REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

httpS://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen VI Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2018

ISSN: 2395-955X

Contenido

Pag.

Revista AMIUTEM, Año VI No. 2, julio-diciembre 2018, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 28 de Diciembre de 2016.

COMITÉ DE EVALUACIÓN

COMITÉ DE ARBITRAJE

Karla Liliana Puga Nathal
Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán. Tecnológico Nacional de México

Ricardo Ulloa Azpeitia
Elena Nesterova
Rafael Pantoja Rangel
José Francisco Villalpando Becerra
CUCEI. Universidad de Guadalajara

J. Trinidad Ulloa Ibarra
María Inés Ortega Arcega
ACBI. Universidad Autónoma de Nayarit

Alicia López Betancourt
Universidad Juárez del Estado de Durango

Esnel Pérez Hernández
María de Lourdes Guerrero Magaña
AMIUTEM

Armando López Zamudio
CBTIS 94

Ruth Rivera Castillón
Universidad Autónoma de Baja California

José Zambrano Ayala
Instituto Tecnológico de Milpa Alta, Tecnológico Nacional de México

Mónica del Rocío Torres Ibarra
Elvira Borjón Robles
Universidad Autónoma de Zacatecas

Eréndira Núñez Palenius
José Carlos Cortés Zavala
Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo

Noelia Londoño Millán
Universidad Autónoma de Coahuila

Claudia Sánchez García
Instituto Tecnológico Superior del Oriente del Estado de Hidalgo

Ángel Ezquerra Martínez
Universidad Complutense de Madrid

Ana Guadalupe del Castillo Bojorquez
Cesar Fabian Felix
María Teresa Dávila Araiza
Universidad de Sonora

Cesar Martínez Hernández
Universidad de Colima

Marleny Hernández Escobar

Escuela Normal Superior de México

Angelina Alvarado Monroy
Universidad Juárez del Estado de Durango

Citlalin Aurelia Ortiz Hermosillo
Instituto Tecnológico de Matamoros. Tecnológico Nacional de México

Lilia López Vera
Universidad Autónoma de Nuevo León

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VI Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2018

ISSN: 2395-955X

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO QUE MUESTRA EL FUTURO PROFESOR CUANDO USA GEOGEBRA EN SUS CLASES

Marleny Hernández Escobar, Gonzalo Zubieta Badillo

marlenylesly@hotmail.com, gzubieta@cinvestav.mx

CINVESTAV-IPN, México

Para citar este artículo:

Hernández, M., Zubieta, G. (2018). El conocimiento especializado que muestra el futuro profesor cuando usa GeoGebra en sus clases. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VI, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VI, No. 2, Julio-Diciembre de 2018, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO QUE MUESTRA EL FUTURO PROFESOR CUANDO USA GEOGEBRA EN SUS CLASES

Marleny Hernández Escobar, Gonzalo Zubieta Badillo

marlenylesly@hotmail.com, gzubieta@cinvestav.mx

CINVESTAV-IPN, México

Palabras clave: Conocimiento Especializado, Futuro Profesor, Geometría, GeoGebra.

Resumen

Este trabajo es un estudio de caso donde se indaga mediante video grabaciones el conocimiento especializado de una futura profesora de secundaria que integra el uso de GeoGebra en el salón de clases para la enseñanza de la geometría, la finalidad es investigar y categorizar de qué manera el uso del recurso computacional interviene en la comprensión de la construcción de la mediatriz y de la bisectriz en un triángulo. En relación con el marco del conocimiento del profesor, se utilizan las categorías de los subdominios del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Key words: Specialized knowledge, future teacher, geometry, GeoGebra.

Abstract

This work is a case study where the specialized knowledge of a future high school teacher that integrates the use of GeoGebra in the classroom to teach geometry is investigated through video recordings, the purpose is to investigate and categorize how the use of computational resources is involved in understanding of the construction of the perpendicular bisector and the bisector in a triangle. In relation to the knowledge framework of the teacher, the categories of the subdomains of the specialized knowledge model of the mathematics teacher are used.

Introducción

Este trabajo explora sobre el conocimiento especializado del futuro profesor (matemático y didáctico del contenido) cuando utiliza GeoGebra en el aula, debido a que, el conocimiento de la herramienta es fundamental para poder diseñar actividades y pensar en sus posibilidades en el aula, pero también es necesario un conocimiento de la materia a impartir, consideramos que ambos conocimientos se intersecan, en el sentido de que se necesita un conocimiento de la herramienta para enseñar el contenido matemático, y que el conocimiento de la herramienta incide en el conocimiento del objeto matemático y su enseñanza-aprendizaje.

El interés del estudio es el futuro profesor cuando usa GeoGebra para la enseñanza de las matemáticas, en el contexto que muestra una práctica caracterizada por la exploración del alumno en situaciones problemáticas. Hemos elegido GeoGebra porque converge con un tratamiento geométrico favoreciendo el trabajo en resolución de problemas y la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos (Saidón, Bertúa y Morel, 2010). Asimismo, es una herramienta con potencial para transformar el aula de matemáticas, en el sentido de modificar la enseñanza de prácticas tradicionales a investigativas (Carrillo, 1998).

Utilizamos algunos de los subdominios del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) propuestos por Carrillo, Climent, Contreras, Montes, Escudero-Ávila, y Flores-Medrano (2014) como fundamento teórico y práctico en el diseño de las actividades implementadas en este trabajo.

Partimos de la consideración de que en el conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática más relativo al propio contenido matemático, pueden considerarse dos dominios principales: conocimiento del contenido (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK). Nos interesa el carácter especializado del conocimiento del profesor de matemáticas, entendiendo que no debe restringirse a un subdominio del conocimiento matemático sino a todos sus subdominios. Por lo tanto, asociamos la especificidad de dicho conocimiento el referido a la enseñanza de la matemática y lo que debe reflejarse en el conocimiento del profesor en su conjunto.

Referente teórico

El Marco Teórico de este estudio se basa en el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, en adelante MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) (Carrillo, Climent, Contreras, y Muñoz-Catalán, 2013).

La Figura 1, representa el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Carrillo, et al., 2013), no incluimos la parte central del modelo que corresponde a creencias por no ser parte del presente estudio.

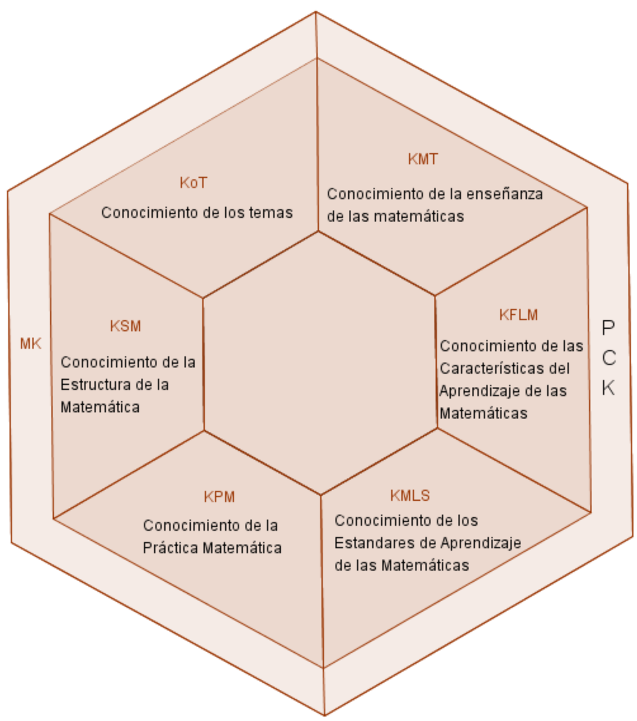


Figura 1. Subdominios del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

Utilizamos el MTSK como modelo teórico debido a que se diferencia del conocimiento en pedagogía y psicología general, del conocimiento especializado del docente de otras asignaturas y del conocimiento especializado de otro profesional de la matemática, siendo una herramienta metodológica que admite analizar distintas prácticas del futuro profesor de matemáticas y permite interpretar su conocimiento especializado a través de sus categorías.

El MTSK es un elemento que ayuda a organizar una reflexión (colectiva o individual) sobre el conocimiento para enseñar matemáticas haciendo uso de conocimientos prácticos donde el futuro docente sea consciente de los conocimientos que posee o que le faltan, a través de diseños de tareas con una estructura específica y la ejecución de las mismas para formar un entorno de aprendizaje con el análisis de sus errores, además tiene que ver con su intervención en el aula integrando las diferentes formas con las que se interactúa de cara a la enseñanza.

En este documento damos cuenta de la observación realizada del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) que posee el futuro docente para la enseñanza de las matemáticas y de qué forma este conocimiento se modifica cuando se diseñan, se aplican y se resuelven actividades con el uso de GeoGebra que orientan la tarea educativa, a través del análisis y la investigación.

La estructura del modelo teórico del MTSK se desarrolla con base en los dominios que se describen a continuación:

Dominio de Conocimiento Matemático (MK)

Dominio fundamental en el futuro profesor debido a que es el conocimiento de la propia disciplina que se enseña, considera tres subdominios que lo componen y le dan sentido:

1) Subdominio de Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT). Es un conocimiento profundo que consiste en conocer los contenidos matemáticos que se enseñarán (conceptos, procedimientos, hechos y reglas entre otros) y sus significados de manera fundamentada.

Dentro de este subdominio se consideran las siguientes categorías:

a. Conocimiento de los procedimientos matemáticos asociados a un contenido. En esta categoría se emplea el conocimiento práctico del trabajo matemático, es decir el saber hacer, puesto que es importante para el profesor conocer los procedimientos asociados a contenidos específicos, conjuntamente, con el conocimiento matemático suficiente para reconocer los procesos que se necesitan para algún contenido.

b. Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático. Esta categoría se refiere al conocimiento sobre propiedades específicas del contenido matemático y los fundamentos que le dan sentido y significado.

c. Conocimiento de registros de representación asociados a un contenido matemático. Se considera el conocimiento acerca de modelos que pueden ser atribuidos a un tópico. Se ven estos como fenómenos que sirven para generar conocimiento matemático, pero también, se considera el conocimiento que el profesor tiene acerca de usos y aplicaciones de un tópico que ya fue enseñado.

d. Conocimiento de la fenomenología asociada a un contenido matemático. Se refiere al conocimiento sobre la fenomenología de los conceptos (Freudenthal, 1983), conocimiento que debe ser considerado importante para el futuro docente, debido a su "amplia variedad de contextos en los que situar el contenido, así como aspectos epistemológicos ligados a la matemática que permitan al profesor comprender los significados que pueden atribuirse a un contenido" (Carrillo, Contreras y Flores, 2013, p.196).

2) Subdominio de Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM). Este subdominio tiene sus bases en lo descrito por (Ball, Thames, Phelps 2008) como Conocimiento del horizonte matemático, este conocimiento de las matemáticas permitirá al futuro profesor reflexionar sobre algún contenido para trabajar la matemática desde un punto de vista integral y estructurado para comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales mediante una visión avanzada.

Para este subdominio se proponen categorías de análisis:

a. Conexiones de Complejización en las cuales se relacionan los contenidos enseñados con contenidos posteriores, una visión de la matemática elemental desde un punto de vista avanzado se refleja en la proyección de los contenidos enseñados como potenciadores para contenidos a enseñar en un futuro (Klein, 1957).

b. Conexiones de Simplificación en las cuales se relacionan los contenidos enseñados con contenidos anteriores, es decir, la enseñanza de la matemática avanzada desde un punto de vista elemental se refleja en la retrospección de los contenidos enseñados potenciados por los previos (Klein, 1957).

c. Conexiones de Contenidos transversales, son conexiones que tienen distintos contenidos y pueden relacionarse por alguna cualidad común y por los modos de pensamiento asociados a dichos temas.

d. Conexiones Auxiliares consideradas cuando un objeto matemático sirve como auxiliar de otro.

3) Subdominio de Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). Este subdominio contempla cómo es construida la matemática y destaca la importancia de que el docente conozca las formas de proceder para llegar a resultados y características de un trabajo matemático sabiendo cómo se explora y cómo se genera conocimiento a través de establecer relaciones, correspondencias y equivalencias.

Para este subdominio se consideran las siguientes categorías.

a. Prácticas ligadas a la Matemática en General. Esta categoría considera un tipo de conocimiento que se relaciona con el desarrollo de las matemáticas independientemente del concepto abordado, es decir, se debe conocer el significado de una condición necesaria y una condición suficiente o las cualidades de una definición, este conocimiento provee estructuras lógicas de pensamiento que ayudarán al futuro docente a entender el funcionamiento de diversos aspectos matemáticos adecuados para comunicárselos a los estudiantes, mejorando el entendimiento de fenómenos cotidianos.

b. Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas donde tiene sentido considerar un tipo de razonamiento asociado específicamente a un tópico concreto, es decir, existe un tipo de conocimiento sobre matemáticas usado independientemente del concepto abordado.

Dominio de Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Este conocimiento incluye los conocimientos que el profesor tiene sobre los temas enseñados con regularidad, es decir, todas las formas de representación (ilustraciones) y formulación (ejemplos y explicaciones) que configuran que el contenido sea comprensible para otros al considerar los siguientes subdominios.

1) Subdominio de Conocimiento de las Características del Aprendizaje (KFLM). Este conocimiento permitirá al futuro profesor adquirir una mayor conciencia del ambiente escolar en el que se desarrollan las prácticas docentes para poder abordar los temas de una forma más personalizada y ajustada con las necesidades de los alumnos de secundaria.

Para este subdominio se consideran las siguientes categorías.

a. Conocimiento de teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático. Se refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca de los modos de comprensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático.

b. Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático, esta categoría engloba conocimientos sobre los errores, obstáculos y dificultades asociados a la matemática en general y a temas concretos, es decir, las características y procesos de aprendizaje asociadas directamente con las características matemáticas y no pedagógicas del contenido.

c. Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con el Contenido Matemático. Se refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca de los procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los típicos como los no habituales, se categorizan aquí los conocimientos sobre el lenguaje formal o informal, además de las figuras usadas comúnmente por los estudiantes de secundaria al abordar un determinado contenido.

d. Conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático. Es el conocimiento que tiene el futuro profesor sobre las concepciones que pueden existir en un determinado tema, aquí se considera que la elección de las estrategias están en función de la adecuación para el grupo de estudiantes al que se les imparte la clase.

2) Subdominio de Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT). Este subdominio incluye el conocimiento de recursos, materiales (dibujos, modelos manipulables, diagramas, lenguajes hablados o símbolos escritos), modos de

presentar el contenido y el potencial que puede tener para la instrucción de un concepto o procedimiento matemático.

Se consideran las siguientes categorías para este subdominio:

a. Conocimiento de teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático. Son los conocimientos sobre la potencialidad que pueden tener ciertas actividades, estrategias o técnicas didácticas asociadas a un contenido, además del conocimiento de representaciones para la instrucción, correspondientes a teorías de enseñanza.

b. Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático. Son los conocimientos que el futuro docente tiene para identificar las potencialidades, las limitaciones y las repercusiones que tendría el uso de algún recurso como medio para presentar un contenido matemático.

c. Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático. Este conocimiento involucra los conocimientos del futuro profesor sobre la potencialidad de actividades, estrategias o técnicas para enseñar un contenido matemático, así como las limitaciones, o los obstáculos que deberán superarse para que la estrategia sea exitosa.

3) Subdominio de Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Aquí se considera el conocimiento que el futuro profesor tiene acerca de lo que está estipulado que aprenda un estudiante de secundaria y su nivel conceptual, para poder dar una ubicación temporal y contextual al contenido abordado.

Para este subdominio se consideran las siguientes categorías de conocimiento.

a. Contenidos Matemáticos que se requieren Enseñar. Es el conocimiento que el futuro profesor tiene referente a lo que se espera que el estudiante aprenda en un determinado nivel escolar, puede ser adquirido mediante la consulta de un documento rector que indique cuáles son esos contenidos.

b. Conocimiento del Nivel de Desarrollo Conceptual y Procedimental esperado. Son los niveles de abstracción para un tópico en un determinado momento escolar, es decir, la profundidad con la que debe ser abordado un determinado contenido matemático, en relación con un periodo escolar determinado.

c. Secuenciación de diversos temas. Son los conocimientos y las capacidades previas que se tienen para aprender un nuevo contenido en términos de lo que los estándares marcan que se debe conocer antes de impartir un determinado contenido y lo que aportará éste en temas posteriores.

El análisis del MTSK que posee el futuro profesor permitirá saber dónde se está y hacia dónde se quieren orientar los esfuerzos, de esta manera puede haber cambios importantes en la forma de ver, entender y llevar a cabo la enseñanza, debido a que es necesario pensar e investigar sobre las características de la formación inicial del profesor, la integración del conocimiento que el futuro docente requiere para su labor docente y el conocimiento matemático, es precisamente lo que conforma el conocimiento especializado.

El foco de nuestro trabajo es indagar el conocimiento especializado del futuro profesor de matemáticas cuando usa GeoGebra en sus prácticas docentes.

Metodología

El objetivo en el que se centra este estudio es identificar qué conocimiento respecto a los subdominios del MTSK se evidencia en la práctica de una futura profesora que usa GeoGebra en el aula de matemáticas, es un estudio de caso porque examina una situación única, sin intención de generalizarla, de acuerdo con Cohen, Manion & Morrison (2004), los estudios de caso son ejemplos (instance) específicos que frecuentemente están diseñados para ilustrar un "principio más general" (p. 181) y con ellos pueden investigar situaciones que informan acerca de "las interacciones dinámicas y el desarrollo de eventos, relaciones humanas y otros factores en un ejemplo único" (p. 181), y hacer "declaraciones teóricas […] [que] deben estar respaldadas con evidencia" (p. 182).

El foco de interés gira en torno a los recursos matemáticos y didácticos que varios profesores ponen en juego para enseñar a sus estudiantes la construcción de mediatriz y bisectriz en primer grado de secundaria (SEP, 2011). Analizamos las sesiones en las que la futura profesora usa Geogebra en el laboratorio de cómputo. Para obtener la información la técnica elegida fue la observación no participativa, en ese sentido, Stake (1999) argumenta que el investigador registra lo que acontece a través de la observación con la finalidad de ofrecer una "descripción […] incuestionable" para, posteriormente, analizarla (p. 61, cursivas en el original). Por los argumentos antes mencionados, la observación se realizó mediante video-grabaciones (una cámara dirigida, hacia lo que hizo y dijo el profesor), reforzadas con audio-grabaciones y notas de campo.

El análisis que según Stake (1999) consiste en darle sentido a los datos recopilados, dejando de lado nuestras impresiones, estuvo centrado en las prácticas docentes de una futura profesora de la Licenciatura de Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas que cursaba el séptimo semestre en la Escuela Normal Superior de México (ENSM), fue elegida por su trabajo con el uso de GeoGebra en el aula con un tema de geometría.

El tema que desarrolló la futura docente durante 6 sesiones en dos grupos fue: El trazo y análisis de las propiedades de la mediatriz y la bisectriz en un triángulo, ubicado en el bloque 1 de primer grado de secundaria en el eje forma espacio y medida (SEP, 2011).

Resultados

La finalidad del estudio fue caracterizar y comprender el conocimiento especializado del futuro profesor cuando realizaba sus clases de geometría con el uso de GeoGebra en el nivel básico (secundaria), no se trató de una generalización del conocimiento especializado sino más bien de una profundización en el conocimiento que se mostró al enseñar el trazo y análisis de las propiedades de la mediatriz y la bisectriz en un triángulo.

Los datos se obtuvieron por medio de la observación no participante de clases que fueron videograbadas y para el análisis de los datos se consideró el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2013).

La mayoría de evidencias encontradas en las sesiones de clases observadas corresponden al KoT en algunas categorías, acompañadas de KMT en la categoría ejemplos para la enseñanza y KFLM respecto a fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje.

Después de la transcripción de las sesiones de clase, se extrajeron las unidades de información que nos sirvieron para realizar el análisis del conocimiento sobre la construcción de la mediatriz y la bisectriz en triángulos con el modelo analítico MTSK. En las sesiones únicamente se analizaron las intervenciones de la profesora y de los alumnos en las que existió alguna explicación con el uso de GeoGebra. A continuación describimos el conocimiento del futuro profesor en cada uno de los subdominios.

Conocimiento de los temas (KoT)

Se evidenció en el análisis el conocimiento de los temas (KoT) en las categorías: procedimientos, conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático.

El futuro profesor enuncia lo que son las rectas perpendiculares, él indica "son aquellas rectas que se hallan en un mismo plano formando así, cuatro ángulos rectos; en otras palabras las rectas perpendiculares aluden a dos rectas secantes que forman cuatro ángulos congruentes o cuando al cortarse forman ángulos iguales de 90 grados" y define a la mediatriz como "una recta perpendicular que pasa por el punto medio".

Ejemplo de ello se observa en el siguiente fragmento, extraído de la transcripción de las video grabaciones:

Futuro profesor:	A ver, alguien que me apoye a entregar estas hojas de trabajo *[entregando las hojas a un estudiante]*.
Estudiantes:	*Yo […]*
Futuro profesor:	¿Qué es la mediatriz? *[señalando a un alumno que levantaba la mano]*.
Estudiante:	Es perpendicular.
Futuro profesor:	¿Y pasa por dónde?
Estudiante:	Por el punto medio.
Futuro profesor:	Por el punto medio … es perpendicular al segmento, pero pasa por el punto medio *[camina hacia el estudiante que respondió y entrega una tarjeta de participación]. […]*
Futuro Profesor:	*[toma una escuadra, la apoya en el pizarrón y traza un triángulo]* ¿Cómo trazo las mediatrices de ese triángulo? *[coloca en los vértices del triángulo trazado en el pizarrón las letras ABC]*.
Estudiante:	Se abre el compás en BC.
Futuro Profesor:	¿Será la abertura de este tamaño? *[apoya el compás en el vértice B y usa una abertura igual al segmento BC]* ¿Y luego?
Estudiante:	Marca un arco como de arriba y como de abajo.

Futuro Profesor: *[traza dos arcos]* ¿Y luego?

Estudiante: Y luego se apoya en C y traza de lado a lado

Futuro Profesor: *[Toma la escuadra y la apoya sobre las intersecciones de los arcos]* Trazo una línea recta.

Estudiantes: Una recta perpendicular que pasa por el punto medio.

Notamos que el futuro docente traza un triángulo y dadas las respuestas de sus estudiantes toma con el compás una distancia BC la cual usa como radio para construir en el pizarrón arcos de circunferencia con centros B y C intersecándose dichos arcos en dos puntos (D y E), concluyendo que la recta DE es una recta perpendicular a $\overline{\mathbf{BC}}$, debido a que, forma ángulos de 90 grados, muestra un conocimiento relacionado a la construcción de la mediatriz, además, por las condiciones de la construcción la recta perpendicular pasa por el punto medio de $\overline{BC}$, obteniendo así la mediatriz, considerada por los estudiantes de secundaria como la recta perpendicular que equidista de los extremos de un segmento, esto nos indicó que el futuro profesor conocía el contenido de la sesión que impartió, debido a que consideró la equidistancia de los extremos del segmento (como lugar geométrico). Como se muestra en el siguiente episodio:

Futuro profesor: ¿Qué es la mediatriz?

Estudiante: Yo, yo, es una recta perpendicular que equidista de los extremos de un segmento [*mirando sus apuntes de la clase anterior*]

Futuro profesor: ¿Quién me dice como trazo una mediatriz?

Estudiante: Me apoyo en un punto A y abro mi compás hasta un punto B para trazar arcos.

Las intervenciones en las sesiones de clase son descriptivas, el futuro docente se apoya en hojas de trabajo que entrega a cada uno de sus alumnos con indicaciones que deben ser consideradas para la solución de las actividades, además de ello al inicio de cada clase explica, de forma general, en el pizarrón y considera las respuestas dadas por algunos estudiantes.

El futuro docente durante el desarrollo de su clase define a la bisectriz como “El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos lados de un ángulo”, además indica que al dibujar la bisectriz se divide a un ángulo en dos partes iguales.

El futuro docente concretiza las definiciones. Da una explicación previa de las definiciones antes de entregar la hoja de trabajo. Aparece la construcción de la mediatriz con regla y compás en lápiz-y-papel como la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio con la consecuencia de que cualquier punto sobre esa recta equidista de los extremos del segmento correspondiente.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Para este futuro profesor la enseñanza de un contenido a través del doblado de papel como procedimiento docente facilita en sus estudiantes la visualización de figuras geométricas y la comprensión de conceptos, atrae el interés de los estudiantes y apunta a que asimilen una idea más clara porque genera una justificación de los procesos usados para construir lo solicitado (Figura 2).

Figura 2. Uso de doblado de papel para identificar la mediatriz.

Al analizar las primeras sesiones de clase, encontramos indicios de su conocimiento sobre ejemplos para la enseñanza, muestra de ello lo observamos cuando el futuro profesor menciona: “como este cuadrado se cortó por su diagonal obtenemos dos triángulos con dos lados iguales, cada uno con un ángulo de 90 grados y por lo tanto dos ángulos de 45 grados, por consiguiente es un triángulo rectángulo isósceles” (Figura 3), además, cada ejercicio lo acompaña de preguntas para analizar las propiedades de sus trazos y así llegar a la definición requerida, usa una notación matemática adecuada al nivel de sus estudiantes, lo anterior lo atribuimos a su interés por abordar el contenido de manera visual y con instrucciones para las construcciones.

Figura 3. Uso del doblado de papel como estrategia de enseñanza.

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

El futuro profesor evidencia cierto conocimiento sobre este subdominio en la categoría fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, específicamente sobre errores y dificultades relacionados con la construcción en el momento en que los alumnos encuentran las bisectrices de un triángulo y usan el punto de intersección como el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo dado (Figura 4). Considera que estos errores pueden ser comunes en los estudiantes y que se equivocan porque no están conscientes de que los lados del triángulo circunscrito deben ser tangentes a la circunferencia solicitada y por lo tanto no se cumplen las condiciones de que sea una figura inscrita o circunscrita (Figura 5).

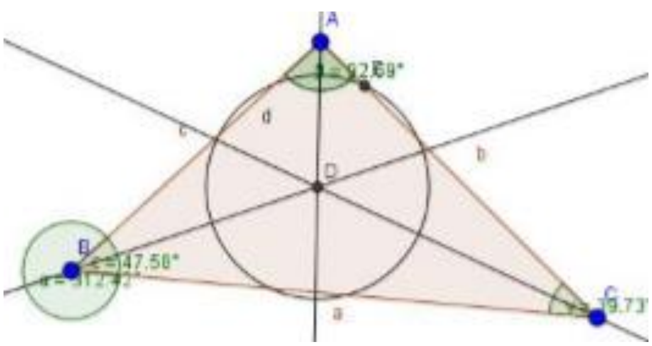


Figura 4. Construcción incorrecta de la circunferencia inscrita.

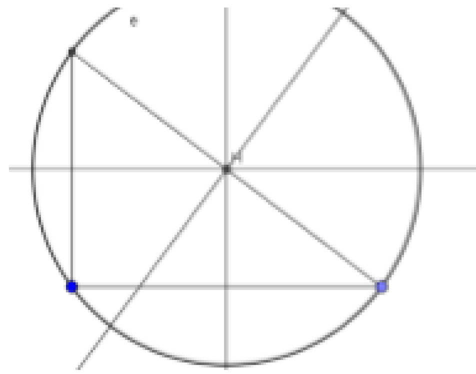


Figura 5. Construcción de la circunferencia circunscrita.

En la elaboración de la planificación el futuro docente utilizó para el diseño de sus actividades las fases del modelo de Van Hiele (1986).

El uso del software GeoGebra permitió al futuro profesor dar movimiento a sus construcciones (a diferencia de lápiz-y-papel) acción que ayudó a los alumnos a observar que las circunferencias de un radio menor a la mitad del segmento dado no se cortaban y no podían trazar la mediatriz. Los alumnos de secundaria pusieron en juego su lenguaje común mientras adquirieron un lenguaje matemático, además, el uso de GeoGebra les permitió realizar la construcción solicitada con todos los elementos revisados en el aula con lápiz-y-papel.

Al finalizar la primera y tercera de estas sesiones los alumnos con la ayuda de Geogebra construyeron las mediatrices y bisectrices de un triángulo, visualizaron las definiciones de las rectas, caracterizaron los puntos notables correspondientes a dichas rectas en el triángulo y dieron las condiciones para trazar la circunferencia inscrita y circunscrita, respectivamente.

En el análisis del MTSK de las distintas sesiones se han detectado indicios de conocimiento de todos los subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y del Conocimiento Matemático (MK), a excepción del Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM).

De estos indicadores, los más relacionados con Geogebra corresponden a los subdominios del Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas

(KMT) y del Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM).

Conclusiones

La necesidad de conocimiento en estos subdominios para el uso de Geogebra parece claro (conocimiento de la propia herramienta como recurso de enseñanza y el aprendizaje ligado a ella, y el conocimiento del contenido ligado a cómo se expresa y trabaja matemáticamente la herramienta).

Las mayores dificultades que encuentra el docente al usar Geogebra en el aula es el conocimiento que posea del software y su potencialidad. El conocimiento de distintas actividades o ejemplos en el que pueda emplear Geogebra podría entenderse como el conocimiento que tenga de distintos ejemplos o actividades en cualquier otro medio que no sea el digital si no tuviera la limitación de poder transformar ese ejemplo al formato digital con el software siendo por ello necesario el conocimiento del uso del mismo relativo a los contenidos estudiados (rectas y puntos notables en un triángulo).

El conocimiento especializado fue detectado al reflexionar, no sobre la construcción en sí, sino sobre la acción del futuro profesor al usar instrumentos geométricos además de usar GeoGebra para ayudar a los alumnos a seguir sus razonamientos. Consideramos que el conocimiento que se mostró fue en relación con las explicaciones acerca de la construcción de la mediatriz como la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio, con base en las ideas vertidas por Carrillo et al. (2013) sobre los distintos subdominios, todo el conocimiento que se instrumentó durante las clases fue especializado, por ser propio de su futura profesión.

Observamos que el conocimiento matemático es el que subyace en la base del conocimiento especializado del futuro profesor. La relación que notamos entre el conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) es tan cercana que la distinción entre los conocimientos que pertenecen a uno y otro subdominios podría parecer complicada o innecesaria, sin embargo, los resultados de este estudio han permitido valorar la potencialidad que tiene realizar esta distinción, en tanto que permite interpretar y comprender más profundamente la naturaleza del conocimiento del futuro docente desde dos perspectivas o formas de conocer el contenido matemático, como contenido a aprender y como un contenido a enseñar. Las conclusiones sobre la caracterización del KMT permitieron profundizar más sobre esta relación.

Consideramos que el contexto de diseño, justificación y discusión de actividades para el aula es un entorno propicio para la exploración del KFLM, puesto que el futuro profesor requiere de utilizar el KFLM para diseñar tareas y anticipar posibles procesos de los resolutores, además de que la discusión con sus tutores, la reflexión entre pares y la necesidad de una comunicación escrita propia del entorno virtual demandan del futuro profesor argumentaciones que justifiquen el diseño y la toma de decisiones sobre éste.

Observamos también que no es indispensable que el futuro profesor centre su atención en los estudiantes como actores principales del proceso de aprendizaje para obtener evidencias de este conocimiento, éstas son también reconocibles en reflexiones sobre la construcción del diseño y las características específicas del contenido a abordar.

Cuando el futuro profesor está consciente de su conocimiento especializado puede adquirir un bagaje de conocimiento sobre estudios científicos y evidencias empíricas que le proporcionen información sobre fortalezas y debilidades asociadas con el aprendizaje, las formas más comunes de interacción con el contenido, así como los intereses y expectativas que existen sobre un contenido, además, por supuesto, de poder reconocer teorías de aprendizaje que le permitan observar distintas formas de comprender un contenido y construir una idea propia acerca del proceso de aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME* 8, 2985-2994. Middle East Technical Universitiy: Ankara, Turquía.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M., Escudero-Ávila, D., y Flores-Medrano, E. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva, España.

Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina & I. Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro,* (pp. 193-200). Granada: Editorial Comares.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2004). *Research methods in education*. USA: RoutledgeFalmer.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematics Structures. Dordrecht: Reidel.

Klein, F. (1957). Vorlesungen Über Höhere Geometrie. Dritte auflage bearbeitet . New York: Chelsea Publishing company.

Saidón, L.M., Bertúa, J., y Morel, J.O. (2010). Un escenario dinámico de exploración matemática. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 22, 157-167.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de Estudio 2011*. Guía para el maestro. Matemáticas. México: SEP.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos* [estudios de caso]. Madrid, España: Morata.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight*. Londres: Academic Press.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VI Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2018

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

EL APRENDIZAJE DE LAS APLICACIONES DE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES CON EMPLEO DE LA REALIDAD AUMENTADA

Elkin Osorio Amaya, Elena Nesterova

elkinosorio91@gmail.com, *elena.nesterova@cucei.udg.mx*

Universidad de Guadalajara, México.

Para citar este artículo:

Osorio, E., Nesterova, E. (2018). El aprendizaje de las aplicaciones de las integrales múltiples con empleo de la realidad aumentada. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VI, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VI, No. 2, Julio-Diciembre de 2018, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx**. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.**

EL APRENDIZAJE DE LAS APLICACIONES DE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES CON EMPLEO DE LA REALIDAD AUMENTADA

Elkin Osorio Amaya, Elena Nesterova

elkinosorio91@gmail.com, *elena.nesterova@cucei.udg.mx*

Universidad de Guadalajara, México.

Palabras clave: Integrales múltiples, aprendizaje, realidad aumentada, visualización.

Resumen

En el proceso de aprendizaje de las matemáticas, las distintas representaciones semióticas que se pueden usar promueven la visualización de los conceptos (Duval en Hitt, 1996). Particularmente, al manejar las aplicaciones de las integrales múltiples, una óptima representación de la situación problema, aumenta las posibilidades de visualización, comprensión y resolución de la misma. La Realidad Aumentada es una tecnología en la que se mezcla la realidad percibida con objetos digitales (Azuma, 1997), con lo cual se pueden ubicar representaciones gráficas en contextos reales. En esta investigación se estudiaron los efectos producidos por el empleo de esta tecnología en el aprendizaje de las aplicaciones de las integrales múltiples.

Key words: Multiple integrals, learning, augmented reality, visualization.

Abstract

In the process of learning mathematics, the different semiotic representations that can be used promote the visualization of concepts (Duval in Hitt, 1996). Particularly, when managing the applications of multiple integrals, an optimal representation of the problem situation increases the possibilities of visualization, understanding and resolution of it.

Augmented Reality is a technology in which the perceived reality is mixed with digital objects (Azuma, 1997), with which graphic representations can be located in real contexts. In this research we studied the effects produced by the use of this technology in learning the applications of multiple integrals.

Introducción

La investigación que se realizó, se puede englobar como la aplicación y la validación interna de una propuesta basada en el empleo de la Realidad Aumentada (RA) para el aprendizaje de las aplicaciones de las integrales múltiples. Se desarrolló una herramienta para facilitar el aprendizaje del tema y modificar la forma en la que se presentan las evaluaciones del mismo, basada en la visualización matemática y el aprendizaje asistido por computadora como medios.

A nivel general, la herramienta se puede caracterizar como un aplicativo de RA. La RA es una tecnología que permite representar objetos matemáticos en el espacio, así como en el plano, los cuales, virtualmente ocupan un espacio en la realidad (Marín y Moreno, 2015). De esta manera, se esperó que esta herramienta, junto con su guía de uso, fueran empleadas en una aula de clases (en algunas ocasiones incluso fuera de ella) y se consiguiera que el estudiante aprendiera estos temas significativamente.

Los objetos matemáticos suelen ser representados en distintos registros (gráficos, analíticos, retóricos, tabulares), en particular, cuando se trabaja con funciones de dos variables reales existen ciertos elementos del mundo real que pueden usarse como representantes. Tal es el caso de algunas superficies, por ejemplo, el paraboloide hiperbólico suele ser llamado “silla de montar” porque la forma de una silla para montar caballos es similar a la representación gráfica de este elemento.

Sin embargo, dichos elementos del mundo real pueden resultar difíciles de conseguir y llevar al aula para usarlos de representación en apoyo para el aprendizaje de los estudiantes.

Se selecciona el tema de aplicaciones de las integrales múltiples por tener el potencial de contener un gran número de situaciones problema que de tenerse una buena representación gráfica (y llevar a cabo el proceso de visualización) de la misma, pueden ser fácilmente resueltas. Además, en este tema se afianzan prácticamente todos los conocimientos del estudiante acerca del cálculo, lo cual hace que sea atractivo para la verificación de sus conocimientos previos.

Más específicamente, las situaciones mencionadas en el párrafo anterior, involucran representaciones de objetos tridimensionales, es ahí precisamente donde se pensó en incidir con el uso de la RA para llevar acabo las mencionadas representaciones.

La investigación sobre el funcionamiento y efectividad de la propuesta en el proceso de aprendizaje del tema Integrales Múltiples se realizó con los estudiantes del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara (UdeG).

En este sentido, el problema de investigación se relaciona con el aprendizaje de las aplicaciones de las integrales múltiples con empleo de la RA en los estudiantes del CUCEI de la UdeG. Con lo cual se buscó, como objetivo de la investigación, evaluar la contribución del empleo de la propuesta basada en RA en el aprendizaje de los estudiantes en el tema de aplicaciones de las integrales múltiples.

Al abordar de esta manera el problema, surgen las distintas interrogantes a resolver. ¿Qué efectos produce la realización de actividades propuestas por parte de los estudiantes sobre su aprendizaje del tema? ¿Cuál es la correlación entre lo que desarrollan, en las actividades con RA, y lo que pueden desarrollar con respecto al tema? ¿Cómo influye el uso de actividades diseñadas con la RA en la motivación e interés de los estudiantes para el aprendizaje del tema? ¿Cómo afecta el uso de materiales didácticos con RA al aprendizaje del tema por parte de los estudiantes?

Al responder a las preguntas anteriores, se concretó la respuesta a la pregunta principal de investigación: ¿Cómo influye la aplicación de la propuesta basada en empleo de RA en el aprendizaje de los alumnos en el tema de aplicaciones de las integrales múltiples?

Los resultados obtenidos permitieron verificar la veracidad de la hipótesis que la propuesta basada en el empleo de la RA, contribuye positivamente en el proceso de aprendizaje de las aplicaciones de las integrales múltiples.

Referente teórico

La investigación se fundamenta en las teorías relacionadas con la visualización matemática. En palabras de David Tall (1990), la visualización matemática es un medio para dar una imagen más amplia de las distintas formas en que los conceptos pueden comprenderse, pues, es mediante la exploración de ejemplos o analogías, que los estudiantes pueden adquirir las intuiciones necesarias para el mencionado fin.

Además, los expertos en algún tema, perciben conceptos de manera intuitiva, habilidad con la cual logran relacionar conceptos matemáticos complejos, y con esto, pueden escoger formas eficaces de afrontar la solución de problemas (De Guzmán, 1996).

Entonces, la atención explícita a las posibles representaciones concretas, cuando éstas muestran relaciones abstractas que interesan al matemático, es lo que constituye la visualización matemática (De Guzmán, 1996).

Anexo a lo anterior, la visualización matemática se puede entender como el proceso para formar imágenes y usarlas efectivamente para descubrir y entender las matemáticas (Tall, 1991).

Arcavi (2003) describe la visualización en términos muy generales: "La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas". "La visualización ofrece un método de ver lo invisible" (Arcavi, 2003).

En síntesis, para este trabajo de investigación se considera a la visualización matemática como la capacidad y el proceso cognitivo de reflexionar y reconocer las reglas con las cuales se construyó una representación visual de un contenido matemático, así como las relaciones entre los objetos que conformen dicho contenido, sus propiedades y sus significados; de modo que la información obtenida permita efectuar la conversión a otro sistema de registro de representación.

En este trabajo, se buscó el aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos relacionados con las aplicaciones de las integrales múltiples, por ello se propuso complementar la representación analítica de conceptos con la representación visual ofrecida por medio de la RA (Esteban, 2012).

La manipulación de las distintas representaciones matemáticas por parte de los estudiantes les proporcionó los medios para construir imágenes mentales de los objetos o conceptos matemáticos trabajados. La riqueza de dichas imágenes conceptuales construidas dependería de las representaciones que el estudiante utilice (Hitt, 2000; Hitt, 2003).

Por otro lado, con el avance de las tecnologías, las técnicas de enseñanza se han modificado, adaptado al nuevo ambiente, a los nuevos recursos, y en muchos casos se logran avances significativos en este proceso, tal como lo es el aprendizaje asistido por computadoras.

Entre las muchas razones por las cuales las nuevas tecnologías promueven las nuevas sociedades del conocimiento, podría señalarse que posibilitan modos nuevos de aprendizaje, pues éste es generalmente pasivo, pero las nuevas tecnologías ayudan al individuo a vivir en un mundo constructivo, creativo, autorregulado, activo e interactivo el autoaprendizaje. La computadora, en su última generación interactiva e inteligente, supera la eficacia para la enseñanza (de raíces conductistas) y promueve el desarrollo cognitivo. Con la computadora se puede alcanzar un objetivo esencial, la individualización de la enseñanza. El aprendizaje Asistido por Computadora (AAC), no es un complemento de la enseñanza convencional, pues realmente facilita el auténtico aprendizaje significativo, el cual se logra por el esfuerzo personal del estudiante (Salas, 2007).

Continúa Salas, en su publicación del 2007, en el cual menciona que el AAC ha demostrado experimentalmente su validez como medio de aprendizaje y su eficacia en el rendimiento académico de los estudiantes. Además, una bondad extra de esta metodología es la preparación de los estudiantes para que sepan desenvolverse en la sociedad tecnológica, para que sean capaces de mejorarla. Termina con el hecho que la metodología del ACC es de tipo inductivo, pues apunta sus objetivos más allá de los datos conocidos, garantizando la implicación personal del estudiante en su aprendizaje.

Como el AAC se considera como un ambiente virtual de aprendizaje, el diseño de actividades relacionadas con esta metodología requiere de la participación colectiva de diversas disciplinas, entre las cuales, tal como menciona Nemirovski y Neuhaus (citados en Herrera, 2002), se distinguen tres tipos de requerimientos:

- **Requerimientos de dominio:** los cuales se refieren a los contenidos de la asignatura misma y parten de los objetivos de aprendizaje.
- **Requerimientos psicopedagógicos:** los cuales corresponden al enfoque teórico y práctico del aprendizaje de acuerdo a las cuestiones albergadas.
- **Requerimientos de interfase:** se derivan de las características propias del medio y el nivel de interactividad.

Para cada requerimiento se menciona la necesidad de expertos, en el caso del dominio, deben ser expertos en la disciplina, para los métodos psicopedagógicos, en educación y para los de interfase, en diseño de interfase.

Metodología

El proceso de experimentación que se usó para la obtención de los datos necesarios para la investigación, se dividió en tres sesiones, aplicadas a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Guadalajara, de tercer y cuarto semestre, los cuales llevaban el curso Teorías del Cálculo II.

Para la elaboración de este estudio se manejó un grupo, el cual fue el mismo universo; es decir, no hubo muestreo aleatorio, se tomó toda la población. Se eligió un grupo de estudiantes del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, de 19 estudiantes. Estos alumnos tenían entre 20 y 25 años de edad.

Como requisito previo para la experimentación, los estudiantes debían tener conocimientos de cálculo diferencial e integral de una variable, lo cual se debería cumplir si se tiene en cuenta que estos temas se aprenden en el curso anterior al designado para hacer el experimento.

Según el reporte del Kantar Wordpanel a finales del año 2016, los *Smartphone* en el mundo se pueden dividir en tres sistemas operativos, Android, IOs y WindowsPhone, con una presencia en el mundo de 67.6%, 30.7% y 1.3% respectivamente. Lo cual implicaba que más del 98% de los estudiantes del curso tenían *Smartphone* con Android y IOs, plataformas en las cuales se desarrollaron las aplicaciones con RA.

La ejecución del estudio requería la elaboración de algunos materiales, éstos se describen a continuación:

1. Aplicación con RA (APK): la base de la propuesta, la cual fue desarrollada en el motor gráfico Unity3D, con licencia de uso personal, utilizando los *Software Development Kit* (SDK) de Vuforia, Android y Java; y escrito en su mayoría en C#, lenguaje de programación orientado a objetos desarrollado y estandarizado por Microsoft como parte de la plataforma .NET. Dentro del aplicativo, se diseñaron ejemplos de ejercicios orientados en el uso de la RA; se anexaron ligas con teoría de integración e integración múltiple; videos que servían de apoyo para la realización de las actividades y los respectivos ejercicios de cada sesión (ver Figuras 7, 9 y 12).
2. Actividades (en papel) basadas en RA: se diseñaron unas guías de trabajo en clase, en las cuales estaban descritos los ejemplos y los ejercicios para cada sesión. Además, se incluía el marcador necesario para llevar a cabo las actividades con la RA. Las actividades están relacionadas a los temas de: Área de un conjunto plano; Integral de una función de dos variables, como volumen debajo de una superficie; e Integrales triples y cálculo de volúmenes.

Algunos ejemplos de estas actividades en papel se ven a continuación:

APRENDIZAJE DE LAS APLICACIONES DE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES CON APOYO DE LA REALIDAD AUMENTADA
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
SESIÓN 2 – VOLÚMENES, INTEGRALES DOBLES

Tal como se mencionó en la Sesión 1, la interpretación geométrica de la integral doble de f sobre el dominio S, es el volumen bajo la superficie f y sobre la región S.

Así que nuevamente encontramos que, para determinar el volumen bajo una superficie f, tenemos que plantear la integral doble sobre la región dada, lo cual nos lleva a la determinación de los límites de integración.

Para el planteamiento de algunas integrales dobles para el cálculo de volúmenes, se suele usar transformaciones de coordenadas. Como se ha visto, estas transformaciones producen el *jacobiano* (el cual es distinto dependiendo de la transformación), que es multiplicado en el integrando. Anexo a esto, la función $f(x, y)$ también se expresa en términos del nuevo sistema de coordenadas.

$$V = 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (9 - x^2 - y^2)dydx$$

Como se observa, la resolución de la segunda integral no es del todo simple, lo cual no lleva a buscar un método un planteamiento más sencillo. Si transformamos a coordenadas cilíndricas, la región se define:

$$0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Los límites son constantes, reduciendo significativamente el planteamiento. Además:

$$z = 9 - x^2 - y^2 \to z = 9 - r^2$$

Con lo cual la integral doble se plantea como:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (9r - r^3)drd\theta$$

Algo significativamente más sencillo.

Figura 1. Ejemplos de actividades basadas en RA.

Así mismo, para cada sesión se ofrecía el marcador necesario para el empleo de la RA

Figura 2. Marcador y forma básica de empleo.

3. Hojas para registro de los datos experimentales (en papel): además de recopilar información por medio de grabaciones de audio y video, se elaboraron estas hojas, que permitieron organizar la información destacada de cada sesión.
4. Manuales de desarrollo (PDF) de las aplicaciones con RA orientadas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: con el fin de promover la replicación del experimento y la producción de material utilizando esta tecnología.

En el manual, se describe el *workflow* (flujo de trabajo), los distintos programas utilizados y, en general, cómo se desarrollaba la aplicación.

En resumen, se utilizaba MathMod 4.1 para la generación de las superficies iniciales

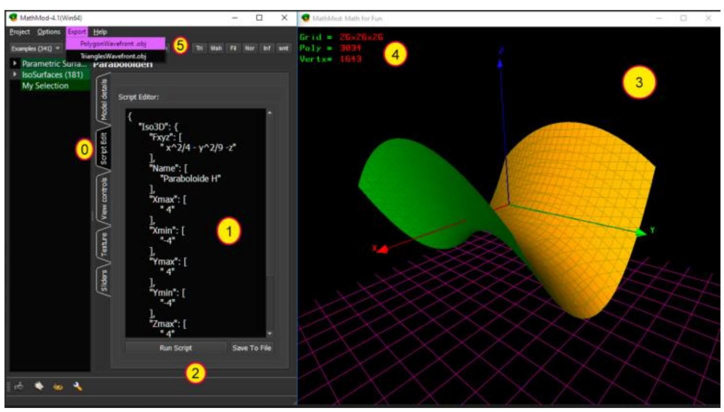


Figura 3. MathMod para la generación de las superficies.

En la Figura 3, se muestra la interfaz del MathMod, en el cual hay una (0) pestaña de *scripting* donde se escribe (1) el código que (2) genera la (3) superficie, a la cual se puede (4) aumentar o disminuir su calidad, para finalmente (5) exportarla en formato OBJ al siguiente *software*.

Este objeto tridimensional, tenía dos caras, una donde recibía la luz y la otra donde no, lo cual era un problema, pues hacía invisible dicho objeto desde ciertos ángulos, por ende, se procesaba en un *software* de edición en 3D, aplicando algún modificador que permitiera visualizarlo por ambos lados. En este caso, se utilizó Autodesk 3ds Max 2017.

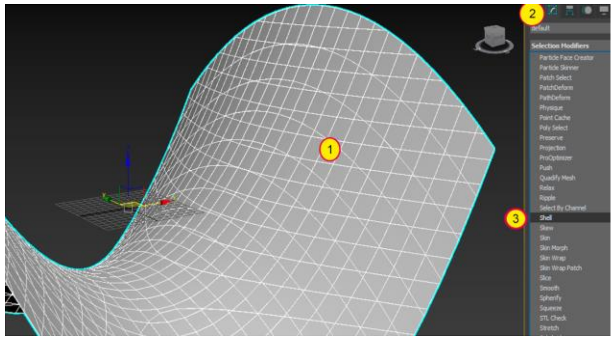


Figura 4. Autodesk 3ds Max 2017, procesado de la superficie

Aunque se puede utilizar cualquier otro *software* de edición en 3D, se utilizó el 3ds Max porque se poseía experiencia en él. La Figura 4, muestra la (1) superficie importada, la (2) pestaña de modificadores y el (3) modificador utilizado, *Shell*, que como su nombre lo indica, creaba una "coraza" a partir de la superficie. El nuevo objeto se exportaba en formato FBX para su uso en el siguiente *software*.

Posteriormente, se importaba este FBX en el motor gráfico usado Unity3D, se creaba la interfaz de usuario, se programaban las funcionalidades y se compilaba.

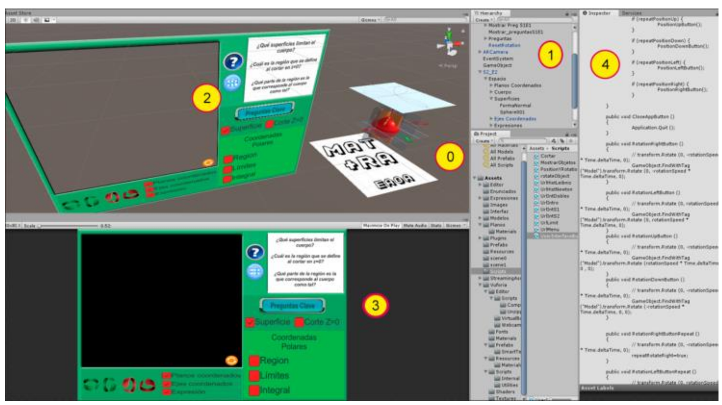


Figura 5. Parte final del *workflow* en Unity3D

En Unity3D, se (0) importaban las superficies, se organizaba (1) la jerarquía de los elementos, posteriormente se diseñaba (2) la interfaz que manejaría el usuario, viendo que cada elemento se ubicara correctamente en (3) la previsualización, para finalmente programar (4) los códigos que le daban el funcionamiento.

Experimentación

Sesión 1-Introducción-Áreas de conjuntos planos.

Esta sesión, como su nombre lo indica, se propuso con el fin de introducir a los estudiantes al uso de la RA en su proceso de aprendizaje, entre otros aspectos:

- Descarga e instalación de aplicaciones de terceros en *Smartphones*.
- Manipulación de representaciones semióticas con apoyo de RA.

- Diferencias entre las representaciones semióticas convencionales y con RA.

Figura 6. Estudiantes manipulando las representaciones semióticas con RA.

En esta sesión se introdujo al estudiante en el proceso de visualización matemática, potenciando las capacidades de apoyo del material dispuesto y evitando a su vez que los estudiantes enfrentaran obstáculos en su aprendizaje por el desconocimiento de la tecnología.

La presentación de la nueva forma de representación gráfica con RA, permitió generar un espacio de diálogo constructivo entre el docente y los estudiantes.

Además, en esta sesión se describió magistralmente el procedimiento para determinar el área de un conjunto plano con apoyo de la RA.

El docente ejemplificó el proceso al comienzo de la sesión, y planteó ejercicios para que los estudiantes desarrollaran.

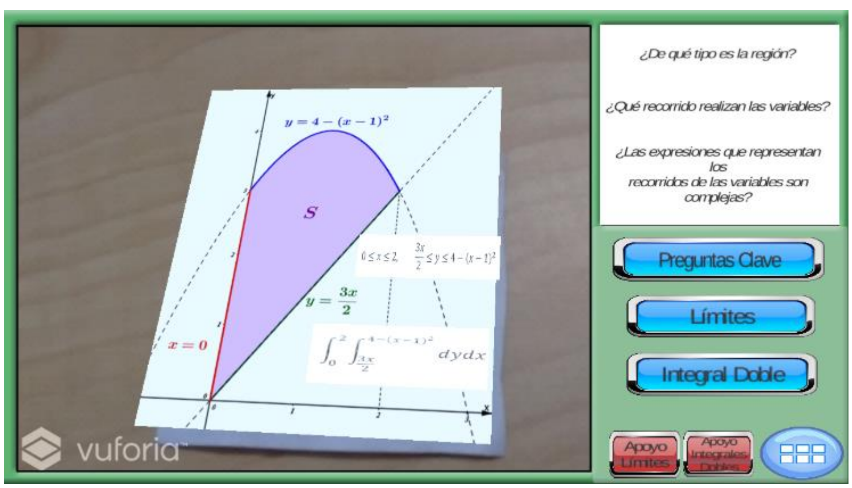


Figura 7. Ejemplo presentado en la Sesión 1 del experimento.

Durante el desarrollo de los ejercicios, se observaron los procedimientos hechos por los estudiantes, y se escribieron los aspectos más relevantes para la investigación. El profesor participó en las actividades de los alumnos mediante la observación y resolución de dudas generadas durante el proceso. Posteriormente, el docente analizó a mayor profundidad con la revisión de los ejercicios entregados por los estudiantes.

Figura 8. Realización de ejercicios por parte de los estudiantes en la Sesión 1.

El docente acompañó las actividades de los estudiantes como apoyo a las dudas o dificultades relacionadas con el uso de la RA, sin intervenir en el desarrollo de los ejercicios directamente.

Se tuvieron dos objetivos con esta sesión:

- Introducir el uso de la RA en el proceso de resolución de los ejercicios relacionados con el tema de cálculo de áreas de regiones planas.
- Promover en los estudiantes el proceso de visualización matemática de los conceptos que se integran en el cálculo de áreas de un conjunto plano.

Al final de la sesión, se discutieron los aspectos positivos y negativos de las actividades realizadas, realimentando los procesos de aprendizaje y enseñanza.

Sesión 2. Volúmenes con integrales dobles

De la misma manera que en la Sesión 1, se trabajó en ésta, excepto por el proceso introductorio. El docente, de manera magistral, planteó el procedimiento para el desarrollo de los ejercicios con apoyo de la RA.

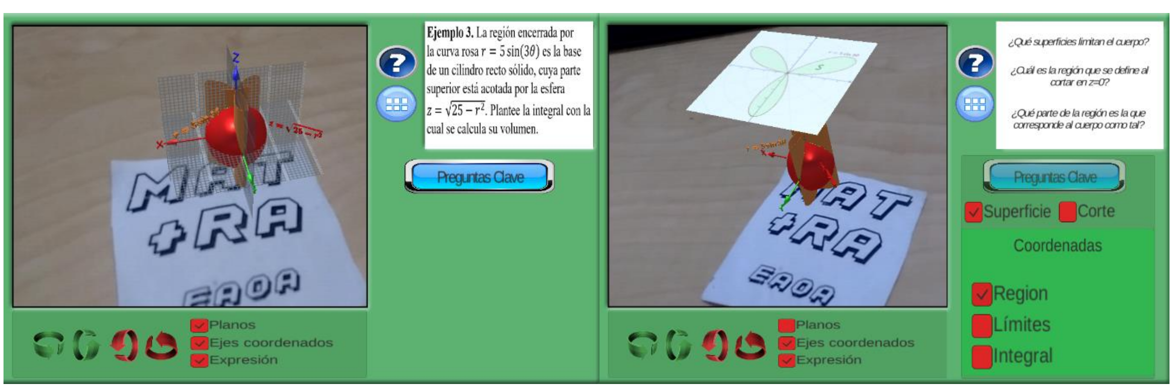


Figura 9. Ejemplo presentado en la Sesión 2.

Nuevamente, el docente participó como apoyo a las dudas generadas durante el proceso de desarrollo de los ejercicios. Los estudiantes trabajaron de manera individual y siguieron lo indicado para la resolución con apoyo de la RA.

Figura 10. Interacciones de los estudiantes con la RA en la Sesión 2.

Se plantearon los ejercicios para su resolución en clase y, posterior digitalización y entrega. El docente recopiló sus observaciones en los distintos instrumentos, resaltando los aspectos pertinentes para la investigación.

Figura 11. Visualización y manipulación de las representaciones semióticas en la Sesión 2.

Sesión 3. Volúmenes con integrales triples

De la misma manera que en la Sesión 1 y 2, en esta sesión el docente, de manera magistral, planteó el procedimiento para el desarrollo de los ejercicios con apoyo de la RA.

La primera hora se destinó al desarrollo de los ejemplos, en la cual el docente hizo la presentación del uso del *software* en el planteamiento de las integrales triples para el cálculo de volúmenes. El docente resolvió las cuestiones que surgieron durante la elaboración de los ejemplos.

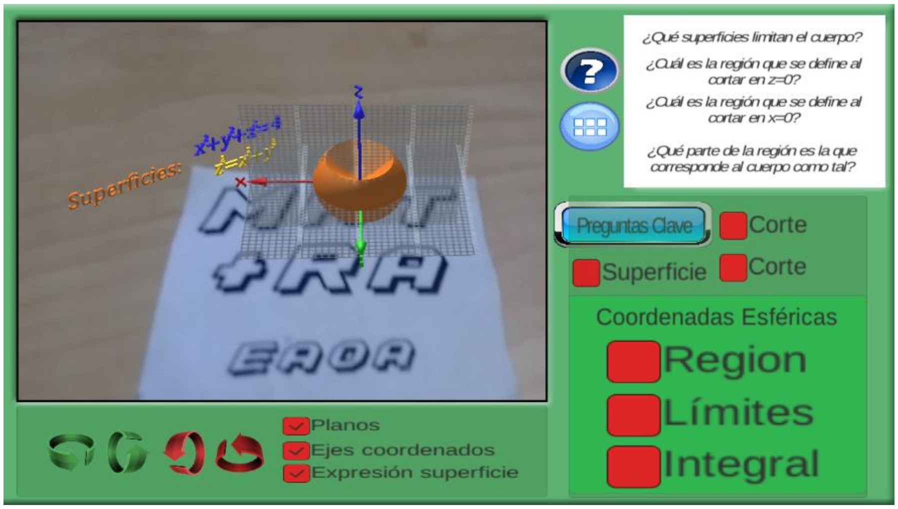


Figura 12. Ejemplo presentado en la Sesión 3.

Durante la segunda hora, se realizaron las actividades de desarrollo de ejercicios planteados.

Figura 13. Estudiantes manipulando las representaciones gráficas con RA en la Sesión 3.

En los diez últimos minutos de la segunda hora, el docente realizó un proceso de realimentación de las actividades hechas durante la sesión y resolvió las dudas que se presentaron.

Figura 14. Estudiante exponiendo dudas sobre la elaboración de su producto.

Al final de la sesión, el docente repitió a los estudiantes las instrucciones, se puso énfasis en la elaboración del proceso de argumentación de cada afirmación o paso de su procedimiento de desarrollo de los ejercicios, éste fue uno de los principales indicadores de aprendizaje estudiados.

Resultados

Para la elaboración del análisis de datos, la determinación de los resultados y conclusiones de la investigación, se recopilaron datos de las hojas de registro, el diagnóstico, el producto final, la encuesta final y la transcripción de muestras de video y audios de cada sección.

Como estadístico descriptivo, se utilizó la moda como medida de tendencia central, la cual se define como la calificación más frecuente de una distribución.

El aprendizaje de los conceptos y operaciones se evaluó con el coeficiente de eficacia de aprendizaje $\gamma = \frac{P_f}{P_d}$ (Nesterova, 2000), donde P_d es el coeficiente de aprendizaje de los conceptos y operaciones en el diagnóstico y P_f el coeficiente de aprendizaje de los conceptos y operaciones en el producto final.

El coeficiente de aprendizaje de los conceptos y operaciones se calcula con la fórmula

$$P = \frac{1}{p \cdot N} \sum_{i=1}^{N} P_i$$

Donde P_i es el número de conceptos y operaciones realizadas correctamente por el i-ésimo alumno, p el número total de conceptos y operaciones por aprender y realizar y N el número de los alumnos en el grupo.

El propósito principal del estudio correlacional es saber cómo se puede comportar una variable (y - aprendizaje de integrales múltiples) al conocer el comportamiento de otra variable relacionada (x - las actividades con empleo de RA). La existencia de una relación lineal entre las dos variables (x e y) se examinará en términos del coeficiente de correlación.

La hipótesis nula se plantea bajo el criterio de que el coeficiente de correlación de la población r, es igual a cero (Berenson y Levine, 1996). Se considera el modelo lineal $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

Contribuciones del empleo de representaciones gráficas por medio de la RA en el aprendizaje de los estudiantes.

Para determinar las contribuciones del empleo de las representaciones gráficas ofrecidas por el software desarrollado, se aplicó un diagnóstico que constaba de nueve ejercicios (tres por cada sección) y se solicitó el producto final de nueve ejercicios igualmente.

De los datos del diagnóstico se obtuvieron los siguientes resultados ordenados de mayor a menor puntaje, en una escala de 0 a 10 puntos, agrupados por intervalos de puntajes se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1.
Calificaciones de los estudiantes en el diagnóstico

Número de estudiantes	**Promedios de Diagnóstico**
5	(2.222-4.444]
3	(4.444-5.555]
0	(5.555-6.666]
3	(6.666-7.777]

El diagrama (*Fig. 15)* muestra la distribución de los puntajes que obtuvieron los estudiantes en el examen diagnóstico.

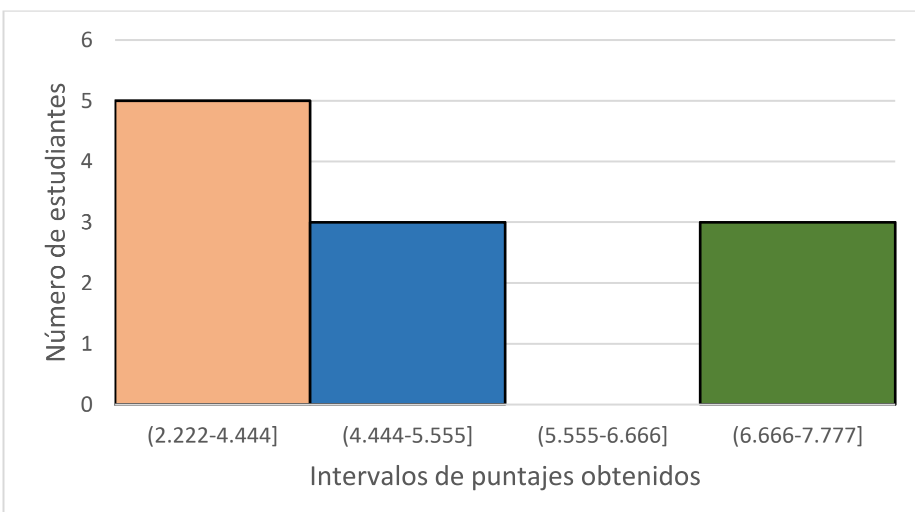


Figura 15. Distribución de calificaciones de los estudiantes en el diagnóstico

En la Tabla 2, se muestran los datos obtenidos del producto final, en una escala de 1 a 10, ordenados de menor a mayor y agrupados por intervalos de puntajes.

Tabla 2.
Calificaciones de los estudiantes en el producto final

Número de estudiantes	**Promedios de Diagnóstico**
4	(2.222-4.444]
1	(4.444-5.555]
3	(5.555-6.666]
3	(6.666-7.777]

El la Figura 16 se observa la distribución de los puntajes obtenidos por los estudiantes con respecto al aprendizaje del tema en su producto final.

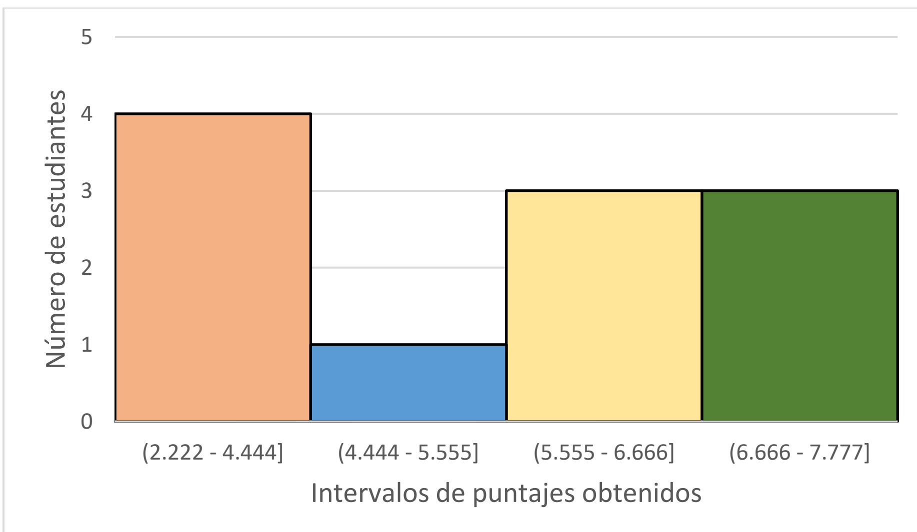


Figura 16. Distribución de calificaciones en el Aprendizaje del tema.

Existe un aumento en el número de estudiantes que obtuvieron entre 5.555 y 6.666 de promedio en su calificación en el producto final, el cual corresponde a la reducción de estudiantes entre 2.222 y 5.555 de promedio en el diagnóstico. Este aumento corresponde a la obtención de más puntos en el criterio relacionado a la visualización. Este proceso, durante el diagnóstico, se basó en las representaciones analíticas y gráficas que disponían los enunciados y que hacían los estudiantes respectivamente; por el contrario, en el producto final, el proceso de visualización fue basado en las representaciones gráficas con RA.

Efectos que produjo la realización de las actividades con RA.

Las actividades propuestas se centraron en promover la realización del proceso de visualización, la justificación de la resolución de los ejercicios y el planteamiento óptimo de las integrales.

En la Tabla 3 se presentan los resultados logrados por los estudiantes en las actividades con RA (x_i), y en el aprendizaje del tema (y_i).

Tabla 3.
Promedios en x_i e y_i

x_i	1.25	1.6666	2.3611	6.2037	6.5277	7.2222	7.2222	7.5925	7.7777	8.0555	8.7037
y_i	2.6518	3.7925	3.7592	2.4370	5.8592	4.7481	5.9185	6.5037	7.1481	7.5259	7.7666

La Figura 17 muestra la dispersión de las calificaciones x_i obtenidas por los estudiantes en las actividades con RA y las calificaciones y_i en el aprendizaje del tema.

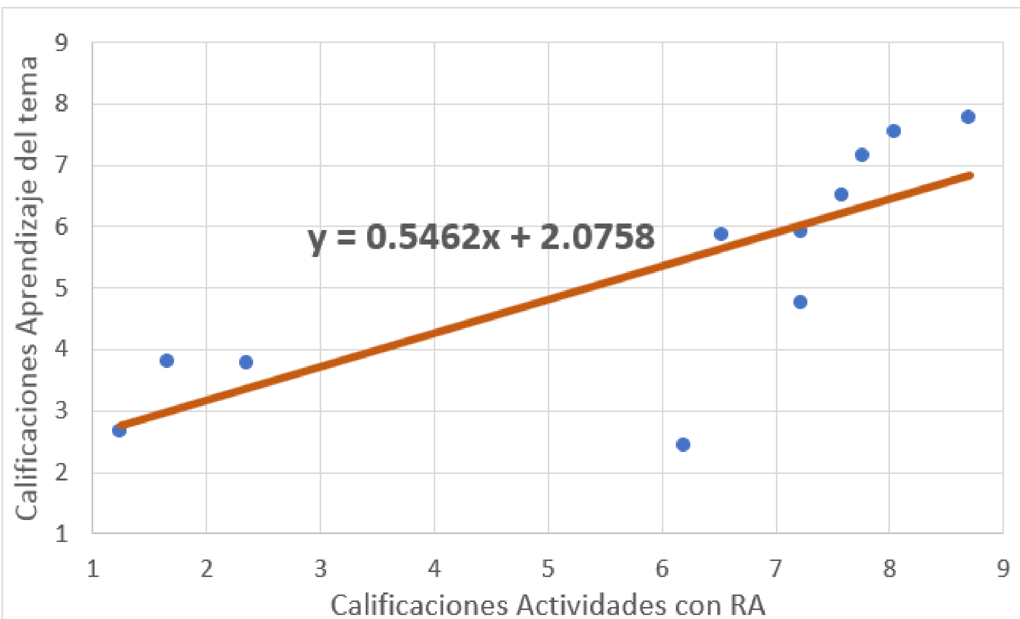


Figura 17. Diagrama de dispersión y modelo lineal de las variables.

El modelo lineal que representa la relación entre x_i e y_i, es $y = 0.5462x + 2.0758$.

En este sentido, se observa que en el 90.90% de los estudiantes, entre más actividades con RA (x_i) realizaron bien, más aprendizaje del tema (y_i) evidenciaron.

Estimación de la correlación entre lo que desarrollan, en las actividades con RA, y lo que pueden desarrollar con respecto al tema.

El enfoque estadístico que se seleccionó para la realización del proceso de investigación fue el estudio de correlación.

Para el análisis de correlación de las variables estudiadas, se calcularon los coeficientes de aprendizaje en el diagnóstico y producto final. El cociente entre ellos dio como resultado el coeficiente de eficacia de aprendizaje. Estos datos se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 4
Coeficientes analizados

Coeficiente de aprendizaje de los conceptos y operaciones en el diagnóstico (P_d)	Coeficiente de aprendizaje de los conceptos y operaciones en el producto final. (P_f)	Coeficiente de eficacia de aprendizaje (γ)
0.505050505	0.585858586	1.16

El coeficiente γ, al ser mayor a 1, indica un impacto positivo y significativo de la propuesta (Nesterova, 2000).

Ahora bien, teniendo en cuenta el tamaño de la muestra y las pocas sesiones que se realizaron para el proceso de experimentación, los resultados del coeficiente γ no deben ser tomados a la ligera.

Influencia en la motivación e interés del estudiante, en el aprendizaje del tema, al usar actividades con empleo de la RA

Se aplicaron encuestas a los estudiantes participantes del experimento, de las cuales se obtuvieron algunos aspectos cualitativos.

En los resultados del producto final de los estudiantes se observó que poco más del 50% lo entregó en computadora; y al tener en cuenta que la evidencia del uso de la RA dependía del formato en el que lo entregaba, resultó ser un impedimento para algunas cuestiones del análisis. Sin embargo, las encuestas muestran que más del 90% de los estudiantes entendió con claridad las instrucciones sobre la entrega del producto final. En general, la actitud del docente, en una escala de 1 a 10, calificada por los estudiantes, fue de 9 puntos aproximadamente, y tanto su atención como la claridad en sus ejemplos, no tuvo fallas, descartando así que dichos resultados fueran por la mala práctica de éste.

Se estima que este problema, de entrega errada del formato del producto final, se derive de la responsabilidad de los estudiantes, pues al no sentirse “obligados por una calificación”, optaron por el camino de hacerlo a mano.

En cuanto a los aspectos de motivación e interés, como se esperó, el uso de una tecnología innovadora en el aula, junto con actividades realizadas para obtener el mejor provecho del proceso de visualización, los mantuvo motivados e interesados en el desarrollo de cada sesión. Los estudiantes destacaron, sobre todo, el uso de la esta tecnología en la segunda y tercera sesión, de cálculo de volúmenes por integrales dobles y triples respectivamente. Todos coinciden en que en la sesión 1 no era necesaria.

Opiniones de los estudiantes sobre el uso de materiales didácticos, empleo de RA, actividades propuestas y el apoyo del profesor

Un gran número de preguntas de la encuesta aplicada, tenían como objetivo evaluar la opinión de los estudiantes en diversos temas.

De los estudiantes encuestados, sólo el 9% aproximadamente, tuvo alguna experiencia anterior a las sesiones, con la RA. Teniendo en cuenta que más del 70% de los mismos conocía esta tecnología, resulta llamativa la carencia de la incorporación de estas actividades en la academia. Más aún cuando se observa que, en una escala del 1 al 10, esta tecnología está calificada con 1.6 puntos de dificultad en su uso.

Aunque podría pensarse que realizar actividades con este tipo de tecnología para desarrollar un tema como las aplicaciones de las integrales múltiples requeriría más tiempo del empleado con un método tradicional, más del 80% de los estudiantes encuestados consideró que 3 sesiones fueron suficientes para este propósito, lo cual es prácticamente lo mismo que se proyecta en el diseño curricular para abordar este tema con una enseñanza tradicional.

Por otro lado, y como la teoría lo indica, las representaciones gráficas usuales (en tableros, diapositivas, con GeoGebra), resultan necesarias para los estudiantes (Fig. 18).

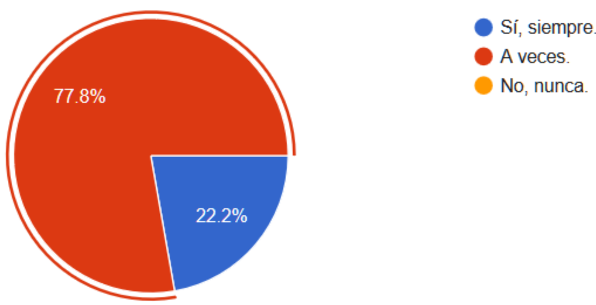


Figura 18. Respuestas pregunta 3 encuesta.

Ahora bien, las representaciones ofrecidas con la RA en las sesiones tratadas, resultaron aún más necesarias.

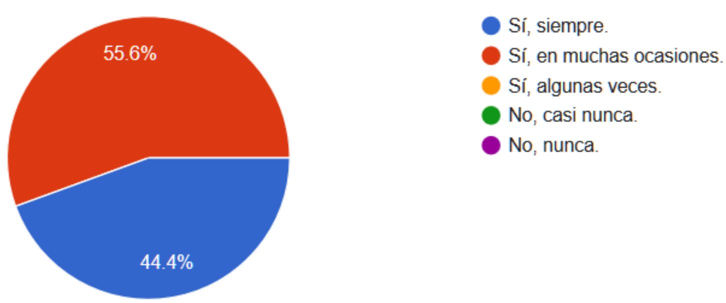


Figura 19. Respuestas pregunta 13 encuesta.

De aquí se observa que, para los estudiantes encuestados, las representaciones gráficas con RA resultan de mayor utilidad que las usuales, las conciben más necesarias (Fig. 19). No sólo necesarias, pues el 88% de los estudiantes las consideraron suficientes también.

En una escala de 1 a 10, más del 70% de los estudiantes calificó entre 8 y 10 la necesidad de estas representaciones con RA para resolver los ejercicios planteados (Fig. 20).

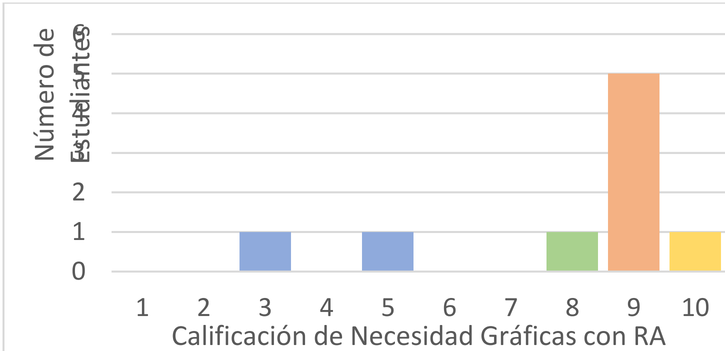


Figura 20. Respuestas pregunta 11 encuesta.

Al despreciar posibles problemas con la instrucción o práctica del docente durante las sesiones, queda aún la duda sobre la falta de argumentación o justificación de los ejercicios que presentaron los estudiantes en su producto final. Al preguntarles si consideraban que las representaciones gráficas con RA eran un apoyo para la justificación del proceso de resolución de los ejercicios, todos respondieron con un rotundo “Sí” (Fig. 21), sin embargo, aproximadamente el 27% de los mismos argumentó y solamente en algunas ocasiones (Fig.22).

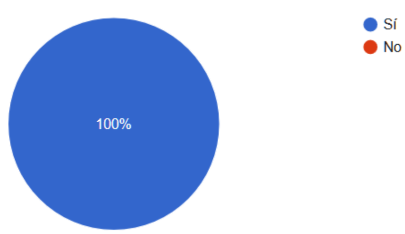


Figura 21. Respuestas pregunta 8 encuesta.

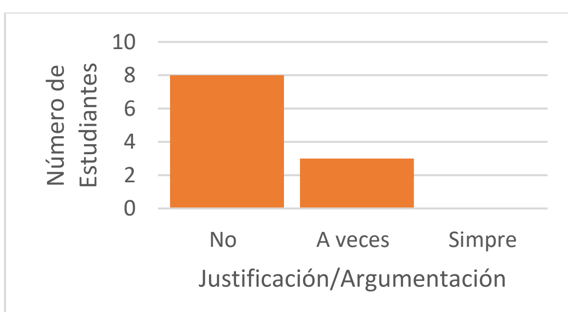


Figura 22. Justificación o argumentación de la resolución de los ejercicios.

A nivel general, los estudiantes percibieron las representaciones gráficas ofrecidas con la RA como una herramienta que les permitía "tener una visión desde todas las perspectivas", "ver con mayor claridad", "visualizar con mayor facilidad" y "hacer más sencilla la visualización", entre otras bondades. Destacaron los ángulos de visión de las representaciones, el dominio y control que tenían de las mismas, la capacidad de manipulación que adquirían e incluso las comparaban con "tenerlas en físico". Las experiencias que relatan coinciden con lo buscado, traer al mundo real un objeto abstracto, intocable, inmutable, aislado y darle un sentido práctico, una utilidad, generar una necesidad de uso, sin llegar a deformarlo o volverlo impreciso.

Conclusiones

El proceso de visualización matemática en los estudiantes del estudio se vio potenciado por el uso de la RA en el desarrollo de los ejercicios planteados, mejorando así sus resultados.

La RA como medio de representación gráfica de situaciones relacionadas a las aplicaciones geométricas de las integrales múltiples, conforma una alternativa a las representaciones usuales, que además de ofrecer una aproximación precisa de dichas situaciones, permite que el estudiante las manipule, domine y controle; haciendo que los objetos matemáticos representados se perciban como reales, prácticos y sencillos de manejar.

Se acepta entonces que existe una correlación positiva entre las actividades desarrolladas con representaciones gráficas ofrecidas con RA y lo que el estudiante puede desarrollar dentro del tema trabajado.

Aunque la disposición anímica de los estudiantes fue positiva al trabajar con una nueva tecnología, la instrucción fue clara y no se evidenciaron dudas o confusiones, no se obtuvieron los resultados esperados en cuanto a la argumentación de sus procedimientos. Siendo la argumentación un indicador de aprendizaje analizado, resaltó por su ausencia. El análisis básico hecho sobre este asunto, indicó que se debió a una falta de compromiso derivada de la carencia de estímulo externo relacionado a su calificación.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Azuma, R. T. (1997). A survey of augmented reality. Presence: *Teleoperators and virtual environments*, 6 (4), 355-385.

Berenson, M. y Levine D. (1996). *Estadística básica en administración. Conceptos y aplicaciones.* México: Prentice Hall Hispanoamericana.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*: *ensayos de visualización en análisis matemático: elementos básicos del análisis.* España: Ediciones Pirámide.

Esteban, P., Restrepo, J., Trefftz, H., Jaramillo, J. E., y Álvarez, N. (2012). *La realidad aumentada: un espacio para la comprensión de conceptos del cálculo en varias variables.* Departamento de Ingeniería de Sistemas, Departamento de Ciencias Básicas, Medellín: Universidad Eafit.

Herrera, L. M. A. (2002). Las fuentes del aprendizaje en ambientes virtuales educativos. *Reencuentro*, (35), diciembre, 69-75.

Hitt, F (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos, en F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa*, (pp. 245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (2000). Desarrollo de habilidades matemáticas y construcción de conceptos versus pérdida de habilidades matemáticas. En F. Hitt y A. Hernández (Eds.) *Experimentaciones en Matemática Educativa en los Niveles Medio Superior y Universitario*. México: Cinvestav – IPN.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. *X*(2), 213-223. Recuperado de https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf

Marín, J.W. y Moreno, M. (2015). *Realidad aumentada en la educación superior universitaria: una tecnología emergente.* Repositorio Digital. Universidad Nacional José Sánchez Carrión: Huacho, Perú.

Nesterova, E. D. (2000). *Formación de la habilidad de estructurar el material didáctico en los estudiantes de escuela superior.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Krasnoiarsk, Rusia.

Salas, E. E. (2007). *Las TIC y la educación. Aprendizaje asistido por computadora en persona con necesidades educativas especiales*. pp. 2-3. Brasil: Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Tall, D. (1990). Intuition and Rigour: The Role of visualization in the Calculus, Visualization in Theaching and Learning Mathematics, *Mathematical Association of America,* 19, (presentación en línea). http://polya.dme.umich.mx/software/geometri/cinco.html

Tall, D. (1991). Intuition and Rigour: The Role of visualization in the Calculus. In W. Zimmermann and S. Cunningham (Eds.) Visualization in Mathematics, M.A.A., *Notes*, 19, 105–119. Recuperado de https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991a-int-rigour-maa.pdf

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VI Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2018

ISSN: 2395-955X

PROCESOS DE OBJETIVACIÓN DEL CONCEPTO DE VARIACIÓN MEDIANTE EL USO DEL LENGUAJE Y DE LA TECNOLOGÍA

José Luis López Hernández

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-IPN, México

jllopez@cinvestav.mx

Para citar este artículo:

Hernández, J. L. (2018). *Procesos de objetivación del concepto de variación mediante el uso del lenguaje y de la tecnología. REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VI, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VI, No. 2, Julio-Diciembre de 2018, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

PROCESOS DE OBJETIVACIÓN DEL CONCEPTO DE VARIACIÓN MEDIANTE EL USO DEL LENGUAJE Y DE LA TECNOLOGÍA

José Luis López Hernández

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-IPN, México

jllopez@cinvestav.mx

Resumen

En este artículo se reportan los resultados obtenidos del trabajo en equipo de estudiantes de nivel medio superior de una escuela pública de la Ciudad de México, al resolver Actividades relacionadas con el concepto de variación en torno a problemas geométricos en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico (GeoGebra). Esta investigación es de tipo cualitativo y está apoyada en la Teoría de la Objetivación (Radford, 2008, 2014, 2015), cuyo fundamento principal es el concepto de *actividad*. El acopio de datos se efectuó por medio de videograbaciones, hojas de trabajo y archivos generados con el software GeoGebra acerca del trabajo de los estudiantes mientras resolvían las Actividades. Los resultados sugieren que el uso del lenguaje y de la tecnología, como mediadores semióticos, promueve en los estudiantes procesos de objetivación del concepto de variación a través del estudio de figuras geométricas, tanto en el ambiente de lápiz-y-papel como en el tecnológico (GeoGebra).

Palabras clave: Objetivación, variación, geometría, GeoGebra.

Abstract

In this article are report the results obtained of teamwork carried out by high-school students (grade 11) in Mexico City while they solving the Activities related with the concept of variation regarding the geometric problems using paper-and-pencil and technological (GeoGebra) environments. This is a qualitative research and is supported by the Theory of Objectification (Radford, 2008, 2014, 2015), whose main fundament is the *activity* concept. The data collection was done by video- recording, worksheets and software generated files with GeoGebra of the students' work while solving the Activities. The results suggest that the use of language and technology, as semiotic mediators, promote in the students the objectification processes of the concept of variation in the students, through the study of geometric figures, both in paper-and-pencil and technological (GeoGebra) environments.

Key words: Objectification, variation, geometry, GeoGebra.

Introducción

En el ambiente de lápiz-y-papel, con frecuencia los estudiantes hacen referencia de algo que ya conocen y lo plasman mediante definiciones o teoremas; mientras que en el ambiente tecnológico se aprende por medio de la exploración a través del artefacto, no se memoriza; surgen nuevos conocimientos incluso de algo que ya tenía instalado el estudiante, pero ahora le da otro sentido a los conceptos. Debido a las acciones epistémicas del artefacto para resolver problemas es posible que el estudiante modifique conceptos que utilizó de inicio.

En Geometría euclidiana, los Software de Geometría Dinámica (SGD) brindan al usuario la oportunidad de interaccionar con las construcciones geométricas, modificarlas y desplazarlas en el área de trabajo, descubrir propiedades y formular conjeturas (González & Herbst, 2009).

En este documento es de interés dar cuenta de cómo influye el uso del lenguaje y de herramientas tecnológicas como mediadores del conocimiento en los procesos de argumentación y validación, relacionados con el aprendizaje del concepto de variación, que llevaron a cabo los estudiantes al resolver las Actividades implementadas en un ambiente de resolución de problemas, tanto con el uso de lápiz-y-papel como con el uso de la herramienta tecnológica GeoGebra.

La siguiente pregunta sirve de guía en el desarrollo de este trabajo: ¿de qué manera el uso del lenguaje y de la tecnología, como mediadores, promueve en los estudiantes procesos de objetivación del concepto de variación al resolver problemas geométricos, tanto en ambiente de lápiz-y-papel como en el tecnológico GeoGebra, que involucran dicho concepto?

Referente teórico

Este estudio se apoya en la Teoría de la Objetivación (Radford, 2008, 2014, 2015), cuyo principio fundamental es el concepto de *actividad*. En esta teoría es primordial evidenciar cómo el sujeto aprende el saber cultural mediante la interacción social y los *medios semióticos de objetivación* (Radford, 2006), tales como artefactos y signos (escritos, verbales o gestuales), fuentes básicas de producción de significados (Radford, 2008); los cuales son utilizados por el sujeto para acceder a los objetos matemáticos. Entre los gestos destacan los que se llevan a cabo con las manos con la intención de aclarar o enfatizar lo expresado por medio del lenguaje escrito o hablado.

Para la Teoría de la Objetivación, el concepto de *actividad* es la fuente de realización personal y social que transforma la conciencia. Radford (2015, pp.133, 134 y 137), concibe el conocimiento a partir de la potencialidad (capacidad para ser o hacer) y de la actualidad o lo concreto. Afirma que el conocimiento no es estático sino dinámico, está en constante evolución; transita de lo potencial a lo actual mediante la actividad al usar los medios semióticos de objetivación.

Los objetos de estudio se transforman en algo concreto, en objetos de pensamiento y de conciencia; entonces surge el aprendizaje. La actividad mediadora del conocimiento potencial al conocimiento actual se lleva a cabo por medio de procesos sociales a través de los cuales los estudiantes se convierten gradualmente al conocimiento crítico constituido históricamente tanto de significados culturales como de formas de pensamiento y acción. De acuerdo con Radford (2015, p.139), estos son llamados procesos de objetivación. De esta manera, el conocimiento en el salón de clases es el resultado de actividades que propician la interacción de estudiantes con sus pares y de estudiantes con el profesor, que promueven la reflexión, la postura crítica, la solidaridad y la responsabilidad de unos y otros.

Metodología

Esta investigación es de tipo cualitativo. Participaron 12 estudiantes de nivel medio superior de distintos grupos de una escuela pública en la ciudad de México –que cursaban en ese momento la asignatura de geometría analítica–. Como parte de la metodología se diseñaron

Actividades para ser resueltas en ambientes de lápiz-y-papel y tecnológico (GeoGebra). Los estudiantes en equipos de dos integrantes fueron video-grabados al resolver las Actividades en ambos ambientes de trabajo con el propósito de analizar cómo el concepto de variación emerge y evoluciona (como proceso de objetivación) mediante el uso del lenguaje y de la tecnología.

El diseño de las Actividades propició el trabajo en equipo y se solicitó a los participantes dar argumentaciones y respuestas específicas en la resolución de cada una de las Actividades; éstas contienen figuras geométricas que facilitaron la comprensión de cada pregunta.

El acopio de datos se llevó a cabo por medio de videograbaciones, hojas de trabajo y archivos generados con el software. Debido a limitaciones de espacio, en este artículo sólo reportamos el trabajo de un equipo resolviendo una Actividad en ambos ambientes de trabajo.

Análisis de datos y discusión de resultados

El discurso llevado a cabo por los estudiantes durante el desarrollo de las Actividades implementadas es un modo de interacción social, una práctica social, una reflexión mediatizada por los artefactos, materiales o cognitivos, como signos, lenguaje y objetos, entre otros (Radford, 2006). En este artículo, para llevar a cabo el análisis de datos se toma en cuenta cómo se relacionan los diferentes modos de aclarar y comunicar conocimientos por parte de los estudiantes mediante el uso del lenguaje y de artefactos durante la resolución conjunta de las Actividades (Radford, 2014), ya que lo hablado, lo gestual y lo escrito están inmersos en un contexto social como procesos de interpretación y producción de significados (Radford, 2006).

En seguida se describe la Actividad reportada en este documento, se muestran los extractos de la discusión y reflexión que llevaron a cabo los estudiantes Toño y Pedro (pseudónimos) del Equipo 1 al resolverla, tanto en el ambiente de lápiz-y-papel como en el tecnológico (GeoGebra) y se analizan los datos obtenidos de su trabajo.

Descripción de la Actividad

Considera un conjunto de rectángulos de área constante $A_0 = ab$, con base a y altura b variables, cuyo perímetro es $P = 2a + 2b$. Entonces, $b = \frac{A_0}{a}$ y $P = 2a + 2\frac{A_0}{a}$, es decir, $P = 2\left(a + \frac{A_0}{a}\right)$; con $a \neq 0$. En la Figura 1 se muestra cómo varían el lado b y el perímetro P (al variar el lado a) de todos aquellos rectángulos cuya área es $A_0 = ab = 20$ unidades cuadradas.

Actividad para resolver en ambiente de lápiz-y-papel (A_LyP)

De acuerdo con la Figura 1, se les pide a los participantes explicar cómo varía el valor de b respecto del valor de a y cuál significado tienen estas variaciones.

Actividad para resolver en ambiente tecnológico GeoGebra (A_TG)

Los estudiantes abrieron un archivo en GeoGebra que muestra la construcción referente a la Figura 1. Ellos arrastraron el deslizador a y observaron qué ocurrió con los puntos R y P. Entonces se les pidió explicar la variación del valor de b respecto del valor de a, lo que ocurre con el área y el perímetro de estos rectángulos para $a = 0$ y para $b = 0$ y cuál es el significado geométrico que tiene la variación del perímetro de los rectángulos cuando varían sus lados pero el área se mantiene constante.

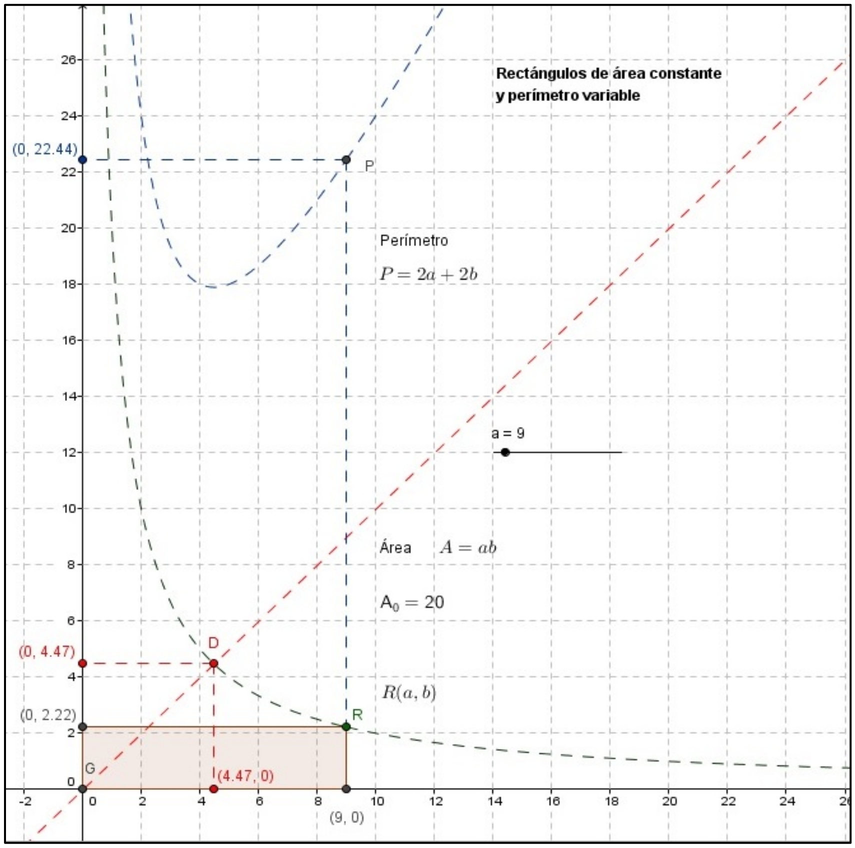


Figura 1. Rectángulos de área constante.

Resolución de la Actividad en ambiente de lápiz-y-papel (A_LyP)

Uso de lenguaje: ordinario, gestual y simbólico

Episodio 1: Comprensión de la Actividad. Identificación de lugares geométricos. [**A_LyP**]

Los estudiantes se enfocaron en comprender primero el enunciado de la Actividad, en identificar, utilizar e interpretar los datos, tales como las expresiones algebraicas y cada una de las curvas presentes en la gráfica.

L1. Pedro: Como ésta es constante [*señala y recorre con el dedo la recta* $y = x$] debe ser el área. Sí mira. [*Señala con su dedo el deslizador* a *dibujado en la Figura 1*]

L2. Toño: […] Pero esta no es constante. La constante es 20. Si estuviera representada el área sería una línea aquí [*con su dedo describe una recta horizontal que pasa por* $y = 20$]. [*Véanse las Figuras 2a, 2b y 2c*] ¿Sí? [*Y aprueba con su dedo pulgar hacia arriba; Figura 2d*]

En L2 de este Episodio 1, Toño utilizó una secuencia de gestos referentes a una idea o acción abstracta para explicar a Pedro cómo es la gráfica que corresponde al área constante de los rectángulos. Aquél imaginó trazar con su dedo, de izquierda a derecha, la recta $y = 20$, la cual no se representa en el papel. Con ese movimiento de su dedo sobre la hoja (figuras, 2a, 2b, 2c), Toño dio significado al hecho de que la altura b es la misma para cualquier valor de a. Pedro comprendió cómo es la representación geométrica de una función constante en el plano, en particular de $y = 20$.

(2a) (2b) (2c) (2d)

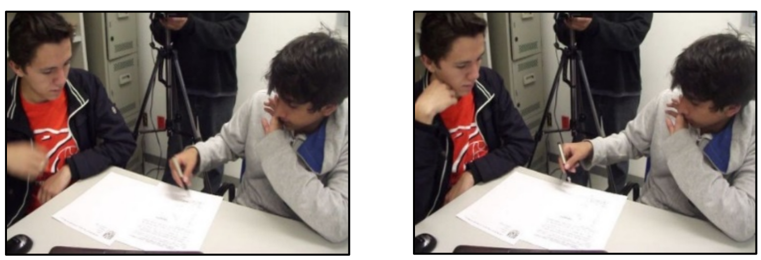
Figura 2. Toño explica a Pedro cómo sería la gráfica que corresponde al área de los rectángulos. Él imagina que traza con su dedo (de izquierda a derecha) la recta $y = 20$.

Los estudiantes centraron su atención en la curva relacionada con $b = \frac{20}{a}$ y en la relacionada con $P = 2a + 2\frac{20}{a} = 2\left(a + \frac{20}{a}\right)$ (véase de la línea L3 a la línea L6 de este Episodio 1).

L3. Toño: La otra curva probablemente es b, es el valor de b. Porque tendría sentido que entre a se volviera mayor [*señala y recorre con la pluma la curva asintótica a los ejes coordenados; Figuras 3a y 3b*], el valor de b se volviera menor…

L4. Pedro: Y si a se vuelve menor, el valor de b se vuelve mayor. Incluso se aproximan…

L5. Toño: Sí, al punto [*señala D*], sí. Entonces sí, supongo que ésta [*de nuevo señala y recorre con la pluma la curva asintótica a los ejes coordenados; figuras 3a y 3b*] es el valor de b en función de a.



(3a) (3b)

Figura 3. Toño explica cómo varía b respecto de a, conforme el valor de a va de menos (3a) a más (3b).

En L3 de este Episodio 1, Toño utilizó una secuencia de gestos para explicar cómo es la gráfica que corresponde a la variación del lado b respecto del lado a de los rectángulos. Él imaginó trazar con su pluma, de izquierda a derecha, la curva asintótica a los ejes coordenados. Con ese movimiento sobre la hoja (figuras, 3a y 3b), Toño se aproximó cada vez más al eje de las abscisas (X) y dio significado a la manera en que varían los valores de b conforme varían los de a; mientras el valor de a crece el de b decrece y viceversa.

A continuación, los estudiantes estudiaron el momento en que el valor del perímetro es mínimo (véanse de la línea L6 a L8 de este Episodio 1).

L6. Toño: Ok, entonces…Sí, tiene sentido que el valor sea mínimo [*se refiere al perímetro* P] cuando ambos son iguales [*se refiere a que* $a = b$].

(4a)

(4b)

Figura 4. Pedro utiliza gestos para explicar qué sucede con el perímetro P de los rectángulos cuando sus lados crecen o decrecen. Si disminuye el valor de a crece el de b (4a) y si crece el valor de a disminuye el de b (4b).

L7. Pedro: Sí porque, piénsalo así, si tú tuvieras que tus lados miden uno, [*el área valdría una unidad cuadrada y*] sería el perímetro de cuatro, y si tú esa razón la aumentas al doble sería dos [*de la base*] por un medio [*de la altura*] [*es el valor del área*], tu rectángulo. Entonces el perímetro sería cinco. […]. Y si lo haces al revés [*dos de la altura por un medio de la base*] también sería cinco [*el valor del perímetro*]. [*Véase Figura 4*]

L8. Toño: Sí claro, sí comprendo.

En la línea L7 de este Episodio 1, Pedro da a entender, con ayuda de una secuencia de gestos, cómo varía el perímetro P de los rectángulos cuando sus lados crecen o decrecen respectivamente. Si disminuye el valor de a entonces crece el de b (Figura 4a), si crece el valor de a disminuye el de b (Figura 4b) conservándose el valor del área; lo cual explica con movimientos sincronizados de sus dedos de una y otra mano; mientras los dedos de la mano izquierda se juntan (la longitud de la base disminuye) los de la derecha se alejan (la longitud de altura crece), y viceversa.

En la medida en que las manos de los estudiantes se movieron se convirtieron en signos en sincronía con lo hablado. Palabras y gestos se coordinaron y reflejaron la evolución del proceso de objetivación del conocimiento de los participantes en relación con la variación de los lados de los rectángulos y del perímetro.

La Figura 5 muestra los conjuntos de números reales para posibles valores de a y de b.

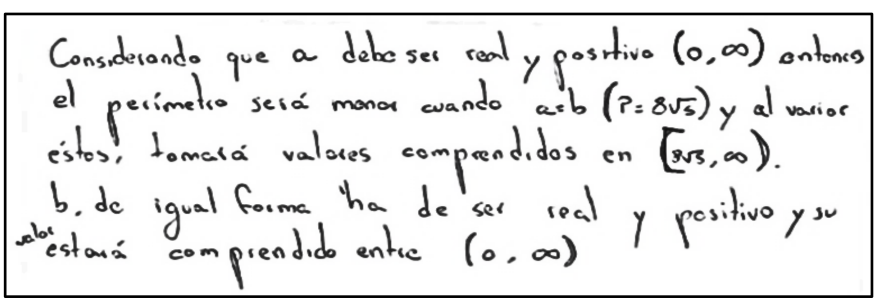


Figura 5. Uso del lenguaje ordinario y simbólico para explicar parte de lo solicitado en A_LyP.

Los participantes usaron el lenguaje simbólico en gran parte de la Actividad para refiere a algoritmos específicos acerca de objetos concretos, como se muestra en la Figura 6, en la que explicaron y justificaron que el cuadrado es el rectángulo de perímetro mínimo.

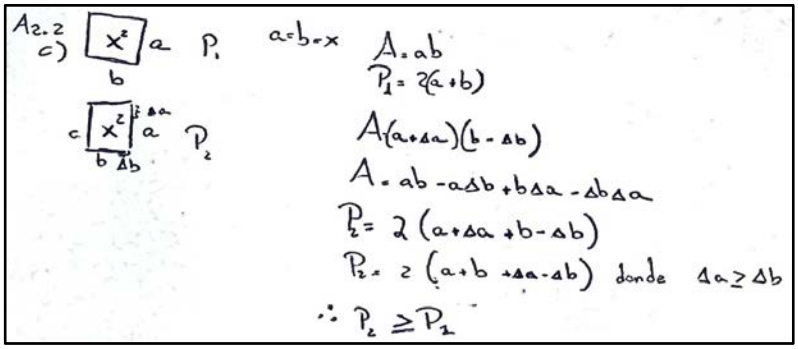


Figura 6. Uso del lenguaje simbólico por parte de Toño y Pedro para explicar cómo varía el perímetro de los rectángulos y cuándo este es mínimo.

Los participantes usaron el concepto de límite de una función (que se estudia en tercer año de bachillerato) para explicar cómo varía la variable b respecto de la variable a (véase Figura 7). Ellos no lograron explicar dicho concepto con sus propias palabras, lo cual hace pensar que ellos no habían reflexionado acerca de dicho concepto y que por tanto aun no lo comprendían. No obstante, identificaron las variables involucradas, cómo varían unas respecto de otras y entendieron el significado de dichas variaciones.

A pesar de que los estudiantes cometieron algunos errores en su afán por expresar sus ideas por medio del lenguaje simbólico y que por momentos no fueron muy claros en sus explicaciones, ellos han comprendido cómo varían los lados de los rectángulos, y en consecuencia, cómo varía el perímetro de todos aquellos rectángulos cuya área es constante.

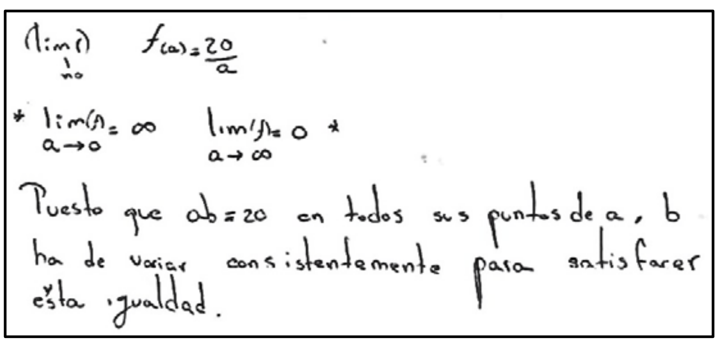


Figura 7. Uso del lenguaje ordinario y simbólico por parte de los estudiantes para dar respuesta a la sección (b) de A_LyP. Expresión de b como función de a.

Las respuestas por escrito de los participantes sintetizan su discurso y dan evidencia de sus constantes reflexiones y evolución de su conocimiento como parte del proceso de objetivación acerca del concepto de variación conforme resolvieron la Actividad.

Resolución de la Actividad en ambiente tecnológico GeoGebra (A_TG)

Trabajo con el artefacto (lenguaje y signos)

Episodio 2: Pensar y actuar con el artefacto. Aproximaciones. [**A_TG**]

Toño y Pedro hablaron en diferentes momentos del comportamiento de las funciones presentes en términos de aproximaciones, de lo que sucede en las cercanías de cierto valor y no de lo que ocurre en ese valor específico (véase de la línea L1 a la línea L5 de este Episodio 2). Aquí, la dinámica de la construcción estuvo a cargo del *deslizador* a.

L1. Toño: Aquí vemos que si a crece [*mueve el deslizador* a], el valor de b nunca toca cero, y pues es muy lógico porque a y b deben tener como producto 20, entonces cero por cualquier cosa…

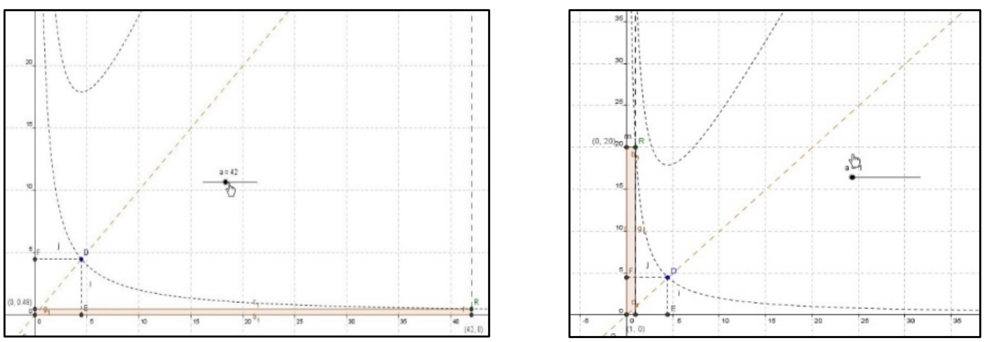
L2. Pedro: No daría 20.

L3. Toño: Pues es cero, no es 20. Entonces sí, cuando a crece… b decrece.

L4. Pedro: Aproximándose, más no tocando…

L5. Toño: Hacia cero, pero en ningún punto es realmente cero. [*Véase Figura 8*]

Con el uso del *deslizador* y del *zoom* de la herramienta tecnológica GeoGebra, fue posible para los estudiantes llevar a cabo una reflexión más profunda y comprender mejor, que con sólo lápiz y papel, por un lado, cómo varía b respecto de a, y por otro lado, porqué los valores de a o de b no pueden ser cero, debido a que la curva es asintótica a los ejes coordenados. Su discurso se desarrolló en términos de aproximaciones aprovechando el carácter dinámico de la construcción.



(8a) (8b)

Figura 8. Variación del lado b conforme varía el lado a. Si a crece entonces b decrece (8a). Si a decrece entonces b crece (8b)

Veamos lo que ocurrió en el momento de referirse a las longitudes de los lados de todos aquellos rectángulos de área constante A_0 cuyo perímetro es mínimo.

L6. Pedro. Los lados son iguales.

L7. Toño: Sí. Está un poco difícil de controlar aquí [*el deslizador* a] porque no le puedo dar a la raíz de… porque sólo está moviéndose en enteros [*el deslizador* a]. Pero cuando R corte aquí [*señala con el cursor el punto D*] a la función identidad, vamos a tener un mínimo, porque vamos a tener un cuadrado y sus lados van a ser raíz del número. […] Y todos los rectángulos [*de igual área*] que tienden a que sus lados son iguales tienen su mínimo perímetro [*Véase Figura 9*]

L8. Pedro: Cuando son cuadrados.

L9. Investigador: ¿Y si les dan otro ejemplo donde el área sea más grande o más pequeña que 20 [*unidades cuadradas*]?

L10. Pedro: Va a ser lo mismo.

L11. Toño: Pues sí, se mantienen las propiedades.

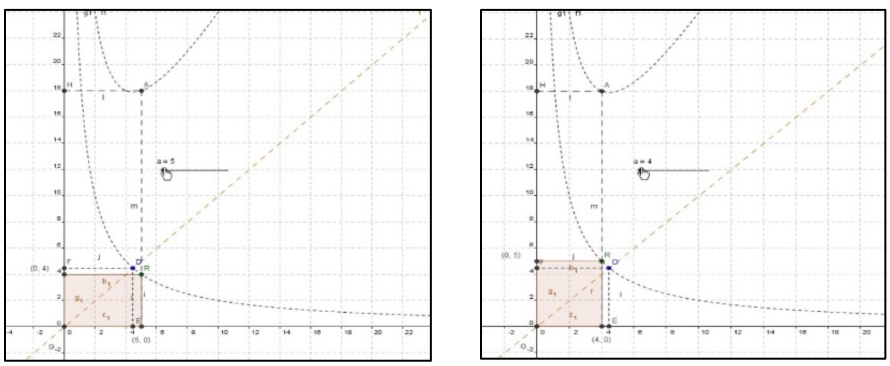
L12. Investigador: ¿Las gráficas para el área y perímetro serán similares a estás?

L13. Toño: Sí.

L14. Pedro: Sí porque… sólo que este punto por ejemplo [*señala con la pluma el punto D*] en lugar de ser raíz de veinte será raíz de… lo que sea el área.

L15. Investigador: ¿Cómo interpretan la recta $y = x$?

L16. Toño: Está para indicarnos el punto donde ambos lados [*del rectángulo*] son iguales, en este caso sería el punto *D*; o sea que aquí [*en la gráfica correspondiente señala con el cursor el valor mínimo del perímetro*] el valor del perímetro es el mínimo en este punto [*señala con el cursor el punto D*], lo colocaría ahí pero el deslizador sólo da enteros [*mientras mueve el deslizador* a]. [*Véase Figura 9*]



(9a) (9b)

Figura 9. Los rectángulos son muy parecidos a un cuadrado (*R* se aproxima a *D*). En (9a), $a > b$; mientras que en (9b), $a < b$.

Mientras Toño y Pedro desplazaron el *deslizador* a observaron el comportamiento de los puntos *P* y *R*. Entonces argumentaron que el punto *R* debe coincidir con el punto *D* (sobre la recta $y = x$), y por consiguiente que $a = b$, para que sea mínimo el perímetro de todos aquellos rectángulos de área constante A_0 (veánse las líneas L7, L15 y L16 de este Episodio 2). Toño observó que los posibles valores para el deslizador a eran números enteros y que por tanto no podría hacer coincidir los puntos *P* y *R*, tomando en cuenta que el valor del perímetro de los rectángulos es mínimo en el momento en que sus lados a y b son iguales a la raíz cuadrada de su área (que no siempre arroja un valor entero), es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado.

Al aproximar a un cuadrado varios rectángulos en un mismo escenario (véase Figura 9) los estudiantes reafirmaron su conocimiento en relación con la variación del perímetro y reflexionaron acerca de las diferencias [llamadas incrementos también por ellos] (véase L7 de este Episodio 2) entre las longitudes de los rectángulos cuya área es constante. Así, las propiedades geométricas de los objetos se conservaron aun cuando éstos se deformaron con el uso del *arrastre*. Toño y Pedro pensaron, actuaron y justificaron su respuesta con el uso de GeoGebra como un medio semiótico de objetivación.

En seguida, Toño y Pedro complementaron lo explicado en la línea L7 respecto al significado geométrico que tiene la variación del perímetro de los rectángulos cuando varían sus lados, pero el área se mantiene constante.

L17. Pedro: Cuando varía cualquiera de los lados… a en este caso.

L18. Toño: Sí, mientras se mantengan las proporciones en estos [*se refiere a que los lados* a *y* b *de estos rectángulos cumplen con* $ab = 20$]…; o sea, mientras se mantiene el área el perímetro es variable y crece indefinidamente cuando aumenten o disminuyan sus [*lados del rectángulo*]… [*Véase Figura 8*]. Y tendrá un mínimo [*se refiere al perímetro de estos rectángulos*] cuando a sea igual a b. [*Véase Figura 9*]

Los participantes le dieron sentido a la variación de b respecto de a y comprendieron cómo dicha variación influye en el perímetro de los rectángulos (cuyo valor es mínimo cuando los valores de a y b coinciden) a pesar de que su área permanece constante (véanse las líneas L7, L16, L17 y L18 de éste Episodio 2). Se observa que Toño y Pedro pensaron, reflexionaron y justificaron su respuesta con el uso de GeoGebra como un medio semiótico de objetivación.

En la Figura 10 se muestra la respuesta escrita de los estudiantes.

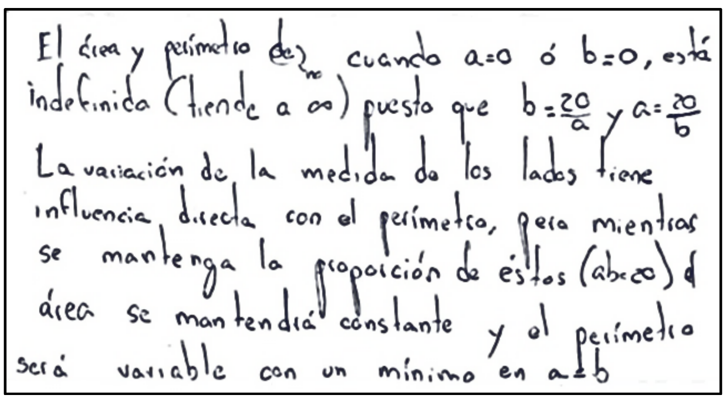

El área y perímetro de no cuando $a=0$ ó $b=0$, está indefinida (tiende a ∞) puesto que $b=\frac{20}{a}$ y $a=\frac{20}{b}$
La variación de la medida de los lados tiene influencia directa con el perímetro, pero mientras se mantenga la proporción de éstos ($ab=20$) el área se mantendrá constante y el perímetro será variable con un mínimo en $a=b$

Figura 10. Respuesta escrita de los estudiantes a la sección (b) de A_TG.

Conclusiones

Durante la resolución de la Actividad con lápiz-y-papel [A_LyP], los estudiantes utilizaron el lenguaje gestual de manera significativa para complementar lo hablado y escrito, así entendieron y explicaron mejor sus ideas; el compartir su conocimiento fue más sencillo. En tanto, con el uso de GeoGebra, ellos arrastraron el deslizador para estudiar diversas trayectorias descritas, respectivamente, por diferentes puntos.

Durante la resolución de la Actividad con la herramienta tecnológica [A_TG], los participantes observaron y entendieron, mediante la dinámica de la construcción, lo estudiado e imaginado en el ambiente estático, tal como la variación de los lados de los rectángulos, y por consiguiente, de su perímetro cuando mantienen constante su área; o la presencia de distintas variables y su relación entre ellas, entendiendo cómo varía una respecto de otra, de qué dependen dichas variaciones y cuál es su significado geométrico.

Con el uso del software, el discurso de los estudiantes se desarrolló más en términos de aproximaciones, como en los momentos en que incorporaron los conceptos de función y límite de una función (éste último se comienza a estudiar en cálculo diferencial de nivel medio superior).

El análisis de datos de este estudio sugiere que el uso del lenguaje y de la tecnología, como mediadores, promueve en los estudiantes procesos de objetivación del concepto de variación, a través del estudio de figuras geométricas, tanto en un ambiente estático como dinámico.

Referencias bibliográficas

González, G. & Herbst, P. (2009). Students' conceptions of congruency through the use of dynamic geometry software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14,* 153–182.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría dela objetivación [ ]. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial, 103-129.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. In Radford, L., Schubring, G. and Seeger, F. (eds.), Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture, Rotterdam, NL, Sense Publishers, pp. 215–234.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2), 132-150.

Radford, L. (2015). The Epistemological Foundations of the Theory of Objectification. Isonomia, 127-149.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VI Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2018

ISSN: 2395-955X

CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Elvira Borjón Robles, Mónica del Rocío Torres Ibarra, Heriberto Morales de Ávila

borjonrojo@hotmail.com, mtorres@matematicas.reduaz.mx, bkm23m@hotmail.com

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

Para citar este artículo:

Borjón, E, Torres, M, Morales, H. L. (2018). CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VI, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

CÁLCULO DE ÁREAS MEDIANTE EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Elvira Borjón Robles, Mónica del Rocío Torres Ibarra, Heriberto Morales de Ávila

borjonrojo@hotmail.com, mtorres@matematicas.reduaz.mx, bkm23m@hotmail.com

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

Palabras clave: áreas, visualización matemática, aproximación, teorema del valor medio.

Resumen

La presente investigación tiene por objetivo ofrecer una alternativa para el aprendizaje del cálculo de áreas, distinta a la que se presenta en los cursos tradicionales de cálculo integral, que se trabaja en la licenciatura en matemáticas. Promueve una forma aproximada, dinámica, interactiva y práctica que utiliza implícitamente el teorema del valor medio para integrales como un proceso al límite. Es una propuesta didáctica que consta de una construcción dinámica desarrollada en el software GeoGebra y un instrumento en Microsoft Word, que toma como base el perímetro de una figura acotada por una curva y generada a partir diferentes representaciones, para calcular su área aproximada transformándola a un rectángulo.

Keywords: areas, mathematical visualization, interactivity, approximation.

Abstract

This research has a target offer an alternative for the learning calculation of areas, different from of traditional courses of integral calculus are presented and are taught in the mathematics in university degree. Promotes a way approximate, dynamic, interactive and practical, using a form implicitly of the mean value theorem for integrals, as a limit process. Is a didactic proposal composed by a dynamic construction developed in GeoGebra software and an instrument in Microsoft Word, which takes as base the perimeter of figure limited by a curve and generated from different representations, to calculate the approximate area transforming into a rectangle.

Introducción

Dada la problemática manifiesta por diversos investigadores (Artigue, 1998); Zimmermann y Cunningham, 1991), acerca del proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo de una variable, específicamente en lo relacionado con el concepto de integral, Turégano (1998) propone:

> *Que los estudiantes puedan aprender (de forma intuitiva) conceptos de cálculo sin el dominio previo o simultáneo de las usuales habilidades algorítmicas, utilizando la visualización a través del ordenador para dar significado al concepto de integral definida y a sus propiedades mediante la idea de área bajo una curva.*
>
> *(Turégano, 1998, p. 234)*

Coincidimos con Turégano en el sentido de promover el desarrollo de la intuición en los alumnos a través de diseños apoyados de tecnología, que les permitan visualizar los conceptos expuestos en el aula, de modo que ellos puedan asimilarlos no solo por su descripción o manejo algorítmico, sino más bien apoyados en sus precepciones mentales; según Martínez (2014) trabajar con imágenes y gráficas mejora la comprensión de conceptos abstractos y facilita la resolución de problemas.

Por su parte, Cantoral y Cabañas (2006) plantean un tratamiento de la noción de área en actividades de la vida cotidiana, involucrando el concepto de conservación de área, entendida como transformaciones o movimientos en construcciones vinculadas a regiones planas, donde los objetos pueden cambiar o mantener su forma sin que el área se altere. Mostrando con esto su preocupación por dar alternativas para mejorar el aprendizaje del concepto de área desde el punto de vista geométrico.

También Borjón y Torres (2010) proponen el manejo de la definición de integral de Riemann, por medio de la visualización matemática, con el objetivo de que el alumno cuente con un acercamiento al concepto de integral a través de la manipulación de un programa realizado en el ambiente TI Voyage 200, en el que se trabaja con áreas de diferentes figuras, de forma que el alumno desasocie la forma (cóncava o convexa) de las mismas al comportamiento y mecanismo de obtención del área.

Por otra parte, Martínez (2014) trabaja algunos métodos visuales de integración, en el que se utiliza la simetría de las funciones, poniendo énfasis principalmente en la visualización.

Así pues, nuestra investigación tiene por objetivo utilizar la visualización matemática, apoyada en una app desarrollada en GeoGebra, para propiciar el desarrollo de la intuición en el alumno respecto del cálculo de áreas con el uso implícito del teorema del valor medio para integrales; incluso a realizar planteamientos alternativos de cálculo de áreas. Específicamente trabaja con un archivo dinámico del software GeoGebra que acompañado de un instrumento en Microsoft Word, promueva la aproximación de áreas acotadas por una curva en un intervalo cerrado $[a, b]$.

En suma, en este trabajo promovemos el cálculo de áreas en forma aproximada, dinámica, interactiva y práctica, utilizando implícitamente el teorema del valor medio para integrales mediante un proceso al límite. Así mismo ofrecemos una forma alternativa de calcular áreas, distinta a la que se presenta en los cursos tradicionales del cálculo integral.

Referente Teórico

Zimmermann y Cunningham (1991) describen la visualización matemática como “el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel, o con ayuda de tecnología), usando tales imágenes efectivamente para un descubrimiento y comprensión matemática”. En este sentido, entendemos por visualización la exteriorización de imágenes mentales con que los alumnos logran encaminarse hacia la conceptualización, que va más allá de la simple percepción, en concordancia con Hitt (2003), quien afirma:

> *La percepción la tomaremos como la función por la que la mente de un individuo organiza sus sensaciones y se forma una representación interna de*

los objetos externos, en cambio, la visualización tiene que ver con un conocimiento directo e intuitivo que se realiza inconscientemente.

(Hitt, 2003, pág. 207)

Para lograr propiciar esta visualización a la que nos referimos, hacemos uso de software libre de geometría dinámica, en la idea de que este contribuirá al desarrollo de la intuición para exteriorizar, por medio de múltiples representaciones, las imágenes mentales asociadas al cálculo de áreas, utilizando implícitamente resultados como el teorema del valor medio para integrales, de acuerdo a la idea que plantea Hitt (2003):

La visualización matemática de un problema desempeña un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema.

Hitt (2003, pp. 218)

En la misma investigación se identifica que para Hitt al igual que nosotros es importante el uso de la tecnología para lograr la visualización de un problema, cuando menciona:

La tecnología, desde este punto de vista, servirá como herramienta fructífera para la construcción de conceptos matemáticos más profundos que se reflejen en procesos exitosos por parte de los estudiantes en la resolución de problemas.

Hitt (2003, pp. 218)

Guzmán (1996), nos proporciona otra definición de lo que se entiende por visualización en matemáticas, la cual refuerza nuestra teoría:

Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas. Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto revelas las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización matemática.

(Guzmán, 1996, p. 15)

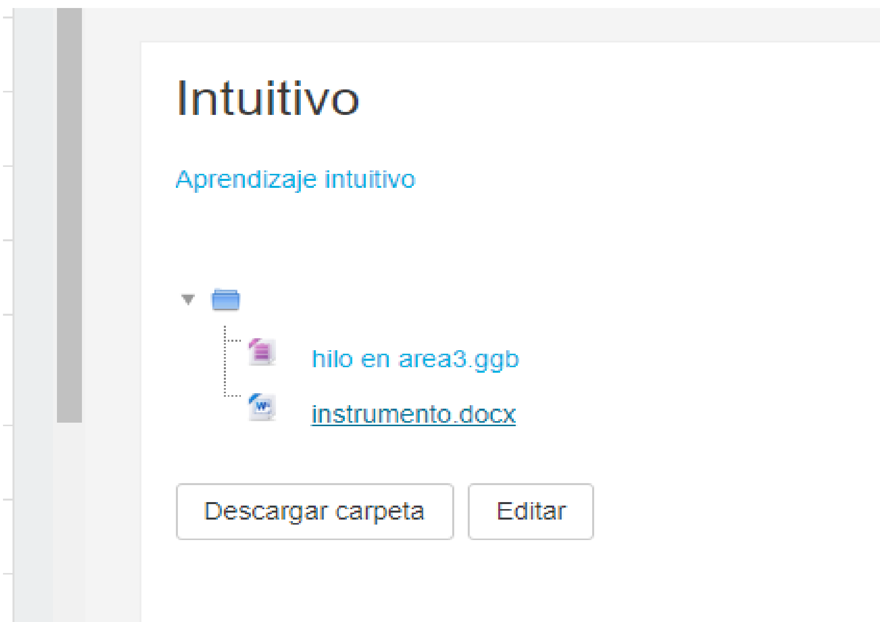
Teniendo en cuenta las diversas formas de expresar lo que se entiende por visualización Matemática (Zimmermann y Cunningham, 1991; Hitt, 2003; Guzmán, 1996), fijamos nuestra posición respecto de lo que entenderemos por visualización matemática en este trabajo como: *el proceso de formar imágenes mentales y exteriorizarlas a través del papel y dispositivos electrónicos que trabajan mediante software de geometría dinámica, con la finalidad de conceptualizar objetos matemáticos o resolver problemas específicos; desarrollando con ello la intuición en el alumno.*

Por otra parte, el contenido matemático involucrado en esta investigación está sustentado en la obtención de áreas de figuras planas no euclidianas y el teorema del valor medio para integrales, el cual incluimos como parte del marco teórico, para cualquier referencia:

> Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces existe un número c entre a y b, tal que $\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b - a)$
>
> *(Purcell, Varberg y Rigdon, 2007, p. 254)*

Metodología

El trabajo se experimentó con un grupo de cinco estudiantes del tercer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. El escenario para el desarrollo fue en el centro de cómputo de la misma, donde cada alumno contaba con un equipo de cómputo con el software (GeoGebra 5.0 y Microsoft Word 2010) previamente instalado, así una cuenta de usuario y acceso a internet (para su autentificación a la plataforma Moodle), que le permitieron descargar y trabajar con la app desarrollada y el instrumento de apoyo, para posteriormente subir en la misma plataforma sus respuestas.



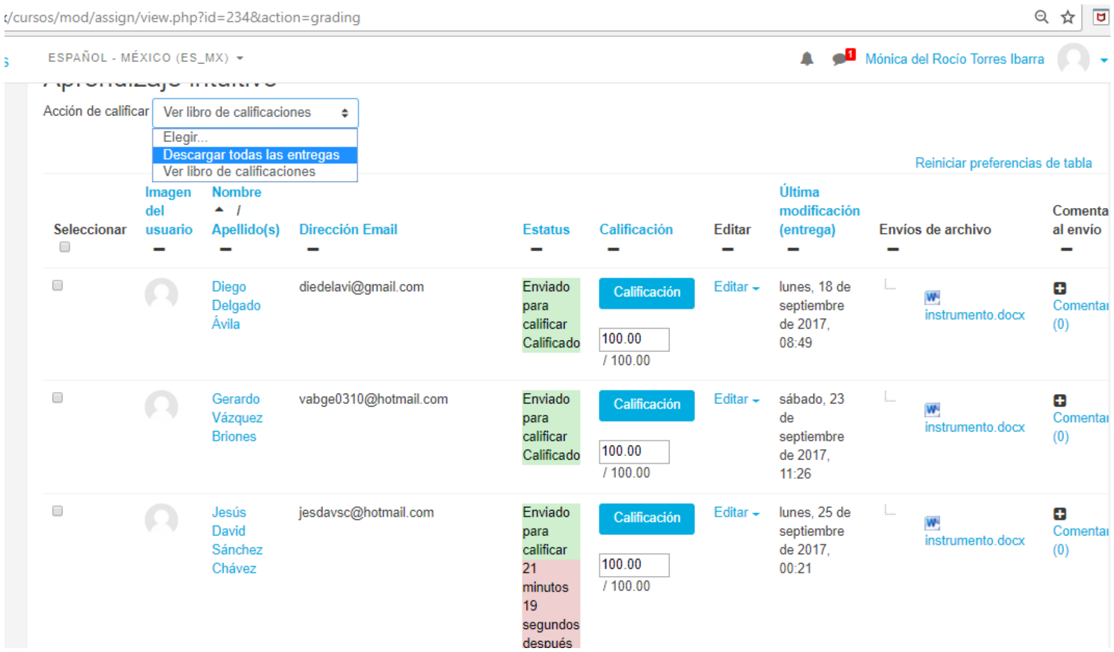


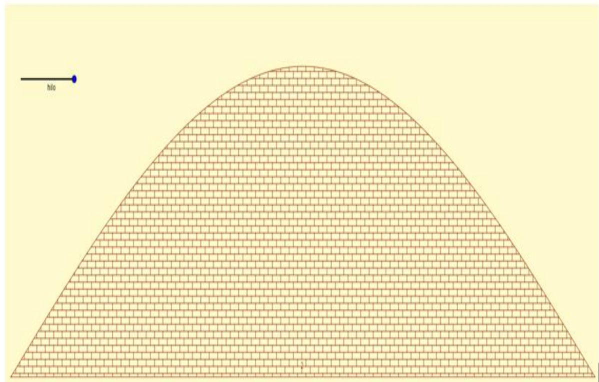
Figura 1. Vista de la plataforma para carga y descarga de archivos.

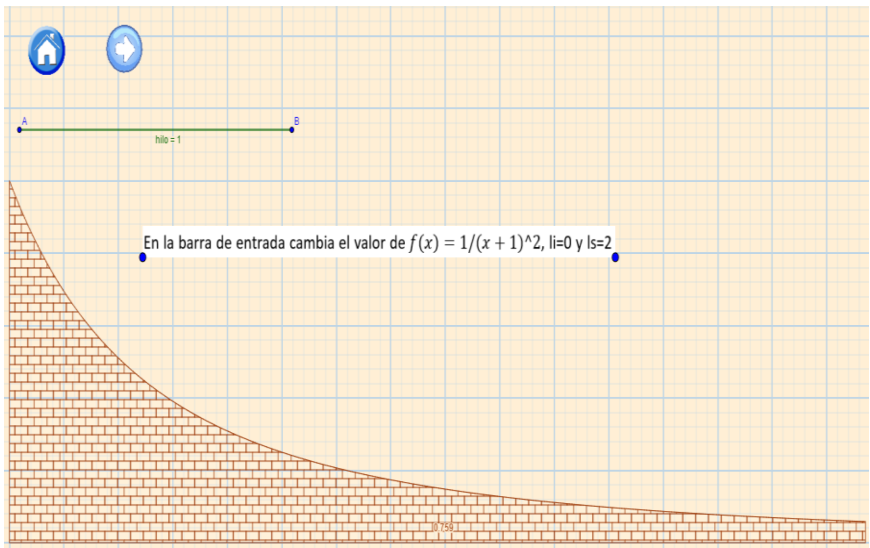
Se inicia con la representación de la situación a resolver, (en una representación geométrica, algebraica y pictórica, respectivamente) las cuales les proporcionan como herramienta un hilo virtual que permite recorrer el contorno de la figura a través de un cierto número de segmentos de línea, cuya longitud se conserva en el perímetro de un rectángulo, posteriormente se le presenta una representación aritmética y geométrica de la situación, con las cuales deberá trabajar en una representación tabular y algebraica que le permitirá hacer una relación de los valores obtenidos con el área de la figura en cuestión, para posteriormente hace una comparación con el área real y obtener sus propias conclusiones.

Problemática

Se pide al alumno que encuentre el área acotada por una curva de tres situaciones planteamientos, en el primero se le proporciona una representación geométrica, en el segundo una representación algebraica y en el tercero una representación pictórica, contando para su solución como única herramienta un hilo, como se muestra en la figura 2:

Descripción: Se quiere construir una pared como la que se muestra en la siguiente imagen, para cotizar su construcción nos piden el tamaño del área que ocupa, para tomar esta medida contamos con un hilo que nos permitirá aproximarla





Describe la forma en la que encontrarías el área de una nube que se proyecta en el piso (si no conoces una fórmula que genere su figura).

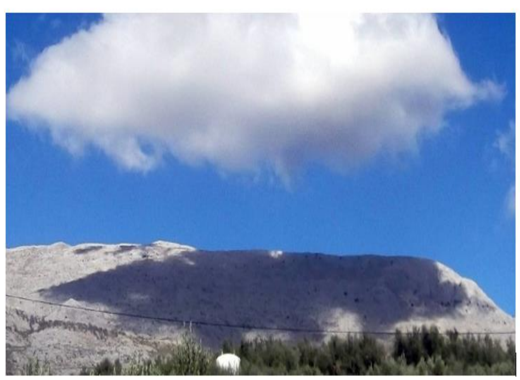


Figura 2. Representación de las tres situaciones planteadas.

Para su solución, se solicita a los alumnos que abran el programa desarrollado y utilicen el hilo virtual que les proporciona; con éste podrán recorrer a través de segmentos, el contorno de la figura y obtener una longitud del hilo necesario para recorrerlo, enseguida deberán determinar los valores (base y altura) que les permitan construir un rectángulo cuyo perímetro se alcance a cubrir con la cantidad del hilo utilizado, el programa presenta la figura y realiza los cálculos del área correspondiente, para que ellos determinen si esta es la más aproximada al valor buscado.

Planteamiento 1. En este se pide al alumno calcular el área acotada por la curva, utilizando el programa en GeoGebra y el hilo virtual que subdividirán en una determinada cantidad de segmentos que los aproximen a la curva en cuestión.

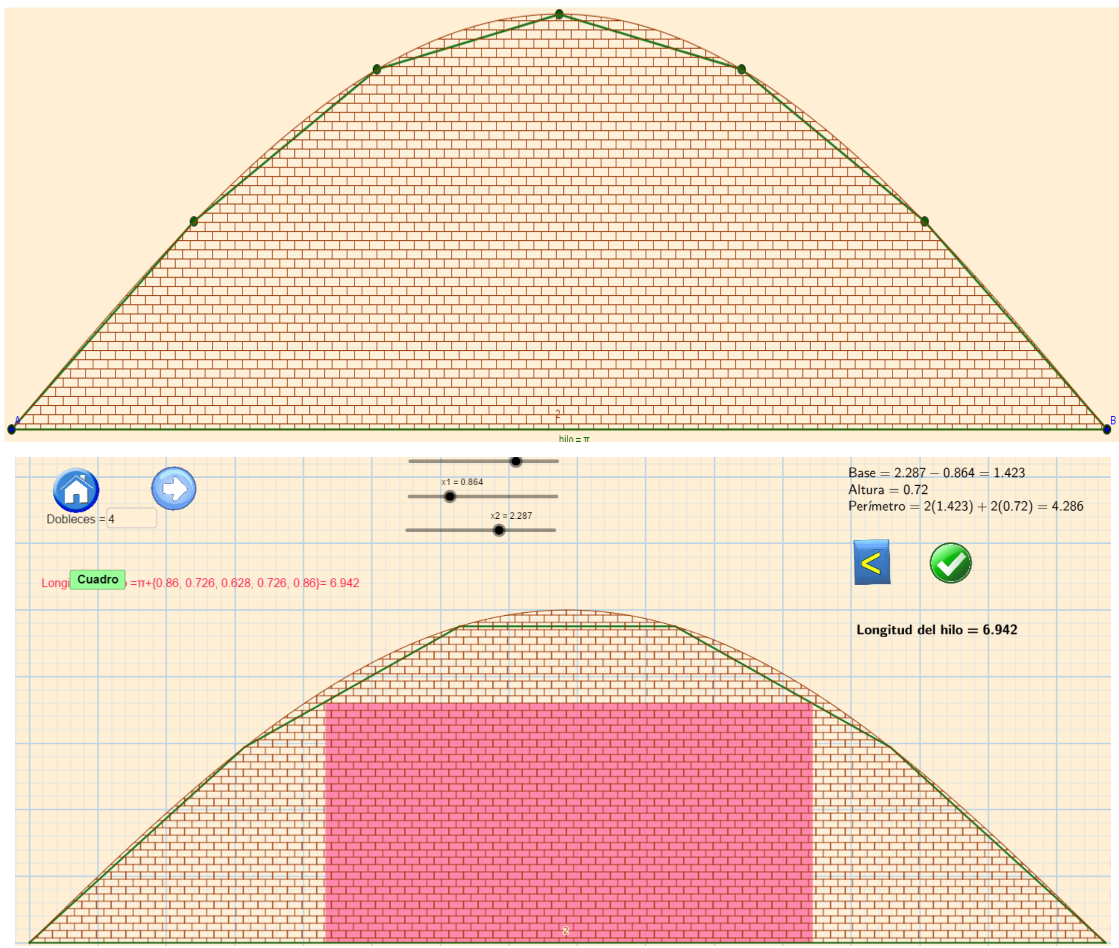


Figura 3. División del hilo virtual en n segmentos y determinación del área del rectángulo de apoyo.

Al mismo tiempo, el instrumento creado en Microsoft Word con 12 items, entre instrucciones y preguntas, los estudiantes van creando las imágenes mentales a través de diferentes representaciones manejadas, las cuales al final les permite plantear una solución a la situación presentada.

Planteamiento 2. Determinar el área acotada por la función $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, x \in [0,2]$. En esta situación los alumnos deberán interactuar con el programa mediante la barra de entrada, para especificar la función que establece la curva y sus respectivos límites, las instrucciones para su realización están contenidas en cinco instrucciones del instrumento de trabajo.

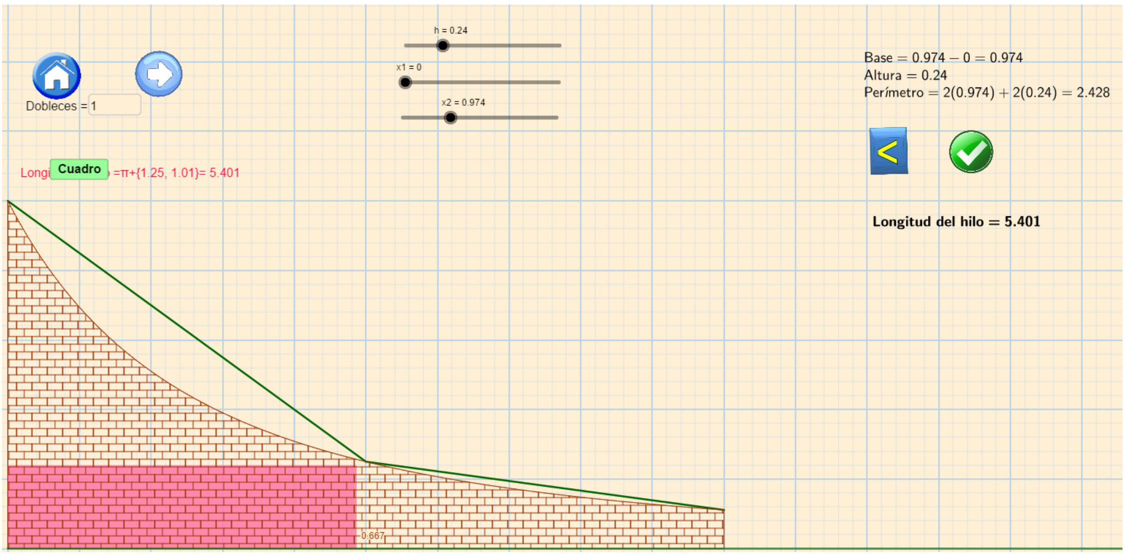


Figura 4. Representación de la segunda situación.

Planteamiento 3. A partir de las herramientas utilizadas en los planteamientos anteriores, los alumnos deberán buscar una estrategia para calcular el área de la sombra de una nube proyectada sobre el suelo, figura de la cual no se conoce una fórmula, y en la cual en 2 items deberán establecer una estrategia de solución y realizar una construcción que lo simule.

Figura 5. Figura presentada en la situación 3 del instrumento.

Puesta en escena

Se trabajó en dos sesiones de 90 minutos cada una, en un primer momento, los alumnos se loguean en la plataforma Moodle para descargar dos archivos: el instrumento (Microsoft Word) que contenía la secuencia de instrucciones y preguntas y la app desarrollada (en GeoGebra) para la simulación de las situaciones problema.

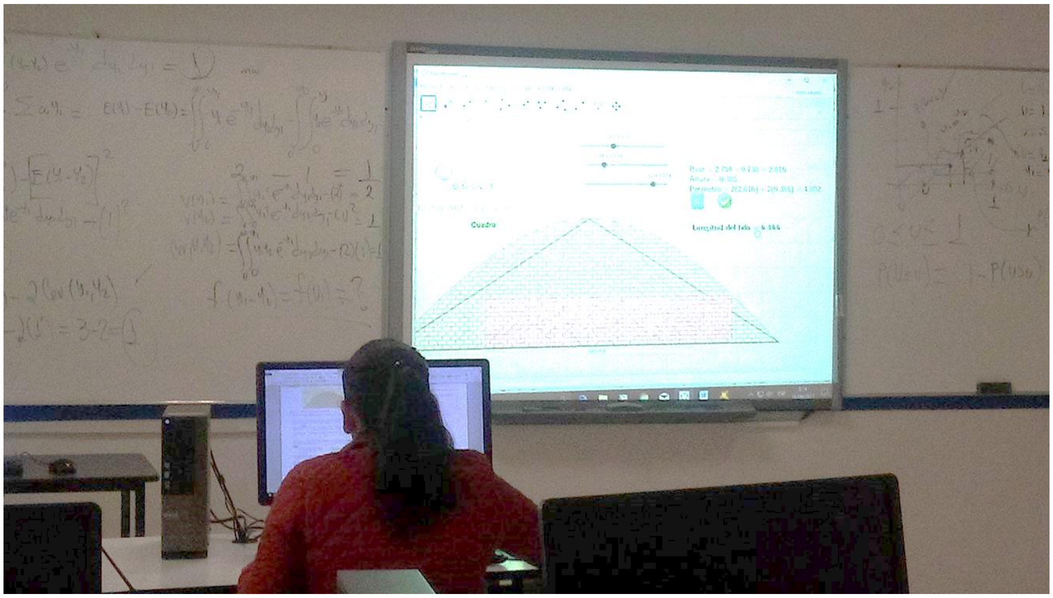


Figura 6. Alumnos trabajando en la situación.

En un segundo momento, guiados por el instrumento, los alumnos siguiendo las indicaciones del instrumento, ejecutan la actividad con el GeoGebra, del que se desprende la exteriorización en diferentes representaciones de lo que visualizan, al tiempo que van completando los cuestionamientos del mismo instrumento; finalmente suben a la plataforma sus respuestas y construcciones realizadas.

En un último momento, las investigadoras descargan el concentrado de archivos trabajados por los alumnos y proceden a la realización del análisis de resultados.

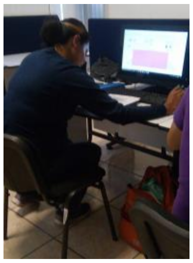
Resultados

La primera sección del instrumento estaba encaminada a la comprensión del manejo del app desarrollado, se esperaba que se dieran cuenta que para que el hilo se ajuste a la curva en cuestión, deberían realizar un determinado número de dobleces sobre la curva, lo cual se logró de manera uniforme por todos los alumnos, como se muestra en la siguiente figura:

1. Mueve el hilo y trata de adaptarlo al contorno, ¿qué sucede? El hilo toma el valor de la base.
2. Como el hilo no es flexible, para poder adaptarlo se requiere hacer algunos dobleces ¿Cuál será el número mínimo de dobleces que le debemos hacer al hilo para rodear la figura? 1 a este número le llamaremos n
3. Activa el botón de la aplicación, observarás que el hilo se coloca en la base de la figura, si $n = 1$, ¿cuál es la longitud del hilo? π el hilo se hace más grueso, ¿cuál es su longitud? 6.866 ¿por qué? Porque es la suma de ambas partes del hilo.

Figura 7. Tipo de respuestas de la fase de adaptación al instrumento utilizado.

Posteriormente, con la manipulación del app desarrollado en GeoGebra para cada una de las situaciones, se esperaba que se dieran cuenta de que el área que se calcula es menor que el área exacta, lo cual se logró completamente, emitiendo respuestas como las que se presentan a continuación:



B A1. RI No R2. Porque aun así hay un área notable sin tomar en cuenta.
M A2. R1. Si R2. porque al aumentar los dobleces el hilo se aproxima mas al contorno.
M A3. R1. Si R2. porque a medida que hacemos mas dobleces, aproximamos el hilo al contorno "curvo" que tiene la figura original
M A4. R1. Si R2. Porque entre mas dobleces tenga el hilo, tendrá mejor aproximación en la figura.
B A5. R1. No R2. Porque aun queda bastante área que tomar en cuenta

Figura 8. Respuestas en las que se muestra la relación entre áreas.

Por otra parte, se espera también que den muestras de un acercamiento del proceso al límite, lo cual se muestra cuando se les pide que planteen formas alternativas para la obtención del resultado a la problemática planteada. En sus respuestas se observa que sus imágenes mentales si les permiten este acercamiento.

A1.cuando n tiende a infinito

A2. Con un límite

A3. podría haber una aproximación casi exacta pero para ello se necesitaría el límite de las áreas, y derivadas _porque a medida que n crece la figura que forma el hilo tiene a ser la figura original.

A4. cada vez que se Propone un n muy grande, las aproximaciones van siendo mejores pero nunca será exacta

A5. No como formula de la elipse a con la de la parábola

Figura 9. Respuestas en torno a procesos alternativos de solución.

Finalmente, en relación a los métodos propuestos y utilizados para la solución de los planteamientos, pudimos encontrar que para ellos el método es bueno pero su precisión no lo es tanto (ver figura 10); lo cual era lo que se pretendía.

A1. Es una buena forma de aproximarse a un área y la longitud de una curva.

A2. que es un poco impresiza

A3. que en general puede aproximarse el área de cualquier figura casi de forma exacta por medio de figuras de las cuales ya podríamos conocer su área.

A4. Esta forma es muy buena manera de aproximación, ya que cada vez que los valores van siendo más grandes, la aproximación va siendo mejor

A5. Pues que es útil pero no exacto

Figura 10. Conclusiones acerca del método utilizado.

Cabe mencionar también que no hubo mayor problema cuando se plantea un cambio de representación para el planteamiento de la situación, más aun, cuando se les pide encontrar el área de una sombra, en la que no existe una fórmula o un plano de referencia, recurren a éste método de aproximación para la obtención del área, como se observa en la figura 11, y sus construcciones se basaron en el mismo (ver figura 12) de manera muy precisa.

Tomando puntos del extremo de la sombra, luego con el realizo el perímetro del polígono dado por esos puntos, al final construyo un rectángulo con ese perímetro y veo su área.

Colocaria segmentos de tal moso que se aproximaran al contorno de la nube, y construiría un rectángulo de modo que no sobrepasara el perímetro

Marcaría todos los puntos del polígono sobre el piso, después con un hilo mediría la longitud entre todos esos puntos, y así formaría un cuadro que tuviera la misma longitud que la nube, así calcularía el área del cuadro y obtendría una aproximación del área de la nube.

Si tengo una figura la cual resulta complicado saber su área por medio de una formula o por medio de la triangulación, entonces lo que haría seria por medio de segmentos tratar de cubrir el contorno de la figura, es decir tratar que la diferencia entre el contorno y cada segmento no sea muy grande, después con la suma de esos segmentos, se determinaría de alguna manera el perímetro aproximado y por medio de figuras que ya conocemos (cuadrado) trataríamos de encontrar o al menos de dar una aproximación del área de la figura

Tomaría de base un cuadrado o rectangulo en la sombra de la nube que abarque la mayor parte de esta

Figura 11. Métodos para la obtención del área de una figura hipotética.

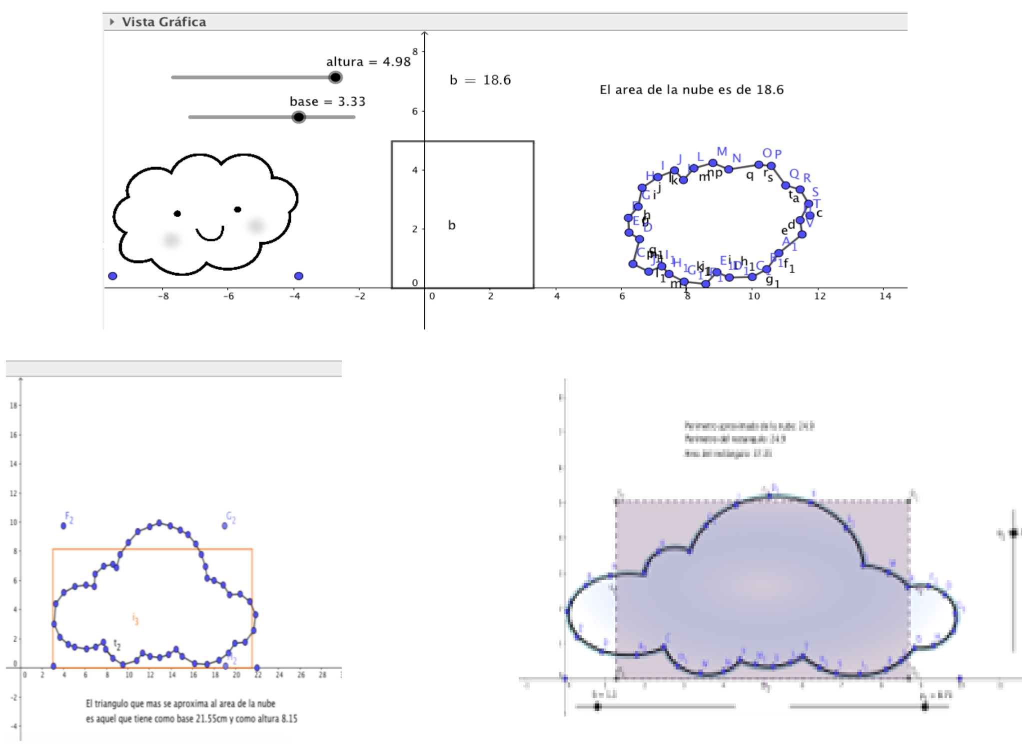


Figura 12. Planteamientos de solución implementados por los alumnos a la situación 3.

Con todo lo anterior, podemos decir que los objetivos planteados en la presente investigación en torno a la visualización se lograron, de la siguiente manera:

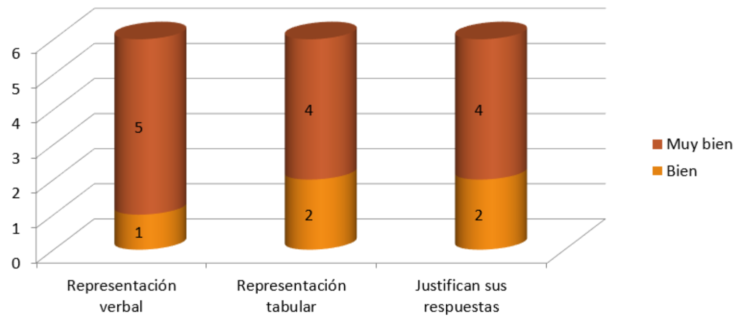


Figura 13. Gráfica de manipulación de la situación 1.

Conclusiones

Se logró que los alumnos calcularan áreas de forma aproximada con la app que se les proporcionó llegando incluso a describir el proceso general.

Se identificó que los alumnos entienden el límite como un proceso de aproximación, afirmando que "se acerca mucho pero no se alcanza"

Aprendieron el proceso que se ofreció, llegando a calcular con GeoGebra de manera independiente el área de una figura plana.

Cuando proponen la solución del tercer problema se evidencia que implícitamente están aplicando el teorema del valor medio para integrales.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 1, núm. 1, pp. 40-55.

Cabañas, G., Cantoral, R. (2007). La integral definida: Un enfoque socioepistemológico. En C. Dolores, Martínez, G., Farfán, R., Carrillo, C., López, I. y Navarro, C. (Eds.). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* México: Ediciones Díaz de Santos, 9 – 32.

Guzmán, M. (1996), *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid, España: Pirámide.

Martínez F. (2014). Recursos para el cálculo visual de integrales. *Educación Matemática*. Vol. 26, No. 1.

Martínez de la Rosa, F. (1996). Recursos para el cálculo visual de integrales. *Educación Matemática*, vol. 26, núm. 1, pp. 153-169. Grupo Santillana: México Distrito Federal, México

Purcell y Varberg (2007). *Cálculo*. 9ª Edición, Pearson, México.

Turégano (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias*. No. 16 V. 2 p. 234.

Zimmerman, W., Cunningham, S. (1991). What is the mathematical visualization? *Visualization in Teaching and Mathematics*. Mathematical Association of America Notes. p. 3.