problémica.

La enseñanza problémica, de la autoría de Majmutov (1983), estructura de forma sistémica principios, categorías y métodos, que conllevan estratégicos tratamientos metodológicos en los que se interrelacionen la actividad cognoscitiva del estudiante con la de resolución de problemas.

Es un tipo de enseñanza que se orienta a desarrollar el intelecto, combinando la búsqueda sistemática independiente de los estudiantes con la asimilación de las conclusiones de la ciencia; conformando un sistema de procedimientos metódicos estructurados bajo el *principio de lo problémico* con el objetivo determinado de lograr la independencia cognoscitiva, la creación de motivos estables para el aprendizaje y la formación de capacidades creadoras en el proceso de asimilación de los conceptos científicos y los métodos de actividad, todo lo cual está determinado por un sistema de situaciones problémicas ante la cual los alumnos son enfrentados (Martínez, 1986). Busca la "asimilación no solo de los resultados del conocimiento científico, sino también de la vía, del proceso de obtención de dichos resultados; de modo que, coadyuva al "desarrollo de las necesidades cognoscitivas y a la formación de una personalidad intelectualmente activa" del alumno. Justo estos elementos teóricos, son compatibles con la intencionalidad del curso taller que en este escrito se describe.

La Enseñanza Problémica posee categorías fundamentales: *la situación problémica*, *el problema docente*, *la pregunta problémica y las tareas problémicas*.

Una *situación problémica* es "un estado psíquico de dificultad intelectual que surge en el hombre cuando en una situación objetiva no puede explicar el nuevo hecho mediante los conocimientos que tiene o los métodos que ya conoce, sino que debe hallar un nuevo método de acción" (Majmutov, 1983). Hernández (2008) afirma que en la situación problémica provoca en el alumno: a) desconocimiento de la solución, pero conciencia de que existen posibilidades cognoscitivas para resolver la contradicción; b) enfrentamiento a algo incomprensible, desconocido, inesperado, alarmante; c) motivan por la solución de la contradicción implícita.

Es necesario aclarar que la pregunta, condiciones o medio diseñado no se ha de confundir con la situación que se propone provocar en el alumno, el cual es un estado psíquico interno, contradictorio, que provoca una insatisfacción entre lo conocido y lo que está por conocer (la propia situación problémica). Estos estados de conflicto cognitivo son, desde este punto de vista, propiciadores de la actividad intelectual denominada actividad de aprendizaje.

De manera que, en el diseño de esta propuesta se buscó que mediante la interacción entre el alumno y el entorno virtual surjan situaciones problémicas parciales que planteen una meta comprensible para quien la va a resolver y que permita aproximaciones a la solución a partir de sus conocimientos previos, a través de las actividades planteadas. Con la solución de estas situaciones problémicas parciales se logra resolver el problema inicial: el diseño de una bicicleta sobre diversos polígonos de Reuleaux que al desplazarse sobre una superficie plana no rebote y ni patine.

En el análisis de la situación problémica, donde se separa lo conocido y lo buscado y se determinan sus nexos, es decir, se realiza la formulación del *problema docente*. Las intuiciones implicadas en la búsqueda de respuestas son resultado de un proceso de organización de la información con la que se cuenta y de su diálogo con los nuevos datos.

Después, comienza el proceso de búsqueda de su solución, esto es, la *tarea problémica*: "... una actividad que conduce a encontrar lo buscado, a partir de la contradicción que surgió durante la formación de la situación problémica en que se reveló la contradicción" (Majmutov, 1983).

Es importante que se le otorgue (tanto como sea posible) al alumno el desarrollo independiente de estas dos categorías en el proceso de solución de las situaciones problémicas.

Sin embargo, en esta diligencia el facilitador ha de estimular a los alumnos empleando *preguntas problémicas* cuando es necesario. Se trata de un impulsor directo del movimiento del conocimiento. "La pregunta se argumenta y contesta de una vez, es un eslabón en la cadena del razonamiento que suponen las actividades propuestas por la tarea. Como eslabón de la cadena, la pregunta expresa, de forma concreta, la contradicción entre los conocimientos y los nuevos hechos" (Majmutov, 1983). Sin embargo, no cualquier pregunta es problémica. Para alcanzar este estatus, la pregunta debe tener un carácter heurístico, y, por tanto, compromete a cuidarse en su formulación de no descubrir el paso siguiente. Es un estímulo a la reflexión del alumno en la búsqueda independiente de la solución del problema.

En este punto es importante que el facilitador siga de cerca el proceso de resolución realizado a fin de que pueda proveer al alumno preguntas problémicas necesarias para identificar, concluir, continuar, analizar, o redireccionar ideas de solución.

Ortíz (2004), recalca que "el estudiante no adquiere la experiencia histórico-social solamente mediante su propia actividad, sino también en su interacción comunicativa con otras personas". En este sentido, la intercomunicación entre alumnos y con el facilitador (reflexión, afirmación y refutación de argumentos) es indispensable para un desarrollo adecuado de las actividades. Esto fortalece el aprendizaje de los participantes, pues al contrastar sus ideas con las de los otros se reafirman o modifican sus concepciones, las que al interiorizarlas conscientemente le producen un aprendizaje significativo. Es previsible que al inicio los argumentos sean poco específicos, dando oportunidad al facilitador de intervenir con preguntas problémicas que orienten el desarrollo y fortalecimiento de las argumentaciones y focalicen convenientemente el tema de discusión.

En la solución de un problema nuevo, no es suficiente poseer un amplio bagaje de conocimientos, más bien es necesario dominar algunas técnicas y estrategias para atacar el problema. Generalmente el proceso se inicia con procedimientos de ensayo y error: se prueban hipótesis, ideas, resultados particulares (Polya, 1970). Todas ellas encaminadas a generar el diálogo heurístico entre los pares y el facilitador, con lo cual se orientan las actividades y se centra el objeto de análisis, con la intención de dar solución a la situación problémica planteada; con ello se enriquece el poder de argumentar causalmente, abriendo la perspectiva de avanzar hasta el logro del objetivo.

Propuesta didáctico-metodológica

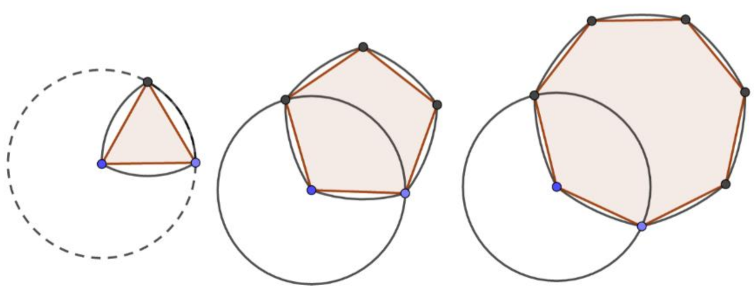
Es de sentido común, que "solo" la rueda redonda es de ancho constante, lo que justifica que todo móvil al desplazarse sobre objetos circulares no da "tumbos". Es así como se inicia el diálogo hasta descubrir que existen otras formas de ancho constante con funciones similares a la de la rueda redonda. La propuesta que aquí se hace, va desde la construcción de curvas de ancho constante como los polígonos de Reuleaux, hasta el diseño de una bicicleta sobre diversos polígonos de Reuleaux. Para ello, se han dividido el proceso en seis etapas:

1. Construcción de polígonos de Reuleaux.
2. Análisis del giro de un polígono de Reuleaux en su cuadrado circunscrito.
3. Construcción del mecanismo para que un polígono de Reuleaux gire en el interior de su cuadrado circunscrito.
4. Búsqueda de condiciones necesarias y suficientes para que un polígono de Reuleaux gire desplazándose sobre una superficie plana sin rebotes y sin patinar.
5. Construcción del mecanismo para que un polígono de Reuleaux gire sobre una superficie plana sin rebotes y sin patinar.
6. Instalación de dichos mecanismos en los ejes de las llantas y de los pedales de una bicicleta normal.

Desarrollo de las Actividades

La primera etapa, parte de la definición de curvas de ancho constante[1] y de la definición de polígonos de Reuleaux[2].

El primer problema consiste en construir dichos polígonos, empezando por el triángulo de Releaux y aumentando posteriormente la cantidad de lados del polígono.



Ya realizadas las construcciones, las argumentaciones se centran en sí la cualidad de ancho constante la poseen los polígonos de Releaux. En esta exploración, surgen preguntas problémicas como las siguientes:

[1] Una curva de ancho constante es una curva cerrada convexa cuya distancia entre dos rectas paralelas tangentes a la curva es constante (Gardner, 1991).

[2] Un polígono de Reuleaux es una curva cerrada convexa cuyo base es un polígono regular de 2n + 1 lados construido a través de conectar desde un vértice cualquiera los dos vértices más lejanos por un arco con centro en dicho vértice (Reuleaux, 1963).

1. *¿Cuáles son las características esenciales de los polígonos de Releaux?*

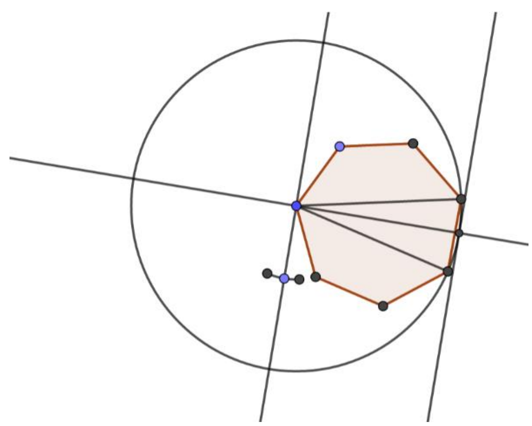
   El diámetro del polígono regular de $2n + 1$ lados es la longitud de la diagonal que une un vértice con el n-ésimo vértice contando a partir de él, en cualquier sentido, pues quedan entre él y cada uno de esos dos vértices, $n - 1$ vértices, es decir, $2(n - 1) + 3 = 2n + 1$. Formando así, un triángulo isósceles con la base igual a uno de los lados del polígono y los otros dos iguales al diámetro del polígono y dos polígonos de $n + 1$ lados.

2. *¿Qué construcciones auxiliares permiten el análisis del ancho de esta curva?*

   Esto resalta la necesidad de trazar una recta tangente al polígono en uno de sus vértices y la paralela a dicha recta a una distancia igual al diámetro del polígono. Esto genera, a su vez otras preguntas problémicas, como:

   - *En el caso de la recta tangente al polígono en uno de sus lados, ¿cómo es el ángulo que forma con el lado respectivo?*
   - *Respecto a la paralela a dicha recta que se localiza a una distancia igual al diámetro del polígono, ¿cómo se relaciona con la circunferencia con centro en el vértice escogido?*

     Esta recta es tangente a la circunferencia con centro en el vértice escogido y recorre un arco igual al ángulo central igual a $\frac{90°}{2n+1}$ que es la medida del ángulo superior del triángulo isósceles construido.

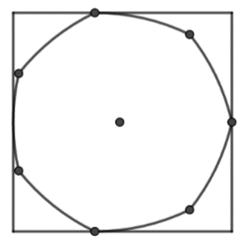


Es importante que, aunque las exploraciones sean particulares (en un polígono de Reuleaux de cierta cantidad de lados), las justificaciones giren en torno a características esenciales de los polígonos de Reuleaux (generalizando la cantidad de lados).

En una segunda etapa, se plantea la situación problémica de cómo hacer girar un polígono de Reuleaux en su cuadrado circunscrito, encontrando las condiciones necesarias y suficientes para que esto suceda y realizando como resultado la construcción dinámica de este hecho en general para distintos polígonos de Reuleaux. Para ello, preliminarmente, es necesario abordar *¿cómo girar un objeto completo en torno a un punto?*

En la exploración de la situación problémica planteada, surgen preguntas problémicas como las siguientes:

1. *Al estar siempre entre dos paralelas, ¿el polígono de Reuleaux puede inscribirse en un cuadrado?*
   El polígono de Reuleaux está contenido en cualquier polígono de $2k$ lados, $2 \leq k \leq 7$, paralelos dos a dos con la única condición de que cada recta que pase por el vértice forme un ángulo con los lados adyacentes entre $\frac{90°}{2n+1}$ y $\frac{270°}{2n+1}$.

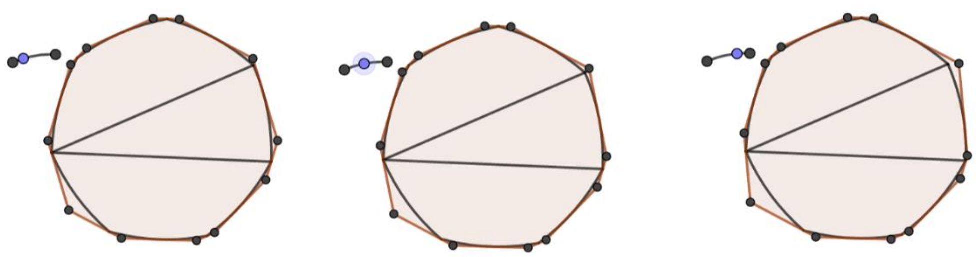


2. *¿Cómo girar el polígono de Reuleaux sin salirse del cuadrado?*

   Para que esto pueda ocurrir es necesario que se elija el cuadrado de lado igual al ancho del polígono de Reuleaux, esto es a $d = \frac{L}{2cos\left(n\frac{180°}{2n+1}\right)}$.

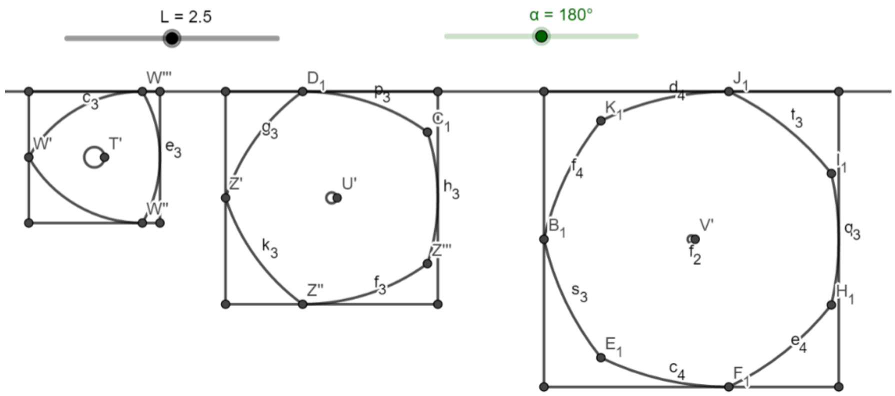
   Otra pregunta problémica que surge ahora es *¿cuál es la relación entre el centro del cuadrado y el centro de gravedad del polígono de Reuleaux?*

   El colocar en el centro del cuadrado el centro de gravedad del polígono de Reuleaux, que coincide con el centro de gravedad (centro geométrico del polígono regular) es una pieza importante de este proceso. Una vez identificado esto, en torno a este punto se construye el polígono de Reuleaux correspondiente.



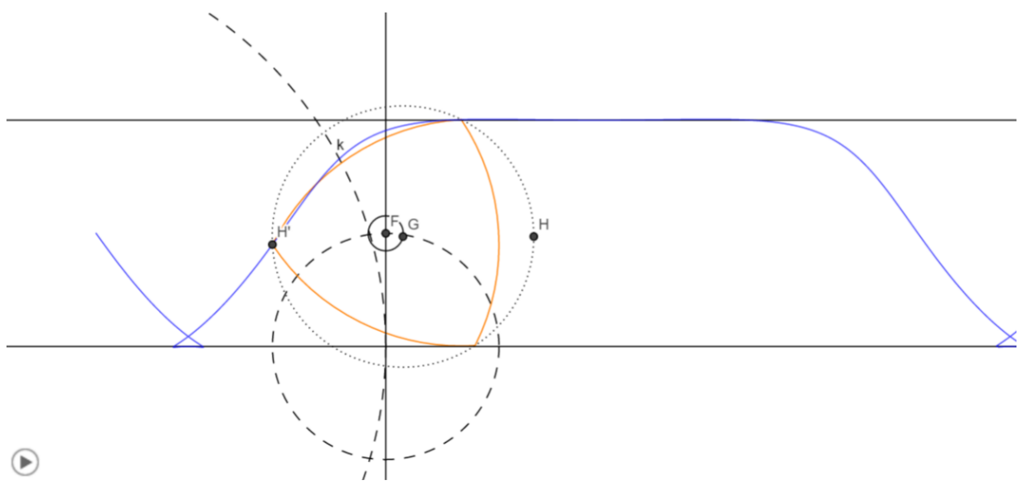
En la tercera etapa, construimos el mecanismo de forma general para que un polígono de Reuleaux giré en el interior de su cuadrado circunscrito.

A fin de poner a girar adecuadamente al polígono de Reuleaux en el interior del cuadrado, se aprovecha la característica dinámica de GeoGebra. Se definen dos deslizadores: uno para la longitud del lado del polígono regular base (deslizador L), y otro, para rotar el polígono (deslizador alfa).

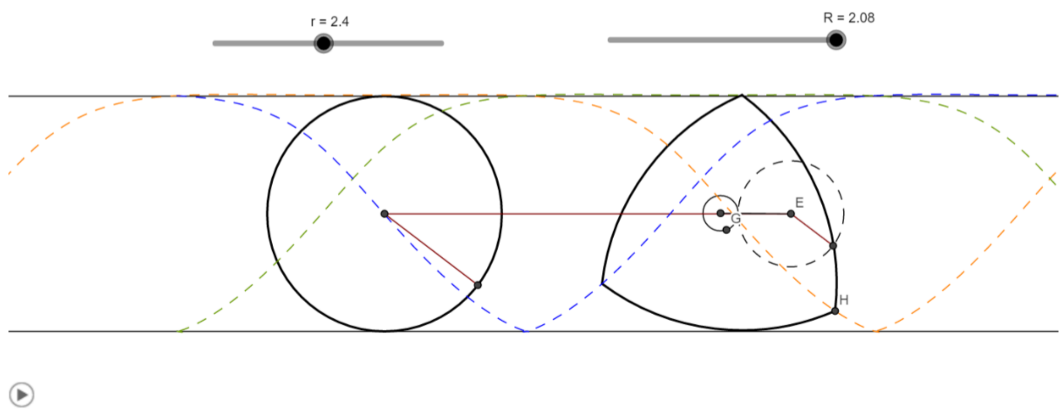


En la cuarta etapa se plantea el problema de buscar las condiciones necesarias y suficientes para que un polígono de Reuleaux gire desplazándose sobre una superficie plana sin rebotes y sin patinar, describiendo cualquiera de sus puntos en su perímetro su “cicloide” respectiva y hacemos la construcción dinámica general para distintos polígonos de Reuleaux.

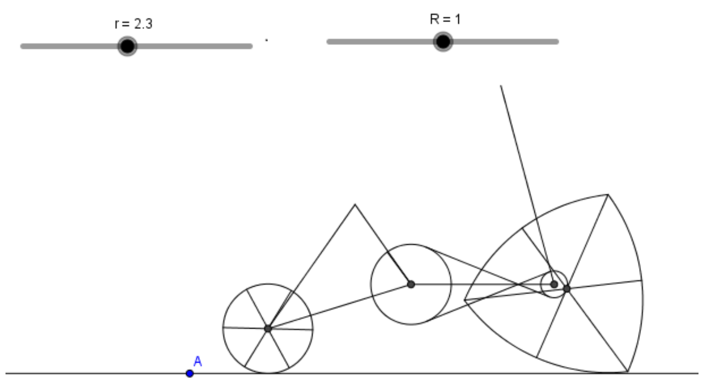
De modo que algunas preguntas problémicas para lograr la simulación del deslizamiento de un polígono de Releaux sobre un plano sin patinar, ni despegarse del plano, pueden ser: *¿cómo simular que un punto sobre una superficie se despega del plano sin que el objeto lo haga?, ¿cómo hacerlo para una circunferencia?, ¿cómo para un triángulo de Releaux?, y, ¿cuál sería la generalización para cualquier polígono de Releaux?*



En la quinta etapa se tiene la intención de construir el mecanismo para que un polígono de Reuleaux gire sobre una superficie plana sin rebotes y sin patinar.



Por último, en la sexta etapa, se instalan dichos mecanismos en los ejes de las llantas y de los pedales de una bicicleta normal.



Reflexión final

El considerar en el diseño del curso–taller los principios, categorías y métodos de la Enseñanza Problémica que mediante la exploración simulada en GeoGebra, conducen a la formulación de conceptos y sus definiciones, así como a la solución de problemas como es el caso de figuras de ancho constante arriba tratado, producen en los aprendientes una experiencia de construcción de conocimiento que al superar las limitantes que en un principio les generó la situación problémica planteada y solucionar el problema, ahora se empoderan de ese saber, es decir potencian "poder sobre el saber".

La construcción de la bicicleta con llantas de figuras de ancho constante de Reuleaux, consistió de un conjunto de actividades secuenciadas a partir de la situación problémica de su construcción, transcurriendo: de la deliberación y caracterización de figuras de ancho constante lo que consolidó su conceptualización y definición; de determinar y calcular lo necesario para establecer las condiciones de girar tangencialmente a los lados de un cuadrado; para finalmente aplicar estos resultados en el uso de estos polígonos como ruedas de una bicicleta, lo que consolida el conocimiento de este tipo de figuras, dados los argumentos establecidos.

Así, el conocimiento construido fortalecido ampliamente por las actividades secuenciadas, los argumentos vertidos durante el proceso y la oportuna y cuidadosa intervención del facilitador conforman un proceso didáctico exitoso.

Referencias bibliográficas

Gardner, M., (1991). *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*. United States of America: Chicago University Press.

Reuleaux, F., & Kennedy, A., (1963). *The Kinematics of Machinery*. United States of America: Dover Publications.

Hernández, J., (2008). La enseñanza problémica. Su importancia en la motivación. *Varona*, 46, pp. 40-45.

Martínez, M. (1986) *Categorías, principios y métodos de la enseñanza problémica*. Cuba: Universidad de La Habana.

Majmutov, M., (1983). *La Enseñanza Problémica*. Cuba: Pueblo y Educación.

Ortiz, A., (2004). *Metodología de la enseñanza problémica en el aula de clases.* Colombia: Ediciones ASIESCA.

Polya, G., (1970). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

USO DE GEOGEBRA COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE EN LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES

Felicidad Pérez Saldaña

felicidad.perez.saldana@gmail.com

Instituto Tecnológico del Valle del Guadiana

Palabras clave: secuencias didácticas, función, gráfica, GeoGebra

Resumen

La inclusión de la tecnología en el aula es un tema que varios autores ya han trabajado, como Hitt (2003) y Borbón (2003), al igual que el uso de las TIC en la enseñanza de funciones. El reto en este trabajo es que, en el Instituto Tecnológico del Valle del Guadiana (ITVG) los estudiantes de la carrera de Ing. en Agronomía provienen de entornos en donde el acceso a internet y/o a las TIC son menos utilizadas que en la ciudad. Como objetivo principal se busca que mediante secuencias didácticas el alumno observe gráficamente el comportamiento de las funciones lineal, cuadrática, polinómica y trigonométrica mediante la variación de los parámetros de sus expresiones algebraicas.

Key words: didactic sequence, function, graph, GeoGebra

Abstract

The inclusion of technology in the classroom is a topic that several authors have already worked on, such as Hitt (2003) and Borbón (2003), as well as the use of ICT in the teaching of functions. The challenge in this work is that, in the Technological Institute of Valle del Guadiana (ITVG) the students of the Eng. in Agronomy career come from different environments where access to the Internet and / or to ICT is less used than in the city. The main objective is that through didactic sequences the student graphically observes the behavior of the linear, quadratic, polynomial and trigonometric functions trough varying the parameters of their algebraic expressions.

Introducción

Las Matemáticas son un campo en que las habilidades cognitivas del estudiante cobran gran relevancia debido a la intangibilidad propia de los conceptos abstractos que son manejados. Esto, asociado al estigma social que universalmente se le ha asignado como un área “difícil” de entender, hace que los estudiantes de los primeros semestres atraviesen complicaciones diversas que impiden el aprovechamiento correcto de los contenidos académicos del programa de estudios.

En el segundo semestre de la carrera de Ingeniería en Agronomía, en la materia de Cálculo Diferencial, los estudiantes presentan una peculiar dificultad en la interpretación de una gráfica de una función mediante la variación de los parámetros de una ecuación. Para la integración de los conocimientos con el uso de la tecnología se opta por usar el software educativo libre GeoGebra, el cual tiene una interfaz que permite a los estudiantes interactuar entre expresiones algebraicas y las gráficas que originan.

Referente Teórico

El sustento teórico en que se basó el diseño de la investigación y que asentó las guías por las que se orientó este trabajo, está encabezado por Duval (1998) y Hitt (2003) acerca del desarrollo de conceptos matemáticos y el uso de TIC.

Duval (1998) señala que las representaciones mentales cubren al conjunto de imágenes y, globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto. Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Duval pone en claro que no hay que confundir al objeto matemático con su representación, por ejemplo, una función no es una gráfica, la gráfica de una función es su representación.

Pérez (2013) menciona que con apoyo de los programas computacionales se busca "aprovechar el manejo de múltiples representaciones y la interacción del estudiante con la herramienta, para lograr un conocimiento distinto al tradicional, el alumno explora los problemas, cambia de datos fácilmente sin tener que recalcular operaciones".

En trabajos de Hitt (2003) sobre el uso de la tecnología en países en que los estudiantes de enseñanza secundaria cuentan con una calculadora gráfica, muestran que la problemática sobre el uso de la tecnología en el aula de matemáticas es mucho más compleja de lo que anteriormente se pensaba. El problema de la tecnología es, que el estudiante algunas veces no comprende que solamente se observa una parte de la gráfica y no logra interpretar lo que se observa en la pantalla.

Metodología

Este trabajo corresponde a un estudio con diseño cuasi experimental con una medición (A) al inicio del trabajo y un retest (B) después de la intervención. Se utilizó una muestra de 26 estudiantes (N=26) donde el mismo grupo es el control.

El Instrumento De Medición (IDM) fue un cuestionario con 6 preguntas, desarrollado en el ITVG con el fin de diagnosticar la habilidad (conocimientos) que tienen los estudiantes para interpretar las funciones y su representación gráfica.

El universo de estudio fue de 26 estudiantes del segundo semestre de la carrera de Ingeniería en Agronomía a quienes se les aplicó el IDM al final del tema de Gráfica de Funciones y se les aplicó un retest pasados 4 meses. Los resultados de ambas pruebas fueron contrastados y los resultados se presentan más adelante.

Tanto la evaluación A como la B, fueron aplicadas en el mismo entorno y con las mismas características de tiempo/espacio.

En el tema de gráfica de funciones se aborda el comportamiento de la gráfica de una función según se varían los parámetros de sus ecuaciones, tema que se vio de forma tradicional, con pintarrón y plumones. Al finalizar este tema se aplicó el IDM, con la finalidad de evidenciar la apropiación de los conocimientos de la representación gráfica de funciones; con base en los resultados se adecuaron las secuencias didácticas (Figura 1) las cuales están estructuradas de la siguiente forma:

Actividades de desarrollo:

1. Abre el archivo de GeoGebra "función polinomial"

2. En el archivo están tres funciones, sólo una depende del deslizador a:
   x^a (en color verde), las funciones $(x-b)^2+c$ (en color rojo)
   Función x^a
3. Mueve con el ratón el deslizador a y anota qué es lo que le sucede a la gráfica de la función polinomial

4. Con el análisis anterior contesta las siguientes preguntas:
   a. ¿Qué le pasa a la gráfica cuando a es negativo?

   b. ¿Qué le pasa a la gráfica cuando a es positivo?

   c. ¿Qué le pasa a la gráfica cuando a es cero?

   d. ¿Qué pasa con la gráfica cuando a=1?

   e. ¿Qué pasa con la gráfica cuando a es un entero positivo (2,3,4,5)? Dibuja un

Figura 1. Captura de pantalla de la secuencia didáctica de la función polinomial.

- Actividades de apertura: las cuales permiten al estudiante familiarizarse con el uso del software y los conceptos clave del tema.
- Actividades de desarrollo: en donde se le pide al estudiante que realice una serie de pasos en GeoGebra (Figura 2) y responda preguntas relacionadas con lo que visualiza en la vista gráfica al manipular el software.
- Actividades de cierre: en las cuales el estudiante compara y proporciona conclusiones de lo visualizado.

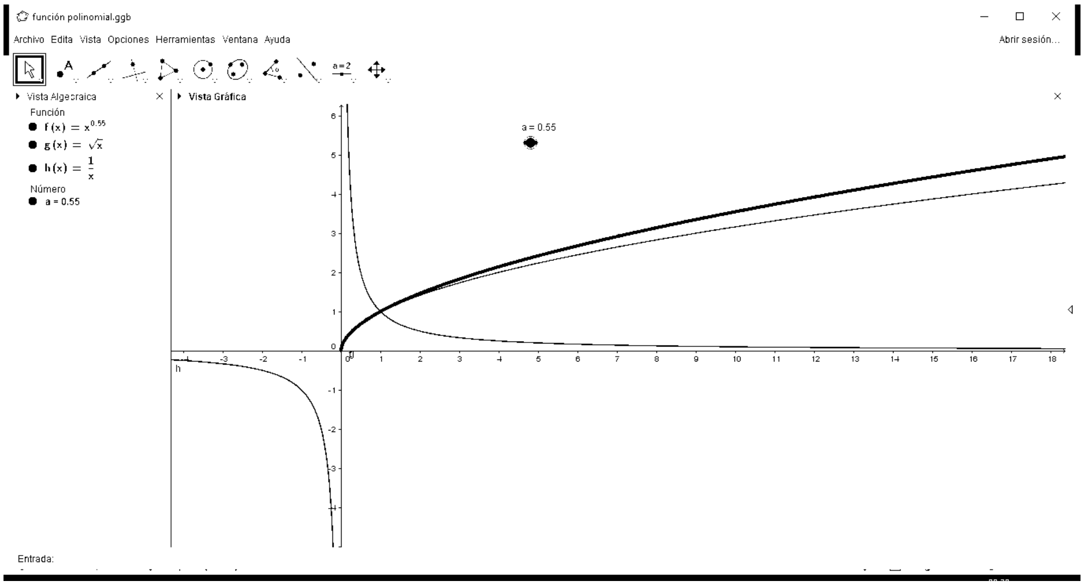


Figura 2. Captura de pantalla de la actividad de la secuencia didáctica de la función polinomial.

El estudiante realizó dichas secuencias en el Aula B del Laboratorio de Cómputo del ITVG en horas clase, en donde tuvo la oportunidad de manipular los deslizadores en GeoGebra, los cuales estaban ligados a las ecuaciones de las funciones y por ende observar la gráfica de la función cuando se modificaban sus parámetros; al igual en la vista algebraica podía observar la ecuación de la función.

El estudiante resolvió cuatro secuencias didácticas:

- una para la ecuación de la recta,
- una para la ecuación de la parábola,
- una para la ecuación polinomial, la cual incluía la ecuación de una función raíz, una función racional y una función con exponente que podía variar desde -5 a 5 en los Reales y
- una para las ecuaciones trigonométricas, la cual incluía seno, coseno y tangente.

Estas secuencias con sus respectivos archivos de GeoGebra.

Al término del semestre se les volvió a aplicar el IDM, con la finalidad de observar de cuáles conceptos se apropiaron al utilizar GeoGebra como apoyo didáctico.

Resultados

Los resultados obtenidos a partir de la contrastación del pretest y postest evidencian cómo el software GeoGebra influye positivamente en la compresión de las funciones; la comparación entre las fases A y B indica lo siguiente:

Uno de los avances observados en los estudiantes se presenta en la Figura 3, en donde se visualiza que en el cuestionario diagnóstico (en la izquierda) el estudiante no representa claramente el desplazamiento en la gráfica de una ecuación lineal, sin embargo, en el cuestionario final (en la derecha), el estudiante grafica correctamente el desplazamiento.

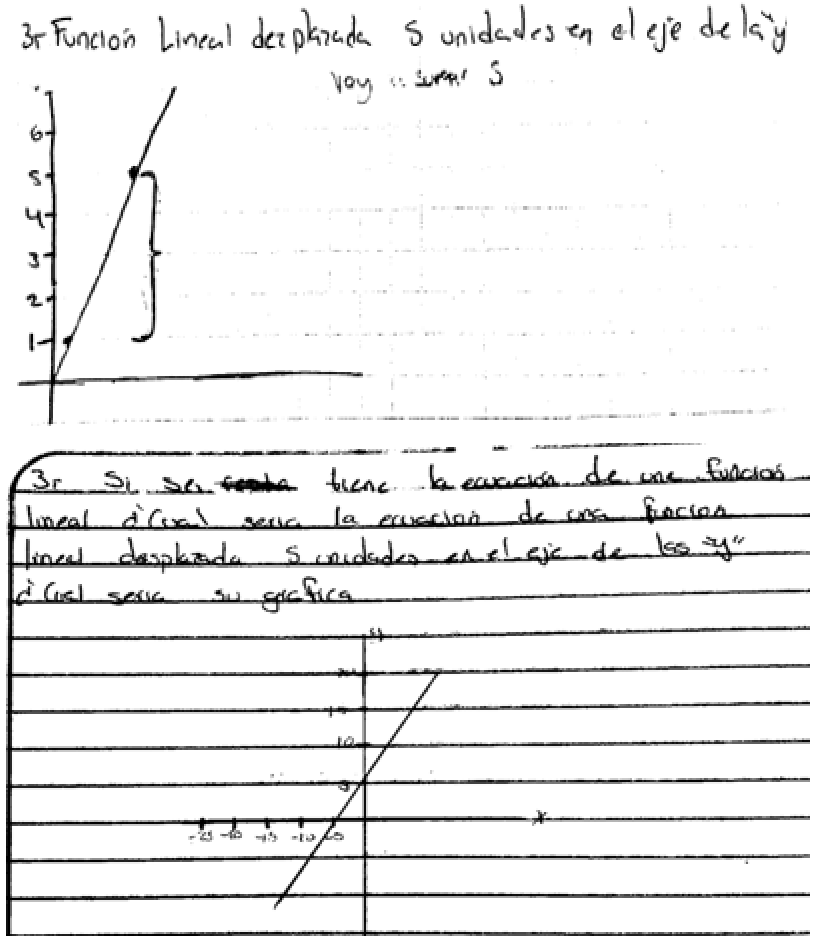


Figura 3. Cuestionamiento: Si se tiene la ecuación de una función lineal, ¿cuál sería la ecuación de una función lineal desplazada 5 unidades en el eje de las "y"? ¿cuál sería su gráfica? Representando sólo la gráfica.

De las 6 preguntas se observó mejora en las últimas 3, en donde, en las preguntas 5 y 6 los estudiantes reconocieron, gráficamente y en la ecuación, la amplitud y el periodo en las funciones trigonométricas, a diferencia del pretest, en el cual la gran mayoría de los estudiantes no contestó estas preguntas. En la pregunta 3 también hubo mejora, ya que los estudiantes lograron reconocer el parámetro independiente que es el cual desplaza la gráfica en el eje vertical, al igual que en la pregunta 4. Los resultados de las comparaciones en cada una de las preguntas se presentan en la Figura 4, de la cual se puede interpretar que los estudiantes comprendieron los conceptos de las gráficas en general ya que en las preguntas 1 y 2 se relacionan con las gráficas de las funciones lineal, cuadrática y trigonométrica, en general.

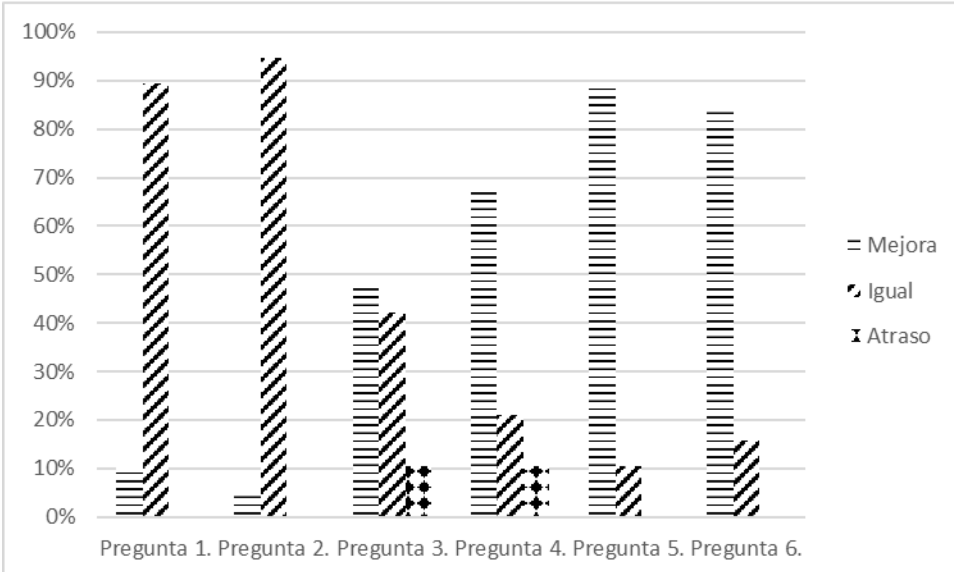


Figura 4. Porcentaje de mejora en las preguntas del IDM.

Conclusiones

Tal como se ha planteado, el uso de la herramienta GeoGebra contribuye positivamente a la comprensión de las gráficas de las funciones entre los estudiantes de segundo semestre. Esto se observa en la Figura 4, lo cual corrobora lo planteado inicialmente.

El software presenta una interfaz de fácil manejo y permite que los estudiantes logren representar en planos gráficos las funciones y su utilidad práctica. Aquellos que nacieron en un entorno digital (generación 90´s y 2000) presentan una mayor facilidad para el desarrollo de competencias mediante el uso de las TIC y a su vez muestran un mayor entendimiento de los conceptos clave de los contenidos a través de la realización de una secuencia didacta y el uso de GeoGebra, comparado con una clase tradicional.

No queda más que esperar que trabajos como el presente sigan alimentando la inclusión de las TICS en las aulas tradicionales, para mejorar y maximizar el aprovechamiento académico de los estudiantes.

Referencias Bibliográficas

Borbón, A. (2003). Algunos usos de las calculadoras y la computadora para introducir el concepto de derivada. *Revista Virtual Matemática*, educación e internet. Volumen 4, No. 2. Recuperado el 16 de junio de 2011 de http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/paginasgenerales/indexv4n22003.html

Díaz-Barriga, A. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado el 10 de enero de 2017 de http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluación/Factores%20de%20Evaluación/Práctica%20Profesional/Guía-secuencias-didacticas_Angel%20Díaz.pdf

Duval, R. (1998). *Registro de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento*. En F. Hitt. Investigación en Matemática Educativa II. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. Volumen. 10. Venezuela. No. 2.

Pérez, F. (2013). *Diferentes Representaciones del Concepto de Derivada en Ambientes con Tecnología*. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Guadalajara, Guadalajara, México.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 1 Fecha: enero-junio de 2019

ISSN: 2395-955X

ENSEÑANZA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN MEDIANTE LA MODELACIÓN CON SCILAB

Claudia Sánchez García, Jaime Alberto Zaragoza, Yazmín Chavarría Moctezuma

csanchez@itesa.edu.mx, jzaragozah@itesa.edu.mx, division_alimentarias@itesa.edu.mx

Instituto Tecnológico Superior del Oriente del Estado de Hidalgo, México.

Para citar este artículo:

Sánchez, C., Zaragoza, J. A., Chavarría, Y. (2019). Enseñanza de ecuaciones diferenciales de primer orden mediante la modelación con SCILAB. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 1, pp. 35-43. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 1, enero-junio de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

ENSEÑANZA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN MEDIANTE LA MODELACIÓN CON SCILAB

Claudia Sánchez García, Jaime Alberto Zaragoza, Yazmín Chavarría Moctezuma

csanchez@itesa.edu.mx, jzaragozah@itesa.edu.mx, division_alimentarias@itesa.edu.mx

Instituto Tecnológico Superior del Oriente del Estado de Hidalgo, México.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, Scilab, Modelación matemática.

Resumen

Se trata de un artículo en el que se compara la metodología tradicional de enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que se realiza “a lápiz y papel” con la propuesta didáctica que se sustenta en el empleo del software libre *Scilab*, del tipo matricial similar a MATLAB®. Los alumnos modelan y resuelven problemas relacionados con la ley del enfriamiento de Newton recurriendo a la metodología de los cuatro pasos propuesta por George Polya. La información generada la codifican en un Script de *Scilab*, lo que implica emplear el razonamiento algorítmico de programación para solicitar datos de entrada, procesar la información y generar datos de salida que pueden interpretarse desde la perspectiva de la modelación en ecuaciones diferenciales. Finalmente, los alumnos describen su experiencia y destacan la importancia, ventajas y desventajas del empleo de la metodología tradicional y el uso del cálculo numérico.

Key words: Differential equations, *Scilab*, Mathematical modeling.

Abstract

It is a comparative article between the traditional methodology of solving ordinary differential equations of the first order that is carried out "on pencil and paper" and the use of free software *Scilab,* of the matrix type similar to MATLAB®. Students model and solve problems related to Newton's law of cooling by using the four-step methodology proposed by George Polya. The generated information is encoded in a *Scilab Script*, which implies using algorithmic programming reasoning to request input data, process the information and generate output data that can be interpreted from the perspective of modeling in differential equations. Finally, the students describe their experience and highlight the importance, advantages and disadvantages of using the traditional methodology and the use of numerical calculation.

Introducción

Desde hace cientos de años las matemáticas se han empleado como un valioso “instrumento” para la solución de problemas sobre todo como una ciencia que nos permite a los seres humanos estudiar y comprender los fenómenos que se presentan en nuestro mundo, en este sentido, la modelación matemática es una de las actividades con mayor relevancia en la predicción del comportamiento de un objeto de estudio, así como para la toma de decisiones justificadas y no basado en corazonadas.

En cuanto al área de la educación superior, sobre todo en la ingeniería, la modelación se ha convertido en una herramienta estratégica en el proceso de enseñanza-aprendizaje, formando parte esencial de los planes y programas de estudio, con la finalidad de fomentar en los estudiantes el razonamiento lógico-matemático mediante la visualización de la aplicación de las matemáticas en la solución de problemas reales, de tal modo que el estudiante vaya más allá, no solo del pensamiento abstracto y sino también en la aplicación.

Por supuesto la modelación no es un proceso sencillo, implica mucho análisis y mucho razonamiento, lo que en la mayoría de los estudiantes implica dificultad en su aprendizaje, pasando de ser una herramienta a una problemática, pero claro, con base en nuestra experiencia en la docencia. En Cruz (2010) la modelación matemática se entiende como un proceso intelectual en el cual se dispone de:

1. Un problema definido donde se establecen metas y se proponen posibles procedimientos de solución.
2. La formulación del problema establecido en el punto anterior en términos matemáticos.
3. La solución y análisis del problema matemático obtenido.
4. La interpretación de los resultados obtenidos.

Por otra parte, el presente proyecto se centra en el uso del modelado matemático, con ayuda de *Scilab* como una herramienta mediadora en la enseñanza-aprendizaje en la asignatura de ecuaciones diferenciales, principalmente en el tema de modelaje de las ecuaciones diferenciales de primer orden, esto por dos razones principales, la primera la asignatura de ecuaciones diferenciales forma parte de la mayoría de las retículas de ingeniería, principalmente aquellas ingenierías relacionadas con procesos industriales, mecánica y electricidad, y la segunda porque el tema de aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden son la base de las siguientes temáticas de la asignatura, además de la posibilidad de reducir los índices de reprobación ya que la mayoría de los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de las metodologías y procedimientos para la solución de este tipo de problemas.

Referente teórico

Cuando se habla del aprendizaje de las Matemáticas se relaciona de manera inherente con la resolución de problemas con el método algorítmico y la aplicación de fórmulas. Para la gran mayoría de estudiantes y docentes la resolución de un gran número de ejercicios de manera tradicional (en ambiente lápiz y papel) garantiza que tendrán un mejor aprendizaje; pero la experiencia ha mostrado que esto no es del todo cierto, ya que muchas veces estos ejercicios abordados de manera mecánica solo nos enseñan a emplear un único patrón de solución y sin que exista una verdadera comprensión del tema, que se ve reflejado cuando se presenta una ligera diferencia en algún ejercicio que exija una recurrencia lógica y creativa al conjunto de conocimientos y la consecuencia es que el estudiante abandona o fracasa (García, 2010).

Por otra parte, el método Pólya dentro de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemáticas ayuda a despertar el interés en el estudiante y disminuir el temor al momento de resolver problemas matemáticos lo cual es un reto para el docente, porque constituye un proceso continuo que se enriquece a través de la práctica y ejercitación de problemas en matemáticas. El método de George Pólya consiste en cuatro fases o pasos: Entender el problema, Diseñar un plan, Ejecutar el plan y Examinar la solución (Escalante, 2015), estos pasos son muy parecidos con el proceso de modelado matemático (Cruz, 2010): para un determinado problema establecer metas, proponer posibles soluciones, formular el problema en términos matemáticos, solucionarlo e interpretar los resultados, lo que significa que de manera inconsciente empleamos el método de Pólya para solucionar problemas mediante el modelado matemático.

De acuerdo a Nejad y Bahmaei (2012) la enseñanza con el modelado matemático favorece el desarrollo de importantes habilidades para resolver problemas lo cual es un efecto positivo en los estudiantes.

El modelado matemático es una herramienta que proporciona las siguientes ventajas en el proceso académico en el aula (Nejad y Bahmaei, 2012):

- Ayuda al estudiante a comprender mejor el escenario en el que se desarrolla.
- Refuerza el aprendizaje de las matemáticas (motivación).
- Estimula el desarrollo de algunas habilidades actitudinales de tipo matemático.
- Coadyuva a tener una mejor óptica de las matemáticas.

Por otra parte, Rendón y Esteban (2013) consideran que el modelado matemático es una opción mediante la cual los estudiantes puedan formar una realidad y responder a los requerimientos de un conocimiento puntual y la capacidad de aplicarlo en un determinado contexto, por lo tanto, el modelado matemático es una herramienta en la formación en el área de las matemáticas durante el proceso de profesionalización en ingeniería.

En el proceso de formación del ingeniero es necesario incluir actividades conectadas con la vida real, de tal manera que como estudiante se motive al acercarse a situaciones y problemas de la realidad durante su proceso formativo, y así logre desarrollar al máximo sus capacidades. En función de esto, el modelado matemático se convierte en un instrumento para el estudiante, ya que con su utilización el estudiante logra construir una representación, estructurada y matematizada, de la realidad, y obtener así un verdadero sentido en su proceso de formación (Rendón y Esteban, 2013).

Metodología

La metodología empleada en la realización del proyecto es la siguiente (Biembengut y Hein, 2007; Perdomo, 2010):

1. Identificación de las principales dificultades de los estudiantes en la solución de problemas de aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden. En la actualidad hay una gran variedad de estudios sobre la enseñanza de las matemáticas y sus problemáticas, de acuerdo con Guerrero, Camacho y Mejía (2010) las principales dificultades que presentan los alumnos en la asignatura de ecuaciones diferenciales son:

    - Los estudiantes memorizan los conceptos de cálculo y ecuaciones diferenciales, pero no logran aplicar dichos conceptos en nuevos contextos o problemas reales.

- Los estudiantes no logran expresar los resultados obtenidos de manera gráfica a la forma algebraica, es decir, no logran hacer uso del registro algebraico para justificar las afirmaciones obtenidas de manera visual.
- Los estudiantes presentan problemas cognitivos para establecer relaciones entre los resultados gráficos y algebraicos obtenidos con el contexto del problema.
- Los estudiantes olvidan que las soluciones de las ecuaciones diferenciales son funciones y no números, tratando siempre de buscar un valor numérico en lugar de una familia de soluciones, lo cual es consecuencia de un mal entendimiento de los conceptos básicos de funciones y derivadas de una función.

Es importante mencionar, que para el desarrollo de este proyecto se seleccionó a un grupo conformado por 19 alumnos del programa educativo de ingeniería en industrias alimentarias, 6 alumnos del programa educativo de ingeniería electromecánica y 2 alumnos del programa educativo de ingeniería en sistemas computaciones, los cuales por observación y resultados en las evaluaciones continuas de la asignatura, se detectó que presentaban las dificultades mencionadas, aunado a esto y por la diversificación de perfiles se consideraron como un grupo apto para la aplicación de la técnica de modelado matemático como herramienta para la enseñanza aprendizaje, que les permite visualizar y comprender la relación que existe entre la asignatura con su profesión así como su importancia en la vida cotidiana.

2. Selección del problema-ejemplo a estudiar.

   Para la modelación matemática se consideró emplear el problema típico de aplicación de la ley de enfriamiento de Newton, ya que es un problema que se adapta muy bien a cada uno de los perfiles de los programas educativos que conforman el grupo.

3. Selección del software matemático.

   Se hizo una lista del posible software a emplear en el estudio, después se llevó a cabo un filtro de éstos para lo cual se tomó en cuenta que fuera gratuito, multiplataforma y sobre todo, permitiera realizar la solución tanto gráfica como numérica de ecuaciones diferenciales. Con base en esto se eligió *Scilab*, principalmente por dos razones: La primera es que cuenta con paquetes y librerías especializadas para la resolución de problemas con valor inicial modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias, y la segunda, es la sencillez de su sintaxis tanto para la resolución como para graficación ya que se obtienen resultados numéricos en forma de vectores (Pastrana, Avellaneda y Aramayo, 2010).

4. Formulación del Modelo Matemático

   Para la formulación del modelo, primero el investigador solicitó la realización de una investigación documental sobre la ley de enfriamiento de Newton, así como su aplicación en la ingeniería; después se explicó un ejemplo (sin uso de software) de aplicación de esta ley en la solución de problemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, posteriormente se introdujo el modelo obtenido del ejemplo en *Scilab*, con la finalidad de que los alumnos pudieran visualizar la manera en que da solución a este tipo de problemas y el uso del software.

5. Por último, se les entregó una orden de trabajo con las instrucciones y el problema a resolver.

   El problema es el siguiente (Bronson y Costa, 1998):

   Se coloca una barra de metal a 100°F en un cuarto a temperatura constante de 0°F. Si después de 20 minutos, la temperatura de la barra es de 50°F, encuentre a) El tiempo que tomará para que la barra alcance la temperatura de 25°F y b) la temperatura de la barra luego de 10 minutos.

   Obtención del modelo:

   Aplicando la ley de enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} + kT = T_m$$

   Sustituyendo $T_m = 0$, y resolviendo la ecuación diferencial se obtiene:

$$T = Ce^{-kt}$$

   Considerando $T = 100$ y $t = 0$ tenemos:

$$100 = Ce^{-k(0)}$$

$$100 = C$$

   Por lo tanto:

$$T = 100e^{-kt}$$

   Para obtener el valor de la constante k sustituimos las condiciones iniciales $t = 20$ y $T = 50$

$$50 = 100e^{-20k}$$

$$k = -\frac{1}{20} ln\left(\frac{50}{100}\right) = -\frac{1}{20}(-0693) = 0.035$$

$$T = 100e^{-0.035t}$$

6. Resolución del problema a partir del modelo

   La primera parte del problema solicita el tiempo para que se alcance una $T = 25$. Sustituyendo en el modelo obtenido se obtiene:

$$25 = 100e^{-0.035t}$$

   Despejando y resolviendo:

$$-0.035t = ln\frac{1}{4}$$

$$t = 39.6\, minutos \approx 40\, minutos$$

La segunda parte del problema solicita la temperatura cuando $t = 10$. Sustituyendo en el modelo, despejando y resolviendo para T, tenemos:

$$T = 100e^{(-0.035)(10)} = 100(0.705) = 70.5°F$$

7. Interpretación de la solución y validación del modelo.

Para la validación del modelo se introdujo en *Scilab* (ver Figura 1):

```
close
clear
clc
exec('f.sci',-1);
Y0=100;
T0=0;
t=linspace(0,100)
y=ode(Y0,T0,t,f)
plot(t,y)
title('Solución de la ED con Ode()')
xlabel('tiempo de la solución (t)')
ylabel('Y(t)')
xgrid
```

Figura 1. Código en *Scilab*.

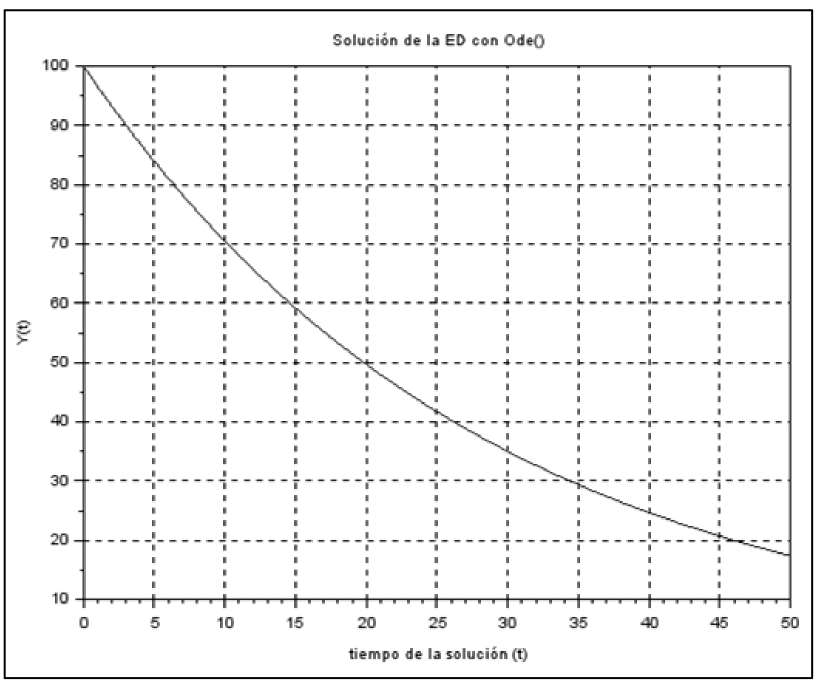


Figura 2. Solución Grafica al Problema.

Como se puede observar en la Figura 2, el tiempo requerido para que la barra de metal llegue a una temperatura de 25°F es de 40 minutos, mientras que a los 10 minutos ésta alcanza 70°F. Los resultados obtenidos de manera analítica con el *Scilab* coinciden con los resultados mostrados en el libro de donde fue extraído el ejercicio.

Resultados

Los resultados obtenidos son:

- De acuerdo con las observaciones del docente, los alumnos se mostraron muy motivados al trabajar con el software en comparación con las clases tradicionales.
- La actividad se realizó de manera cordial y tranquila.
- Se generaron interacciones entre los alumnos y el profesor, que llevaron a la solución de las actividades de manera exitosa.
- Los alumnos emplearon las interfaces algebraica y gráfica del software.
- Se fomentó el trabajo en equipo.
- Los alumnos aprendieron a expresar sus ideas respecto a los procedimientos y conceptos involucrados en las actividades mediante la realización del reporte.
- Los estudiantes cuentan con una herramienta que les permite dar solución a problemas matemáticos de manera rápida y sencilla.
- Los alumnos aprendieron a visualizar y experimentar con ayuda del software problemas de aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Conclusiones

Se evidencia el aprendizaje de los estudiantes, así como el logro de competencias, también la capacidad de razonar del estudiante, que no es repetitivo o mecánico de una teoría, que sea capaz de descubrir y facilitar el uso de estrategias que apoyen en la resolución de problemas o todo aquello que necesita solución.

Desde el punto de vista pedagógico, se hace hincapié en la importancia de la concientización de los docentes sobre el uso de las TIC y el modelado matemático a manera de que logren hacer esfuerzo racional por transmitir a sus estudiantes el proceso interno de pensamiento desarrollado al modelizar una situación. En base a la idea anterior se plantea como futuro trabajo la investigación en el proceso de enseñanza sobre la modelación matemática en los docentes y la manera en que los profesores logran emplearla como una herramienta de transmisión del conocimiento.

Referencias bibliográficas

Biembengut , M. S., y Hein, N. (2007). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, *16*(2), 105-125.

Bronson , R., y Costa, G. (1998). *Ecuaciones Diferenciales* (Tercera ed.). México: McGrawHill.

Cruz, C. (2010). La enseñanza de la modelación matemática en ingeniería. *Revista de la Facultad de Ingeniería Universidad Central de Venezuela*, *25*(3), 39-46.

Escalante, S. B. (2015). *Método Pólya en la resolución de problemas matemáticos.* Recuperado el 22 de Julio de 2017, de http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesisjcem/2015/05/86/Escalante-Silvia.pdf

García, J. (2010). Aplicación de la estrategia de resolución de problemas en la enseñanza de Física, Química y Matemáticas en la USTA. *Hallazgos*(14), 129-148.

Guerrero, C., Camacho, M., y Mejía, H. R. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 341–352.

Nejad, N., y Bahmaei, F. (2012). Mathematical modelling in university, advantages and challenges. *Journal of Mathematical Modelling and Applications, 1*(7), 34-49.

Pastrana , L. I., Avellaneda, G. I., y Aramayo, A. M. (2010). *Utilización de Scilab en la enseñanza de métodos númericos para resolución de ecuaciones diferenciales.* Recuperado el 30 de Julio de 2017, de http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem10/memorias/comunicaciones/Relatos/CB%2060.pdf

Perdomo, J. (2010). *Construcción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en escenarios de resolución de problemas.* España: Servicio de Publicaciones Universidad de la Laguna.

Rendón, P. A. y Esteban, P. V. (2013). *La modelación matemática en ingeniería de diseño.* Recuperado el 15 de Junio de 2017, de http://funes.uniandes.edu.co/2357/1/rendonestenban387-483-1-DR1.pdf.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 1 Fecha: enero-junio de 2019

ISSN: 2395-955X

UN ACERCAMIENTO DINÁMICO A LA INTEGRAL DESDE UN PUNTO DE VISTA VARIACIONAL: FUNCIONES APROXIMADAS DE ACUMULACIÓN

José Ramón Jiménez Rodríguez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

Para citar este artículo:

Jiménez, J. R. (2019). Un acercamiento dinámico a la integral desde un punto de vista variacional: funciones aproximadas de acumulación. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 1, pp. 44-65. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 1, enero-junio de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

UN ACERCAMIENTO DINÁMICO A LA INTEGRAL DESDE UN PUNTO DE VISTA VARIACIONAL: FUNCIONES APROXIMADAS DE ACUMULACIÓN

José Ramón Jiménez Rodríguez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

jimenez@mat.uson.mx

Palabras clave: función integral, pensamiento variacional, razón de cambio, acumulación.

Resumen

Se presenta un acercamiento dinámico a la integral (la integral como función del límite superior) desde un punto de vista variacional (matematización de las magnitudes variables). Desde este punto de vista, el significado de la integral es el de acumulación, misma que tiene lugar como efecto de cierta razón instantánea de cambio, y el desarrollo de dicho significado se apoya en las intuiciones de los estudiantes. El principal mérito de este acercamiento consiste en poner de manifiesto la relación estrecha entre razón de cambio (derivada) y acumulación (integral). Se detalla la primera parte de este enfoque, consistente en la construcción de funciones aproximadas de acumulación, a partir de funciones exactas de razón de cambio.

Key Word: integral function, variational thinking, rate of change, accumulation.

Abstract

We present a dynamic approach to the integral (the integral as a function of the upper limit) from a variational point of view (mathematization of variable quantities). From this point of view, the meaning of the integral is that of accumulation, which takes place as the effect of a certain instantaneous rate for change, and the development of that meaning is based on the intuitions of the students. The main merit of this approach is to show the close relationship between rate of change (derivative) and accumulation (integral). The first part of this approach is detailed, consisting of the construction of approximate accumulation functions, based on exact rate of change functions.

Algunas deficiencias del acercamiento tradicional a la integral

Como lo han señalado varios autores (Orton, 1993; Thompson, 1994; Thompson y Silverman, 2007; Kouropatov, 2008), el enfoque habitual para la enseñanza de la integral, uno de los conceptos fundamentales del Cálculo, no es el que resulta más apropiado ni para entender sus aplicaciones a múltiples problemas de la ciencia y la tecnología, ni tampoco para favorecer el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante. Bajo este enfoque primeramente se introduce la integral indefinida como una operación inversa a la derivación (antiderivada), y luego se presenta una versión estática del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) en el que aparece la integral definida: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Enseguida se procede a desarrollar el significado o interpretación geométrica de ésta, como área debajo de una curva. Luego se pasa a estudiar el cálculo de volúmenes, longitudes de arco, masas, etcétera, es decir, las aplicaciones de la integral definida.

Este enfoque adolece de serias deficiencias, tanto desde el punto de vista didáctico como del lógico. En primer lugar, si la integral es una "antiderivada", resulta paradójico constatar que en muchas de las aplicaciones prácticas de la integral es necesario recurrir a diversas técnicas numéricas para calcularla, ya que la antiderivada en cuestión no se puede expresar algebraicamente. En Estadística, por ejemplo, es frecuente el cálculo de distintos valores numéricos de la integral $\int e^{-x^2}dx$, para la cual no existe una expresión algebraica explicita para la antiderivada, que pueda ser sustituida en el TFC.

En segundo lugar, si la integral es una fórmula para calcular un "área", a muchos estudiantes les resulta raro que esa misma fórmula también se emplee para calcular volúmenes y longitudes, y aún mucho más raro que sea la herramienta apropiada para calcular el valor numérico de magnitudes que claramente no son de naturaleza geométrica, como el trabajo mecánico, la distancia recorrida, la carga eléctrica, etcétera. En consecuencia, difícilmente llegan a discernir por si mismos en qué contextos resulta apropiado recurrir al cálculo de integrales definidas.

En tercer lugar, el acercamiento a la integral como límite de las sumas "superiores" e "inferiores" de Riemann, como está suficientemente documentado en la investigación educativa relacionada con el Cálculo y el Pensamiento Matemático Avanzado, es cognitivamente problemático (Wagner, 2016).

En cuarto lugar, el hecho de privilegiar el estudio de la integral definida, con límites fijos, ($\int_a^b f(x)dx$) no solamente obstaculiza la comprensión de la integral como función ($\int_a^x f(t)dt$), sino que favorece la formación y permanencia en la mente de los alumnos de una imagen estática de este importante concepto. Este problema es análogo al que se presenta con el estudio de la derivada en un punto, previo al estudio de la derivada como función.

Un enfoque variacional basado en la noción de acumulación

Thompson (1994), así como Thompson y Silverman (2007) y Kouropatov (2008) han propuesto un acercamiento a la noción de integral que pretende superar estas deficiencias, y a la vez contribuir al entendimiento más profundo de su significado y aplicaciones: *considerar a la integral como una función de acumulación en un sentido simple, como una suma que consta de un gran número de términos muy pequeños*. Este enfoque se basa en el hecho de que el concepto de acumulación está en el centro de muchas de las aplicaciones prácticas del Cálculo Integral, y es dinámico porque se enfoca en las ***funciones de acumulación*** $\int_a^x f(t)dt$, y no en los valores concretos de cierta cantidad acumulada $\int_a^b f(x)dx$. Además, permite establecer una clara conexión entre diferentes conceptos fundamentales: acumulación, integral definida e indefinida, así como sus relaciones con el significado de la derivada como razón instantánea de cambio. De este modo, se trata de un enfoque eminentemente variacional.

Una idea variacional fundamental

Una manera de pensar variacional que es fundamental en el estudio del Cálculo es la idea intuitiva de que, por más rápido o mucho que cambie una magnitud variable, si procedemos a analizarla en pequeños intervalos no tendrá oportunidad de cambiar de manera significativa. Esta idea intuitiva yace en el corazón del Cálculo. Por ello, algunos autores consideran que el Cálculo es una especie de "cámara fotográfica instantánea" para analizar las magnitudes variables. Esta alegoría con una cámara fotográfica de alta velocidad es útil. Tratemos de ilustrarla considerando dos procesos que, en relación con nuestra experiencia cotidiana, transcurren "muy rápido".

El movimiento de una bala es un buen ejemplo. Las balas de pistola y revólver habitualmente se mueven a una velocidad ligeramente inferior a la del sonido, que es de aproximadamente 340 m/seg. En cambio, las balas de fusil y ametralladora se mueven a velocidades superiores a ésta, en dos o tres veces (hasta 1000 m/seg). Sin embargo, con las tecnologías actuales es posible fotografiar balas de modo que parezcan inmóviles.

El aletear de un colibrí es otro buen ejemplo, muy bello, además. El colibrí bate sus alas unas sesenta veces por segundo. En un sesentavo de segundo mueve sus alas hacia adelante y de regreso hacia atrás una vez. De modo que, si fotografiamos al colibrí con una exposición de 1/60 de segundo, sus alas aparecerán borrosas en la fotografía. Para obtener una imagen nítida de las alas del colibrí es necesario tomar la foto con una exposición de al menos una milésima de segundo.

Estos dos ejemplos nos ilustran de manera elocuente la idea básica del Cálculo para analizar el comportamiento de las magnitudes variables: por más rápido que una magnitud variable cambie, si la observamos en pequeños intervalos no tendrá oportunidad de cambiar mucho, casi no cambiará, y para fines prácticos en ocasiones podremos considerar que no cambia, es decir, que se mantiene constante. Las razones de cambio también son magnitudes variables, y quedan comprendidas en esta visión. Una razón de cambio variable puede ser considerada como una razón de cambio que va cambiando por instantes, por pequeños intervalos, manteniéndose constante (o cambiando muy poco, casi sin cambiar) en el transcurso de cada uno de dichos intervalos.

El problema práctico que genera esta interpretación del comportamiento de las magnitudes variables, y que debemos resolver de manera igualmente intuitiva, es el siguiente: ¿cómo podemos determinar o calcular el valor constante (o casi constante) de una magnitud variable en cierto intervalo?

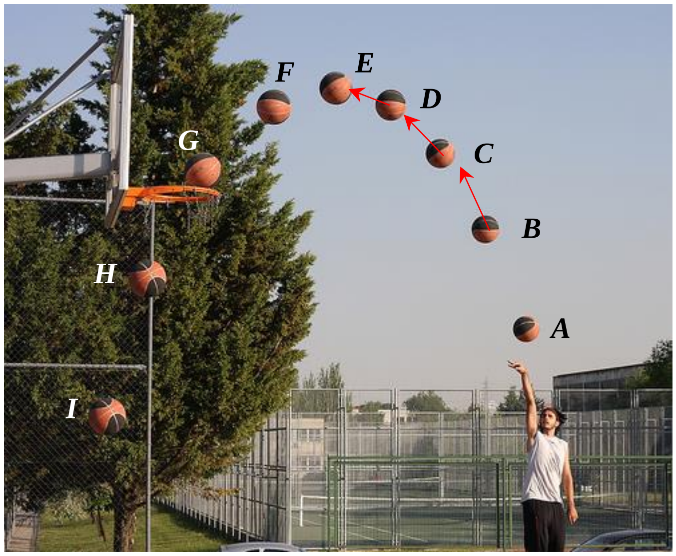


Figura 1. Superposición de fotografías de alta velocidad del movimiento de un balón de basquetbol al ser lanzado a la canasta. En todo momento, la velocidad del balón cambia.

Para acercarnos a una posible respuesta a esta pregunta, consideremos el caso del movimiento de un balón de basquetbol al ser lanzado hacia la canasta (Figura 1; es una composición de varias fotografías). Es bien sabido que, en todo momento, la velocidad del balón cambia. Sin embargo, de acuerdo con la interpretación del comportamiento de las magnitudes variables que formulamos más arriba, podemos considerar que dicha velocidad casi no cambia (se mantiene constante) por intervalos. Tomemos como ejemplo los intervalos temporales a los que fueron tomadas cada una de las fotografías superpuestas. En cada uno de esos instantes, el balón de basquetbol tiene cierta velocidad exacta, que cambia de un instante a otro. Supongamos que, por alguna razón, conocemos los valores exactos de la velocidad del balón de basquetbol en cada uno de dichos instantes. ¿Cómo podemos, a partir de esa información, determinar un valor constante para la velocidad del balón durante todo un intervalo, por ejemplo, el comprendido entre las posiciones B y D del balón? ¿O para cualquier otro intervalo? En otras palabras: si conocemos las velocidades exactas $v(B)$ y $v(D)$ del balón de basquetbol en las posiciones B y D respectivamente (o en cualesquier otras dos posiciones), ¿cómo podemos determinar una velocidad constante del balón para todo el intervalo entre dichas posiciones (aunque ya sabemos que en realidad la velocidad del balón siempre cambia)?

No resulta difícil entender que una decisión o hipótesis racional consiste en tomar la velocidad exacta $v(B)$ del balón al inicio del intervalo (la velocidad ***inicial***, es decir, la velocidad en la posición B) como la velocidad constante para todo el intervalo (entre las posiciones B y D). Esto es equivalente a "congelar" la velocidad del balón en todo el intervalo, manteniéndola igual a la velocidad $v(B)$. En este caso estaremos suponiendo que la velocidad $v(B)$ con la que el balón parte de B es también la misma velocidad con la que llega a D. Dado que en su trayectoria ascendente, como es bien sabido, el balón va disminuyendo su velocidad, tenemos que en realidad la velocidad exacta del balón en la posición B es mayor que su velocidad exacta en la posición D. Esta diferencia entre los valores exactos de la velocidad deberá ser menor cuanto menor sea el intervalo. Por ello esta decisión es racional, a pesar del hecho de que, siendo mayor $v(B)$ que $v(D)$, si el balón continuara moviéndose a partir de la posición B con la misma velocidad que tiene allí, llegará un poco más alto que la posición D.

De aquí resulta que otra decisión o hipótesis (también racional) que podemos asumir es tomar la velocidad exacta $v(D)$ al final del intervalo (la velocidad ***final***, es decir, la velocidad en la posición D) como la velocidad constante del balón durante todo el intervalo (entre las posiciones B y D). En este caso estaríamos suponiendo que la velocidad $v(D)$ con la que llega el balón a D es también la misma velocidad con la que parte de B. Dado que en la realidad la velocidad exacta del balón en la posición D es menor que su velocidad exacta en la posición B, resulta obvio que si el balón parte de B con velocidad igual a $v(D)$ y la mantiene constante durante todo el intervalo, llegará un poco más abajo de la posición D.

Al entender y comparar las dos situaciones hipotéticas que hemos descrito, la idea que de inmediato se viene a la mente es tratar de compensar de algún modo el hecho de en el primer caso tomamos una velocidad mayor que la real como velocidad constante en todo el intervalo, mientras que en el segundo caso tomamos una velocidad menor que la real. Así pues, promediar estas dos velocidades (velocidad *inicial* y velocidad *final*) parece una buena idea. En otras palabras, una decisión o hipótesis que parece aún más racional que las dos anteriores consiste en tomar el ***promedio*** de las velocidades exactas $v(B)$ al inicio del intervalo y $v(D)$ al final del mismo, como la velocidad constante para todo el intervalo. En este caso esperaríamos que, al partir el balón de basquetbol de la posición B con velocidad igual a $\frac{v(B)+v(D)}{2}$ (el promedio de las velocidades inicial y final) y mantener dicha velocidad durante todo el intervalo, llegará exactamente a la posición D, o al menos a una posición mucho más cercana a D que en los dos casos anteriores.

Por último, consignemos que también es posible una cuarta decisión racional respecto a cómo determinar una velocidad constante para todo el intervalo, desde la posición B hasta la posición D. Parece razonable suponer que, si la velocidad del balón en todo momento está cambiando (en este caso, está disminuyendo mientras el balón avanza hacia su posición más alta), la velocidad exacta del balón en el ***medio*** del intervalo podría servir como velocidad constante para todo el intervalo. En este caso, se trata obviamente de la velocidad del balón en la posición C, es decir, $v(C)$. También parece razonable suponer que esta velocidad es igual al promedio de las velocidades inicial y final, esto es, suponer que $v(C) = \frac{v(B)+v(C)}{2}$. Como sabemos, en este caso la hipótesis es verdadera, pero se trata de una coincidencia; en general *no se cumple*. De modo que efectivamente tenemos una cuarta posibilidad: tomar como velocidad constante para todo el intervalo el valor exacto de la velocidad a la mitad del intervalo.

Modelando una razón de cambio variable mediante una razón de cambio constante por intervalos.

Las ideas que acabamos de discutir también son aplicables a las razones de cambio, ya que éstas también son magnitudes variables. En otras palabras, una cierta razón de cambio variable $r(x)$ puede ser reemplazada, en un intervalo dado de valores de x que van desde cierto valor inicial x_i hasta cierto valor final x_f, de cualquiera de las siguientes cuatro maneras:

- en todo el intervalo desde x_i hasta x_f, se toma el valor exacto de la razón de cambio variable en el inicio del intervalo, esto es, $r(x_i)$, como el valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo;
- en todo el intervalo desde x_i hasta x_f, se toma el valor exacto de la razón de cambio variable al final del intervalo, esto es, $r(x_f)$, como el valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo;
- en todo el intervalo desde x_i hasta x_f, se toma el promedio de los valores exactos de la razón de cambio variable al inicio y al final del intervalo, esto es, $\frac{r(x_i)+r(x_f)}{2}$, como el valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo;
- por último, en todo el intervalo desde x_i hasta x_f, se toma el valor exacto de la razón de cambio variable en el punto medio del intervalo, esto es, $r\left(\frac{x_i+x_f}{2}\right)$, como el valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo.

Enfatizamos el hecho de que esta sustitución es racional si el intervalo en cuestión es relativamente pequeño. Cuando analizamos el comportamiento de una razón de cambio en un intervalo de tamaño considerable, podemos aplicar esta misma idea dividiendo dicho intervalo en un conjunto de subintervalos pequeños, y aplicando en cada uno de ellos cualquiera de las cuatro maneras de sustitución ya descritas, o bien todas. De este modo tendremos que una razón de cambio variable en un intervalo relativamente grande puede ser sustituida por una razón de cambio que es constante por pequeños intervalos.

Un acercamiento dinámico y variacional al concepto de integral

Desde el punto de vista didáctico, la puesta en escena del enfoque propuesto por Thompson y Silverman (2007) y Kouropatov (2008) para el estudio del concepto de integral requiere poner atención a varios detalles cruciales. Esta estrategia se desarrolla en dos fases o etapas. En la primera de ellas, a partir de funciones exactas de razón de cambio se construyen funciones aproximadas de acumulación, mientras que en la segunda se obtienen funciones exactas de acumulación a partir de funciones aproximadas de acumulación. En este trabajo se aborda sólo la primera fase.

Supongamos que es conocida la expresión algebraica explícita $r(x)$ para la razón instantánea de cambio de cierta magnitud variable R, que depende de otra magnitud variable independiente x, misma que puede tomar valores numéricos en cierto dominio $a \leq x \leq b$. En otras palabras, son conocidas dos cosas:

a) la expresión algebraica explícita $r(x)$ para cierta razón instantánea de cambio, y

b) el hecho de que $r(x) = \frac{dR}{dx}$, donde $a \leq x \leq b$.

En estas condiciones, la tarea consiste en encontrar la expresión algebraica explícita $R(x)$ de la magnitud variable R en términos de x, para cualquier valor permisible de ésta en el dominio dado, $a \leq x \leq b$.

Como señalamos anteriormente, la estrategia para implementar este enfoque variacional deberá ser *dinámica*, lo que significa que deberemos considerar a x como una auténtica variable, es decir, asumir el hecho de que x toma consecutivamente distintos valores numéricos en distintos momentos, comenzando con su *valor inicial* $x_0 = a$, pasando por su *valor actual* x, y llegando hasta su *valor final* $x_f = b$. En concreto, ahora será necesario proceder como sigue.

Primera fase: funciones aproximadas de acumulación.

Primer paso. Elegir un valor arbitrario (sujeto a las restricciones para la variable independiente) para x, y también un valor arbitrario positivo para Δx. Dividir el intervalo de valores permisibles de la magnitud variable independiente x, que va de su *valor inicial* $x_0 = a$ hasta su *valor actual* x (esto es, el intervalo $a \leq x$), en "pequeños" intervalos de un mismo tamaño Δx, que con objeto de mejorar nuestra aproximación a la solución podremos cambiar haciéndolo aún más pequeño. Está claro que tal división solo por coincidencia arrojará un número exacto de "pequeños" intervalos. Entonces también habrá que determinar la cantidad n de subintervalos completos de tamaño Δx, y la longitud δx del segmento incompleto.

Segundo paso. Expresar analíticamente y graficar la función de razón de cambio constante por intervalos $f(x)$, con la que sustituiremos a la razón de cambio siempre variable $r(x)$, en el dominio $a \leq x$. Como hemos visto anteriormente, existen cuatro maneras de realizar esta sustitución, por lo que habrá cuatro funciones de razón de cambio constante por intervalos. Éstas son las funciones aproximadas de razón de cambio.

Tercer paso. Expresar analíticamente y graficar la función aproximada de acumulación $F(x)$ de la magnitud variable de interés, para cualquier valor numérico permisible de x en el dominio $a \leq x \leq b$. En concordancia con las cuatro posibilidades consignadas en el paso anterior, también habrá cuatro funciones aproximadas de acumulación, para el mismo problema.

Cuarto paso. Analizar en conjunto esas cuatro soluciones aproximadas, y extraer conclusiones válidas sobre el comportamiento de la magnitud variable acumulada.

Aunque en su enunciado estos cuatro pasos parecen de fácil ejecución, en la práctica y sobre todo en los primeros intentos no lo son, ya que cada uno de ellos requiere de varias acciones. Por esta razón, para aplicar esta estrategia dinámica tomaremos como ejemplo ilustrativo el movimiento oscilatorio de una masa atada al extremo de un resorte, observado durante un periodo de 10 segundos, y en el que la razón de cambio instantánea que en él figura es la velocidad instantánea de la masa, dada por $v(t) = 5\cos t$. Se trata de encontrar la posición $y(t)$ de la masa, medida con respecto al punto de equilibrio $y_0 = y(0) = 0$.

De este modo, el problema de acumulación que queremos resolver se puede plantear algebraicamente como sigue:

El problema del resorte.

Dados $v(t) = \frac{dy}{dt} = 5\cos t$, $a \leq t \leq 10$ y $0 \leq a$, encontrar una expresión algebraica explícita para $y(t)$.

Aplicando la estrategia dinámica a la resolución de un problema.

Analicemos con detalle la aplicación de esta estrategia al problema que acabamos de enunciar.

Primer paso. Dividir el intervalo de valores permisibles de la magnitud variable independiente t, que va desde su *valor inicial* $t_0 = a$ hasta su *valor actual* t (esto es, el intervalo $a \leq t$), en "pequeños" intervalos de un mismo tamaño Δt.

Está claro que, para poder llevar a cabo este primer paso, es necesario realizar al menos las siguientes dos acciones:

A1. Escoger el valor inicial $t_0 = a$ de la magnitud variable independiente.

A2. Escoger el tamaño Δt de los "pequeños" intervalos en que se dividirá al intervalo de valores numéricos de t, desde su valor inicial $t_0 = a$ hasta su valor actual t.

Una vez ejecutadas estas dos acciones, resulta posible realizar la tercera:

A3. Dividir el intervalo dado $a \leq t$ en "pequeños" intervalos de tamaño Δt.

La Figura 2 ilustra dos de las muchas formas en que esto puede hacerse, dado que tanto los valores numéricos de a como los de Δt pueden hacerse variar.

$a = 2.35$, $t = 7.35$, $\Delta t = 0.4$.

$a = 3.6$, $t = 8.5$, $\Delta t = 0.65$.

Figura 2. El primer paso de la estrategia dinámica: División del intervalo.

Segundo paso. Expresar analíticamente y graficar la función de razón de cambio constante por intervalos $f(t)$, con la que procederemos a sustituir la razón de cambio siempre variable $v(t)$, en el dominio $a \leq t$.

Este segundo paso exige definir, para todo valor actual de t en cada uno de los "pequeños" intervalos considerados en el paso anterior, un cierto valor numérico para la velocidad constante del móvil en cada uno de dichos intervalos. Tenemos entonces que la ejecución del segundo paso requiere, a su vez, de la ejecución de al menos las siguientes tres acciones:

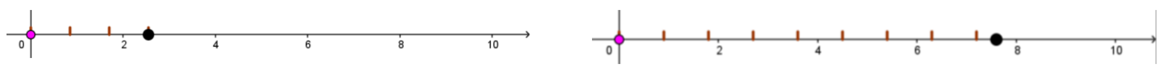
A4. Determinar la abcisa del punto inicial del intervalo de tamaño Δt en el que actualmente se ubica el valor de t, independientemente del hecho de que se haya completado o no dicho intervalo. Representemos tal abcisa mediante t_{ini} .

A5. Determinar la abcisa del punto final de este mismo intervalo. Representemos tal abcisa mediante t_{fin} .

A6. Determinar la abcisa del punto medio del mismo intervalo. Representemos tal abcisa mediante t_{med}.

Sólo cuando hayamos ejecutado estas tres acciones podremos determinar las respectivas velocidades instantáneas (al inicio, al final o a la mitad de cada intervalo, o bien promediar las velocidades inicial y final en el intervalo), que serán tomadas como la velocidad constante en todo el intervalo.

Determinando el número n de intervalos. A su vez, para determinar correctamente las abcisas, tanto de los puntos extremos como del punto medio de cada uno de los "pequeños" intervalos de tamaño Δt, necesitamos previamente determinar el número de tales intervalos que quedan comprendidos entre el valor inicial $t_0 = a$ y el valor actual t. La Fig. 3 muestra dos situaciones para el caso más simple en el que $a = 0$.



$a = 0$, $t = 2.55$, $\Delta t = 0.85$.

$n = 3$, $\delta t = 0$.

$a = 0$, $t = 7.6$, $\Delta t = 0.9$.

$n = 8$, $\delta t = 0.4$.

Figura 3. Determinando el número n de subintervalos de tamaño Δt que quedan contenidos en el intervalo de 0 a t.

No resulta difícil entender que en este caso son posibles dos situaciones, precisamente las que se ilustran en la Figura 3. En la primera de ellas ocurre que, en el intervalo de 0 a t, el segmento "pequeño" de tamaño Δt queda contenido exactamente un número entero de veces, como en la ilustración de la izquierda de la Figura 3, en donde se pueden observar tres segmentos completos de tamaño $\Delta t = 0.85$, lo que es fácil comprobar dado que $3 \times 0.85 = 2.55$. En otras palabras, tenemos que $\frac{2.55}{0.85} = 3$, o más en general, $\frac{t}{\Delta t} = n$, donde n es un entero positivo (en este caso específico, igual a 3).

En la segunda de las posibilidades, ilustrada en la imagen de la derecha de la Figura 3, el "pequeño" segmento de tamaño Δt queda contenido (en el intervalo de 0 a t) un cierto número entero de veces, pero además queda otro segmento o intervalo "incompleto", es decir, de tamaño menor a Δt. En el caso particular que se ilustra en dicho recuadro se pueden contar 8 intervalos completos de tamaño $\Delta t = 0.9$, y claramente se observa un intervalo "incompleto". Esto lo podemos constatar considerando que $8 \times 0.9 = 7.2$, de modo que el intervalo "incompleto" tiene un tamaño igual a 0.4 unidades. En este caso, $\frac{7.6}{0.9} = 8.44444$, un número fraccionario.

A fin de calcular el número n de subintervalos de tamaño Δt que quedan contenidos en el intervalo de 0 a t (o bien de a a t), debemos tomar en consideración los siguientes hechos:

- El valor numérico concreto de t puede ser interpretado geométricamente como la longitud del segmento que une al origen del eje horizontal con el punto que representa al valor actual de t;
- El valor numérico concreto de a puede ser interpretado geométricamente como la longitud del segmento que une al origen del eje horizontal con el punto que representa al valor de a;

- El valor específico de Δt representa la distancia constante entre los puntos de división o, lo que es lo mismo, la longitud de cada subintervalo; y
- El cociente $\frac{t}{\Delta t}$ (o bien el cociente $\frac{t-a}{\Delta t}$) nos da un número fraccionario, cuya *parte entera* representa el número de subintervalos que preceden al (quedan a la izquierda del) subintervalo que contiene a t, mientras que la parte decimal de este cociente corresponde a la *porción fraccionaria* del subintervalo en que se ubica el valor actual de t.

Podemos entonces concluir que el número n de intervalos completos de tamaño Δt, comprendidos en el intervalo de *0* a t, estará dado por la expresión

$$n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \ . \qquad (1)$$

En esta expresión algebraica, el símbolo [ ] se usa para representar la *parte entera* de un número, en este caso particular, del cociente $\frac{t}{\Delta t}$.

Cuando el cociente $\frac{t}{\Delta t}$ no sea un entero positivo, eso significará que además de un cierto número n (determinado mediante (1)) de intervalos completos de tamaño Δt, en el intervalo de *0* a t habrá además un intervalo "incompleto" (es decir, menor que Δt), cuyo tamaño δt está dado por la expresión $\delta t = \text{frac}\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \cdot \Delta t$, donde el símbolo frac() se usa para representar la *parte fraccionaria* de un número. Guiándonos por consideraciones de carácter geométrico, no es difícil entender que el tamaño δt del intervalo "incompleto" también se puede determinar mediante la expresión

$$\delta t = t - n\Delta t = t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ . \qquad (2)$$

Determinando las abcisas de los puntos de división del intervalo de 0 a t . Conociendo el número n de intervalos completos de tamaño Δt que quedan contenidos en el intervalo de valores de *0* a t, no resulta difícil determinar las abcisas de cada uno de los respectivos puntos de división de dicho intervalo de valores numéricos (Figura 4).

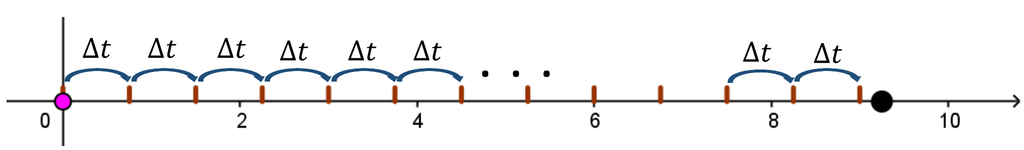


Figura 4. Determinando las abcisas de los puntos de división del intervalo de valores numéricos de *0* a t.

De la Fig. 4 resulta obvio que las abcisas de los puntos de división del intervalo comprendido entre *0* y t son las siguientes:

$\boldsymbol{a = 0}$	$\boldsymbol{a \neq 0}$
$t_0 = \mathbf{0} \cdot \Delta t = 0$,	$t_0 = a + \mathbf{0} \cdot \Delta t = a$,

$$t_{\mathbf{1}} = \mathbf{1} \cdot \Delta t = \Delta t \ , \qquad t_{\mathbf{1}} = a + \mathbf{1} \cdot \Delta t = a + \Delta t \ ,$$

$$t_{\mathbf{2}} = \mathbf{2}\Delta t \ , \qquad t_{\mathbf{2}} = a + \mathbf{2}\Delta t \ ,$$

$$t_{\mathbf{3}} = \mathbf{3}\Delta t \ , \qquad t_{\mathbf{3}} = a + \mathbf{3}\Delta t \ ,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$t_{\boldsymbol{n-1}} = (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})\Delta t = \left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 1\right)\Delta t \ , \qquad t_{\boldsymbol{n-1}} = a + (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})\Delta t = \left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 1\right)\Delta t \ ,$$

$$t_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}\Delta t = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ . \qquad t_{\boldsymbol{n}} = a + \boldsymbol{n}\Delta t = a + \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ .$$

Determinando las abcisas de los puntos inicial, final y medio del intervalo en el que actualmente se ubica el valor numérico de $\boldsymbol{t}$. Considerando todo lo anterior, podemos ahora escribir las expresiones algebraicas correspondientes a las abcisas de los puntos inicial, final y medio del intervalo en el que actualmente se ubica el valor numérico de t. Representemos estas abcisas mediante t_{ini}, t_{fin} y t_{med} respectivamente. Entonces tenemos que

$$\boldsymbol{a = 0} \qquad\qquad \boldsymbol{a \neq 0}$$

$$t_{\text{ini}} = n\Delta t = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ , \qquad t_{\text{ini}} = a + n\Delta t = a + \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ ,$$

$$t_{\text{fin}} = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t \ , \qquad t_{\text{fin}} = a + \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t \ ,$$

$$t_{\text{med}} = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \frac{\Delta t}{2} \ . \qquad t_{\text{med}} = a + \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \frac{\Delta t}{2} \ .$$

Las abcisas de los puntos inicial, final y medio del intervalo “incompleto” son respectivamente:

$$\boldsymbol{a = 0} \qquad\qquad \boldsymbol{a \neq 0}$$

$$t_{\text{ini}} = n\Delta t = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ , \qquad t_{\text{ini}} = a + n\Delta t = a + \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ ,$$

$$t_{\text{fin}} = t \ , \qquad t_{\text{fin}} = t \ ,$$

$$t_{\text{med}} = \frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right] \ \Delta t + t}{2} \ . \qquad t_{\text{med}} = \frac{a + \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \ \Delta t + t}{2} \ .$$

Determinando el valor constante de la razón de cambio para cada uno de los subintervalos. Ahora que hemos determinado las abcisas de los puntos extremos y del punto medio del intervalo en el que actualmente se ubica el valor actual de t, podemos continuar la ejecución del segundo paso. Recordemos que en este segundo paso, el objetivo consiste en determinar el valor constante para la velocidad del móvil en cada intervalo de tamaño Δt, y que esto se pue hacer de cuatro maneras. Así pues, en este segundo paso nos queda pendiente ejecutar las siguientes acciones:

A7. Determinar el valor exacto de la velocidad del móvil en el inicio de cada intervalo.

A8. Determinar el valor exacto de la velocidad del móvil en el final de cada intervalo.

A9. Determinar el valor exacto de la velocidad del móvil en el punto medio de cada intervalo.

A10. Determinar el promedio de los valores exactos de la velocidad del móvil al inicio y al final de cada intervalo.

A7) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al inicio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo:

$$v_{\mathrm{const}}(t) = v(t_{\mathrm{ini}}) = v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t\right) \ . \qquad (3)$$

En el caso del ejemplo que nos servirá de ilustración tenemos

$$v(t_{\mathrm{ini}}) = 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \ . \qquad (3.1)$$

A8) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo:

$$v_{\mathrm{const}}(t) = v(t_{\mathrm{fin}}) = v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t + \Delta t\right) . \qquad (4)$$

En el caso del resorte tenemos

$$v(t_{\mathrm{fin}}) = 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t\right) . \qquad (4.1)$$

A9) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea en el punto medio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo:

$$v_{\mathrm{const}}(t) = v(t_{\mathrm{med}}) = v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right) \ . \qquad (5)$$

Para el caso del resorte tenemos

$$v(t_{\mathrm{med}}) = 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right) . \qquad (5.1)$$

A10) En cada intervalo de tamaño Δt, el promedio de los valores exactos de la velocidad instantánea al inicio y al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo:

$$v_{\mathrm{const}}(t) = \frac{v(t_{\mathrm{ini}}) + v(t_{\mathrm{fin}})}{2}$$

$$= \frac{v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t\right) + v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t + \Delta t\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right]\cdot\Delta t\right) + v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right]\cdot\Delta t + \Delta t\right)\right\}. \qquad (6)$$

En el caso del ejemplo que nos servirá de ilustración tenemos

$$v_{\text{prom}}(t) = \frac{1}{2}\left(5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) + 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t\right)\right) \quad . \qquad (6.1)$$

Para el subintervalo "incompleto" de tamaño δt tenemos:

$$v(t_{\text{ini}}) = 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \quad ,$$

$$v(t_{\text{fin}}) = 5\cos t \quad ,$$

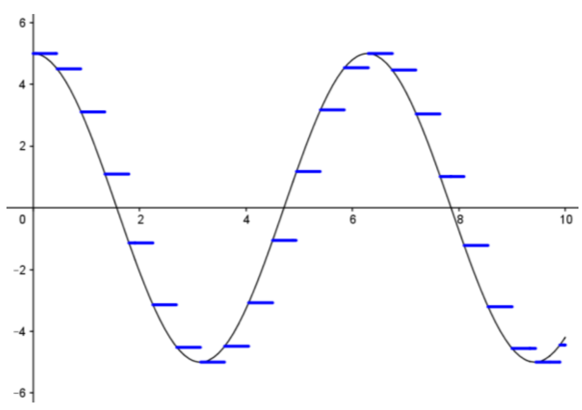
$$v(t_{\text{med}}) = 5\cos\left(\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + t}{2}\right) \quad , \qquad (7)$$

$$v_{\text{prom}}(t) = \frac{5}{2}\left(\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\ \Delta t\right) + \cos t\right) \quad .$$

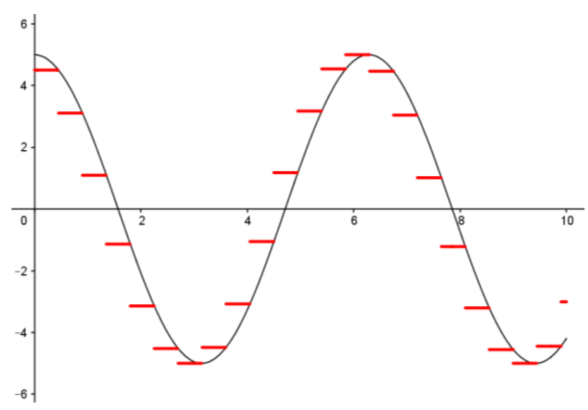
Ahora que tenemos estas expresiones algebraicas (3.1)–(6.1) y (7) para las funciones de razón de cambio constante por intervalos, nos resta en este segundo paso ejecutar la siguiente acción:

A11. Graficar cada una de las cuatro funciones aproximadas de razón de cambio constante por intervalos, obtenidas en las acciones A7–A10.

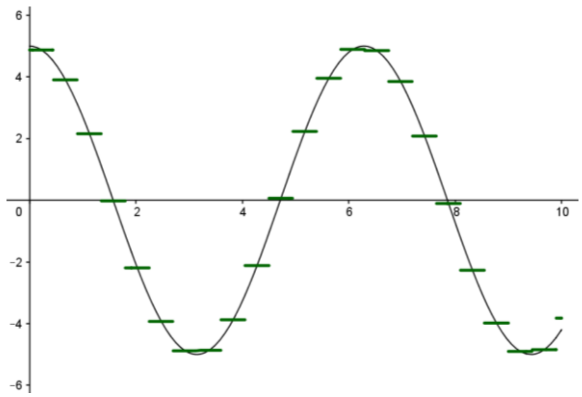
Las gráficas respectivas de velocidad constante por intervalos del movimiento de la masa en el resorte, para $a = 0$ y $\Delta t = 0.45$, se muestran enseguida en las Figs. 5a–5d. Como se puede apreciar y es congruente con lo que se esperaba, se trata de ***funciones escalonadas***.



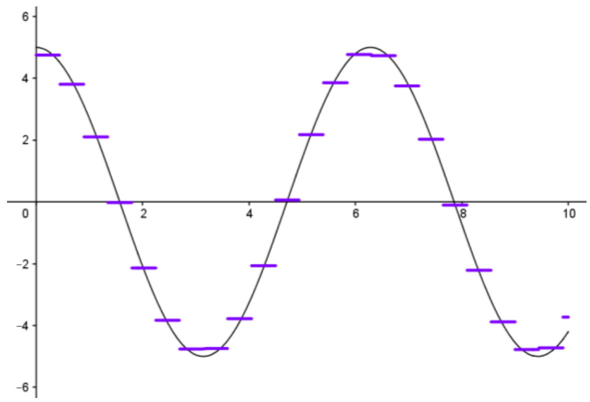
a) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al inicio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.



b) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.



c) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea en el punto medio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.



d) En cada intervalo de tamaño Δt, el promedio de los valores exactos de la velocidad instantánea al inicio y al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.

Figura 5 Gráficas de las funciones aproximadas de velocidad constante por intervalos, para el caso $v(t) = 5\cos t$, donde $0 \leq t \leq 10$.

Obteniendo funciones aproximadas de acumulación, a partir de funciones de razón de cambio constantes por intervalos.

Tercer paso. Usamos estos valores constantes de la velocidad en cada subintervalo, para aproximar el valor acumulativo de la magnitud de interés en dicho subintervalo (la contribución de dicho subintervalo a la acumulación total de la magnitud de interés). En el caso del problema que nos ocupa, dicha magnitud es la posición de la pesa en cada momento, medida con respecto al punto de equilibrio, a la que representamos mediante $y(t)$. Para calcular la aportación de cada subintervalo a la acumulación total, es importante tener presente el hecho de que en cada subintervalo la razón de cambio es constante, por lo que basta con multiplicar dicho valor constante de la razón de cambio por la duración del subintervalo, para obtener la acumulación "parcial". Posteriormente habrá que sumar las aportaciones parciales de todos los subintervalos. Veamos esto con más detalle, para la primera de las funciones aproximadas de razón de cambio.

Velocidad constante por intervalos, igual a la velocidad exacta al inicio de cada intervalo.

a) El valor actual de t cae dentro del *primer intervalo*, es decir, $0 \leq t < \Delta t$ o, lo que es lo mismo, $0 \cdot \Delta t \leq t < 1 \cdot \Delta t$, y el número de intervalos completos es $n = 0$. De acuerdo con (3.1), la velocidad constante en este intervalo es $v(0) = 5\cos 0 = 5$, mientras que el tiempo transcurrido es igual al valor de t, por lo que la posición de la pesa está dada por

$$y(t) = 5t \ .$$

b) Pasemos ahora a considerar el caso en que el valor actual de t cae dentro del *segundo intervalo*, lo que quiere decir que $1 \cdot \Delta t \leq t < 2\Delta t$. En estas condiciones se tiene que $1 \leq \frac{t}{\Delta t} < 2$, y en consecuencia $n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right] = 1$. De acuerdo con (3.1), la velocidad constante de la pesa en todo este intervalo es igual a $v(\Delta t) = 5\cos\Delta t$.

Ahora está claro que, para encontrar la posición $y(t)$ de la pesa, para cualquier valor de t comprendido entre Δt y $2\Delta t$, deberemos calcular la posición a la que llegó durante el primer intervalo, que ya quedó atrás, y a ésta agregarle la distancia adicional recorrida durante el segundo intervalo. La posición de la pesa al finalizar el primer intervalo es $y_1 = 5\Delta t$.

La distancia adicional recorrida por la pesa en el segundo intervalo se calcula multiplicando la velocidad constante en este intervalo, que según la expresión (3.1) es igual a $5\cos\Delta t$, por el tiempo durante el cual la pesa se desplaza con esta velocidad constante, que es igual a $t - \Delta t$. Entonces $y_{\text{adic}} = (5\cos\Delta t)(t - \Delta t)$, y la posición de la pesa en cualquier instante en este segundo intervalo está dada por

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)(t - \Delta t)\ .$$

c) Continuemos ahora con el caso en que el valor actual de t cae dentro del *tercer intervalo*; lo que quiere decir que $2\Delta t \leq t < 3\Delta t$ y $n = 3$. De acuerdo con (3.1), la velocidad constante de la pesa en todo este intervalo es igual a $v(2\Delta t) = 5\cos 2\Delta t$. La posición que alcanza la pesa al finalizar el segundo intervalo es $y_2 = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t$. La distancia adicional recorrida por la pesa en este tercer intervalo se calcula multiplicando la velocidad constante en este intervalo, por el tiempo durante el cual la pesa se desplaza con esta velocidad constante, que es igual a $t - 2\Delta t$. Entonces $y_{\text{adic}} = (5\cos 2\Delta t)(t - 2\Delta t)$, y la posición de la pesa en cualquier instante en este tercer intervalo está dada por

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 2\Delta t)(t - 2\Delta t)\ .$$

d) Veamos ahora el caso en que el valor actual de t cae dentro del *cuarto intervalo*; lo que quiere decir que $3\Delta t \leq t < 4\Delta t$ y $n = 4$. En este caso, la velocidad constante de la pesa es igual a $v(3\Delta t) = 5\cos 3\Delta t$. La distancia adicional recorrida por la pesa en este cuarto intervalo se calcula multiplicando la velocidad constante en este intervalo, por el tiempo durante el cual la pesa se desplaza con esta velocidad constante, que es igual a $t - 3\Delta t$. Entonces $y_{\text{adic}} = (5\cos 3\Delta t)(t - 3\Delta t)$, y la distancia acumulada en los tres intervalos completos anteriores es igual a $y_3 = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\cdot\Delta t$. La posición de la pesa en cualquier instante en este cuarto intervalo está dada por

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 3\Delta t)(t - 3\Delta t)\ .$$

d) Por último, veamos el caso en que el valor actual de t cae dentro del *quinto intervalo*; lo que quiere decir que $4\Delta t \leq t < 5\Delta t$ y $n = 5$. En este caso, la velocidad constante de la pesa es igual a $v(4\Delta t) = 5\cos 4\Delta t$. La distancia acumulada en los cuatro intervalos completos anteriores es igual a $y_4 = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 3\Delta t)\cdot\Delta t$. La distancia adicional recorrida por la pesa en este cuarto intervalo es $y_{\text{adic}} = (5\cos 4\Delta t)(t - 4\Delta t)$, y La posición de la pesa en cualquier instante en este quinto intervalo está dada por

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\Delta t + (5\cos 3\Delta t)\Delta t + (5\cos 4\Delta t)(t - 4\Delta t)\ .$$

Podríamos continuar esta línea de razonamiento hasta concluir con todos los intervalos, pero no es ése nuestro propósito. Nuestro objetivo consiste en encontrar una *fórmula general* para obtener los cinco resultados que ya tenemos, y *todos los resultados posibles*. Por ello, detengámonos por un momento a escudriñar estos resultados particulares en busca de una regularidad, lo que nos ayudará sobremanera para establecer la expresión algebraica general de nuestra función de acumulación.

La *primera* característica importante que tienen en común todos estos resultados, y que no es difícil percibir, es que *dependen del número* $\boldsymbol{n}$ *de intervalos completos* de tamaño Δt comprendidos entre *0* y el valor actual de t. Analicemos más a fondo esta dependencia.

$n = \mathbf{0}$

$y(t) = 5t$,

$n = \mathbf{1}$

$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)(t - \Delta t)$,

$n = \mathbf{2}$

$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos\mathbf{2}\Delta t)(t - \mathbf{2}\Delta t)$,

$n = \mathbf{3}$

$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos\mathbf{2}\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos\mathbf{3}\Delta t)(t - \mathbf{3}\Delta t)$,

$n = \mathbf{4}$

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\Delta t + (5\cos\mathbf{2}\Delta t)\Delta t + (5\cos\mathbf{3}\Delta t)\Delta t$$
$$+(5\cos\mathbf{4}\Delta t)(t - \mathbf{4}\Delta t)\ .$$

La *segunda característica* en común que podemos advertir en estos resultados es que todos ellos *contienen* $n + 1$ *sumandos*.

La *tercera característica* en común consiste en que, de éstos, los primeros n sumandos no dependen de t; *solamente dependen de* Δt. El último de esos sumandos depende tanto del valor actual de t como del valor de Δt.

La *cuarta característica* que podemos advertir en común en estos resultados es que el último de los sumandos que en ellos figura tiene una *misma estructura* que también depende del valor de n: es siempre igual a

$$(5\cos(\boldsymbol{n}\Delta t))(t - \boldsymbol{n}\Delta t)\ .$$

Para convencernos de que esto último es válido para ***todos*** los casos, sólo basta reescribir los primeros dos resultados de manera equivalente como sigue:

$n = \mathbf{0}$

$y(t) = 5\cos(\mathbf{0}\Delta t)(t - \mathbf{0}\Delta t)$,

$n = \mathbf{1}$

$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\mathbf{1}\Delta t)(t - \mathbf{1}\Delta t)$.

Con esto, hemos encontrado la fórmula general para el último de los sumandos. Resta por encontrar una fórmula general para los primeros n sumandos. Analicémoslos entonces con más detenimiento.

La *quinta característica* que podemos encontrar en común en todos los resultados anteriores, en concreto para los n primeros sumandos, es que en cada uno de ellos *aparecen de manera consecutiva los números* $0, 1, 2, \cdots, n$. Esto lo podemos apreciar con más claridad si reescribimos el segundo de estos resultados de manera equivalente como sigue:

$$n = \mathbf{1}$$

$$y(t) = 5\cos(\mathbf{0}\Delta t)\,\Delta t + (5\cos \mathbf{1}\Delta t)(t - \mathbf{1}\Delta t)\ .$$

La *sexta característica* en común que comparten los primeros n sumandos consiste en que todos ellos tienen *una misma estructura*, a saber, el producto de dos factores, el primero de los cuales siempre es $5\Delta t$, mientras que en el segundo figuran de manera consecutiva los cosenos de los números $0, 1, 2, \cdots, n-1$ multiplicando a Δt, y que se puede expresar de manera general como sigue:

$$5\cos(\mathbf{0}\Delta t)\,\Delta t + (5\cos \mathbf{1}\Delta t)\Delta t + (5\cos \mathbf{2}\Delta t)\Delta t + (5\cos \mathbf{3}\Delta t)\Delta t$$
$$+ \cdots + (5\cos(\boldsymbol{n} - \mathbf{1})\Delta t)\Delta t \quad .$$

Hasta aquí hemos hecho un gran avance, ya que hemos podido formular en términos generales la expresión algebraica para la posición $y(t)$ en la que se encuentra la pesa, y esto para cualquier valor permisible de t. Si ahora recordamos que, para cualquier valor actual de t, el número n de intervalos completos de tamaño Δt que quedan comprendidos entre 0 y dicho valor actual está dado por $n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]$, no será difícil reexpresar nuestros dos resultados generales en términos únicamente de t y Δt. El primero de estos resultados, a saber, la suma de los n primeros términos, se puede reescribir como

$$5\cos(\mathbf{0}\Delta t)\,\Delta t + (5\cos \mathbf{1}\Delta t)\Delta t + (5\cos \mathbf{2}\Delta t)\Delta t + (5\cos \mathbf{3}\Delta t)\Delta t$$
$$+ \cdots + \left(5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right] - \mathbf{1}\right)\Delta t\right)\Delta t \quad .$$

El $(n+1)$-ésimo termino también se puede rescribir como

$$\left(5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\Delta t\right)\right)\left(t - \left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\Delta t\right)\ .$$

Resumiendo, nuestro análisis detallado de algunos casos particulares (los suficientes) nos ha permitido establecer la ***fórmula general para nuestra función aproximada de acumulación***, en este caso, la distancia $y(t)$ a la que se encuentra la pesa con respecto a la posición de equilibrio, en cualquier instante t entre los 0 y los 10 segundos:

$$y(t) = 5\cos(\mathbf{0}\Delta t)\,\Delta t + (5\cos \mathbf{1}\Delta t)\Delta t + (5\cos \mathbf{2}\Delta t)\Delta t + (5\cos \mathbf{3}\Delta t)\Delta t$$
$$+ \cdots + \left(5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right] - \mathbf{1}\right)\Delta t\right)\Delta t + \left(5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\Delta t\right)\right)\left(t - \left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\Delta t\right)\ . \qquad (8)$$

Velocidad constante por intervalos, igual a la velocidad exacta al fin de cada intervalo.

Un análisis detallado de suficientes casos particulares, similar al que ya hemos realizado en el apartado anterior y que por razones de espacio no consignaremos aquí, nos permite establecer la ***fórmula general*** correspondiente a este caso ***para nuestra función aproximada de acumulación***, es decir, la distancia $y(t)$ a la que se encuentra la masa atada al resorte con respecto a la posición de equilibrio, en cualquier instante t comprendido entre los *0* y los *10* segundos:

$$y(t) = (5\cos \mathbf{1}\Delta t)\Delta t + (5\cos \mathbf{2}\Delta t)\Delta t + (5\cos \mathbf{3}\Delta t)\Delta t$$
$$+ \cdots + 5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\Delta\boldsymbol{t}}\right]\Delta t\right)\Delta t + (5\cos(t))\left(t - \left[\frac{\boldsymbol{t}}{\Delta\boldsymbol{t}}\right]\Delta t\right) \ . \qquad (9)$$

Velocidad constante por intervalos, igual a la velocidad exacta a la mitad de cada intervalo.

En este caso, la distancia $y(t)$ a la que se encuentra la pesa con respecto al origen, en cualquier instante t comprendido entre los *0* y los *10* segundos, está dada por

$$y(t) = 5\cos\left(\mathbf{0}\cdot\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t + 5\cos\left(\mathbf{1}\cdot\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t + 5\cos\left(\mathbf{2}\cdot\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t +$$
$$5\cos\left(\mathbf{3}\cdot\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t + \cdots + 5\cos\left(\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\Delta\boldsymbol{t}}\right] - \mathbf{1}\right)\cdot\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t +$$
$$5\cos\left(\frac{\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\Delta\boldsymbol{t}}\right]\cdot\Delta t + t}{2}\right)\left(t - \left[\frac{\boldsymbol{t}}{\Delta\boldsymbol{t}}\right]\cdot\Delta t\right). \qquad (10)$$

Velocidad constante por intervalos, igual al promedio de las velocidades exactas al inicio y al final de cada intervalo.

$$y(t) = \frac{5\cos(\mathbf{0}\Delta t) + 5\cos(\mathbf{1}\Delta t)}{2}\Delta t + \frac{5\cos(\mathbf{1}\Delta t) + 5\cos(\mathbf{2}\Delta t)}{2}\Delta t +$$
$$\frac{5\cos(\mathbf{2}\Delta t) + 5\cos(\mathbf{3}\Delta t)}{2}\Delta t + \cdots + \frac{5\cos\left(\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\Delta\boldsymbol{t}}\right] - \mathbf{1}\right)\Delta t\right) + 5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\Delta\boldsymbol{t}}\right]\Delta t\right)}{2}\Delta t +$$
$$\frac{5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\Delta\boldsymbol{t}}\right]\Delta t\right) + 5\cos(t)}{2}\left(t - \left[\frac{\boldsymbol{t}}{\Delta\boldsymbol{t}}\right]\cdot\Delta t\right). \qquad (11)$$

Es sabido que las expresiones algebraicas (8)–(11) se pueden escribir de manera compacta utilizando la notación sigma. Las correspondientes expresiones compactas son:

$$y(t,\Delta t) = \sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} 5\cos\big((i-1)\Delta t\big)\cdot\Delta t + 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)$$
$$\cdot\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \ , \qquad (8a)$$

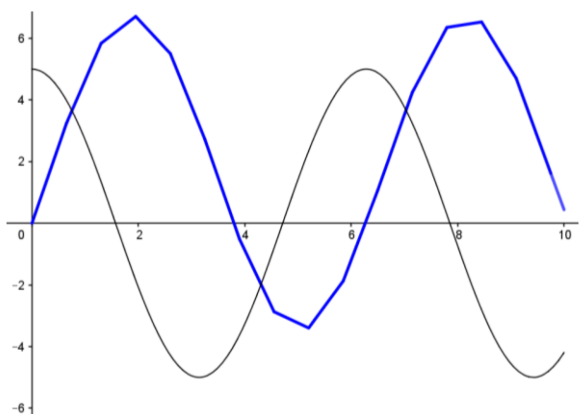
$$y(t,\Delta t)=\sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}5\cos(i\Delta t)\cdot\Delta t+5\cos(t)\cdot\left(t-\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\ , \qquad (9a)$$

$$y(t,\Delta t)=\sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}5\cos\left((2i-1)\frac{\Delta t}{2}\right)\cdot\Delta t+5\cos\left(\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t+t}{2}\right)\cdot\left(t-\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right), \qquad (10a)$$

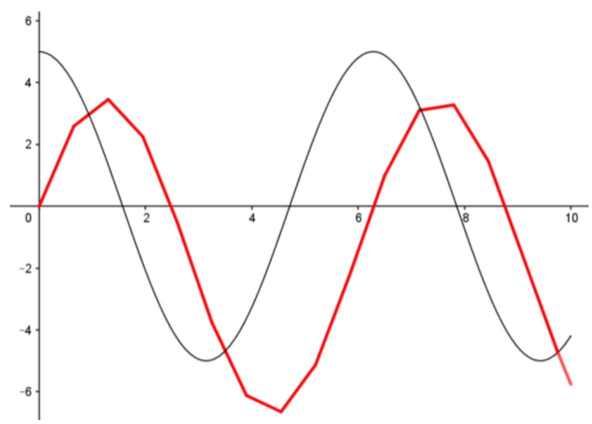
$$y(t,\Delta t)=\sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}\frac{5\cos\left((i-1)\Delta t\right)+5\cos(i\Delta t)}{2}\Delta t+\frac{5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)+5\cos(t)}{2}\cdot\left(t-\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\ . \qquad (11a)$$

Representación gráfica de las funciones aproximadas de acumulación

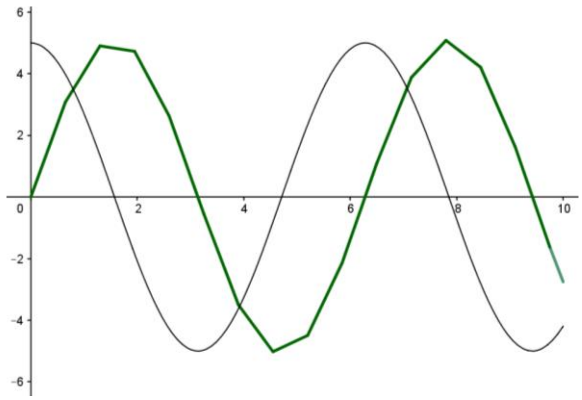
A partir de las expresiones algebraicas (8a)–(11a) es posible obtener la representación gráfica de nuestras funciones aproximadas de acumulación, como se muestra en la Figura 6, para el caso en que $a=0$ y $\Delta t=0.65$. Se trata de ***funciones lineales por pedazos*** (poligonales).



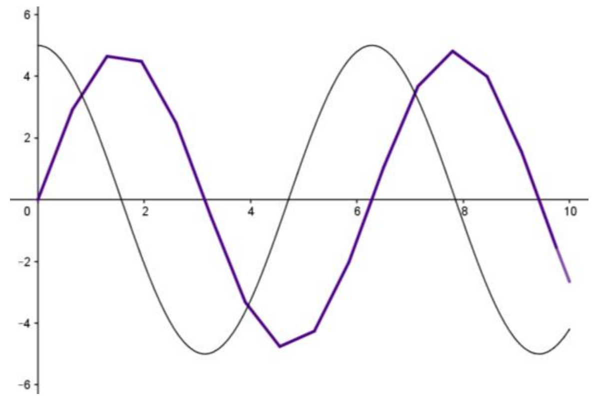
a) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al inicio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.



b) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.



c) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea en el punto medio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.



d) En cada intervalo de tamaño Δt, el promedio de los valores exactos de la velocidad instantánea al inicio y al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.

Figura 6. Gráficas de las funciones aproximadas de acumulación $y(t)$, dadas por las expresiones algebraicas (8a)–(11a), para el caso $v(t) = 5\cos t$, donde $0 \leq t \leq 10$.

Conclusión. Algunas dificultades del enfoque dinámico

Con todo y el atractivo didáctico y cognitivo que posee este enfoque para el concepto de integral, su enseñanza y aprendizaje no están exentos de dificultades. Como los mismos Thompson y Silverman (2007) han señalado, una de las mayores dificultades que muestran los estudiantes para comprender la idea de acumulación consiste en entender cuáles son los "pedacitos" que se están acumulando. La segunda dificultad importante consiste en trascender una comprensión coloquial de la acumulación para pasar a su comprensión matemática (variacional). La tercera dificultad importante, documentada por los mismos autores Thompson y Silverman (2007), consiste en la falta de familiaridad del estudiante con la forma algebraica abierta de representación de las funciones de acumulación.

La puesta en escena del enfoque dinámico requiere de la máxima atención y concentración del profesor, quien debe sistemáticamente dirigir la atención de los estudiantes hacia ciertos detalles fundamentales. En primer lugar, es más importante hacer que x cambie, en vez de concentrar la atención en Δx, que también debe cambiar haciéndose cada vez más pequeño, pero "en segunda instancia"; la visión privilegiada debe centrarse en x. En otras palabras, a diferencia del enfoque tradicional, se deberá hacer que x cambie en el primer plano, dejando "constante" el valor de Δx, en lugar de "dejar fijo" el valor de x y permitir que Δx cambie haciéndose cada vez más pequeño.

En segundo lugar, se deberá enfatizar el hecho de que $f(x)$ es una razón instantánea de cambio de cierta magnitud variable $F(x)$, y que esta razón instantánea siempre cambia. Entonces, para obtener un valor aproximado de la acumulación que esta razón de cambio produce, deberemos tomarla como si fuera constante en “pequeños intervalos” de tamaño Δx. La cuestión de cómo determinar ese valor “constante” en cada “pequeño intervalo”, como hemos visto, puede ser resuelta recurriendo a las ricas intuiciones de los estudiantes, quienes habitualmente proponen tomar el valor al inicio de cada intervalo, al final del mismo, a la mitad de cada intervalo, promediar los valores inicial y final, o alguna otra variante. Posteriormente estas intuiciones pueden servir de base para la formalización del concepto.

En tercer lugar, es importante enfatizar el hecho de que las funciones de acumulación, como tales, se pueden graficar, y que en la versión “en grueso” (con Δx relativamente “grande”) sus gráficas son líneas poligonales (quebradas), mientras que en la versión “en fino” (con Δx suficientemente “pequeño”) son más parecidas a curvas. Esto contribuye a la formación de una imagen geométrica dinámica de las funciones de acumulación (integrales), como poligonales que gradualmente se van aproximando o tienen como límite a cierta curva suave.

Y por último, también es importante enfatizar que las funciones de acumulación tienen una razón de cambio: cuando algo se acumula, lo hace con cierta intensidad. Este último punto nos remite al significado variacional del Teorema Fundamental del Cálculo, que tiene que ver con las funciones de acumulación y su razón de cambio, y no tanto con los valores de la integral y los valores de la antiderivada de la función integrando, como habitualmente se resalta en el enfoque tradicional, predominantemente calculístico.

Referencias bibliográficas

Kouropatov, A. (2008). Approaches to the integral concept. The case of high school calculus. Consultado en línea en Junio de 2016 en http://www.yess4.ktu.edu.tr/YermePappers/Anatoli Kouropatov.pdf.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275-298.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 117-131). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Wagner, J. F. (2017). Students' obstacles to using Riemann sum interpretations of the definite integral. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. Disponible en línea en http://link.springer.com/article/10.1007/s40753-017-0060-7.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 1 Fecha: enero-junio de 2019

ISSN: 2395-955X

SIGNIFICADO DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN EL BACHILLERATO MEXICANO: ANTES Y DESPUÉS DEL NUEVO MODELO EDUCATIVO

Francisco Ramsses Ayala Romero, Silvia Elena Ibarra Olmos

arframsses@gmail.com, silvia.ibarra@unison.mx

Universidad de Sonora, México

Para citar este artículo:

Ramsses, F., Ibarra, S. E. (2019). Significado de los sistemas lineales en el bachillerato mexicano: antes y después del nuevo modelo educativo. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 1, pp. 66-84. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 1, enero-junio de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

SIGNIFICADO DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN EL BACHILLERATO MEXICANO: ANTES Y DESPUÉS DEL NUEVO MODELO EDUCATIVO

Francisco Ramsses Ayala Romero, Silvia Elena Ibarra Olmos

arframsses@gmail.com, silvia.ibarra@unison.mx

Universidad de Sonora, México

Palabras clave: significado, bachillerato, sistemas de ecuaciones lineales.

Resumen

En el presente documento se muestran los resultados de una investigación sobre los significados institucionales para los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL), propuestos en los programas de estudios de matemáticas mexicanos, tanto por el bachillerato general como por el bachillerato tecnológico, antes y después de la puesta en marcha del Nuevo Modelo Educativo. Esta investigación se fundamenta en algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, concretamente en la noción de significado institucional, lo que hace necesaria la descripción de los sistemas de prácticas propuestos en los programas de materia, para presentar el balance de los diferentes significados institucionales identificados para el tema matemático de interés.

Keywords: meaning, baccalaureate, systems of linear equations.

Abstract

This document shows the results of an investigation on the institutional meanings of the systems of linear equations, proposed in the Mexican curriculum of mathematics, both by the general baccalaureate and the technological baccalaureate, before and after the start-up of the New Educational Model. The research is based on some theoretical elements from the Onto-semiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction, specifically the notion of institutional meaning, which makes it necessary to describe the systems of practices proposed by the syllabus in order to present the balance of the different institutional meanings identified for the mathematical topic of interest.

Introducción

En México, el Nuevo Modelo Educativo (NME) (SEP, 2017a), trajo consigo una serie cambios a las reformas educativas vigentes hasta antes de su puesta en acción. Dado a conocer en abril de 2017, este modelo pretende lograr una educación de calidad con equidad, donde se pongan al frente los aprendizajes y la formación de niños y jóvenes. Para lograrlo se ha hecho una reorganización del sistema educativo en cinco grandes ejes, los cuales son: el planteamiento curricular, la escuela al centro del sistema educativo, formación y desarrollo profesional docente, inclusión y equidad y la gobernanza del sistema educativo.

En el caso particular de la Educación Media Superior (EMS), (12 a 15 años), esto significa entre otros aspectos, la incorporación de nuevos planes y programas para las diferentes áreas de conocimiento, entre ellas la matemática. Como en cualquier modificación educativa, el alcance de los cambios propuestos no se limita a los planteamientos que se exponen en los documentos oficiales, sino que se espera impacten a la actividad cotidiana del profesorado, y, en consecuencia, a la formación de los estudiantes.

Con el propósito de estudiar con profundidad cuáles son los cambios realizados al currículo matemático, se diseñó un proyecto de investigación documental, el cual tomó como caso a estudiar a los sistemas de ecuaciones lineales. Se seleccionó este tema porque se consideró uno de los temas representativos de la matemática del bachillerato, pues en su tratamiento se hace necesaria una serie de conocimientos previos de importancia, además de que admite un abordaje con diferentes elementos lingüísticos en sus diversos registros, incorpora un buen número de algoritmos y conceptos; los algoritmos requieren de la promoción de argumentaciones, existen problemas extra matemáticos interesantes cuya modelación puede plantearse como punto de partida para su proceso de estudio. En síntesis, es un tema matemático rico en significado.

En este marco de referencia se diseñó un proyecto de investigación documental, cuyos objetivos fueron:

1) Caracterizar los significados institucionales para los sistemas de ecuaciones lineales, propuestos en los programas de materia, tanto por el bachillerato tecnológico como por el bachillerato general, antes y después de la puesta en marcha del NME.
2) Contrastar ambos significados.
3) Establecer conclusiones.

Referente teórico

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2008), es un sistema teórico modular sobre la educación matemática, que propone una serie de herramientas teóricas y metodológicas, para identificar y describir procesos de enseñanza y aprendizaje.

Dado que en el caso que se reporta, el interés se centra en conocer y caracterizar los diferentes significados propuestos por los programas de matemáticas en el bachillerato, se recurre concretamente a la noción de significado institucional, la cual se define como "el sistema de prácticas compartidas en el seno de una institución para resolver un tipo de situaciones-problemas" (Godino, *et al*., 2008: p. 5), es decir, se considera al significado como aquello que una comunidad puede decir y hacer sobre el contenido matemático en cuestión.

Las prácticas matemáticas se definen como todas aquellas acciones encaminadas a obtener la solución de problemas, comunicarla, verificarla, etc. Para caracterizar dichas prácticas es necesario hacer una identificación de objetos y procesos matemáticos, emergentes e intervinientes.

De acuerdo con Godino, *et al*. (2008), se denominan objetos matemáticos a los emergentes del sistema de prácticas, entidades que se construyen progresivamente, que se enriquecen y complementan en la resolución de problemas. Estos objetos matemáticos los podemos clasificar en seis tipos:

- Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios,...).
- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos,...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...).
- Conceptos – definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,...).
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,...).
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos,...).
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...).

Con relación a los procesos en el EOS se menciona que "no se intenta dar, de entrada, una definición de "proceso" ya que hay muchas clases diferentes de procesos" (Godino, *et al*., 2008: p. 9). Se opta en cambio por presentar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática: comunicación, enunciación, algoritmización, argumentación, definición, problematización, institucionalización, personalización, generalización, particularización, significación, representación, idealización, materialización, reificación, descomposición. En estos procesos se pueden encontrar procesos duales dentro de los cuales el proceso de personalización-institucionalización puede ser identificado dentro de los programas de estudio de matemáticas del bachillerato.

Al proceso de personalización-institucionalización se le atribuye que:

> La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras que la "cognición institucional" es el resultado del dialogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas (Godino et al., 2008: p. 8).

Otro ejemplo de los procesos duales que se puede proponer dentro de un programa de estudios es el de significación-representación, pues dentro de éste se puede hacer mención que: "los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestos en relación unos con otros" (Godino, *et al*., 2008: p. 8).

Para terminar con estos ejemplos, el proceso dual de idealización-materialización consiste en la interacción entre objetos ostensivos y no ostensivos. Esta relación es relativa al juego de lenguaje en donde participan. Esto es porque "un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático" (Godino, *et al*., 2008: p 8) y viceversa; un objeto no ostensivo puede hacerse público, es decir, que se puede mostrar a otro.

Metodología

Metodológicamente se trata de una investigación documental. De acuerdo con Bisquerra (2014) este tipo de investigaciones consiste en "una actividad sistemática y planificada que consiste en examinar documentos ya escritos que abarcan una amplia gama de modalidades. A través de ellos es posible captar información valiosa" (Bisquerra, 2014: p 349).

Bisquerra (2014) menciona además que los documentos son "una fuente bastante fidedigna y práctica para revelar los intereses y las perspectivas de quienes los han escrito" (p. 349). Ya sea por una institución educativa o por una o varias personas.

Tomando como base la noción del significado institucional propuesta en el EOS y la naturaleza de la investigación se establecieron y llevaron a cabo las acciones siguientes:

a) Selección de los documentos oficiales por analizar, en este caso los programas de estudio de Matemáticas I (Álgebra) de los bachilleratos generales (Dirección General de Bachillerato (DGB), 2013; SEP, 2017b) y de los bachilleratos tecnológicos (Talamante, *et al*, 2013; SEP, 2017c).

b) Análisis ontosemiótico del tema sistemas de ecuaciones lineales, para la identificación de los objetos y procesos matemáticos intervinientes y emergentes y con ellos llegar a la construcción de los sistemas de prácticas promovidos por las instituciones, y en consecuencia, a los significados institucionales.

c) Contrastación de los significados institucionales identificados.

Para explicar cómo se llevaron a cabo las identificaciones de objetos y procesos matemáticos, así como la construcción de los sistemas de prácticas, se presentará en extenso el análisis de uno de los programas.

El programa de estudios de Matemáticas I de los bachilleratos generales (BG), utilizado durante la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS) de 2008, propone que el tema de los sistemas de ecuaciones lineales sea abordado en dos bloques:

- Bloque VII. Resuelves ecuaciones lineales II.
- Bloque VIII. Resuelves ecuaciones lineales III.

Al bloque VII, Resuelves ecuaciones lineales II, se le ha asignado un lapso de ocho horas. Este bloque presenta el caso de los sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. La identificación de los objetos matemáticos primarios de esta parte del programa de estudios se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. *Objetos matemáticos primarios del Bloque VII de Matemáticas I.*

BG	***Enunciado***	***Objetos matemáticos primarios propuestos por el enunciado***
1	Reconoce el modelo algebraico de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.	Situación-problemas: Identificación del modelo algebraico de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Lenguajes: verbal y algebraico Conceptos: modelo, algebraico, sistema de ecuaciones con dos incógnitas,

		incógnitas, ecuaciones. Argumentos: Los necesarios para la justificación de por qué un modelo algebraico está representando a un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.
2	Resuelve e interpreta sistemas de ecuaciones con dos incógnitas mediante métodos: Numérico: Determinantes Algebraicos: Eliminación por igualación, reducción (suma y resta) y sustitución. Gráficos.	Situación problemas: Resolución de un sistema de ecuaciones de dos incógnitas. Procedimientos: Métodos de determinantes, eliminación, igualación, reducción y sustitución para resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Lenguajes: verbal, numérico, algebraico y/o gráfico. Conceptos: Sistemas de ecuaciones lineales, métodos numéricos, métodos algebraicos, métodos gráficos, determinantes, eliminación, igualación, reducción, suma, resta, sustitución y gráficos. Proposiciones: método de determinantes, método de igualación, método de suma y resta, método de sustitución y método gráfico. Argumentos: Aquellos en los cuales descansan los métodos ya mencionados para resolver sistemas de ecuaciones de dos incógnitas.
3	Expresa y soluciona situaciones utilizando sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.	Situaciones-problemas: Expresión o modelación de una situación por medio de un sistema de ecuaciones de dos incógnitas. Encontrar la solución de dicho modelo, es decir, del sistema del cual se trate. Lenguajes: Verbal, algebraico. Procedimientos: Aquellos métodos seleccionados para resolver los sistemas de ecuaciones de tres incógnitas. Conceptos: sistemas de ecuaciones con

		tres incógnitas, solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Argumentos: Los que justifican los métodos seleccionados.
4	Identifica gráficamente sí un sistema de ecuaciones simultaneas tiene una, ninguna o infinitas soluciones.	Situación-problemas: A partir de la representación gráfica de un sistema de ecuaciones simultáneas, identificar si éste es consistente (con única o infinitas soluciones) o si es inconsistente. Procedimiento: Relacionar la intersección de las rectas representantes de las ecuaciones que forman al sistema de dos ecuaciones, con la existencia o no de soluciones, así como con el número de éstas. Lenguaje: gráfico, verbal. Conceptos: gráficas, sistema de ecuaciones simultáneas y solución. Argumentos: Justificación de la inconsistencia o consistencia (única o infinitas soluciones) Proposiciones: cuándo un SEL tiene una, ninguna o infinitas soluciones.
5	Resuelve problemas que se plantean en lenguaje algebraico utilizando métodos algebraicos, numéricos y gráficos.	Situación-problemas: problemas que se plantean en lenguaje algebraico. Procedimientos: resolver problemas, plantear problemas en lenguaje algebraico y utilizar métodos algebraicos, numéricos y gráficos. Lenguajes: verbal, algebraico, numérico y gráfico. Conceptos: problema, lenguaje algebraico, métodos algebraicos, métodos numéricos y métodos gráficos. Argumentos: Para justificar los pasos de los métodos. Proposiciones: Las involucradas en los métodos.

6	Elabora o interpreta gráficas, tablas y mapas, para resolver situaciones diversas que conllevan el uso de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.	Situaciones-problemas: aquellas planteadas con diferentes lenguajes (gráfico, numérico, icónico) que puedan ser modeladas mediante un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Procedimientos: elaboración e interpretación de gráficas, tablas y mapas. Lenguajes: gráfico, numérico, icónico. Conceptos: gráfica, tabla, mapa, situación y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.
7	Investigar en equipos de tres personas, las características y propiedades de un sistema de ecuaciones simultáneas de dos incógnitas y la forma o formas para solucionar problemas algebraicos de este tipo.	Situaciones-problemas: investigar características y propiedades de un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas. Procedimientos: métodos para solucionar algebraicamente sistemas de ecuaciones simultáneas de dos incógnitas. Lenguajes: verbal o algebraico. Conceptos: características de un sistema de ecuaciones simultáneas de dos incógnitas, solución, problemas, algebraico. Propiedades: Aquellas sobre las cuales descansan los métodos encontrados. Argumentos: Cuándo se puede utilizar un método u otro.
8	Identificar y comprobar las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales empleando modelos algebraicos o gráficos y explicando por qué algún(as) soluciones no es (son) admisible(s) en el contexto del problema.	Situaciones-problemas: Identificar cuándo un conjunto de números es solución de un sistema de ecuaciones lineales, tanto algebraica como gráficamente. Discriminación de una solución viable, dependiendo del contexto de que se trate. Procedimientos: Aquellos cálculos que permitan la verificación de cuándo un conjunto de números es solución de un sistema de ecuaciones lineales.

		Lenguajes: verbal, algebraico o gráficos. Conceptos: solución, sistemas de ecuaciones lineales, modelo algebraico, modelo gráfico. Argumentos: Comprobar las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales empleando modelos algebraicos o gráficos, explicar por qué algún(as) solución(es) no es (son) admisibles en el contexto de un problema. Propiedades: de la igualdad.
9	Extraer e interpretar información de registros algebraicos o de gráficas o tablas, tomando en cuenta el tipo de solución posible.	Situaciones-problemas: extraer e interpretar información de registros algebraicos o de gráficas o tablas, para contrastarla con el tipo de solución del sistema. Lenguajes: verbal, algebraico o gráfico. Conceptos: registro algebraico, registro gráfico, registro tabular y solución. Argumentos: Los que justifiquen la información extraída.
10	Elaborar e interpretar gráficas, tablas mediante cualquier técnica (por ejemplo, un software como el GeoGebra) para graficar funciones lineales.	Situaciones-problemas: Elaboración e interpretación de gráficas mediante software. Procedimientos: Aquellas instrucciones del software que permitan elaborar gráficas y tablas y graficar funciones. Lenguajes: dinámico y gráfico. Conceptos: gráfica, tabla, GeoGebra y función lineal. Argumentos: interpretar gráficas, tablas mediante cualquier técnica para graficar funciones lineales.

Por su parte, al bloque VIII, resuelves ecuaciones lineales III, se le ha asignado un tiempo de ocho horas. Este bloque aborda los sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas. Los objetos matemáticos primarios que se han identificado en esta parte del programa se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. *Objetos matemáticos primarios del Bloque VIII de Matemáticas I.*

BG	***Enunciado***	***Objetos matemáticos primarios propuestos por el enunciado***
11	Reconoce el modelo algebraico de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas.	Situación-problema: identificar la representación algebraica de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas. Lenguajes: Verbal y algebraico. Conceptos: modelo, algebraico, sistema de ecuaciones con dos incógnitas, incógnitas, ecuaciones. Argumentos: Los necesarios para la justificación de por qué un modelo algebraico está representando a un sistema de ecuaciones con tres incógnitas.
12	Resuelve e interpreta sistemas de ecuaciones de tres incógnitas mediante métodos: Numéricos: Determinantes. Algebraicos: Eliminación, reducción (suma y resta) y sustitución. Gráficos.	Situación problemas: Resolución de un sistema de ecuaciones de tres incógnitas. Procedimientos: Métodos de determinantes, eliminación, igualación, reducción y sustitución para resolver sistemas de ecuaciones con tres incógnitas. Lenguajes: verbal, numérico, algebraico y/o gráfico. Conceptos: Sistemas de ecuaciones lineales de tres incógnitas, métodos numéricos, métodos algebraicos, métodos gráficos, determinantes, eliminación, igualación, reducción, suma, resta, sustitución y gráficos. Proposiciones: Enunciados de los métodos de determinantes, de igualación, de suma y resta, de sustitución y del gráfico. Argumentos: Aquellos en los cuales descansan los métodos ya mencionados para resolver sistemas de ecuaciones de tres incógnitas.
13	Expresa y soluciona situaciones	Situaciones-problemas: Expresión o

	utilizando sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.	modelación de una situación por medio de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas. Encontrar la solución de dicho modelo, es decir del sistema del cual se trate. Lenguajes: Verbal, algebraico. Procedimientos: Aquellos métodos seleccionados para resolver los sistemas de ecuaciones de tres incógnitas. Conceptos: sistemas de ecuaciones con tres incógnitas, solución de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas. Argumentos: Los que justifican los métodos seleccionados. Propiedades: Las que apoyan los pasos de los diferentes métodos.
14	Resuelve problemas que se plantean en lenguaje algebraico utilizando métodos algebraicos, numéricos y gráficos.	Situación problemas: resolver problemas que se plantean en lenguaje algebraico. Procedimientos: métodos algebraicos, numéricos y gráficos. Lenguajes: verbal, algebraico, numérico y gráfico. Conceptos: problema, plantear, lenguaje algebraico, métodos algebraicos, métodos numéricos y métodos gráficos.
15	Elabora o interpreta gráficas, tablas y mapas, para resolver situaciones diversas que conllevan el uso de sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.	Situaciones-problemas: Representar situaciones diversas mediante gráficas, tablas y mapas, en donde sea necesario el uso de SEL con tres incógnitas. Lenguajes: verbal, numérico, tabular, gráfico. Conceptos: gráfica, tabla, mapa, situación y sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.
16	Investigar en equipos de tres personas las características y propiedades de un sistema de ecuaciones simultáneas de tres incógnitas y la forma o formas para solucionar problemas algebraicos de este	Situaciones-problemas: investigar características y propiedades de un sistema de ecuaciones lineales de tres incógnitas.

	tipo.	Procedimientos: métodos para solucionar algebraicamente sistemas de ecuaciones simultáneas de tres incógnitas. Lenguajes: verbal o algebraico. Conceptos: características de un sistema de ecuaciones simultáneas de dos incógnitas, solución, problemas, algebraico. Propiedades: Aquellas sobre las cuales descansan los métodos encontrados. Argumentos: Cuándo se puede utilizar un método u otro.
17	Identificar y comprobar las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales empleando modelos algebraicos o gráficos y explicando por qué algún(as) soluciones no son admisibles en el contexto del problema.	Situaciones-problemas: Identificar cuándo un conjunto de números es solución de un sistema de ecuaciones lineales, tanto algebraica como gráficamente. Discriminación de una solución viable, dependiendo del contexto de que se trate. Procedimientos: Aquellos cálculos que permitan la verificación de cuándo un conjunto de números es solución de un sistema de ecuaciones lineales. Lenguajes: verbal, algebraico o gráfico. Conceptos: solución, sistemas de ecuaciones lineales, modelo algebraico, modelo gráfico. Argumentos: Los que permiten explicar por qué algún(as) solución(es) no es (son) admisibles en el contexto de un problema. Propiedades: de la igualdad.
18	Extraer e interpretar información de registros algebraicos o de gráficas o tablas, tomando en cuenta el tipo de solución posible.	Situaciones-problemas: extraer e interpretar información de registros algebraicos o de gráficas o tablas, para contrastarla con el tipo de solución del sistema. Lenguajes: verbal, algebraico o gráfico. Conceptos: registro algebraico, registro

	gráfico, registro tabular y solución de un sistema de ecuaciones. Argumentos: Los que justifiquen la información extraída.

Mientras que los procesos que se han logrado reconocer en los bloques VII y VIII se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3. *Procesos matemáticos identificados en los Bloques VII y VIII.*

Procesos matemáticos propuestos en los diferentes enunciados de BG1	
Problematización	Ya que en [1-18] se mencionan el planteamiento de situaciones, sin especificar cuáles, que involucran SEL de 2x2 y 3x3.
Comunicación	En [2, 3, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 16, 18] se promueve la comunicación estudiante-estudiante o profesor-estudiante cuando se trata de interpretar algún modelo o solución de una situación-problema, así como también en espacios donde se fomente el trabajo en equipo.
Definición	Ya que en [1-18] se emplean diferentes conceptos que giran alrededor de los SEL de 2x2 y 3x3.
Algoritmización	En [1-18] se sugieren los procedimientos o estrategias que sobre los temas de SEL de 2x2 y 3x3 se buscan lograr.
Enunciación	En [2 y 12] se propone trabajar con diferentes métodos para resolver SEL de 2x2 y 3x3.
Argumentación	Esto es porque en [8 y 17] se habla sobre comprobar las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales empleando modelos algebraicos o gráficos, explicar por qué algún(as) soluciones no son admisibles en el contexto del problema.
Personalización-institucionalización	De [1-6, 11-15] se abordan los desempeños que la institución espera que logren los estudiantes al finalizar los bloques que involucran los SEL de 2x2 y 3x3.
Particularización-generalización	En [1-8, 11-17] muestran que se trabajarán con casos particulares buscando una institucionalización de los conceptos sobre los SEL de 2x2 y 3x3.
Descomposición-reificación	La institución espera que tras el proceso de estudio de los SEL de 2x2 y 3x3 los nuevos conceptos y propiedades emergentes propuestos en [1-6, 11-15] sean reificados (vistos como objetos unitarios) por los estudiantes a fin de ser aplicados para encontrar la solución a diferentes situaciones-problemas que involucran los temas abordados.
Idealización-Materialización	Para fomentar la transición de una idea al planteamiento de un objeto ostensivo en [3 y 13] se proponen que los estudiantes expresen situaciones utilizando SEL de 2x2 y 3x3 en diferentes lenguajes.

Representación-Significación	Para provocar la significación de diferentes representaciones en [2, 6, 7, 9, 10, 12, 15 y 18] se plantea que los estudiantes deben interpretar diferentes modelos de los SEL de 2x2 y 3x3.

Suponiendo que el aprendizaje de las matemáticas consiste en que un estudiante aprenda a realizar una serie de prácticas operativas, dígase de lectura y producción de textos, y prácticas discursivas que pueden ser reconocidas como matemáticas por una institución de educación media superior. Se entiende que el contenido de los programas de estudio de matemáticas del bachillerato propone un sistema de prácticas que es institucionalmente aceptado. La caracterización del significado institucional propuesto en el programa antes presentado aparece en la tabla 4.

Tabla 4. *Significado institucional propuesto por el programa de Matemáticas I.*

Significado institucional propuesto por el currículo de Matemáticas I
• Expresa y soluciona situaciones problemas utilizando SEL de 2x2 y 3x3. • Reconoce e interpreta diferentes modelos algebraicos o gráficos de los SEL de 2x2 y 3x3. • Resuelve SEL de 2x2 y 3x3 mediante métodos numéricos, algebraicos o gráficos. • Emplea los métodos de determinantes, igualación, suma y resta y sustitución a la hora de resolver SEL de 2x2 y 3x3. • Representa y manipula gráficas, tablas y mapas mediante software dinámico para la resolución de SEL de 2x2 y 3x3. • Comprueba las soluciones de los SEL de 2x2 y 3x3 empleando modelos algebraicos o gráficos. • Explica y comunica por diferentes vías el tipo de soluciones que se pueden obtener al resolver SEL de 2x2 y 3x3.

A partir del análisis e identificación de los objetos y procesos matemáticos fue posible la caracterización del significado institucional para los sistemas de ecuaciones lineales, propuesto por el programa de Matemáticas I de la DGB (2013). Fue de esta manera que se obtuvieron los diferentes significados que aparecen en la sección de los resultados.

Resultados

Fue a partir de la identificación de objetos y procesos matemáticos antes descritos, que se establecieron los siguientes significados institucionales para el caso de los SEL. En el caso del programa de estudios de Matemáticas I de los bachilleratos generales publicado por la DGB (2013) y utilizado durante la RIEMS de 2008, se estableció lo siguiente (Tabla 5):

Tabla 5. *Significado institucional del programa de Matemáticas I de la RIEMS 2008.*

Significado institucional propuesto por el currículo de Matemáticas I (SIM108)	
1	Expresa y soluciona situaciones-problemas utilizando SEL de 2x2 y 3x3.

2	Reconoce e interpreta diferentes modelos algebraicos o gráficos de los SEL de 2x2 y 3x3.
3	Resuelve SEL de 2x2 y 3x3 mediante métodos numéricos, algebraicos o gráficos.
4	Emplea los métodos de determinantes, igualación, suma y resta y sustitución a la hora de resolver SEL de 2x2 y 3x3.
5	Representa y manipula gráficas, tablas y mapas mediante software dinámico para la resolución de SEL de 2x2.
6	Comprueba las soluciones de los SEL de 2x2 y 3x3 empleando modelos algebraicos o gráficos.
7	Explica y comunica por diferentes vías el tipo de soluciones que se pueden obtener al resolver SEL de 2x2 y 3x3.

Mientras que en el programa de estudios de Álgebra de los bachilleratos tecnológicos escrito por Talamante et al. (2013) e implementado durante la RIEMS de 2008 se estableció lo siguiente (Tabla 6):

Tabla 6. *Significado institucional del programa de Álgebra de la RIEMS 2008.*

Significado institucional propuesto por el currículo de Álgebra (SIA08)	
1	Plantea y resuelve situaciones-problemas de la vida cotidiana que generen SEL de 2x2 y 3x3.
2	Reconoce e interpreta modelos algebraicos de los SEL de 2x2 y 3x3.
3	Utiliza modelos algebraicos en la resolución de SEL de 2x2 y 3x3.
4	Utiliza los métodos de determinantes, suma y resta, sustitución y gráfico en la resolución de SEL de 2x2 y 3x3.
5	Define de manera diferencial el tipo de solución que se puede obtener al resolver SEL de 2x2 y 3x3.

Finalmente se muestra el significado institucional propuesto por los nuevos programas de estudios de Matemáticas I (Álgebra) del NME de 2017. Se expone sólo un significado institucional dado que el contenido de los nuevos programas en el caso de los bachilleratos generales como de los tecnológicos es prácticamente el mismo. En la Tabla 7 se muestra el significado institucional en cuestión.

Tabla 7. *Significado institucional del programa de Matemáticas I del NME de 2017.*

Significado institucional propuesto por el currículo de Matemáticas I (SIMI17)	
1	Representa y resuelve situaciones-problemas que involucran SEL de 2x2 en contextos diversos.
2	Significa mediante modelos gráficos y algebraicos las soluciones de un SEL de 2x2.
3	Reconoce la estrecha relación que guardan los SEL de 2x2 con las funciones lineales.

4	Interpreta la solución de SEL 2x2 analítica y gráficamente.
5	Utiliza las tecnologías de la información y la comunicación para resolver situaciones-problemas que involucran SEL de 2x2.
6	Formula conjeturas a partir modelos gráficos y algebraicos que involucran SEL de 2x2.
7	Caracteriza el tipo de soluciones que se pueden obtener de un SEL de 2x2.

Con el propósito de cumplir con el segundo objetivo planteado en la investigación, se elaboró, a partir de los tres significados institucionales antes expuestos, un significado institucional que englobara los sistemas de prácticas propuestos en todos los programas revisados. Esto con la intención de mostrar en cuáles programas aparecen ciertas prácticas y en cuáles no. De esta manera se obtuvo la tabla 8 donde se hace evidente una división entre las prácticas con respecto a los SEL de 2x2 y 3x3.

Tabla 8. *Etapa 1 del balance de los diferentes significados institucionales.*

	Etapa 1. Significado institucional propuesto por todos los programas (SITP)
1	Plantea y resuelve situaciones-problemas de la vida cotidiana que generen SEL de 2x2.
2	Plantea y resuelve situaciones-problemas de la vida cotidiana que generen SEL de 3x3.
3	Reconoce e interpreta diferentes modelos algebraicos o gráficos de los SEL de 2x2.
4	Reconoce e interpreta diferentes modelos algebraicos o gráficos de los SEL de 3x3.
5	Resuelve SEL de 2x2 mediante métodos numéricos, algebraicos o gráficos.
6	Resuelve SEL de 3x3 mediante métodos numéricos, algebraicos o gráficos.
7	Emplea los métodos de determinantes, igualación, suma y resta, sustitución y gráfico a la hora de resolver SEL de 2x2.
8	Emplea los métodos de determinantes, suma y resta, sustitución y gráfico a la hora de resolver SEL de 3x3.
9	Representa y manipula gráficas, tablas y mapas mediante software dinámico para la resolución de SEL de 2x2.
10	Comprueba las soluciones de los SEL de 2x2 empleando modelos algebraicos o gráficos.
11	Comprueba las soluciones de los SEL de 3x3 empleando modelos algebraicos o gráficos.
12	Formula conjeturas a partir modelos gráficos y algebraicos que involucran SEL de 2x2.
13	Explica y comunica de manera diferencial el tipo de solución que se puede obtener al resolver SEL de 2x2.
14	Explica y comunica de manera diferencial el tipo de solución que se puede obtener al resolver SEL de 3x3.

15	Reconoce la estrecha relación que guardan los SEL de 2x2 con las funciones lineales.

Tabla 9. *Etapa 2 del balance de los diferentes significados institucionales.*

Etapa 2. Balance entre los diferentes significados institucionales.			
Prácticas SITP	**SIM108**	**SIA08**	**SIMI17**
1	**P**	**S**	**S**
2	**p**	**S**	**N**
3	**S**	**P**	**S**
4	**S**	**P**	**N**
5	**S**	**S**	**P**
6	**S**	**S**	**N**
7	**S**	**S**	**N**
8	**S**	**S**	**N**
9	**S**	**P**	**P**
10	**S**	**N**	**S**
11	**S**	**N**	**N**
12	**N**	**N**	**S**
13	**S**	**P**	**P**
14	**S**	**P**	**N**
15	**N**	**N**	**S**

Donde los colores

significan lo siguiente:

S: Se propone completamente la práctica en el programa.

P: Se propone parcialmente la práctica en el programa.

N: No se propone la práctica en el programa.

Conclusiones

A partir del análisis ya descrito, la caracterización y contrastación de los diferentes significados institucionales del tema de los sistemas de ecuaciones lineales permite notar una serie de cambios en los diferentes programas de estudios de matemáticas analizados.

En los programas de estudio de Matemáticas I (Álgebra) propuestos durante la RIEMS de 2008, los significados institucionales se centran en un sistema de prácticas, donde se promueven el uso de diferentes técnicas y estrategias para la resolución de situaciones-problemas que involucran SEL de 2x2 y 3x3. Éstas se centran mayoritariamente en el uso e interpretación de diferentes métodos, ya sean numéricos, tabulares, algebraicos o gráficos. Algo que se debe indicar es cómo en los programas de los bachilleratos tecnológicos se hace explícita la resolución de situaciones-problemas de la vida cotidiana, mientras que en el caso de los bachilleratos generales sólo se mencionan que se trabajarán con situaciones-problemas, sin especificar en qué tipo de contexto estarán planteadas, es decir, contextos matemáticos o extramatemáticos. Tanto en los bachilleratos generales como en los tecnológicos se proponen, en algunos casos, más claramente que otros, la representación y manipulación de gráficas, tablas y mapas mediante software dinámico mencionándose como ejemplo el software GeoGebra. Es interesante mencionar que el uso de software dinámico está restringido al caso de los SEL de 2x2, no se promueve este tipo de prácticas para el caso de los SEL de 3x3.

Finalmente, en el NME, los programas de ambos bachilleratos son coincidentes y el significado institucional se enfoca en un sistema de prácticas donde se promueven el reconocimiento, significación, representación y resolución de situaciones-problemas que involucran SEL de 2x2 en contextos diversos. Esto significa que en los nuevos programas de estudios de Matemáticas I (Álgebra) se eliminan para el caso de los sistemas de ecuaciones lineales a los de tamaño 3x3. La eliminación del tema forma parte de una serie de estrategias que se exponen en los documentos oficiales, una de ellas se refiere a aprovechar estas eliminaciones para promover procesos de estudio que sean más profundos, aunque menos extensos. Como soporte a este planteamiento se menciona que “no se requieren de muchos temas sino de temas e ideas específicas tratadas de manera amplia y profunda” (SEP, 2017b: p. 106).

Además de lo anterior, se propone que el tratamiento del tema esté centrado en un significado orientado hacia la representación gráfica y algebraica de un par de relaciones funcionales, en donde se debe poner énfasis a la interpretación de la solución. Como puede observarse en la tabla 8, la cantidad de prácticas que se proponen en los programas de estudios del NME de 2017 es menor a las propuestas anteriores.

Esto se debe, por una parte, a que se descartan cierto tipo de prácticas debido a la eliminación del tema de los SEL de 3x3. Sin embargo, surgen otras como la formulación de conjeturas a partir modelos gráficos y algebraicos que involucran SEL de 2x2. También vale la pena resaltar que se manifiesta una gran preocupación por el estudio de lo SEL de 2x2 en diferentes representaciones pero sobre todo, en su articulación, ligándola a la significación de lo que es la solución de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2.

Otra conexión que vale la pena resaltar es la relación ecuación con dos variables-funciones lineales, que es un problema cognitivo ya reportado por la literatura de la investigación sobre el tema.

Se pretende continuar esta investigación mediante la observación de las prácticas docentes de profesores de bachillerato cuando trabajan con este tema, con el propósito de buscar qué tanto se alinean esas prácticas a lo establecido curricularmente.

Referencias bibliográficas

Bisquerra, R. (2014). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: Editorial La Muralla, S. A.

Dirección General de Bachillerato (DGB, 2013). *Matemáticas I, Programas de Estudio*. México: SEP.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10, 7-37.

Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017). Modelo educativo para la educación obligatoria. Educar para la libertad y la creatividad. México.

Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017b). *Nuevo currículo de la Educación Media Superior. Campo disciplinar de matemáticas. Bachillerato General.* México.

Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017c). *Nuevo currículo de la Educación Media Superior. Campo disciplinar de matemáticas. Bachillerato Tecnológico.* México.

Talamante, V. M., Azar, J. N., Castañón, G., Ix, A., Romo, F., Montaño, F. A., Granados, M. P. (2013). *Programa de Estudios de Matemáticas. Bachillerato Tecnológico. Componentes de Formación Básica y Propedéutica.* México: SEP.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 1 Fecha: enero-junio de 2019

ISSN: 2395-955X

RESULTADOS OCULTOS TRAS LA OPERATIVIDAD DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

María Teresa Dávila Araiza, Agustín Grijalva Monteverde

maria.davila@unison.mx, gutygri1@gmail.com

Universidad de Sonora, México

Para citar este artículo:

Dávila, M. T., Grijalva, A. (2019). Resultados ocultos tras la operatividad del Teorema Fundamental del Cálculo. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 1, pp. 85-101. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 1, enero-junio de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

RESULTADOS OCULTOS TRAS LA OPERATIVIDAD DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

María Teresa Dávila-Araiza, Agustín Grijalva Monteverde

maria.davila@unison.mx, gutygri1@gmail.com

Universidad de Sonora, México

Palabras clave: Integral, Teorema Fundamental del Cálculo, GeoGebra.

Resumen

En este trabajo discutimos una actividad didáctica mediada con tecnología digital que pretende generar una reflexión en torno al concepto de integral y al teorema fundamental del cálculo (TFC). El diseño de la actividad se fundamenta en elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) y retoma el principio de cambio de marcos de Douady como medio para generar desequilibrios que promuevan el aprendizaje. La actividad parte de una situación problema que favorece el cambio del contexto algebraico al gráfico, lo cual pretende provocar desequilibrios en el significado que tiene el estudiante de integral y del TFC como algoritmos. Luego, a partir de la reflexión sobre los procedimientos en ambos contextos, se busca que el estudiante refine y articule los significados de integral y TFC. Finalmente, con la mediación de un applet creado en GeoGebra, se pretende que los estudiantes accedan a diversas funciones que faciliten la comprobación y generalización de sus resultados.

Key words: Integral, Fundamental Theorem of Calculus, GeoGebra.

Abstract

In this paper we discuss a didactical activity mediated by digital technology that aims to provide a space for reflexion about the integral concept and the fundamental theorem of calculus(FTC). We base the design of the activity both on theoretical tools of the Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction and on a principle of Douady's change of frames as a mean to improve learning. The activity starts with a problem situation that promotes a change from algebraic to graphic context in order to disequilibrate the students' meaning of integral and FTC as algorithms. Then, based on the reflection on the procediments in both algebraic and graphic context, we intend that students refine and articulate their meanings of integral and FTC. Finally, with the mediation of an GeoGebra applet we make available for students a diversity of functions they can use to verificate and extend their results.

Introducción

El cálculo es una disciplina cuyo estudio se hace presente en los currículos universitarios de carreras diversas que abarcan desde las ciencias básicas e ingeniería hasta las áreas administrativas y biológicas. El estudio del cálculo universitario encierra una gran complejidad que sale a la luz en las constantes dificultades presentadas por los estudiantes de todas las áreas para comprender los conceptos que se consideran centrales en los cursos de cálculo.

La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo ha sido y sigue siendo ampliamente estudiada, es el tema central de revistas como *El cálculo y su Enseñanza*[1];

[1] Disponible en http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=5&index_web=11

libros como *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, 1991), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral* (Cuevas et al., 2013) y *La génesis y la enseñanza del cálculo* (ímaz & Moreno, 2010); trabajos de investigación que plantean reflexiones teóricas sobre el cálculo y su enseñanza (Moreno-Armella, 2013, 2014a; 2014b), que documentan dificultades de los estudiantes con los objetos matemáticos estudiados en un curso de cálculo, o bien, que proponen estrategias para su aprendizaje: sobre *límite* (Roh, 2008; Nagle, 2013; Williams, 1991), *función* (Artigue, 1998; Tall, 1992; Niss, 2014), *infinito* (Moreno & Waldegg, 1991; Waldegg, 2005), *derivada y/o integral* (Jiménez & Mejía, 2015; Robles, del Castillo & Font, 2012; Tellechea, 2005; Robles, Tellechea & Font, 2014; Kouropatov & Dreyfus, 2014), por mencionar algunos.

Los trabajos en torno a esta problemática dan cuenta de que la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, son procesos extremadamente complejos, en gran parte debido a la complejidad misma de los objetos matemáticos involucrados (variable, función, derivada, integral…, sus múltiples representaciones, definiciones, teoremas, algoritmos, contextos, etc.). Aunado a la complejidad de los objetos matemáticos, la enseñanza del cálculo difícilmente logra llevarse a cabo manteniendo un equilibrio entre distintas facetas como: lo conceptual, algorítmico, formal, intuitivo, algebraico, gráfico, numérico, contextos matemáticos, contextos extramatemáticos, la mediación de la tecnología digital, etc. Ante esta situación, no causa sorpresa que los estudiantes logren aplicar algoritmos de derivación e integración a diversos tipos de funciones expresadas algebraicamente y, sin embargo, no desarrollen un significado de los objetos matemáticos involucrados que vaya más allá de esos algoritmos.

Con respecto a la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo y de la integral, que son el tema de interés en este trabajo, tienden a ocurrir dos situaciones extremas. Por un lado, durante la presentación del teorema fundamental, se omite (o no se enfatiza) la discusión de las condiciones del teorema para centrarse en los resultados operativos del mismo que facilitan los procesos de integración y, por otro lado, se privilegia la demostración formal del Teorema. Con respecto a la integral se tiene una situación similar: se prima el aprendizaje de diferentes algoritmos de integración y la definición formal de la integral definida, pero se descuida el estudio de la integral como función, así como la articulación de los diferentes sistemas de representación semiótica y sus significados en contextos diversos.

Una de las propiedades de la función integral que nos interesa resaltar en este trabajo es la continuidad de la integral como función, que puede volverse transparente en los cursos de cálculo y en torno a la cual se puede realizar una discusión provechosa. La Tabla 1 muestra el (primer) teorema fundamental del cálculo, como lo enuncian en Leithold (1998), Spivak (2012) y Rudin (1966).

Tabla 1. *Primer teorema fundamental del cálculo.*

Leithold (1998, p. 362)	Spivak (2012, p. 285)	Rudin (1966, p. 26)

&index_mgzne

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea x cualquier número de $[a,b]$. Si F es la función definida por $$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$ entonces, $F'(x)=f(x)$ $$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$	Sea f integrable sobre $[a,b]$ y definamos F en $[a,b]$ mediante $F(x)=\int_a^x f.$ Si f es continua en c de $[a,b]$, entonces F es diferenciable en c, y $F'(c)=f(c)$.	Sea $f\varepsilon R$ en $[a,b]$. Para $a\le x\le b$, hagamos $$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$ En estas condiciones, F es continua en $[a,b]$; además, si f es continua en un punto x_0 de $[a,b]$, F es diferenciable en x_0, y $F'(x_0)=f(x_0)$

En las versiones Leithold y Spivak no se explicita que la función $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es siempre una función continua en todo su dominio (Figura 1), como sí se explicita en el texto de Rudin. Otra propiedad de la función $F(x)$ que no se enfatiza es que *casi siempre* es diferenciable, excepto en *algunos* de los puntos donde la función $f(t)$ no es continua. Estos dos hechos pueden pasar desapercibidos para un estudiante, al ser opacados por el énfasis puesto en la potencia operativa que se desprende del teorema fundamental del cálculo.

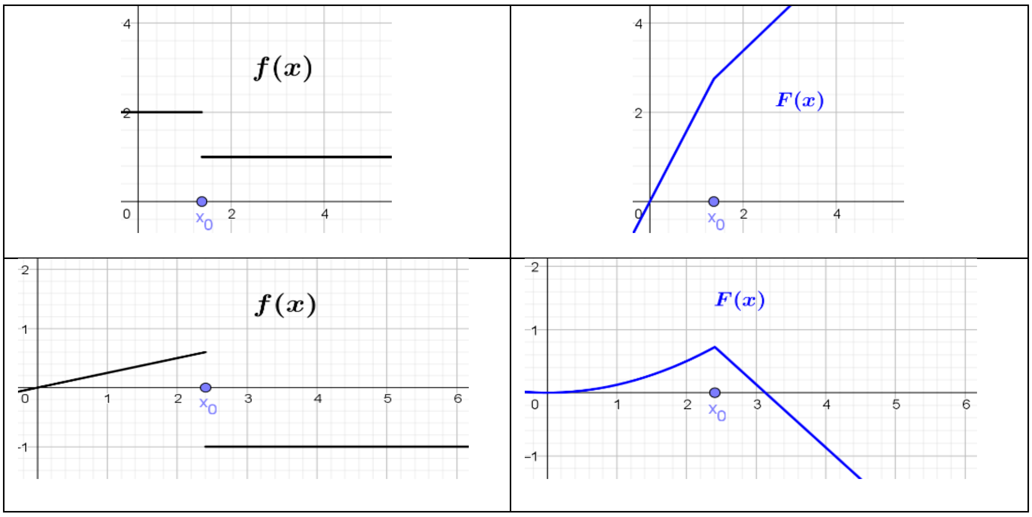


Figura 1. $f(x)$ es discontinua en x_0, pero $F(x)$ es continua en x_0.

Ante esta problemática, proponemos una actividad que ayude al estudiante a refinar y articular sus algoritmos en torno a la integral y el TFC en aras de promover un significado más robusto de estos. La actividad parte del problema, aparentemente simple, de calcular la función $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ para una función discontinua $f(t)$ representada algebraica y gráficamente, y luego trazar su gráfica. Dentro de la actividad, se guía la reflexión de los estudiantes a través de preguntas y tareas ante las cuales pueden emplear sus algoritmos, pero a la vez se promueve la emergencia de conflictos que muestran sus limitaciones y la necesidad de adaptarlos. Luego, con la mediación de la tecnología digital pretendemos potenciar la reflexión del estudiante a través de un applet que le permite graficar diferentes funciones discontinuas y estudiar el comportamiento de la función $F(x)$.

Antecedentes de la actividad didáctica

La actividad que diseñamos tiene su origen en una prueba experimental informal llevada a cabo con dos estudiantes de licenciatura en matemáticas, con la que buscaba explorar la complejidad o simpleza del problema de calcular la función $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, cuando $f(t)$ es una función discontinua, así como los conocimientos puestos en juego por los estudiantes al abordar el problema algebraica y gráficamente. Las respuestas de los estudiantes fueron bastante interesantes y discutiremos más adelante el caso de uno de ellos con el apoyo de herramientas teóricas que permitirán mostrar los significados puestos en juego al abordar el problema.

El problema matemático que elegimos para la actividad se inspira en el trabajo de Tellechea (2005), quien plantea un diseño para el estudio introductorio de la integral y del teorema fundamental del cálculo en un entorno gráfico digital creado con el programa Descartes. Como parte de su trabajo, se incluye el tratamiento de funciones continuas y funciones discontinuas para promover establecimiento de conjeturas sobre la continuidad y diferenciabilidad de la función integral correspondiente. La propuesta de Tellechea esboza una ruta didáctica que inicia con el estudio gráfico de sumas de Riemann y concluye con el planteamiento gráfico del teorema fundamental del cálculo.

En el artículo de Robles, Tellechea & Font (2014) se presenta un diseño didáctico que retoma, refina y fundamenta teóricamente la parte del trabajo de Tellechea (2005) que corresponde al estudio gráfico de la integral como función del extremo derecho, así como el teorema fundamental del cálculo. El trabajo de Robles, *et al*. (2014) está diseñado para insertarse en la ruta didáctica planteada por Tellechea (2005). En su propuesta, Robles *et al*., incluyen hojas de trabajo para los estudiantes con tareas específicas que buscan que el estudiante construya, primero de manera estática, la gráfica de la función integral $I(x)$ a partir de la construcción de una tabla con los valores del área $I(x)$ acumulada bajo la curva de una función f, la cual está expresada solo gráficamente. Posteriormente, con la mediación de applets se comprueban los valores obtenidos en la tabla y se verifica la gráfica trazada a partir de esta, tratado de rescatar propiedades generales de las gráficas de la función integral de funciones escalonadas y funciones lineales a trozos. Luego, con la mediación de applets dinámicos, se estudia la linealidad local de la función integral $I(x)$ para relacionar la pendiente de su gráfica en un punto con el valor de la función f en ese punto, arribando a la esencia del teorema fundamental del cálculo. Finalmente, se extiende el trabajo realizado con funciones escalonadas sencillas a funciones escalonadas que aproximan a una función dada f, y se articula esta idea con las sumas de Riemann, para llegar a la función integral $I(x)$ como límite de las integrales de las funciones escalonadas.

Es importante enfatizar que los trabajos de Tellechea (2005) y de Robles, *et al.* (2014) son propuestas para introducir ideas centrales de los conceptos de integral y teorema fundamental del cálculo y que, deliberada y justificadamente, se desarrollan solamente en un ambiente gráfico y numérico, omitiendo en ese momento el trabajo en un contexto algebraico.

Aunque nuestra actividad tiene elementos en común con estos dos trabajos, su diseño, sus fundamentos y su lugar dentro de un curso de cálculo son esencialmente distintos. Nuestra actividad está dirigida a estudiantes que ya estudiaron el teorema fundamental del cálculo, que tienen una noción de integral como área bajo la curva y que pueden emplear algoritmos de integración elementales.

Sustento teórico de la actividad didáctica

El EOS (Godino, Batanero y Font, 2008), es un marco que provee herramientas útiles para analizar detalladamente el significado de un objeto matemático, ya sea este el promovido por una institución o aquel puesto en juego por un estudiante.

En el EOS, las matemáticas se conciben como un lenguaje, como una actividad de resolución de problemas y como un cuerpo organizado y sistematizado de conocimientos. Esta manera de entender las matemáticas permea las nociones centrales de este enfoque.

El EOS es una perspectiva teórica de carácter antropológico pragmático que tiene como noción primaria a las llamadas *prácticas matemáticas*, entendidas como “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 8).

A partir de la noción de práctica se define el *significado* de un objeto matemático como el sistema de prácticas matemáticas significativas (que son útiles para el logro de los objetivos de la actividad realizada) asociado a la resolución de un tipo de situaciones problema. De esta manera, la noción de significado se vuelve relativa a quien realiza las prácticas matemáticas. Si los sistemas de prácticas son propios de un individuo, se habla de *significados personales*, y si los sistemas de prácticas son aquellas compartidas en un grupo o comunidad, se denominan *significados institucionales* (Godino & Batanero, 1998). En términos más coloquiales, se puede entender el significado de un objeto matemático como todo aquello que se puede hacer con el objeto y decir del objeto.

En el contexto de la enseñanza de las matemáticas, cuando se habla de objetos matemáticos solamente se considera a los conceptos o a las definiciones de estos. En el EOS, el término *objeto* tiene un sentido más amplio y a la vez detallado. Se reconoce como *objetos matemáticos* a los emergentes de los sistemas de prácticas asociadas a un tipo de problemas. Cuando nos enfrentamos a un tipo de situaciones problema, en el proceso de solución pueden emerger nuevas situaciones problema, nuevas formas de lenguaje, nuevos procedimientos, nuevas propiedades, nuevos argumentos y nuevos conceptos. Entonces, en el EOS se considera como *objetos matemáticos (primarios)* tanto a las *situaciones problema*, los *lenguajes*, los *conceptos*, los *procedimientos*, las *propiedades* o *proposiciones* y los *argumentos* (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002). Si estos emergentes de los sistemas de prácticas significativas son propios de un individuo, se denominan *objetos personales* y si son compartidos en el seno de una comunidad, se les llama *objetos institucionales*. En este sentido, el propósito general de la enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista del EOS es lograr que los estudiantes, al resolver situaciones problema determinadas, transiten de significaciones personales hacia significaciones institucionales que se toman como referencia en la enseñanza.

El significado institucional de referencia en torno al TFC y la integral

La actividad que diseñamos está dirigida principalmente a estudiantes de ingeniería, por ello, para determinar los significados que queremos promover con la actividad, analizaremos un fragmento del programa[2] de estudios de la asignatura Cálculo

[2]Tomado de http://mat.uson.mx/sitio/documentos/ding/calculo-diferencial-integral-2.pdf

Diferencial e Integral II para la división de Ingeniería de la Universidad de Sonora, en lo referente a los temas de integral y TFC (

Tabla 2).

Tabla 2. *Fragmento del plan de estudios.*

CONTENIDO	OBJETIVOS TEMÁTICOS	HABILIDADES ESPECÍFICAS
3. LA INTEGRAL DE RIEMANN. (10 horas) 3.1 Sumas superiores e inferiores de una función acotada. 3.2 La integral superior e integral superior para definir la integral definida de una función acotada en un intervalo cerrado. 3.3 Interpretaciones geométricas y físicas de la integral definida.	Comprender el concepto de Integral definida de Riemann a través de sumas superiores e inferiores. Interpretación geométrica de la integral de una función no-negativa, en términos de área. Utilizar esta herramienta para modelar y resolver problemas geométricos físicos y de la Ingeniería.	• Calcular el área bajo la curva de funciones sencillas, por medio de sumas superiores e inferiores • Modelar y resolver problemas sencillos de la física y la Ingeniería, por medio de sumas superiores e inferiores.
4. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (10 horas) 4.1 Cálculo de integrales definidas para funciones sencillas, en los que el extremo superior es un parámetro. 4.2 La integral como función del extremo superior. 4.3 Continuidad de la función integral . 4.4 El Teorema Fundamental del Cálculo. 4.5 Relación entre áreas y tangentes (Isaac Barrow)	Establecer la relación entre los dos conceptos fundamentales del Cálculo: Derivada e Integral, y la correspondiente relación geométrica área-Tangente.	• Visualizar geométricamente a la Integral como una función del extremo superior. • Antiderivadas e Integral indefinida • Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para encontrar integrales definidas. • Dada una función encontrar gráficamente la función antiderivada. • Resolver problemas que involucren la relación área - tangente.

Un análisis del significado institucional de referencia muestra la complejidad de los objetos matemáticos asociados al Teorema Fundamental del Cálculo y la integral.

Dentro del programa de estudios identificamos algunas *situaciones problema* como las siguientes:

- Calcular áreas y distancia recorrida por un móvil
- Calcular antiderivadas gráfica y algebraicamente
- Calcular integrales definidas sencillas e integrales definidas con extremo superior variable

Algunos de los *conceptos* (tanto en *lenguaje* gráfico, como algebraico, así como su *notación* asociada) son:

- Función (expresada algebraica y gráficamente)
- Función continua (curva continua)
- Derivada (como algoritmo algebraico y como pendiente de la recta tangente)
- Integral (integral definida, integral como función del extremo derecho del intervalo, integral asociada a conceptos de área y antiderivada).
- Distancia recorrida (como área).

Los *procedimientos* son:

- Algoritmos algebraicos de derivación y antiderivación de funciones sencillas.
- Cálculo de integrales definidas de funciones simples
- Cálculo de la integral como función del extremo superior.

Proposiciones/propiedades:

- TFC
- La función integral es continua.
- Relación geométrica área-tangente.

Argumentos: no se explicitan.

Para el diseño de nuestra actividad didáctica, seleccionaremos algunos de estos objetos primarios que conforman el significado institucional de referencia, como mostraremos más adelante en la descripción de la actividad.

Una prueba experimenta preliminar

Como ya mencionamos líneas arriba, la actividad que diseñamos tiene su origen en una prueba experimental informal en torno al problema de problema de calcular la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ cuando $f(t)$ es una función discontinua. Los elementos teóricos del EOS nos permiten analizar la riqueza y complejidad del problema planteado a través del análisis de los significados puestos en juego por estudiantes al intentar resolver el problema. Este análisis constituye, además, la base para el diseño de la actividad que presentaremos, la cual incluye preguntas guía y pequeñas tareas que buscan acompañar al estudiante en la solución del problema planteado, así como promover el desarrollo de significados más robustos de los objetos involucrados.

A continuación, describiremos y analizaremos brevemente los resultados de la exploración piloto informal, llevada a cabo con dos estudiantes de licenciatura en matemáticas que habían cursado la asignatura Cálculo Diferencial e Integral II algunos meses antes de la aplicación de la prueba. La prueba consistió en plantearle a los estudiantes (por separado) un problema que incluía la gráfica de una función $f(t)$ y el siguiente enunciado:

Sea $f(t)$ una función con dominio en [0,5], cuya gráfica y expresión algebraica son las siguientes: $f(t) = \begin{cases} 2\ para\ 0 \leq t < 3 \\ 3\ para\ 3 \leq t \leq 5 \end{cases}$. Calcula la expresión algebraica de la función F definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ en [0,5] y dibuja su gráfica.

Las respuestas de los estudiantes dan cuenta de la complejidad de un problema que a primera vista parece simple. Además, sus producciones escritas indican que fue conflictivo para ellos trabajar con funciones discontinuas, tratando de armonizar los resultados obtenidos en el lenguaje algebraico con aquellos obtenidos en el lenguaje gráfico. Pero a la vez, el problema requirió que pusieran en juego y trataran de articular diferentes significados de la integral y el TFC. Presentaremos solamente uno de los casos, el que consideramos el más interesante.

El caso de la estudiante C1

La estudiante C1 comenzó con un acercamiento algorítmico en el lenguaje algebraico, poniendo en juego un significado operativo del TFC que se evidenció en el procedimiento de integrar cada una de las expresiones que forman la expresión algebraica de $f(t)$. En este procedimiento algorítmico C1 mostró dificultades con las propiedades de los límites de integración, pues tomó los mismos límites de integración al integrar ambas partes de la expresión algebraica de f (*Figura 1*).

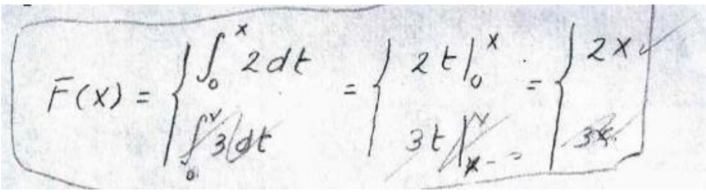


Figura 2. C1 integra cada parte de la expresión algebraica.

El hecho de que C1 aplicó el TFC como algoritmo a una función discontinua sugiere que las hipótesis del TFC, como proposiciones, no estuvieron presentes al trabajar en el lenguaje algebraico. La respuesta de C1 permite inferir prácticas ligadas a la aplicación rutinaria del TFC para la integración de funciones representadas algebraicamente por una única expresión en un intervalo.

Cuando C1 se dispuso a graficar la función $F(x)$ surgieron los conflictos que la llevaron a tachar una parte de su respuesta (lo que corresponde al cálculo de $3x$ en la *Figura 2*). Las producciones escritas de C1 sugieren que al trabajar en el lenguaje gráfico puso en juego un concepto de integral como área bajo la curva que le permitió una reflexión sobre sus procedimientos.

La estudiante dibujó la recta $y = 2x$ como gráfica del primer trozo de la función $F(x)$ en [0,3], luego trazó la recta $y = 3x$ en el intervalo [0,5] y borró esta última (*Figura 3*).

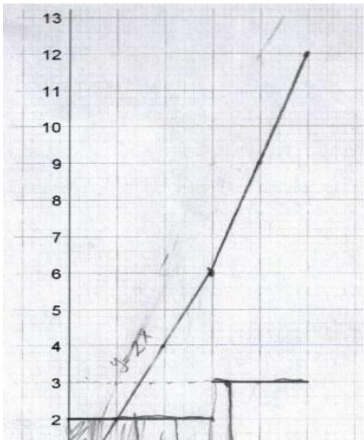


Figura 3. Tratamiento gráfico de F(x).

El hecho de que la estudiante marcara líneas verticales bajo la gráfica de $f(t)$ para diferentes posiciones de x y sombreó algunas regiones, sugiere que puso en juego el concepto de integral como función que, para cada valor de x proporciona el valor del área acumulada bajo la curva desde 0 hasta x, una versión más general del concepto de integral definida.

La estudiante C1 marcó dos puntos en la gráfica, uno de coordenadas (3, 6) y otro de coordenadas (5, 12) y a partir de ello trazó el segundo segmento de recta uniendo los puntos (*Figura 3*). La estudiante C1 expresó verbalmente su conflicto: su respuesta algebraica y gráfica no coincidían, argumentando que el valor del área limitada por la gráfica de $f(t)$ y el eje x en [0,5] es 12, pero cuando $x = 5$, la expresión $y = 3x$ no da ese resultado. Por ello, tachó el resultado de la segunda expresión algebraica para $F(x)$ en la *Figura 2*.

La estudiante está convencida de que la gráfica de Festá formada por segmentos de recta, por ser una antiderivada de funciones constantes; sin embargo, su algoritmo de integración no le proporciona la expresión del segundo segmento de recta.

La estudiante C1 cambió su estrategia (*Figura 4*), a partir del trabajo realizado en el lenguaje gráfico se planteó el problema de expresar el área de rectángulos cuya base está determinada por la posición de x. Obtuvo la expresión $2x$ para el área de los rectángulos de base x y altura 2 en el intervalo [0,3]. Luego, en el intervalo [3,5] obtiene la expresión $3x - 9$ para el área de los rectángulos de base $x - 3$ y altura 3.

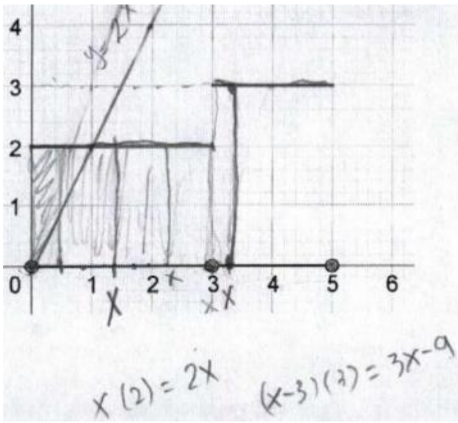


Figura 4. Área de rectángulos.

Para la estudiante C1 tomó relevancia el intervalo donde se ubica x, a partir de ello adaptó su algoritmo de integración (*Figura 5*), cambiando los límites de integración en la integral de la segunda expresión de f y obteniendo el mismo resultado que aquel derivado del trabajo en el lenguaje gráfico.

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 2\,dt \\ \int_3^x 3\,dt \end{cases} = \begin{cases} 2t\big|_0^x = 2x \\ 3t\big|_3^x = 3x - 9 \end{cases}$$

Figura 5. Nueva expresión algebraica de F(x).

Finalmente, la estudiante explica de manera escrita su confusión al resolver el problema: “no tomé en cuenta que tenía área acumulada en el intervalo [0,x]” (primer párrafo de la *Figura 6*). En su respuesta hay elementos para resolver completamente el problema, sin embargo no logra articularlos completamente, pues termina explicando que “La manera correcta es integrar la primera parte de la función de [0, x] y la segunda parte de [3, x]” sin considerar el área ya acumulada en [0, x].

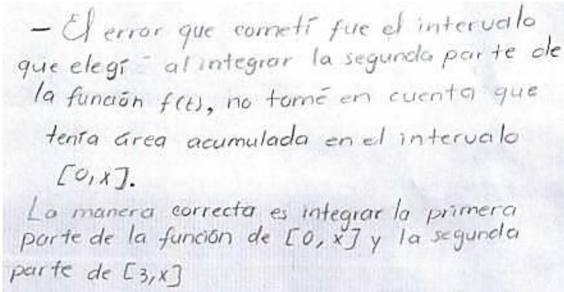

– El error que cometí fue el intervalo que elegí al integrar la segunda parte de la función $f(t)$, no tomé en cuenta que tenía área acumulada en el intervalo $[0,x]$.
La manera correcta es integrar la primera parte de la función de $[0,x]$ y la segunda parte de $[3,x]$

Figura 6. Explicación de C1 sobre su procedimiento.

La actividad didáctica

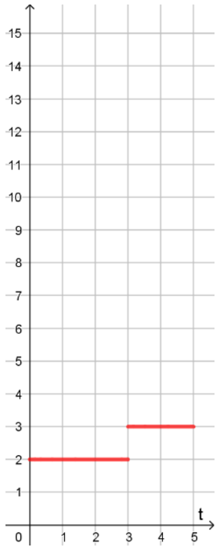
De las producciones de la estudiante C1 se pueden inferir diversas prácticas y objetos primarios que informan de su significado personal de integral y TFC, los cuales informan a su vez los significados promovidos por la institución en la cual realiza sus estudios. Aunque C1 es estudiante de matemáticas, no de ingeniería, consideramos que los significados mostrados son acordes al significado institucional de referencia promovido por el plan de estudios de la División de Ingeniería y por lo tanto serán una guía para el diseño de nuestra actividad.

La actividad que presentamos promueve el trabajo del estudiante en un lenguaje algebraico y en un lenguaje gráfico. Esta característica es una consideración que tiene raíces profundas en el trabajo experimental con C1. Nos percatamos de que el cambio del trabajo matemático de un lenguaje algebraico a un lenguaje gráfico causó conflictos que llevaron a C1 a notar que sus procedimientos algebraicos no arrojaban los mismos resultados que las exploraciones gráficas, lo cual favoreció que C1 tomara consciencia de propiedades de los objetos involucrados, que en el lenguaje algebraico pasaban desapercibidas y que le ayudaron a reformular sus procedimientos algebraicos. Esta situación es reminiscente del principio central del Juego de Marcos de Douady (1986), como medio para generar desequilibrios en el estudiante al notar inconsistencias al cambiar de marco (del algebraico al gráfico) que promuevan el aprendizaje al ser compensados.

La actividad didáctica consta de 5 que describiremos a continuación.

Parte 1. Se plantea el problema siguiente de forma individual, con el objetivo de que cada estudiante ponga en juego sus significados, con un tiempo estimado de 5 minutos para ello.

> En la imagen siguiente se muestra la gráfica de una función definida en el intervalo [0,5], cuya expresión algebraica está dada en dos partes: $f(t) = 2$ cuando t está en el intervalo [0,3] y $f(t) = 3$ cuanto t está en el intervalo [3,5]. Es decir,
>
> $$f(t) = \begin{cases} 2\ para\ 0 \leq t < 3 \\ 3\ para\ 3 \leq t \leq 5 \end{cases}$$



Calcula la integral $\int_0^x f(t)dt$ en el intervalo [0,5] y dibuja su gráfica en los mismos ejes coordenados.

La función es una función simple que pretendemos permita a los estudiantes apoyarse en el significado de integral como área. A pesar de su simpleza, para un estudiante de ingeniería puede ser extraña una función definida de esta manera.

Parte 2. (5 minutos) Esta parte de la actividad se realiza en equipos (de 3 o 4 estudiantes) y tiene dos propósitos: 1) que los estudiantes comparen sus respuestas para que la diversidad de significados genere una discusión fructífera sobre los conceptos, algoritmos y propiedades presentes en las diversas respuestas. 2) Evocar en los estudiantes el concepto de integral vinculado al área bajo la curva y que lo empleen en sus procedimientos a la par de los algoritmos algebraicos.

Se indica a los estudiantes no borrar sus respuestas a la parte 1 y realizar en equipo las siguientes tareas:

1. ¿Cuál es el valor de $\int_0^5 f(t)\,dt$? Explica brevemente cómo lo calculaste.

Se espera que, ante este problema, algunos estudiantes del equipo recurran al concepto de integral como área bajo la curva y otros a la aplicación de un algoritmo de integración y que al obtener resultados distintos discutan cuál es el resultado.

2. Gráficamente, ¿qué representa el valor de $\int_0^5 f(t)\,dt$?

Parte 3. (15 minutos) Se pretende que surja y se note un conflicto entre los algoritmos algebraicos y los resultados geométricos y se apoye en distintos conceptos de la integral para resolverlos.

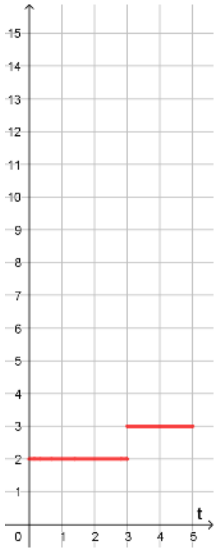
3. Calcula la integral $\int_0^x f(t)\,dt$. Escribe el resultado en el espacio siguiente y explica brevemente tu procedimiento.

Se espera que en esta parte los estudiantes discutan sobre cuál de las expresiones obtenidas en la parte 1 es la más adecuada y cómo saberlo.

4. ¿Qué representa gráficamente la integral $\int_0^x f(t)\, dt$?

La pregunta 4 pretende que los estudiantes reflexionen sobre el concepto asociado a los algoritmos empleados y les proporcione una manera de verificarlos en este contexto esencialmente distinto al trabajo con una función continua representada por una única expresión algebraica.

5. Llamemos $F(x)$ a la función que obtuviste al calcular $\int_0^x f(t)\, dt$, traza su gráfica en los ejes siguientes.



6. Comprueba que tu gráfica y expresión algebraica de la función $F(x)$ se correspondan una a la otra explorando algunos valores específicos de x. Por ejemplo, calcula $\int_0^x f(t)\, dt$ cuando $x = 4$, es decir, el valor de $F(4)$.

Con las tareas 5 y 6 se espera que los estudiantes involucren en su discusión la discontinuidad de la función integrando y se pregunten si la gráfica de la función integral debe o no ser continua. Además, se espera que el concepto de integral como función del área acumulada desde 0 a $x$sea un medio para verificar que la gráfica y la expresión algebraica sean consistentes.

Parte 4. (10 minutos) Las preguntas 7 a 10 pretenden promover y refinar la reflexión sobre la continuidad de la función integral.

7. ¿La función $f(t)$ es continua o discontinua en el intervalo [0,5]? Explica por qué.

8. ¿La gráfica de $F(x)$en el intervalo [0,5] debe ser una sola curva o dos curvas separadas? Explica por qué.

9. ¿Cómo debería ser el valor de $F(x)$ cuando x es un valor muy aproximado a 3, pero menor que 3?

10. ¿Cómo debería ser el valor de $F(x)$ cuando x es un valor muy aproximado a 3, pero mayor que 3?

Al finalizar la parte 4 se sugiere realizar una discusión grupal para acordar cuál es la expresión algebraica y la gráfica de la función $F(x)$, por qué los algoritmos fallan, cuáles son las condiciones del teorema fundamental del cálculo, cuáles fueron las estrategias para resolver el problema.

Parte 5. (30 minutos, trabajo en equipo). En esta parte se complementa la reflexión con la mediación de un applet creado con GeoGebra que permite graficar funciones discontinuas (en el punto c) a partir de dos expresiones algebraicas que se capturan en los campos de entrada como se muestra en la Figura 7. En el applet, los puntos a y b se pueden mover para definir un intervalo de integración. Moviendo el punto c se puede cambiar el punto de discontinuidad de f y al mover el punto x se puede observar el área sombreada desde a hasta x. Las casillas de la derecha permiten mostrar el área sombreada, el punto cuyas coordenadas son $(x, F(x))$ y la gráfica de la función $F(x)$.

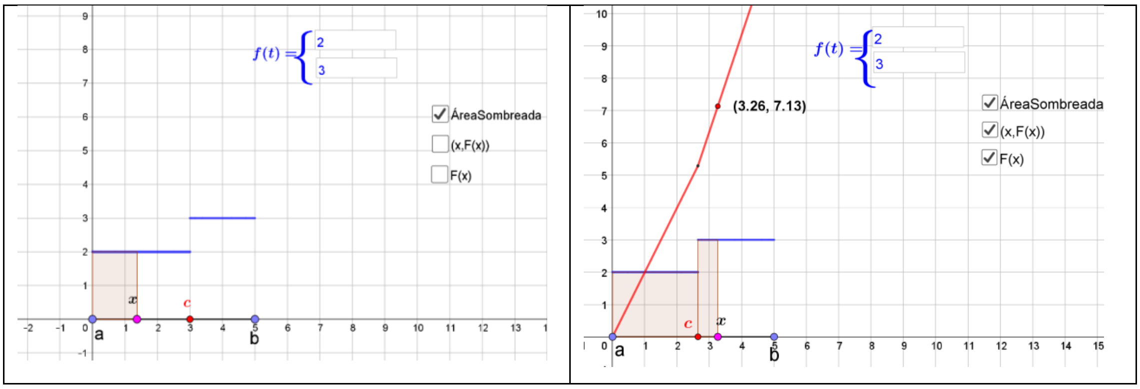


Figura 7. Applet de para el trabajo dinámico

Las instrucciones y tareas para el estudiante son las siguientes:

Abre el archivo Integral.ggb[3]. Se mostrará la función $f(t)$ que estás integrando. El archivo tiene varias características que te permitirán trabajar con otras funciones discontinuas y que explicaremos más adelante. Mueve el punto x y observa que cambia la región sombreada.

11. Completa la siguiente tabla:

x	Área acumulada hasta x	Incremento del área
0	0	--------------------
1	2	2
2	4	2
3		
4		

[3] Disponible en el enlace https://www.dropbox.com/s/m4ayidk5qc0vy8p/Integral.ggb?dl=0

5		

12. Describe cómo se acumula el área cuando x varía dentro del intervalo [0,3]

13. Describe cómo se acumula el área cuando x varía dentro del intervalo [3,5]

14. ¿Qué pasa con el área acumulada cuando x pasa de ser menor que 3 a ser mayor que 3?

15. Activa la casilla "$(x, F(x))$" y mueve el punto x ¿Explica qué representa el punto nuevo y la gráfica que traza?

16. ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de $F(x)$ en el intervalo [0,3]?

17. ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de $F(x)$ en el intervalo [3,5]?

18. ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de $F(x)$ en x=3?

Al final de la parte 5 se recomienda realizar una discusión grupal para discutir resultados interesantes y relaciones con las partes 1 a 4.

En las clases siguientes, se sugiere trabajar en el applet, planteando el mismo problema de la parte 1 pero variando algunas características que el applet permite cambiar: la función discontinua, el punto de discontinuidad y el intervalo de integración. Se sugiere comenzar con una función positiva, constante en una parte de su dominio y lineal en la otra. Posteriormente, se puede trabajar con una función positiva pero cuyo intervalo de integración no comienza en el cero. Luego, se puede discutir el caso de las funciones que son positivas en una parte del intervalo de integración y negativas en otra.

Conclusiones

La actividad que aquí mostramos se limita a un contexto intramatemático, sin embargo, consideramos que se puede agregar una etapa previa de trabajo para familiarizar al estudiante la integral en otros contextos, como el de movimiento, a partir del estudio de la distancia recorrida y el desplazamiento de un móvil en términos del área bajo la curva y la función integral.

Por otro lado, consideramos que nuestro diseño se puede adaptar, con algunas modificaciones, como instrumento de exploración para realizar un trabajo de investigación sobre los significados y dificultades de los estudiantes en torno a la integral y el uso del TFC y cómo estos significados se transforman a partir de la interacción en equipo, las discusiones grupales y la mediación de la tecnología digital.

Referencias bibliográficas

Carlson, M. P., Smith, N. & Persson, J. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate of change and accumulation: The fundamental theorem of calculus. En *Proceedings of the 2003 Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education-North America*, Honolulu, HI, 2, 165-172.

Cuevas, A., Pluvinage, F., Dorier, J., Hitt, F., Tall, D., Madrid, H., . . . Parraguez, M. (2013). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa*. México: Pearson Educación.

Douady, R. (1986). Jeux de Cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique de Mathematique*, *7*(2), 5-31.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Acta Scientiae. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10, 7-37.

Ímaz, C., & Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo. Las trampas del rigor*. México: Trillas.

Jiménez, M. P., & Mejía, H. R. (2015). Una orquestación instrumental para el estudio de la integral definida. *El Cálculo y su Enseñanza*, *6*, 71-101. Tomado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/ index.php?vol=6&index_web=12&index_mgzne

Kouropatov, A. & Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge accumulation. *ZDM*, *46*, 533-548. doi: 10.1007/s11858-014-0571-5

Leithold, L. (1998). *El cálculo* (7a. ed.). México: Oxford University Press.

Moreno-Armella, L. (2013). Intuición y rigor: una danza interminable. En C. A. Cuevas et al. (Eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa* (pp. 85-105). México: Pearson.

Moreno-Armella, L. (2014a). An essential tension in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 46*(4), 621-633. doi: 10.1007/s11858-014-0580-4

Moreno-Armella, L. (2014c). Intuir y formalizar: procesos coextensivos. *Educación Matemática*, 26(Número especial), 185-206. Tomado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/2016/08/04/intuir-y-formalizar-procesos-coextensivos/

Nagle, C. (2013). Transitioning from introductory calculus to formal limit conceptions. *For the Learning of Mathematics, 33*(2), pp. 2-10. Tomado de http://www.jstor.org/stable/43894843

Robles, M. G., del Castillo, A. G., & Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación Matemática, 24*(1), 35-71. Tomado de http://somidem.com.mx/revista/vol24-1/

Robles, M. G., Tellechea, E., & Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, *26*(2), 69-109.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 217-233. doi:10.1007/s10649-008-9128-2

Rudin, W. (1966). *Principios de análisis matemático* (2ª. ed.). México: McGraw-Hill.

Spivak, M. (2012). *Calculus* (3a. ed.). Barcelona: Editorial Reverté.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. doi: 10.1007/0-306-47203-1

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infitity and proof. En Grouws, D. A. (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 195-511). United States of America: National Council of Teachers of Mathematics.

Tellechea, E. (2005). De la integral de Riemann al teorema fundamental del cálculo: un acercamiento con el applet Descartes. *Memorias de la XV semana regional de investigación y docencia en matemáticas,* Sonora, México, 131-136. Tomado de http://semana.mat.uson.mx/semanaxxvii/memorias.php

Williams, S. R. (1991). Models of limit held by calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 219-236. doi:10.2307/749075