REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

httpS://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadoresdel Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen V Número 1 Fecha: Enero-Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

Contenido

COMITÉ DE EVALUACIÓN

José Trinidad Ulloa Ibarra, María Inés Ortega Árcega
Universidad Autónoma de Nayarit

José Zambrano Ayala
Instituto Tecnológico de Milpa Alta

Karla Liliana Puga Nathal, Leopoldo Castillo Figueroa, Marco Antonio Guzmán Solano, Rafael Pantoja González
Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán

Lilia López Vera
Universidad Autónoma de Nuevo León

Ruth Rivera Castillón, Maximiliano de las Fuentes Lara
Universidad Autónoma de Baja California

Ricardo Ulloa Azpeitia, Verónica Vargas Alejo, Humberto Gutiérrez Pulido, Elena Nesterova
CUCEI. Universidad de Guadalajara

Eliseo Santoyo Teyes
CBTis 226

Felipe Santoyo Telles
Centro Universitario del Sur

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

LA RAZÓN DE CAMBIO A TRAVÉS DE UNA INTERACCIÓN ELECTRÓNICA

Noelia Londoño Millán, Ana Ávila Alvarado, Alibeit Kakes Cruz

Universidad Autónoma de Coahuila, México

noelialondono@uadec.edu.mx, an_le@hotmail.com, akakes@uadec.edu.mx

Para citar este artículo:

Londoño, N., Ávila, A., y Kakes, A. (2017). La razón de cambio a través de una interacción electrónica. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

LA RAZÓN DE CAMBIO A TRAVÉS DE UNA INTERACCIÓN ELECTRÓNICA

Noelia Londoño Millán, Ana Ávila Alvarado, Alibeit Kakes Cruz

noelialondono@uadec.edu.mx, an_le@hotmail.com, akakes@uadec.edu.mx

Universidad Autónoma de Coahuila, México

Palabras clave: Razón de cambio, Representaciones, GeoGebra

Resumen

En este artículo se presentan dos actividades para enseñar la razón de cambio, en educación básica secundaria. En ambas el propósito central es contribuir a que los estudiantes entiendan el concepto haciendo uso de diferentes registros de representación. Las actividades están construidas usando lápiz, papel, hojas de trabajo y un archivo electrónico construido en GeoGebra, donde se permite explorar, conjeturar y discutir acerca del tema; así como también desarrollar otras habilidades del pensamiento matemático como son estimar, medir, visualizar, encontrar patrones; involucrando como ejemplo la relación que existe entre el arco, el ángulo central y el radio de una misma circunferencia. En el estudio de describen algunas dificultades que tienen los alumnos de secundaria para emplear los registros de representación y extraer información de tablas, gráficas y conjeturar expresiones algebraicas, sin uso de tecnología. El conjunto de dificultades encontrado justifica en gran medida la propuesta de una interacción electrónica en la que alumno pueda visualizar y encontrar algunas bondades que la resolución con lápiz y papel no le permite como son: obtener una representación gráfica de forma continua, tener diferentes ejemplos del mismo objeto matemático; garantizar las escalas correctas en las gráficas, además de identificar la expresión algebraica que modelan las variables que intervienen.

Key words: Rate of change, Representations, GeoGebra

Abstract

In this paper we present two activities used to teach the reason of change in middle school; in the two of them, the main propose was help the students to understand the concept using different representation registers. The activities were constructed using pencil, paper, worksheets and an electronic file created in GeoGebra, where they can explore, conjecture and discuss about the subject; as the same time they can develop other skills of the mathematical thought, like measure, visualize, find patrons; involving as an example the relation between the arch, the central angle and the radius of the same circumference. In this study we describe some difficulties that the students had to use the representation registers, and obtain information from tables, graphics and conjecture algebraic expressions, without technology; all the difficulties found, justifies the need of the electronic interaction, in which the student can visualize and find some benefits that the resolution with only pen and paper does not allow, like: obtain a continuous graphical representation, have different examples from the same mathematical object, guarantee the correct scales in the graphs, as well as identify the algebraic expression that models the variables who play a part.

Introducción

Bien pudiera decirse que el estudio de la razón de cambio que se propone en la educación básica secundaria se constituye en el preludio del estudio de la derivada de la educación media superior y superior, por ende, debe verse como un concepto relevante. Es tarea tanto del maestro como del alumnos que se entienda el significado y no reducirlo a una simple fórmula donde intervine una razón. En los programas oficiales de la secundaria se propone discutir acerca de la razón de cambio en el tercer grado, en el eje denominado manejo de la información, (SEP, 2011). Sin embargo creemos pertinente considerarlo también en el eje de pensamiento algebraico, puesto que los modelos matemáticos aparte de su forma gráfica, también pueden representarse tanto en expresiones algebraicas como numéricas.

Por otra parte, incorporar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas tiene diferentes necesidades tanto del docente como del estudiante, la actividad electrónica que aquí se propone pretende mostrar cómo puede verse el mismo objeto matemático (razón de cambio) explorado en tres diferentes registros de representación, además de una forma dinámica.

Referente teórico

El presente estudio tuvo como referente la teoría de las representaciones semióticas, particularmente en lo que respecta a la *conversión* y el *tratamiento*, (Duval, 1999; Hitt, 1998, 2003) particularmente de los registros tabular y gráfico. Los registros de representación semióticos en matemáticas no son una opción, casi pudiéramos decir que son una obligación, dado que se conocen y entienden las matemáticas gracias a su existencia y su uso.

> Para la didáctica de las matemáticas en general, juega un papel crucial el uso de símbolos, signos, gráficas, expresiones algebraicas, figuras geométricas, entre otras. Estos distintos signos y símbolos permiten dos cosas a los actores principales del proceso educativo: para quien enseña tenga elementos o herramientas para explicar un concepto matemático abstracto; y para quien aprende asociar, juntar, convertir, comparar esos elementos para comprender el concepto matemático. (Londoño, Narro, Vera, 2014, p. 91)

Conviene hacer alusión a la siguiente pregunta ¿Qué significa o qué implica representar? Para responderla se tuvo en cuenta la siguiente respuesta, aunque suene un tanto fuerte "Representar es sustituir, dar presencia a un ausente y, por tanto, confirmar su ausencia." (Rico, L. 2009, p. 6).

En la publicación del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 2000), una representación se define como una serie de acciones que intervienen en el proceso y resultado de un concepto matemático, es decir, durante el desarrollo de algún contenido matemático, el alumno debe analizar la información que se le presenta y procesarla para luego plasmarla mediante alguna simbología que tenga significado personal (signos, letras, graficas, dibujos, etc.); y como producto de este proceso se reflejará otra representación como concepto matemático, afirman también que la representación es primordial en el estudio de las matemáticas, ya que las representaciones que los alumnos elaboran como (objetos físicos, dibujos, tablas, gráficas y símbolos) les ayudan a comunicar lo que piensan, por lo que si se les permite explorar constantemente el uso de representaciones, ellos podrán aprender, reconocer, comparar y usar diferentes tipos de representaciones en temas como fracciones, decimales, porcentajes y números enteros, así como en notación exponencial y científica.

La actividad se diseñó para ser aplicada con alumnos de tercero de secundaria en donde se propone como contenidos curriculares a desarrollar: la forma de ecuación de la línea recta, representación gráfica, modelos lineales de la forma $y = mx$, relación entre pendiente de la recta y ángulo de inclinación. Así mismo se debe considerar como un valor agregado a este experimento el uso de las herramientas de GeoGebra (Llamas y Carrillo de Albornoz, 2010), para recabar datos de un experimento. También la vinculación de un contenido del área de matemáticas con uno de física (línea recta vs movimiento circular uniforme). Como objetivo central se propone permitir al alumno explorar el significado de la razón de cambio desde distintos registros de representación (gráfico, numérico y algebraico) y que pueda asociar el ángulo de inclinación de una recta con la pendiente de la misma y el significado físico de la proporcionalidad.

Metodología

Sobre el instrumento: Se diseñó y aplicó una hoja de trabajo, donde se enlistan los materiales y se da un conjunto de instrucciones a los alumnos de cómo usar esos materiales, recabar la información correspondiente y responder algunas preguntas que los guiaban para obtener una expresión algebraica. Los materiales que se usaron fueron los siguientes: hilo no elástico, regla graduada, calculadora, hoja de trabajo, (Ávila, 2017), además de círculos con ángulos medidos en radianes en hoja de papel, como se muestra en la figura 1.

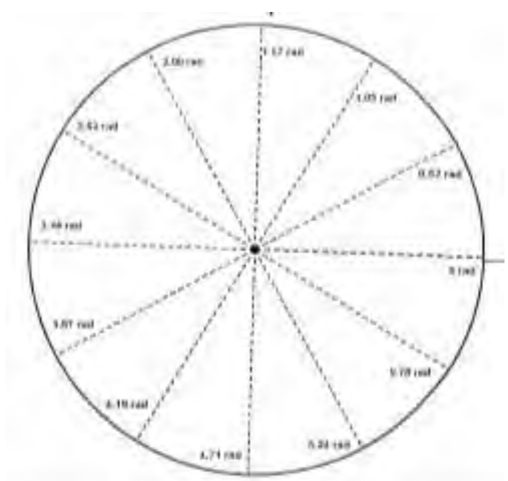


Figura 1. Imagen incluida en la hoja de trabajo para desarrollar la actividad

Proceso: Para el desarrollo de esta actividad se entregó a cada equipo una hoja de trabajo además de los materiales necesarios. Los estudiantes sobrepusieron el hilo sobre el arco cuidadosamente, marcaron sobre el hilo y midieron la longitud del arco con la regla, identificaron el ángulo central que corresponde a dicho arco y registraron los datos en las columnas 1 y 2 de la tabla dada.

A continuación debieron obtener las diferencias sucesivas entre los pares de ángulos (columna 3), luego calcularon las diferencias sucesivas de la longitud de arco (columna 4), y por último calcularon el cociente entre la diferencia de las longitudes de los arcos y la diferencia de los valores de los ángulos (columna 5), como se muestra en la figura 2.

1	2	3	4	5
Ángulo radianes	Longitud del arco cm	Diferencia entre pares de ángulos	Diferencia entre pares de longitud de arcos	División de Columna 4/Columna 3
0	0	0.58	2.8	5.3
0.52	2.8	0.53	2.8	5.3

Figura 2. Ejemplo de la tabla dada en la hoja de trabajo

Posteriormente los alumnos realizaron una gráfica con las dos variables que intervienen (ángulo central y arco), se les indicó que observaran los datos de la tabla poniendo énfasis en la columna 5, ya que si sus mediciones se realizaron con la mayor exactitud posible, se esperaba que los datos de esta columna reflejaran valores que se aproximaran a una constante.

También se les pidió que estimaran la ubicación del ángulo cuya medida es 2 radianes en el círculo proporcionado, y estimaran la longitud de dicho arco, sin realizar ninguna medición, cabe señalar que este ángulo no aparece en los datos proporcionados en el círculo.

Así mismo los alumnos debían identificar y expresar la relación que existe entre las variables: longitud del arco medida del ángulo central, es decir, que explicaran el comportamiento de ambos valores. Se esperaba que logrando identificar la relación que existe entre dichos valores, también pudieran realizar los cálculos necesarios para obtener la longitud del arco conociendo el valor del ángulo.

Tomando como referencia la gráfica, se les pidió que seleccionaran dos puntos y calcularan el cociente entre la variación de la longitud y la variación de la medida del ángulo. Esto con el propósito que los alumnos pudieran determinar la constante de proporcionalidad que persiste en la gráfica, esto es, que independientemente de la elección de los puntos la pendiente de la recta era misma. Posteriormente se les pidió que midieran la longitud del radio y lo compararan con los datos de la tabla, esperando que observaran que el valor del radio se aproximaba mucho a los valores obtenidos en la columna 5. Y por último debían escribir una expresión algebraica que relacionara la medida del arco y la medida del ángulo central.

Sobre los participantes: En esta actividad participaron 85 estudiantes de tercer grado de secundaria, cuyas edades oscilan entre 14 y 15 años, pertenecen a dos escuelas públicas de la zona urbana de la localidad.

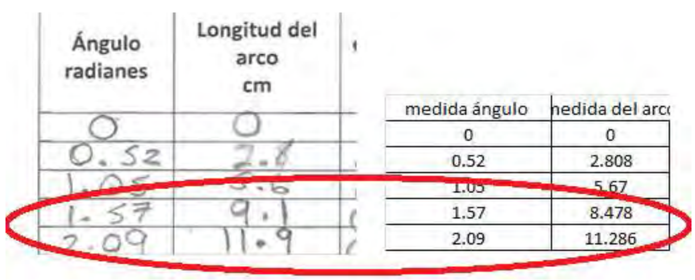
Figura 3. Alumno de secundaria desarrollando la actividad con lápiz y papel. (Ávila, 2017)

Resultados

Una vez recabada la información se procedió a procesarla y se tuvo interés particular en el uso de los diferentes registros de representación que debieron realizar los alumnos, como fueron la tabla, gráfica y expresión algebraica. La primera discusión hace alusión al uso del registro tabular y el respectivo *tratamiento* que era necesario realizar en él, específicamente lo referente a los cálculos de las diferencias y el cociente entre estas. El segundo tiene que ver con los resultados respecto al registro gráfico que se les pidió a los alumnos construir con los datos de la tabla, el registro algebraico, observando aquí que pese a ser el que usan mayormente los maestros, en este estudio fue el menos favorecido, ya que hubo serias dificultades para alcanzarlo.

Resultados acerca del uso de las tablas

Dentro de las indicaciones aparecían un conjunto de operaciones que los alumnos debían realizar con el propósito que desde este registro llegaran a identificar la razón de cambio. Además se eligió una relación de variables bastante sencilla para que ellos pudieran conjeturarla fácilmente. Las indicaciones, el diseño de la hoja de trabajo y el acompañamiento de los estudiantes durante el proceso nos permitió detectar varias dificultades que impidieron que los alumnos llegaran a la constante esperada, (pendiente de la recta) y que están relacionadas con los prerrequisitos de los alumnos, (Ávila, 2017); por ejemplo, dentro de las dificultades se pueden citar que los alumnos: Hacen restas entre variables diferentes, aunque desde la primaria enseñan que "se suman y se restan cosas de la misma especie", eso no fue tenido en cuenta por algunos alumnos en estos procesos. También, la habilidad de medir tuvo varios conflictos, aunque el hilo proporcionado no era elástico, las medidas obtenidas mediante la experimentación, distan del dato teórico. Por ejemplo, como puede verse en la figura 4: las dificultades aparecen a partir del arco medido, correspondiente al ángulo de 1.57 radianes.



Ángulo radianes	Longitud del arco cm
0	0
0.52	2.8
1.05	5.6
1.57	9.1
2.09	11.9

medida ángulo	medida del arco
0	0
0.52	2.808
1.05	5.67
1.57	8.478
2.09	11.286

Figura 4. Comparación de datos experimentales (izquierda) y datos teóricos (derecha)

Estas dificultades contribuyeron en mucho para que los alumnos no pudieran encontrar las constante que se esperaba en la columna 5 de la tabla.

Así mismo podemos enumerar varias dificultades encontradas en los tipos de gráficas realizadas, particularmente lo que respecta a la naturaleza de las variables, aunque las dos variables que intervienen (medida del arco y medida del ángulo) son continuas, el 87% de los alumnos realizó una gráfica discontinua, como se muestran en la figura 5. En las entrevistas pudimos percatarnos que la naturaleza de las variables no es un tema que se contemple en las matemáticas que se enseñen en la secundaria. Este desconocimiento explica el diseño de las gráficas.

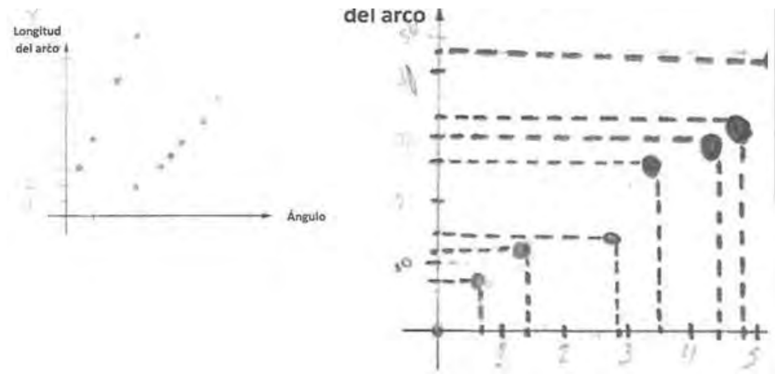


Figura 5. Algunos tipos de representaciones gráficas realizadas por diferentes alumnos

Respecto al proceso de *conversión* Ávila enuncia: "es difícil para los estudiantes transitar del registro tabular al gráfico, debido a dificultades en el dominio de conocimientos relacionados con la ubicación de números en la recta, graficación de puntos en el plano cartesiano, escalas y tipos de gráficos" (Ávila, 2017, p. 41).

Ante la gran cantidad de dificultades que se encontraron para el desarrollo de la actividad con lápiz y papel, optamos por diseñar y proponer la actividad elaborando un archivo electrónico en GeoGebra donde el alumno pueda explorar, visualizar, conjeturar, etc. considerando la postura de Fernando Hitt, quien afirma "La tecnología está presente en nuestra vida diaria, por tanto, es importante reflexionar lo que podríamos realizar en el aula de matemáticas en apoyo a la enseñanza y al aprendizaje de las mismas en ambientes tecnológicos." (Hitt, 2013, p. 1).

Procedimiento: Con ayuda del software GeoGebra se construyó un archivo electrónico, un dispositivo como el que se presenta en la siguiente figura 1. Para este experimento se requiere que el ángulo esté medido en radianes.

Figura 6. Figura construida en GeoGebra con radio fijo r, arco d y ángulo central α (el ángulo y el arco son variables)

La interacción electrónica permite que cuando se mueve el punto P, debe ir aumentando el valor del arco d, y debe ir cambiando el valor ángulo α. Al considerar la variable ángulo como independiente y la variable arco como variable dependiente (eje x, e y respectivamente) y graficar en el plano cartesiano se observa algo similar a lo que se muestra en la figura 2.

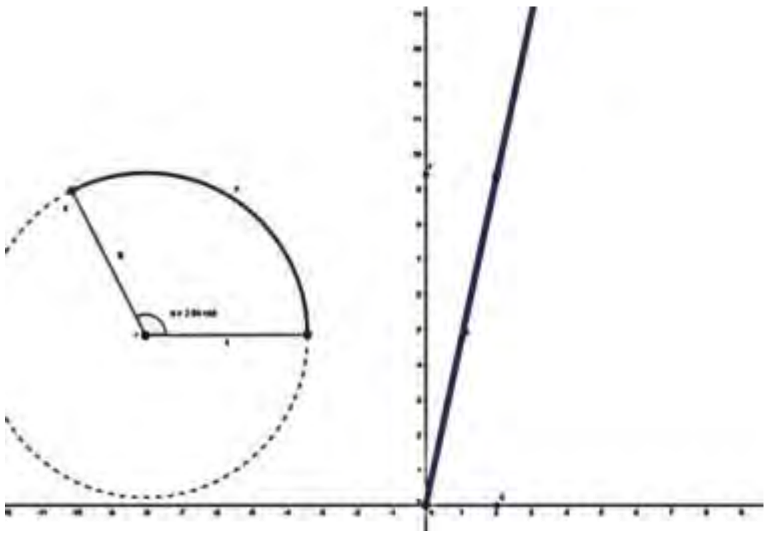


Figura 7. Relación ángulo y arco, fotografía del archivo construido

Al poner dos puntos sobre el lugar geométrico y trazar la recta, el software de forma inmediata proporciona la ecuación que le corresponde a la recta. Esta ecuación puede escribirse de la forma $y = mx$, siendo m la constante de proporcionalidad, que para las variables relacionadas corresponde al radio (fijo) de la circunferencia dado.

De manera simultánea se pueden hacer los cálculos de la razón de cambio de las variables que intervienen, en diferentes momentos del experimento, para ello se usa la hoja de cálculo disponible en el software como aparece en la figura 2,

	A	B	C	D	E	F
1	α	arco	diferenci...	diferenci...	razon ar...	
2	0.168 rad	0.873	0.021 rad	0.097	4.62	
3	0.189 rad	0.969	0.021 rad	0.097	4.62	
4	0.21 rad	1.066	0.021 rad	0.097	4.62	
5	0.231 rad	1.163	0.021 rad	0.097	4.62	
6	0.252 rad	1.26	0.021 rad	0.097	4.62	
7	0.273 rad	1.357	0.021 rad	0.097	4.62	
8	0.294 rad	1.453	0.021 rad	0.097	4.62	
9	0.315 rad	1.55	0.021 rad	0.097	4.62	
10	0.335 rad	1.647	0.021 rad	0.097	4.62	
11	0.356 rad	1.744	0.021 rad	0.097	4.62	
12	0.377 rad	1.84	0.021 rad	0.097	4.62	
13	0.398 rad	1.937	0.021 rad	0.097	4.62	
14	0.419 rad	2.034	0.021 rad	0.097	4.62	
15	0.44 rad	2.131	0.021 rad	0.097	4.62	
16	0.461 rad	2.227				
17						

Figura 8. Fotografía de la hoja electrónica, con las variables arco y ángulo en radianes, para un radio fijo de 4.62 cm. extraída del archivo de GeoGebra

Los elementos arriba mencionados (figura, gráfica, ecuación y tabla), se pueden visualizar en el mismo archivo; el dinamismo del software permite darse cuenta de los cambios de las variables, de manera simultánea, además la exactitud de los cálculos realizados con GeoGebra y permitió encontrar la constante buscada como se observa en la columna E, de la figura 8.

Conclusiones

Consideramos que aunque en el aula no se debe omitir la actividad con lápiz y papel, cada maestro debería permitir además que el alumno interactúe con un archivo como este, en donde se puede visualizar el mismo contenido matemático desde diferentes registros de representación, que hará al estudiante más consciente respecto a idea de continuidad de variables, de la relación de proporcionalidad y desde luego la razón de cambio, con variables medibles que difieren de la x e y tradicionalmente usadas en el desarrollo de estos temas.

El dinamismo del software permite al estudiante no solo tener un modelo para una circunferencia particular como el mostrado como ejemplo, sino varios ejemplos con solo cambiar el radio.

Recomendamos incluir en los programas de estudio de secundaria la clasificación de las variables en continuas y discretas, el estudio muestra evidencias de la ausencia de este contenido matemático, que es fundamental para aterrizar las matemáticas a un contexto.

Referencias bibliográficas

Ávila, A. (2017). Conflictos para abordar el concepto de razón de cambio a través de distintos registros de representación con alumnos de secundaria. Tesis de maestría no publicada. Universidad autónoma de Coahuila.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción Miriam Vega Restrepo. Univalle. Colombia: Artes gráficas.

GeoGebra. Versión 5.0.268.0-3D. http://www.geogebra.org

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. En *Educación Matemática* vol. 10, no. 2 recuperado el 22 de marzo de 2015. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol10/2/03Hitt.pdf

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología en *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* 10, 213-224.

Hitt. F. (2013). Qué tecnología usar en el aula de matemáticas y porque? *Revista Electrónica AMIUTEN*. 1,1 1-18

Llamas, I., Carrillo de Albornoz, A., (2010). GeoGebra. *Mucho más que Geometría dinámica*. Andalucía: Ra-Ma.

Londoño, N. Narro, P. Vera, A. (2014). Indagando sobre el límite de funciones desde diferentes registros de representación. Revista: *El cálculo y su enseñanza*, vol. 7, Departamento de matemática educativa México: CINVESTAV

Rico, L. (2009). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. PNA, 4(1), 1-14.

SEP. (2011). *Programas de Estudio 2011, Guía para el maestro educación básica secundaria matemática*s. México: SEP.

The National Council of Teacher of Mathematics. NCTM. (2000). *Principios y estándares curriculares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

LA CALCULADORA TI-NSPIRE CX CAS COMO MEDIO PARA ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE QUE INVOLUCRAN LA DIFERENCIA MATEMÁTICA

María del Rosario Gallardo Reyes, Graciela Eréndira Núñez Palenius

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

chayogallardo@terra.com.mx, erepalenius@hotmail.com

Para citar este artículo:

Gallardo, M., y Núñez, G. (2017). La calculadora TI-Nspire CX CAS como medio para actividades que involucran la diferencia matemática. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C. Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

LA CALCULADORA TI-NSPIRE CX CAS COMO MEDIO PARA ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE QUE INVOLUCRAN LA DIFERENCIA MATEMÁTICA

María del Rosario Gallardo Reyes, Graciela Eréndira Núñez Palenius

chayogallardo@terra.com.mx, erepalenius@hotmail.com

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Palabras clave: Aprendizaje colaborativo, mediación, TIC.

Resumen

La enseñanza tradicional del cálculo diferencial pone énfasis en la parte operacional. Es necesario implementar métodos para lograr que el estudiante tenga un mejor acercamiento a lo conceptual. Se presentan los resultados obtenidos de una investigación, donde se evidencia cómo los estudiantes aprenden el concepto de diferencias al trabajar con actividades de aprendizaje apoyados de la calculadora simbólica TI-Nspire CX CAS, aprovechando su poderosa combinación de computación simbólica y visualización gráfica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es así que en esta investigación se hizo presente el uso de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación), las cuales fortalecen un ambiente didáctico e influyen en el aprendizaje de los estudiantes. Se inicia con una etapa exploratoria denominada experimentación piloto, seguida de una experimentación formal; ambas experimentaciones se llevaron a cabo con alumnos de primer grado de la Facultad de Ingeniería Química. Comienzan con una actividad diseñada para el uso de la calculadora que requiere la interacción entre el alumno y las herramientas dentro de CAS, siguiendo con actividades que fueron elaboradas para facilitar el desarrollo de razonamientos que lleven al estudiante a lograr el aprendizaje de los conceptos involucrados. Se trabajó en grupos integrados por tres personas, durante el desarrollo de las actividades los estudiantes tuvieron algunas dificultades que se convirtieron en retos, dando pauta a la posibilidad de que construyeran sus conocimientos en un ambiente de intercambio de ideas, puntos de vista y convencimiento, brindando así la oportunidad de que se dé un aprendizaje significativo.

Key words: Collaborative learning, mediation, ICT

Abstract

The traditional teaching of differential calculus emphasis is placed on the operational part. Then it is necessary to implement methods to get the student to have a better approach to the conceptual. This work presents the results of an investigation showing how students learn the concept of differences by working with learning activities supported by the symbolic calculator Ti-Nspire CX CAS, taking advantage of its powerful combination of symbolic computation and graphical visualization in teaching and learning mathematics. In this research, the use of Information and Communication Technologies (ICTs) was made present, these tools strengthen a didactic environment and influence student learning. The study begins with an exploratory stage called pilot experimentation, followed by a formal experimentation; both experiments were carried out with first grade students of the Faculty of Chemical Engineering. They begin with an activity designed for the use of the calculator that requires de interaction between the student and the tools within CAS, the subsequent activities are designed to facilitate the development of reasoning that lead the student to achieve the learning of the concepts involved. The work was made in groups of three people, during the development of the activities the students had some difficulties that became challenges, giving guidance to the possibility of building their knowledge in an environment of exchange of ideas, points of view and convincing, thus providing the opportunity for significative learning.

Introducción

Las matemáticas sin contexto son abstractas y por ende, necesitan una completa atención y dedicación para poder apropiarse de sus conceptos, por este motivo la enseñanza de las matemáticas parte del uso de material concreto permitiendo que el mismo estudiante experimente el concepto desde la estimulación de sus sentidos, logrando llegar a interiorizar los conceptos que se quieren enseñar a partir de la manipulación de los objetos en su entorno. Los niños necesitan aprender a través de experiencias concretas, en concordancia con su estadio de desarrollo cognitivo (Piaget, 1958), esto se refiere al material en el que participa el sentido del tacto así como el visual.

Es así, que interesados por el conocimiento que se deriva de la tecnología, observamos que las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) tienen un impacto muy grande, pues en ocasiones sirven para comprobar resultados, para reforzar conceptos o para que el estudiante construya autónomamente su propio conocimiento. Su integración dentro del currículo sirve como puente para la apropiación de conceptos matemáticos.

El uso de la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, permite crear instrumentos atractivos con alto grado de interactividad que facilitan la exploración, el descubrimiento y la investigación de conceptos y relaciones. Es por ello, que se considera altamente apropiado la integración de sistemas de álgebra computacional (CAS), reconocidos por su combinación poderosa de computación simbólica y visualización gráfica en la enseñanza de matemáticas, ya que desde su introducción, CAS se ha visto como una herramienta altamente valiosa para hacer matemáticas y potencialmente viable para la enseñanza y aprendizaje de las mismas.

Objetivos

Analizar la influencia que tiene la aplicación de actividades de aprendizaje estructuradas didácticamente y mediadas por la calculadora, para que los estudiantes aprendan de manera significativa el concepto de diferencias matemáticas, además de formular y aplicar los conceptos de incrementos “Δx” y “Δy”.

Referente teórico

Es así, que uno de los objetivos de este trabajo, consiste precisamente en probar que es posible a través del uso de la calculadora simbólica Ti-Nspire CX CAS y de las representaciones gráficas generadas por ella, iniciar la comprensión conceptual de los objetos matemáticos involucrados en las actividades, interactuando con los diferentes tipos de representaciones.

Desde una perspectiva teórica, donde la tecnología no queda excluida pero tampoco es central, Duval (1995) señala que:

> “. . . estamos entonces en presencia de lo que se podría llamar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos”

Duval (1995) establece que cada representación es parcial con respecto a lo que representa, debemos considerar como absolutamente necesario la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para la construcción del concepto, no bastando con trabajar las actividades dentro de un sólo sistema de representación, sino también realizar las tareas de conversión de una representación a otra.

Entonces, de acuerdo con la teoría sobre la importancia del uso de diferentes representaciones en la enseñanza de las matemáticas, lo que debemos hacer es introducir los conceptos matemáticos a través de actividades que propicien el trabajo con diferentes representaciones. Cuando el estudiante manipula la calculadora Ti-Nspire CX CAS**,** éste realizará una representación gráfica; la comprensión de las relaciones existentes entre la representación mental (al manipular la calculadora) y la representación gráfica (externa) como resultado de esta manipulación, juega un papel cognitivo.

Como ya se ha mencionado, se considera que la tecnología juega un papel fundamental en la configuración del proceso de aprendizaje individual y, por supuesto, en la manera en que se genera el conocimiento colectivo. Aprender utilizando métodos colaborativos nos parece un aspecto muy importante y necesario para el desarrollo de las competencias requeridas en la sociedad del conocimiento (Mercer, 2001).

La teoría constructivista se enfoca en la construcción del conocimiento a través de actividades basadas en experiencias ricas en contexto. El constructivismo ofrece un nuevo paradigma para esta nueva era de información motivado por las nuevas tecnologías que han surgido en los últimos años. Con la llegada de estas tecnologías, los estudiantes no sólo tienen a su alcance el acceso a un mundo de información ilimitada de manera instantánea, sino que también se les ofrece la posibilidad de controlar ellos mismos la dirección de su propio aprendizaje. Cambiar el esquema tradicional del aula, donde el papel y el lápiz tienen el protagonismo principal, y establecer un nuevo estilo en el que se encuentren presentes las mismas herramientas pero añadiéndoles las aplicaciones de las nuevas tecnologías, aporta una nueva manera de aprender, que crea en los estudiantes una experiencia única para la construcción de su conocimiento (Calderón, 2016).

La investigación en educación matemática con el uso de tecnologías digitales ha mostrado que, por la vía de dichas tecnologías, los estudiantes pueden tener un acceso temprano a trabajar con ideas matemáticas complejas y poderosas. En pocas palabras, se ha podido constatar que el impacto de aprender en ciertos entornos tecnológicos se da a nivel no sólo cognitivo sino también epistemológico (Balacheff & Kaput), 1996Sin embargo, a partir de muchas de las investigaciones realizadas en este campo se ha llegado a la conclusión de que el diseño de la actividad o tarea que se realice con el uso de tecnología es determinante para que dicho uso tenga un efecto significativo en el aprendizaje (Healy, 1994).

A partir de lo citado anteriormente se debe hablar de la Génesis instrumental que es el proceso de la construcción de esquemas, consiste en técnicas y concepciones que le dan significado a las mismas. En otras palabras, estudia cómo un artefacto se convierte en un instrumento, de manera que se integra al humano para construir conocimiento matemático. La teoría de instrumentación está en línea con las opiniones sobre el rol de símbolos en la educación matemática (Gravemeijer, 2000).

Metodología

Se hizo una extensa búsqueda de información bibliográfica basada en la literatura utilizada en el diseño original de las actividades (Ibarra, 2015),el cual involucra los temas de Cálculo diferencial de acuerdo con el programa del primer módulo de la carrera de Ingeniería Química. Además de artículos como investigadores como Duval (1993) que aborda la Teoría de las Representaciones semióticas; Panitz (1997) que propone una definición para los aprendizajes cooperativo y colaborativo; Mercer (2001) que habla del aprendizaje colaborativo; Vygotsky (1986) quien propone que los procesos mentales superiores pueden ser considerados como funciones de actividades mediadas, y sugiere tres clases principales mediadores: herramientas físicas, herramientas psicológicas y otros humanos; Ibarra (2015) que propone el diseño original de las actividades; Artigue (2002) que enfoca al concepto de instrumento y menciona el esquema T-T-T (Tarea-Técnica-Tecnología) y Heid (1988) que demostró que CAS puede facilitar el desarrollo de conceptos matemáticos

En la experimentación se aplicó la actividad de aprendizaje para la conceptualización de Diferencias. Misma que fue diseñada bajo el esquema Tarea-Técnica-Tecnología de Artigue (2002) y está estructurada en tres partes: por una sección de lápiz y papel, otra utilizando el sistema CAS y la tercera es una parte de simbolización (Ibarra 2015).

Se trabajó con 27 alumnos del primer año de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Se organizaron nueve equipos de tres personas cada uno.

En general esta actividad~~,~~ contiene los siguientes temas:

- Significado de una diferencia matemática.
- Secuencia de números para plantear el operador Δ así como su significado.
- Manejo de subíndices.
- Introducción básica a la calculadora TI-Nspire CX CAS.

Basándose en la aplicación de las actividades que realizó Ibarra (2015), se diseñó un plan de trabajo que permitiera planificar de manera general las experimentaciones que se llevarían a cabo para esta investigación: como considerar el número de estudiantes que participarían, la formación de los equipos con integrantes de diferentes niveles académicos, de qué manera se distribuirían los equipos en el salón de clases, el tiempo necesario para resolver cada actividad, el lugar en dónde se colocaría la cámara fija, el desplazamiento de la cámara móvil, el papel que tomaría cada estudiante de acuerdo con el rol establecido en el diseño de las actividades de aprendizaje, el empleo de lapiceros de diferentes colores para no borrar razonamientos erróneos, el diseño de una actividad para el uso y manejo de la calculadora Ti-Nspire CX CAS en donde se explicaran los principales comandos a utilizar y por último la intervención del investigador en puntos específicos durante el desarrollo de la experimentación con alumnos de primer año de la Facultad de Ingeniería Química.

Experimentación

La parte experimental de esta investigación se realizo en dos etapas, la primera fue una "Experimentación Piloto" y la segunda una "Experimentación Formal", la primera, se hizo con el fin de:

1. Observar la estructura didáctica de las actividades.
2. Revisar los conceptos involucrados en la actividad, que se les dificultaron a los estudiantes al contestarla.
3. Observar razonamientos erróneos de los alumnos, para que el investigador intervenga en la experimentación formal y por medio de cuestionamientos el estudiante pueda rectificar su razonamiento.
4. De acuerdo con lo observado en las evidencias de la experimentación piloto, hacer las modificaciones necesarias para aplicar la experimentación formal.

De acuerdo con Ibarra (2015), cada integrante del equipo debía cumplir un rol específico que cambiaba de una actividad a otra: un estudiante trabajaba con la calculadora, otro como coordinador dentro del trabajo en equipo y el tercero haciendo las anotaciones en la hoja de trabajo; esto con la finalidad de que cada integrante del equipo tuviera la misma oportunidad de aprendizaje. Se entregó por equipo la actividad respectiva, una calculadora Ti-Nspire CX CAS, hojas en blanco para anotaciones extras y tres lapiceros de diferentes colores (negro, azul y rojo), con la finalidad de que los alumnos no borraran ninguna respuesta en caso de considerarla errónea y para tener evidencias acerca del razonamiento.

Resultados

Análisis de datos

En este punto se analizan los datos obtenidos en la experimentación formal, los cuales se obtienen con base en la revisión de las actividades resueltas y a las videograbaciones generadas durante el desarrollo de la aplicación de las mismas.

Actividad 1. Diferencias

En esta actividad se tienen los siguientes objetivos didácticos, los cuales permitirán empezar a construir el concepto inicial de diferencias:

1. Entender el significado de una diferencia matemática.
2. Formular y aplicar el concepto de los incrementos Δi y Δu.

Para el primer objetivo, se pretende que el estudiante comprenda el significado de una diferencia matemática para lo cual al inicio de la actividad, Ibarra (2015) hace una breve introducción de ésta y cómo se utiliza:

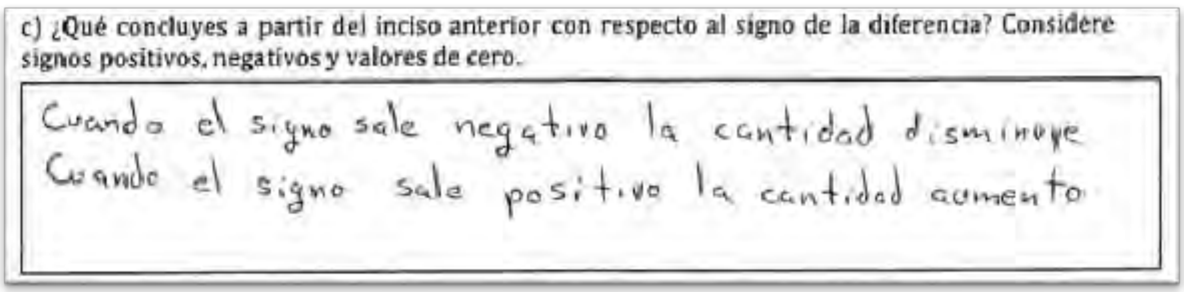
> "La diferencia matemática es el resultado de restar, en donde se resta un sustraendo de un minuendo. Por ejemplo, la diferencia entre 3 (sustraendo) valor final (minuendo). *Es decir, la diferencia es igual al valor final menos el valor inicial*."

Por ejemplo dentro del inciso "a)" se pregunta:

> "Un automóvil contiene un tanque de 90 litros. Se llena al comienzo de la semana, al final de ella se observa que el tanque contiene 32.3 litros. ¿Cuál es la diferencia de litros en el tanque a lo largo de la semana?"

Las situaciones que se presentan en el inciso "a)" son casos de la vida cotidiana en los cuales se debe encontrar la diferencia. La idea general, es ver cómo son las diferencias en situaciones donde hay aumento o disminución de una cantidad.

Para este cuestionamiento los alumnos deben darse cuenta que hay una disminución en la cantidad inicial de gasolina, ya que cuando hacen la diferencia se obtiene un resultado menor que el que el que tenían al principio, porque hizo una diferencia de dos cantidades positivas. Al hacer el análisis de todas las situaciones planteadas dentro del inciso "a)" se espera que los estudiantes asocien cada signo con su diferencia y determinen si es un consumo, un aumento o es constante. Posteriormente deben dar respuesta al inciso "c)":


c) ¿Qué concluyes a partir del inciso anterior con respecto al signo de la diferencia? Considere signos positivos, negativos y valores de cero.

Cuando el signo sale negativo la cantidad disminuye
Cuando el signo sale positivo la cantidad aumento

Figura 1. Evidencia del significado de una diferencia matemática

Al responder correctamente esta pregunta, los alumnos estarían cumpliendo con el primer objetivo de la actividad. Como se puede observar en el análisis de la figura I que hacen los estudiantes, con lo cual se demuestra que comprenden el significado de una diferencia matemática.

El siguiente diálogo muestra la discusión que hacen los estudiantes para llegar al significado del signo negativo en una diferencia:

Integrante 1: (*Lee la pregunta del inciso "b*)" Observe las diferencias de los tres casos del inciso anterior, ¿existe una diferencia con signo negativo? En caso afirmativo, ¿qué representa con respecto a la cantidad (aumenta o disminuye)?

Integrante 2: Sí, disminuye porque todos los demás aumentan (*señalando los dos primeros casos*), pero el que disminuye es éste (*señalando el tercer caso*).

Integrante 1: (*Lee la pregunta del inciso*) "¿Qué concluyes a partir del inciso anterior con respecto al signo de la diferencia? Considere signos positivos, negativos y valores de cero.

Integrante 2: Que cuando te sale negativo es la diferencia que hay de una cantidad a otra, pero porque disminuye, o sea cuando tú por ejemplo tienes esto (*señalando la cantidad final en el primer caso*) y le restas esto (*cantidad inicial en el primer caso*) te está dando la diferencia, pero porque aumentó, pero aquí (*haciendo referencia al tercer caso*) te está dando la diferencia, pero de lo que disminuyó por eso te sale negativo.

Integrante 1: ¿Entonces cómo le pongo? (*pregunta a sus compañeros*). Concluimos del inciso anterior…

Integrante 2: Que el signo cuando te sale negativo significa que la cantidad disminuye, y al salirte positivo es que la cantidad aumentó.

Observaciones

Analizando el diálogo anterior, se observa que los estudiantes hacen un razonamiento correcto sobre el significado del signo negativo en una diferencia. Para llegar a esta conclusión hacen un análisis de todos los casos propuestos en el inciso I-a, observando que los dos primeros representan un aumento por ser la diferencia positiva, ya que la cantidad final es mayor que la inicial. Al llegar al tercer caso observan que la diferencia es negativa, hacen una comparación con los dos anteriores y concluyen que ésta última representa un consumo, al percatarse que la cantidad final es menor que la inicial.

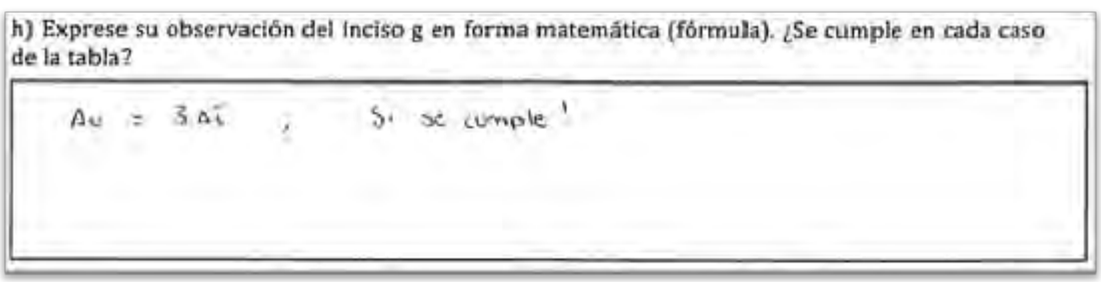
Una vez entendido el significado de una diferencia, el siguiente objetivo de la actividad es que los alumnos identifiquen el concepto de delta (Δ) y su significado. Dentro de la actividad, Ibarra (2015) hace una breve introducción sobre este concepto de la siguiente manera:

> "En matemáticas el operador delta (Δ) representa un cambio. Siendo un operador matemático, puede aplicarse a cualquier variable. Por ejemplo, Δx representa un cambio en x mientras que ΔT representa un cambio en T (muchas veces dicha variable representa una temperatura)."

Para cumplir con el segundo objetivo es necesario que los alumnos contesten correctamente el inciso "f)", donde se les pide encontrar el valor de Δi y Δu para un conjunto de datos. Posteriormente darán respuesta al inciso "g)" y deberán encontrar una relación entre estos dos incisos. Esto es importante para que los estudiantes puedan formular una expresión algebraica y así dar respuesta al inciso "h)", el cual plantea lo siguiente:

> "Exprese su observación del inciso "g)" en forma matemática (fórmula). ¿Se cumple en cada caso de la tabla?"

Como respuesta al inciso "h)" los alumnos llegan a lo siguiente:



h) Exprese su observación del inciso g en forma matemática (fórmula). ¿Se cumple en cada caso de la tabla?

Δu = 3Δi ; Si se cumple !

Figura 2. Evidencia de aplicación del operador Δi y Δu

Para llegar a esta conclusión, los alumnos hacen el siguiente diálogo:

Integrante 1: (*Lee la pregunta del inciso "g)"* Analice la tabla del inciso "f)", ¿hay una relación con respecto a Δi y Δu? ¿Qué puede concluir?

Integrante 2: Que todos son múltiplos de 3, porque es uno por tres, tres; dos por tres, seis; tres por tres, nueve; es lo único que concluyo.

Integrante 3: Pues sí, ¡todos son múltiplos de tres!

Integrante 1: ¡No!, es que sería más bien que los valores de Δu son múltiplos de Δi porque Δi lo multiplicas por tres.

Investigador: ¿Cómo se vería eso que acabas de decir, en una expresión matemática?

Integrante 1: ¿O sea cómo?

Investigador: O sea, tu ahí dices que los valores de Δu son múltiplos de Δi pero múltiplos ¿cómo?, es decir, ¿Por qué los estas multiplicando para que sean igual?

Integrante 1: ¡Ah!, le entendemos que porque son múltiplos de tres…

Investigador: Si, pero ¿cómo lo expresarías en una fórmula matemática? ¿Δu es igual a qué? o ¿Δi a qué es igual?

Integrante 1: ¡Ah!, Δu es igual a tres por Δi.

Observaciones

Como se muestra en el diálogo anterior los estudiantes identifican que hay una correspondencia entre los valores de Δu y Δi, ellos señalan que Δu va a estar determinado por los valores que tome Δi multiplicado por tres; es importante mencionar que identificaron la relación pero no la pudieron expresar como una función matemática, por lo que fue necesaria la intervención del investigador y por medio de preguntas orientadas para que ellos pudieran identificar la necesidad de utilizar dicho operador dentro de una diferencia matemática.

Con estas evidencias se demuestra que se cumplen los objetivos planteados para esta actividad en donde los alumnos usaron la calculadora TI-Nspire CX CAS en algunos incisos y así comprenden el significado de una diferencia matemática, además formulan y aplican los conceptos de Δx y Δy.

Conclusiones

Observamos que innumerables estudios han demostrado que técnicas de enseñanza pasivas no son adecuadas para un aprendizaje significativo. En este trabajo, la mediación se lleva a cabo con la calculadora TI-Nspire CX CAS, ya que es el instrumento mediador entre el alumno y los objetos matemáticos contenidos en las actividades y es así que a través de las diferentes representaciones semióticas generadas en las discusiones individuales y grupales, el alumno logra construir gradualmente el concepto de diferencia.

El uso de las TIC en los diferentes niveles y sistemas educativos tienen un impacto significativo en el desarrollo del aprendizaje, ya que han mostrado que pueden ser un gran apoyo para los docentes al verse como una herramienta que permite a los estudiantes tener más elementos (visuales y auditivos) para enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las TIC pueden apoyar las investigaciones sobre el aprendizaje de los alumnos en varias áreas de las matemáticas; pues se espera que cuando dispongan de ellas logren concentrarse en tomar decisiones, razonar y resolver problemas.

El uso de la calculadora TI-Nspire CX CAS es parte fundamental de éste proyecto, además de las actividades de aprendizaje, ya que gracias a su estructura didáctica los estudiantes trabajan con problemas que hacen que ellos definan el concepto de diferencia. Asimismo, se fortaleció el trabajo en equipo por medio del aprendizaje colaborativo y cooperativo.

Partiendo de las respuestas dadas por los alumnos a los diferentes incisos y desde el punto de vista de la aprehensión del objeto matemático, los alumnos interactúan con diferentes tipos de representación, por lo que podemos concluir que han alcanzado un buen nivel de abstracción en el tema abordado logrando así un aprendizaje integral del concepto.

Debemos ser conscientes de que la preparación que los estudiantes poseen es insuficiente en este tipo de tareas y que la habilidad para interactuar entre diferentes registros de representación no surge como una acción espontánea del sujeto, se requiere de aprendizaje; el cual se logra enfrentando a los alumnos a situaciones problemáticas que necesiten del tránsito entre las distintas representaciones semióticas (Duval, 2006), que requiere la noción matemática que es objeto del aprendizaje.

Es importante que sigamos analizando y tratando de mejorar no sólo una labor docente en pos del buen desempeño de los estudiantes, sino también cuidar que el alumno pueda construir conceptos matemáticos.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(3), 275-291.

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En A. Bishop; K. Clement; C. Keitel; J. Kilpatrick; C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Press. pp. 469-501.

Calderón, P. (2016). Conceptualización del límite a través de la aplicación de actividades con la calculadora TI-Nsipire CX CAS. (Licenciatura, no publicada). UMSNH. Morelia, Mich

Duval, R. (1993). Registres de Représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). Sémiosis et Pensée humaine. Berne: Peter Lang.

Gravemeijer, K. P. E., Cobb, P., Bowers, J., y Whitenack, J. (2000). Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. En P. Cobb, E. Yackel, K. McClain (eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*, p. 225-273. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Healy, A.F. (1994). Letter detection: A window to unitization and other cognitive processes. *Psychonomic Bulletin & Review*, 1, 333-344.

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 3-25.

Ibarra, G. (2015). Conceptualización del cálculo diferencial a través de actividades con la calculadora TI-Nsipire CX CAS. (Licenciatura, no publicada). UMSNH. Morelia, Mich.

Mercer, N. (2001) Spoken Language in the classroom. In R. Mesthrie (ed.) The Concise Encyclopedia of Sociolinguistics.(Amsterdam: Pergamon).

Panitz, T. (1997). Collaborative versus Cooperative Learning: Comparing the Two Defintions Helps Understand the Nature on Interactive Learning. *Cooperative Learning and College Teaching*, 8(2).

Piaget, J. (1958). The growth of logical thinking from childhood to adolescence. AMC, 10, 12.

Vygotsky, L. S. (1986). Thought and language. Cambridge, MA: MIT-Press.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

DIFICULTADES DE LA LÓGICA DE USO EN LA CONSTRUCCIÓN DE NÚMERO (MODELO V. NEUMANN) EN NIÑOS DE 6 A 8 AÑOS

María Leticia Rodríguez González, Eugenio Filloy Yagüe
Cinvestav - México

leticia.rodriguez@cinvestav.mx , SMMEef@aol.com

Para citar este artículo:

Rodríguez, M., y Filloy, E. (2017). Dificultades de la lógica de uso en la construcción de número (Modelo de V. Neumann) en niños de 6 a 8 años. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

DIFICULTADES DE LA LÓGICA DE USO EN LA CONSTRUCCIÓN DE NÚMERO (MODELO V. NEUMANN) EN NIÑOS DE 6 A 8 AÑOS

María Leticia Rodríguez González, Eugenio Filloy Yagüe

leticia.rodriguez@cinvestav.mx , *SMMEef@aol.com*

Cinvestav - México

Palabras clave: Lógica de uso, construcción de número, niños de 6 a 8 años.

Resumen

Este proyecto de investigación está en sus primeros acercamientos, tiene el propósito de comprender las dificultades de la Lógica de uso de los niños (6 a 8 años de edad) en la construcción del Número Natural con el Modelo de John von Neumann. Con el Marco Teórico de Los *Modelos Teóricos Locales* y sus cuatro componentes se estructura de la siguiente manera: *Modelo de Competencia Formal*.- Partir de la Formalización matemática de los números naturales de von Neumann; *Modelo de Enseñanza.*- Proponer un modelo que un Modelo Matemático Concreto a partir de un Modelo Formal; *Modelos de Cognición y Comunicación*.- Comprender fenomenológicamente el proceso de construcción de número en los niños a partir de la lógica de uso, con los aportes de las psicologías cognitivas para identificar los procesos de apropiación del Sistema Matemático de Signos y el sentido que dan a las actividades en el modelo de enseñanza.

Key words: Logic of use, building number, children 6 to 8 years old, von Neumann

Abstract

This research project is in its early stages, aiming to understand the difficulties of the Logical use of children (6 to 8 years of age) in the construction of the Natural Number with the Model of John von Neumann. With the Theoretical Framework of Local Theory Models and their four components is structured as follows: *Formal Competence Model*. - From the mathematical Formalization of the natural numbers of von Neumann; *Model of Teaching*.- Propose a model that a Concrete Mathematical Model from a Formal Model; *Models of Cognition and Communication*.- Understand phenomenologically the process of number construction in children based on the logic of use competence, with the contributions of cognitive psychologies to identify the processes of appropriation of the Mathematical Sign System and the meaning give to the activities in the teaching model.

Introducción

En el ámbito escolar el desarrollo del pensamiento matemático sigue siendo una preocupación; a pesar de los aportes que las psicologías cognitivas han proporcionado para construir diversas plataformas teóricas de investigación en Matemática Educativa y que han sido el sustento teórico de las estructuras curriculares, diseños de situaciones didácticos y libros de texto; hay una deficiente formalización matemática en los estudiantes.

Así lo muestran las evaluaciones internas Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) y externas *Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos* (PISA) por sus siglas en inglés. Con este marco referencial, en este anteproyecto se pretenden comprender las dificultades de la lógica de uso en la construcción del número en niños de 1º y 2º ciclo de Educación Primaria.

Para que este objeto de estudio pudiera emerger, se partió del trabajo de investigación de Maravilla (2011), quien hace un análisis de la enseñanza del concepto de número de niños de Educación Preescolar con el apoyo del modelo de John von Neumann y con base en los Modelos Teóricos Locales (Filloy, 1999), llega la conclusión de que las tendencias cognitivas desde la fenomenología didáctica de la enseñanza del número natural, están centradas en el concepto de cardinalidad, descuidando el de ordinalidad. Esta aportación nos sirve de referencia para comprender e identificar el proceso de transición que siguen los niños de educación primaria en el 1º y 2º ciclo.

Por lo anterior, se *Pregunta:* ¿Qué dificultades de la Lógica de uso en la construcción del número tienen los niños de los dos primeros ciclos escolares?, ¿Cómo comprender esas dificultades a través de las respuestas y actuaciones de los niños? ¿Qué elementos considerar para el diseño de un modelo de Enseñanza que permita trasladar el Modelo de la Matemática Formal a un Modelo Matemático Concreto, atendiendo la constructibilidad de los números a partir del orden?

Se proponen como *Objetivos:* 1) Comprender las dificultades de la Lógica de competencia de uso en la construcción del concepto de número en los niños de educación primaria de 1º y 2º ciclo y; 2) Diseñar un Modelo de Enseñanza, que parte de la Matemática Formal a un Modelo Matemático Concreto, que permita a los niños representar, visualizar y manipular las acciones relacionadas con los números.

Supuesto Hipotético

Si comprendemos las dificultades que tienen los niños con la lógica de uso del SMS para la construcción de los números naturales, se podrá proponer un Modelo de Enseñanza que permita trasladar el Modelo Formal a un Modelo Concreto.

Marco Teórico – Metodológico

Los Modelos Teóricos Locales (MTL) serán el soporte teórico, dado que este estudio se centra en el fenómeno específico de las dificultades de la lógica de uso que tienen los niños de 6 a 8 años en la construcción de número, con la finalidad de proponer un diseño experimental que arroje información para comprenderlas a partir de un Modelo de Enseñanza que se les proponga.

Con las cuatro componentes de los MTL se estructura de la siguiente forma: El *Modelo de Competencia Formal.* - El Modelo Formal de von Neumann aporta una lógica más precisa de construcción del número, con el principio del Orden y del cero (0) como primer número que representa al vacío. Los procedimientos de iteración y recursividad se van generando la construcción de los primeros 10 números naturales.

Modelo para los procesos cognitivos

Se parte de las teorías psicológicas cognitivas epistemológicas y soviéticas para analizar la relación Lógica y Psicología; apoyándose en sus categorías de análisis: de Piaget & Inhelder (1984) invariantes funcionales, la construcción de las operaciones lógicas: reversibilidad, reciprocidad y transitividad, la conservación de la materia, peso y volumen, la transición de la Acción a la Operación; de las psicologías soviéticas representadas por Vigotsky y sus continuadores Galperín () y Talizina (2000) y su Teoría de las Acciones Mentales, se considera el componente del proceso de construcción de la significación. Con estos elementos se pretende comprender la fenomenología del proceso de construcción de número en el niño y sus dificultades con la lógica de uso de SMS.

Modelo de Comunicación

Analizar y comprender las complejidades que se entretejen en los procesos de comunicación con contenido matemático que se desarrollan en las aulas, así como las dificultades para su generalización. Para Filloy, Rojano & Puig (2008) no se trata de Sistemas de Signos Matemáticos; argumenta que en Matemática Educativa lo matemático es el sistema, no los signos; ya que el sistema es el que da significado a los signos. Afirma que los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS), se convierten en una herramienta de análisis de los textos que producen los niños a partir de una experiencia escolar, cuando tienen la posibilidad de producir sentido.

Los procesos de significación que van construyendo los alumnos tienen una relación directa con lo que se hace en Matemática Educativa: la producción de sentido a través del desarrollo de procesos de comunicación (Rodríguez, 2000).

Modelo de Enseñanza

Diseñar un Modelo de Enseñanza que nos permita trasladar el Modelo Formal a un Modelo Concreto, en un primer momento identificar las dificultades, obstáculos de la lógica de uso de los niños en la construcción del número, a partir de las actividades que se les propone que hagan; en un segundo momento analizar las dificultades, obstáculos, sentidos y significados de los niños en la construcción de número natural.

En esta primera etapa se ha diseñado un Modelo de Enseñanza, con el referente formal matemático, para llevar a cabo el proceso de la observación y análisis de las dificultades que tienen los niños con esa secuencia de actividades. Se han propuesto como primer momento en las escuelas primarias de la Delegación Gustavo A. Madero: "Gral. Gertrudis Armendariz de Hidalgo" y "Profr. Jorge Casahonda Castillo", con los grupos de 1º A y 2º A, respectivamente.

Dificultades de la Lógica de uso en niños en la construcción del número natural

El interés de esta investigación está centrado en comprender las dificultades de la Lógica de uso en la construcción de número en los niños de 6 y 8 años de edad, cómo los propone la enseñanza; con la finalidad de analizar y comprender los procesos teórico – conceptuales que se promueven a través de la enseñanza relacionados con el orden y la cardinalidad. Para ello, es necesario analizar la formalidad matemática de número, por lo que se parte de comprender ¿qué es el número?

Número es un término polisémico, dependiendo de la corriente teórica se define con diferentes axiomas. En la antigüedad se referían al número, "como algo para contar", sin llamarlo número, fue una necesidad de uso y de control que exigían los propios mecanismos de socialización. Con el desarrollo histórico de la humanidad diversos matemáticos han tratado al número en diferentes niveles conceptuales. Mosterín (2000) explica como Peano (1889), Zermelo y Frenkel (1908) y John von Neumann (1923) estudiaron la construcción de número, siendo el último el que se considera para este trabajo.

En el ámbito educativo el concepto de Número no es común construirlo conceptualmente, a pesar de que se relaciona en el actuar diario. Desde el seno familiar y conforme los niños se van integrando a los procesos de socialización, de forma natural se les va introduciendo al mundo de los números, al ordenar los diversos significados, en todo momento se les está mostrando cómo contar, clasificar y seriar. Históricamente, el hombre también tuvo esta necesidad, para ello se apoyó de otro recurso, el cual fue la representación simbólica de los números a través de marcas.

El niño también lo hace, como un proceso de imitación y de reconstrucción histórica. En la tradición escolar, el número se introduce vinculado a la teoría de conjuntos y las relaciones biunívocas, enfatizando en la cardinalidad; la ordinalidad se trabaja con representación de conjuntos, con un número determinado de elementos en forma creciente, relación a secuencias numéricas y realización de operaciones aditivas.

Modelos teórico locales (MTL)

De acuerdo con los MTL este trabajo se ha estructurado a partir de sus cuatro componentes: con la finalidad de comprender y analizar de forma específica y local observar las interacciones y contraposiciones de las dificultades de la lógica de uso a las que se enfrentan los niños de 6 a 8 años, en la construcción de número en la escuela primaria.

Modelo Formal: *La construcción de Número de John von Neumann*

El que los niños cuenten y sean capaces de reconocer series, identificar algunos numerales no significa que los niños estén contando, lo que hacen es reconocer las secuencias orales y algunas regularidades; por ejemplo, son capaces de expresar oralmente la secuencia del 1 al 10; pero se enfrentan a dificultades cuando se encuentran con el 11, 12, 13…16, 17, 18, entre otros.

Número implica una abstracción en la que se involucran propiedades y relaciones. La formalidad matemática de John von Neumann, es otra lógica de construir este proceso, el *orden* es el principio de construcción, se comienza con el cero “0”, como número, como conjunto vacío. Hamilton (1961, pág. 76) afirma:

Definición 1

Zero is the empty set; i.e., $0 = \emptyset$.

Definición 2 (Hamilton, 1961, pág. 76)

$1 = \{0\} \quad = 0 \cup \{0\}$

Siguiendo está lógica de construcción se tiene (Hamilton, 1961, pág. 76):

$0 = \emptyset$

$1 = \{\emptyset\}$

$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

$5 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\}$

Definición 3 (Hamilton, 1961, pág. 77)

El conjunto $x \cup \{x\}$ es el sucesor del conjunto x. Si y es un conjunto y si existe un conjunto x tal que y es el sucesor de x, entonces y es un sucesor. Para cada x, el sucesor de x es x'; por lo tanto 1 = 0', 2 = 1', 3 = 2', etc.

La construcción de los números naturales se debe dar uno a uno; donde el *orden* es la guía; no podemos construir el siguiente, se debe construir nuevamente el anterior, para que puedan conformar el sucesor a partir del antecesor. La recursión está presente.

Partiendo de que un número ordinal es un representante del tipo de orden de un conjunto bien ordenado. La relación de orden entre sus elementos se verifica dado cualquier subconjunto no vacío de sus elementos, éste posee un elemento mínimo. Conjunto finito es aquel que tiene un número finito de elementos; por lo tanto, es numerable.

Mosterín (2000, pág. 187) afirma en:

> …la concepción de von Neumann, cada ordinal es el conjunto de los ordinales precedentes. Esta clase está bien ordenada, por la relación de pertenencia o, si se prefiere por la equivalente relación de ser menor. En efecto, un ordinal α precede a otro β si y solo si $\alpha \epsilon \beta$, (...). Así, 0 es el conjunto vacío, 1 es el conjunto cuyo único elemento es 0, 2 es el conjunto cuyos elementos son 1 y, y así sucesivamente.

Con la *iteración* el proceso se repite una y otra vez, Choate, Devaney y Foster (1999, pág. IX) afirman: "*To iterate means to repeat something over and over again*." Es decir, el procedimiento que se hizo para el primer elemento, se hace para el segundo, para el tercero y así sucesivamente, dicho de otra manera: el paso $n + 1$ se obtiene directamente del paso n.

Con el procedimiento *recursivo* la ejecución inicial se repite exactamente para el caso anterior. Mosterín (2000, págs. 291 - 295) afirma que "una función computable puede definirse también como función recursiva. Toda definición recursiva es computable, y a la inversa, toda función computable es recursiva" (…) una función es recursiva si y solo si es computable…".

Ahora bien,

> "Las funciones recursivas primitivas son funciones numéricas obtenibles a partir de las funciones recursivas primitivas iniciales mediante un número finito de aplicaciones de los procesos de definición por sustitución y de definición por inducción. (…) Llamamos funciones recursivas primitivas iniciales a: 1) La función *ceroaria* constante 0, la función *nonaria* del siguiente $S(x) = x + 1$; 2) A las funciones *n – arias* de identificación del *i – ésimo* miembro de una secuencia de *n números* $I^n_i(x_1 \ldots x_n) = x_i$" (Mosterín, 2000, págs. 292-293).

Modelo de Cognición: *Las psicologías cognitivas y las dificultades de la lógica de uso en niños de 6 a 8 años*

Comprender el papel que juega la Lógica de uso en la construcción de número en el niño, deviene de la lectura que la sustentante hace de Piaget (1953). Este autor afirma que la "Lógica es una axiomática de la razón de la cual la psicología de la inteligencia es la ciencia experimental correspondiente"; para "…formular hipótesis y construir una teoría que sea *compatible* con todos los resultados experimentales y que permita interpretarlos y explicarlos dentro de un marco conceptual adecuado".

Con estas herramientas teórico – metodológicas, Piaget consolida la Epistemología Genética con sus métodos complementarios: *análisis formalizante, análisis psicogenético y método histórico*. Sin embargo, afirma que el razonamiento lógico – matemático no puede ser enseñado, considera que es un producto de las experiencias y va a depender del ambiente favorecedor y la convivencia con los otros, para tener mayores oportunidades de construcción de sus estructuras lógico-matemáticas; en especial la génesis del número.

En la *Representación*, la acción es constitutiva de todo conocimiento, a través de las Invariantes Funcionales (asimilación, acomodación, equilibrio y reversibilidad). La conservación es una capacidad que permite a los sujetos comprender la variación en la cantidad, posición y forma. La conservación de la materia, del peso y del volumen, posibilita establecer las relaciones de *clasificar, seriar y ordenar* los objetos del mundo cotidiano.

Con las relaciones de:

- C*lasificación* los niños pueden establecer características de los objetos para agruparlos usando el concepto de pertenencia.
- S*eriación* establecen relaciones entre varios objetos.
- *Ordenar* pueden hacer comparaciones y aplicar criterios de jerarquía entre ellos.

Para lograr desarrollar estas relaciones los niños van desarrollando la *transitividad, reciprocidad y reversibilidad.*

La conservación de número, espacio, tiempo, velocidad, distancia, masa y volumen serán fundamentales en la transición de la Acción a la Operación; la coordinación de las acciones conforma el proceso de la asimilación y con ello conferir diversos significados a los objetos a través de la Acomodación. En edades tempranas (2 a 6 años aproximadamente) Piaget identifica la importancia de la Función Semiótica como la base para articular a través de la simbolización del juego, la imitación, la imagen mental, el dibujo, la memoria, el lenguaje y la comunicación las acciones que se interrelacionen en el mundo concreto, para construir el conocimiento lógico-matemático, en especial la génesis de Número.

La coordinación de esquemas y su ejercitación, establecen la generalización de las acciones; su integración equilibrada va cimentando las estructuras conceptuales. Sin embargo, durante el proceso de acomodación se generan diversos conflictos cognitivos, los cuales pueden obstaculizar el proceso de equilibración y de Representación. En "Lógica y Psicología" Piaget (1953), sugiere una lógica algebraica para explicar las operaciones del pensamiento (Reversibilidad, Reciprocidad y Transitividad).

Afirma también que, con la *lógica moderna* la relevancia psicológica trajo otras contradicciones: la experiencia no puede ser interpretada haciendo abstracción del aparato lógico conceptual de la interpretación; por lo que recurre a los experimentos realizados con Indelher (cf. Deaño y Delval, 1982, pág. 39), en los que les pide a los niños que comparen e identifiquen si el agua contenida en un tubo de cristal inclinado es horizontal.

Llegó a la conclusión de que no pueden hablar de horizontalidad si no han construido previamente un marco de referencia. Las operaciones lógicas aparecen con la reversibilidad en las acciones de composición y descomposición; con la transitividad aparecerán las operaciones con proposiciones: $A = B, B = C \therefore A = C$.

Ante esta postura, Isaacs (1967) psicólogo inglés, continuador de los trabajos de Piaget, e interesado en la construcción de número en el niño; considera que se puede incorporar en la enseñanza el componente de la lógica en la construcción de número que siguen los niños, la cual ha sido omitida en los programas curriculares oficiales de Educación Básica. Asegura que se puede trabajar con niños de cuatro a seis años como la edad propicia para promover intereses lógicos auténticos en los niños; a pesar de las dificultades que tienen los infantes en la construcción de las relaciones lógicas.

Afirma (Isaacs, 1967) que esta posibilidad permitiría a los niños desarrollar los procesos de pensamiento de manera más temprana y con mayor certeza al concepto numérico. Para él, la relación del pensamiento numérico y del pensamiento lógico, están estrechamente relacionados, que cada uno depende del otro. (Isaacs, 1967, pág. 71) Este autor recupera de Piaget que "…el número la síntesis o función de dos procesos básicos subyacentes a la lógica: la clasificación que lleva a jerarquías cada vez más amplias, (…) y el de la seriación, o distribución del orden".

La relación entre las matemáticas y la lógica conforman el desarrollo intelectual humano. Isaacs, afirma que, en las relaciones lógicas más simples, los niños integran sus ideas aritméticas generales. La relación lógica vinculada con la noción de número es la de *parte y todo*, en sus diferentes variedades.

Con los aportes de las *psicologías soviéticas*, se analiza la relación de la acción-operación y los procesos de significación, a partir de la relación objeto y sujeto, las cuales están mediadas por la actividad de los individuos sobre los objetos con el uso de instrumentos socioculturales: herramientas y signos. Partiendo de que las herramientas concretas provienen del exterior al sujeto, el contexto sociocultural de la interacción; a través de su acción mediada por el uso de los instrumentos y la constitución de herramientas simbólicas (signos) que les permitirán construir e internalizar el conocimiento.

Los *signos* como un producto de la evolución sociocultural y su manifestación en el *lenguaje*, lo consolidan como la herramienta de mediación. El desarrollo psicológico posibilita al sujeto interiorizar las transformaciones cualitativas a través del uso de herramientas; es decir, la percepción actúa de manera confusa en un primer momento; en un segundo momento ejercitan sus funciones psicológicas que le van a permitir la toma de decisiones, el uso de la memoria, pensamiento y el lenguaje; en el tercer momento, el uso de las Funciones Superiores le permitirá al sujeto el control de la acción, tendrá la capacidad de regular su acción voluntaria, ser consciente de su toma de decisiones, la implicación social de ellas y reconocer los signos como mediadores.

Con las aportaciones de Vigotsky, podremos comprender cómo se van generando los procesos lógicos de construcción del número que siguen los niños y los Sistemas Matemáticos de Signos que usan.

Galperín (1976) y Talizina (2000), describen el paso de la actividad externa hacia la actividad interna en la *psiquis* del hombre, la teoría de la Formación por etapas de las Acciones Mentales, afirman que se requiere de la Lógica como la ciencia que permitirá comprender el proceso de construcción del pensamiento humano. La acción como proceso intermedio y la operación como la automatización que depende de la acción, van a ser las categorías que van a posibilitar la relación entre actividad y construcción de significación.

A través de las Acciones mentales, en el proceso de enseñanza – aprendizaje, plantea cinco etapas: Motivacional; Base Orientadora de la Acción; Material; Verbal y; Mental. En la Primera es permanente, su influencia es positiva, da confianza a los sujetos para resolver con las herramientas que ha construido apropiarse de nuevos conocimientos. En la segunda, le permite obtener la información sobre el objeto de estudio, asimilándolo ordenada y sistemáticamente, de acuerdo con las actividades que va realizar, así como con las acciones y operaciones que intervienen o se requieren para comprenderlo.

En la tercera va a planear y ejecutar la realización de la segunda, apoyándose en el uso de material concreto, mapas mentales, dibujos, esquemas y signos. En la cuarta, se da el paso de la acción al lenguaje verbal (oral o escrito), a través de la socialización, pone en práctica la reflexión sobre su acción, logrando la generalización y su autonomía. En la última etapa, sintetiza todo el proceso: va de manera progresiva de la acción, la automatización, el pensamiento reflexivo para llegar a la argumentación.

Con estas referencias teóricas, podemos entender los procesos cognitivos que siguen los niños en la construcción de número y las dificultades de la lógica de uso de un SMS a las que se enfrentan cuando se les presenta un Modelo de Enseñanza que tiene como fundamento un Modelo Formal Matemático, en este caso el de von Neumann.

Modelo de Enseñanza: *Trasladar la Formalización Matemática de Número a un Modelo Concreto*

Un Modelo de Enseñanza es una secuencia de textos matemáticos, un espacio textual, en el que maestros y alumnos interactúan a través de una secuencia de actividades organizadas (Filloy, Rojano & Puig, 2008, pág. 124) afirman:

> "…conceives it as *the result of a reading/transformational labor made over the textual space* (…) this idea was introduced in order to provide a notion of test that could be used in the analysis of any practice of production of sense (…) and for this purpose it is useful to introduce a distinction between *textual space* (TS) and *text* (T), which corresponds to a distinction between *meaning* and sense."

El Modelo de enseñanza que se propone es trasladar el Modelo de von Neumann a un Modelo concreto a través de actividades en las que los niños puedan manipular y representar acciones de número, con la finalidad de poder observar las dificultades que tienen con la lógica de uso para dar sentido y significado de SMS de las acciones que llevan a la construcción de número.

El Modelo de Enseñanza que se ha diseñado es una secuencia de actividades organizadas de seis a ocho sesiones, a partir del Modelo de von Neumann con los primeros diez números naturales, el cual se ha concretizado con el uso de material concreto como bolsas de hule transparentes, con la finalidad de usarlas como recipientes de los elementos que van a contener.

Para cada número se empleará un color, el cual identificará a la bolsita contenedora, y en la calculadora se taparán las teclas con el color que previamente se le asignaron a los números. Con el *Orden* como principio de construcción se inicia con la construcción del número cero, con la finalidad de que los niños vayan identificando quién va en 1º, 2º, 3º lugar y así sucesivamente. Los números están ordenados por la pertenencia. Cualquier número es menor que cualquier posterior (sucesor) y se puede verificar (Hamilton, 1966).

Para promover el conteo, se les propondrán actividades de manipulación de objetos de diferentes colores y formas, puedan descubrir las diversas maneras de contarlos a partir del orden de las mismas, usando preguntas para realizar las actividades: ¿de cuántas maneras diferentes se pueden contar los corazones azul y amarillo? Después se realizará el mismo proceso, pero ahora con tres objetos de diferente forma y color, con cuatro y así sucesivamente. La finalidad de las actividades es poder observar y analizar las dificultades a las que se enfrentan con este Modelo de Enseñanza.

Modelo de Comunicación*: Lógica de Competencia de uso y los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS)*

Comprender las dificultades de la lógica de uso que tienen los niños en la realización de las actividades de número y los SMS, implica analizar cómo van dando sentido y los significados que van construyendo a partir de sus actuaciones, cómo usan sus dedos, manipulan objetos o calculadoras es el interés en este componente.

De acuerdo con Filloy, Rojano & Puig (2008), en Matemática Educativa lo que interesa comprender y entender los procesos de significación y comunicación que se generan en los espacios educativos, por lo tanto, es pertinente usar conceptos semióticos como signo, texto y sistema matemático de signos. Para fundamentar esta conceptualización se apoyan en la Semiótica de Pierce, quien centra su atención en el Signo en su doble dimensión: acto como acción y la representación; y su relación triádica, donde el interpretante (cognición) va a jugar un papel fundamental, generando tres premisas:

1. El signo no es una relación diádica en la idea de Saussure (significante/significado), sino tríadica con la actuación del interpretante (cognición).
2. El signo está relacionado con la cognición.
3. La relación triádica del signo no es arbitraria, implica una relación entre el Signo (representamen), el Objeto y el Interpretante. El *Representament* es el fundamento de las ideas, es el objeto que representa al Signo, y los interpretantes van a jugar un papel fundamental, visto a través de la triada: Signo – Objeto – Interpretante (S – O – I).

Sistemas Matemáticos de Signos (SMS)

Los SMS de acuerdo con Filloy, Rojano & Puig (2008), son una herramienta que permite al investigador de Matemática Educativa comprender los procesos de significación tanto al significado Formal de la Matemática, como al significado Pragmático que se ponen movimiento con cualquier Modelo de Enseñanza. En el espacio áulico los sistemas de signos que se desarrollan en los procesos de enseñanza y aprendizaje implican sistemas de signos intermedios, en muchos casos con distancia a los producidos en el lenguaje verbal y los signos lingüísticos.

Estos procesos de significación intermedia evolucionan hacia un SMS más abstracto. Lo que permite dar significado y sentido a las acciones que llevan a cabo; para ello los actores parten de sus representaciones primitivas que van combinando de forma gradual, para ir generando procesos de abstracción y generalización. Esta semiótica matemática (Filloy, 1999) permitirá contar con una teoría de códigos para los SMS y una teoría de la producción de SMS, a través de la comunicación en la interacción matemática, a partir de la articulación de los diferentes textos matemáticos que se generan en la construcción de los números naturales y las dificultades en la lógica de uso de los niños (6 a 9 años) de educación primaria.

Este Modelo de Enseñanza pretende observar la concatenación que se produce con la utilización del SMS que los alumnos poseen, para identificar las competencias discursivas que emplean, relacionadas con la componente cognitiva, en la cual da cuenta con su componente conceptual sobre número natural y las nuevas competencias que van desarrollando.

Este proceso de concatenación tiene que ver con lo que Filloy, Puig & Rojano (2008) afirman que en los Modelos de Enseñanza los textos se van interrelacionando a partir de situaciones problemáticas, para ir realizando acciones que lleven a los alumnos a construir nuevos SMS, para ir dando sentido y significación a la secuencia de esos textos, en donde a partir de la enseñanza se vayan estableciendo estabilidad de los nuevos conceptos para proveer nuevas etapas de abstracción estratificada.

El investigador podrá observar los códigos que usan los niños, cómo los van transformando, las dificultades que tienen en su decodificación, para ir construyendo sus estratos de abstracción de número natural, los SMS que van transitando a nuevos SMS más abstractos y qué elementos ponen en uso en la solución de diversos problemas relacionados a la conceptualización de los números naturales.

Primeras expectativas

Se espera que el diseño de este Modelo de Enseñanza sea aplicado en dos grupos de 1º y 2º grado de dos escuelas primaria, con la finalidad de observar las dificultades de la lógica de uso a las que se enfrentan los niños en la construcción de número natural basado en el modelo formal de von Neumann y así poder construir las categorías que guiarán el análisis de la observación experimental de esta primera fase de la investigación.

Referencias Bibliográficas

Choate, J. Devaney, R. & Foster, A. (1999). *ITERATION. A tool kit of Dynamics Activities*. USA: Key Curriculum Press. Innovators in Mathematics Eduction.

Deaño, A. y Delval J. (1982). *Jean Piaget, Estudios sobre lógica y psicología*. Madrid: Alianza Editorial.

Filloy, Y. E. (1999). *Aspectos Teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C.V.

Filloy, E. Rojano T. y Puig L. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. USA: Springer

Galperin, P. Y. (1975). *Introducción a la Psicología: un enfoque dialéctico.* España: Pablo del Río Editor.

Maravilla C. A. (2011). *El orden y el conteo en la construcción de números naturales con el modelo de John von Neumann en niños preescolares.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Mosterín, J. (2000). Los Lógicos. España: Espasa Calpe, S.A.

Isaacs, N. (1967). Nueva luz sobre la idea de Número en el niño. Buenos Aires: Paidós.

Piaget, J. (1975). Introducción a la epistemología genética. Buenos Aires: Paidós.

Piaget, J. (1975). Génesis del número en el niño. Buenos Aires: Guadalupe.

Piaget, J. Inhelder, B. (1984). Psicología del niño. Buenos Aires: Morata.

Rodríguez, G. M.L. (2000) *Comprensión de procesos de comunicación en el aula, en la resolución de Problemas Aditivos, con grupos de segundo grado de Educación Primaria.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Talizina, N. (2000) Manual de Psicología Pedagógica. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN CON TRACKER Y GEOGEBRA: EL CASO DE LAS COPAS

Rafael Pantoja González, Karla Liliana Puga Nathal, Leopoldo Castillo Figueroa

Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán, TNM, SEP. Jalisco, México

rpantoja3@hotmail.com, karlalpn4@gmail.com, polin86@prodigy.net.mx

Para citar este artículo:

Pantoja, R., Puga, K., y Castillo, L. (2017). Sólidos de revolución con Tracker y Geogebra: El caso de las copas. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN CON TRACKER Y GEOGEBRA: EL CASO DE LAS COPAS

Rafael Pantoja González, Karla Liliana Puga Nathal, Leopoldo Castillo Figueroa

Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán, TNM, SEP. Jalisco, México

rpantoja3@hotmail.com, *karlalpn4@gmail.com*, *polin86@prodigy.net.mx*

Palabras clave: Sólido de revolución, Modelación, Colaborativo, GeoGebra, Tracker

Resumen

En el documento se presentan los resultados de un estudio realizado de una propuesta didáctica aplicada a jóvenes de las carreras de informática y electrónica. La propuesta, fundamentada en la teoría de representaciones semióticas, consistió en una serie de actividades, mediadas con el uso de las TIC, en las cuales un grupo de estudiantes extraen datos de una situación cotidiana y generan modelos matemáticos con la finalidad de interpretar, explicar y conjetura sobre tal situación en su contexto natural.

Antecedentes

El Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán (ITCG), adscrito al Tecnológico Nacional de México (TecNM) oferta las carreras de ingeniería Ambiental, Eléctrica, Electrónica, Gestión Empresarial, Industrial, Mecánica, Sistemas Computacionales, así como el posgrado en Electrónica y Sistemas Computacionales. Un elemento común entre estas carreras es que en todas se incluye el curso de Calculo integral, el cual se oferta en los primeros semestres.

En el plan de desarrollo institucional (2013-2018) del Tecnológico Nacional de México (TNM) se sugiere emplear la modelación y la Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en los distintos cursos de matemáticas. Sin embargo, estos planteamientos carecen de una propuesta sólida que direccionen los esfuerzos docentes hacia la generación de tales escenarios.

En el aula, cuando el profesor presenta el tema de solidos de revolución, primeramente expresa la función que se pretende trazar, después comienza a graficarla y por ultimo explica cómo se genera el volumen que se pretende visualizar.

Zaragoza, *et al* (2006) indica que "en años atrás la práctica docente en el proceso enseñanzaaprendizaje,los alumnos que cursabanesta materia les era solicitado como un trabajo extrade curso que construyeran unmodelo didáctico dealgún sólido de revolución específico, por ejemplo,tomado de losejercicios de algún texto. Sin embargo,el tiempo que tomaba construirlo era significativo ysolamente se lograba construir un solo modelo, además de queno todos los alumnos mostraban capacidades paraconstruir modelos con cartón, plastilina, acrílico oalgún otro material que se pudiera utilizar para laconstrucción de estos modelos didácticos".

Al considerar los planteamientos indicados por Zaragoza (2006), donde en ella emplean los mismos ejercicios tomados del texto para generar un sólido de revolución, esta propuestatambién manifiesta las dificultades de visualización de un objeto en dos dimensiones y convertirlo en un objeto en tres dimensiones, lo cual impide la extracción de datos para la obtención de dicho cálculo. Otra situación importante, es la omisión del contexto cotidiano, lo cual resulta necesario en la formación de todo ingeniero, cuando es evidente la gran cantidad de escenarios para ejemplificar el cálculo de un sólido de revolución.

La presente propuesta surge como una iniciativa académica, con la finalidad de promover en los estudiantes de ingeniería, la modelación de contextos cotidianos, en los que se vea inmerso el concepto de la integral definida. En particular, seseleccionó el cálculo del volumen de un recipiente denominado *copa de vino*.

Con dicha propuesta, se pretende fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como propiciar el interés del profesor por generar estrategias de enseñanza y aprendizaje alternativas que motiven al estudiante a aprender matemáticas (Arrieta y Díaz, 2015).

Referente teórico

El trabajo se sustenta en la teoría de las representaciones Semióticas de Raymond Duval(Duval, 2006, pag 45-81), indica que *el aprendizaje de la matemática es un campode estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como laconceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensiónde textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivasrequieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización dedistintos registros de representación y de expresión*.

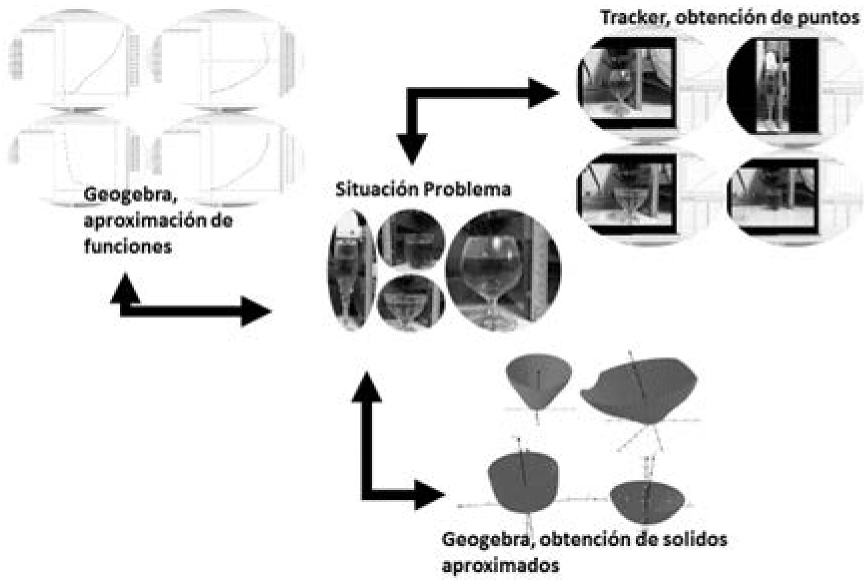
Pantoja, *et al* (2016) sugiere que de manera natural, sitúa cada una de las acciones diseñadas en las directrices señaladas, como son la generación de cinco registros: visual, gráfico, verbal, analítico y numérico. El registro visual se relaciona con la situación problema que se presenta al alumno, la toma de fotografías y/o video digital. El registro gráfico, el registro analítico y el registro numérico se propician durante el trabajo con el software GeoGebra y Tracker.

Tracker, software que se especializa en la construcción de modelos físicos que se analizan en video o fotografía, desarrollado en un ambiente Java y una de sus varias herramientas, permite obtener coordenadas cartesianas del objeto sin alteración alguna de escalas del objeto que se analiza.

GeoGebra un software ampliamente conocido en la comunidad de investigadores, como se ilustra en la figura 1a.

Durante la propuesta, en cada sesión, se identifican los tratamientos y las conversiones que menciona Duval (2006) referente a los cambios de registros en la conceptualización del cálculo del volumen de las copas de vino (Figura 1b). Por ejemplo, una conversión se reconoce cuando se desarrolla la actividad de marcar puntos sobre la periferia de la superficie de la copa para obtener las coordenadas cartesianas del contorno de la copa, una vez que se inserta la fotografía o el video en el Tracker. Se origina una tabla de datos para obtener las coordenadas cartesianas que se exportan a GeoGebra. Una herramienta poderosa de GeoGebra, es la rutina de ajuste de polinomios, que con la obtención de las coordenadas cartesianas de Tracker, se determina la función que mejor se acopla a los datos exportados.

En el momento en que se determina y aproxima la función con la herramienta de ajuste de polinomio, se procede a emplearla para comenzar a aproximar el cálculo de volumen de la copa de vino con la fórmula que se emplea para obtener el solido de revolución, ya sea con el empleo de las herramientas de GeoGebra o de manera tradicional con lápiz y papel siempre y cuando se obtenga la función que caracteriza el contorno de la copa de vino que se analiza. Todo esto significa en la teoría de las representaciones semiótica de Duvalun tratamiento, donde se realiza el análisis en el registro analítico del alumno.



(a) La representacion semiotica

(b) Conversión y tratamiento de las copas

Figura 1. La semiósis en el cálculo de volúmenes de solidos de revolución

En el caso que se reporta, se parte de la selección de una situación problema (Pantoja, *et al*, 2016; Hitt y González-Martín, 2015) de la vida cotidiana, como es calcular el volumen de una copa. Se recurre a la filmacióno fotografíadel objeto, para ser tratados en dos momentos: el primero consiste en generar con el software Tracker un conjunto de datos o coordenadas cartesianas a partir de la señalización de la superficie exterior de los objetos, y segundo, estos datos o coordenadas se exportan a GeoGebra, cuyas rutinas permiten ajustar estos datos a la función más acorde, que se emplea para la aproximación del volumen, lo que conlleva un análisis entre diversos registros de representación: numérico, gráfico y analítico.

Metodología

La actividad inicia con la selección de la situación problema,ésta parte de la premisa que tal situación debe ser significativa para el estudiante, que debe ser suficientemente contundente en el uso y aplicación del concepto de la Integral definida y su cotidianidad y debe promover el uso de las TIC como apoyo para la modelación matemática. Para la elección del contexto, se buscaron objetos que almacenen un volumen de líquido, cuyas forma física resultara un reto para los estudiantes, por ello se convino incluir una copa.

En este caso, encontrar el volumen de una copa de diferentes formas, como se muestra en la figura 2.

Figura 2. Copas de distinta capacidad y forma

La fotografía o video digital debe seguir determinados pasos, para que las coordenadas sean lo más apegadas al modelo real. El análisis en Tracker requiere que la cámara y el objeto, en este caso las copas, sean entre sí, la toma fotográfica o de video lo más paralela posible. Tracker necesita para realizar cualquiera de sus rutinas, una medida para aproximar la escala real con las que trabaja el software, por lo que cada toma de video o fotográfica debe contener una referencia (entiéndase como una medida numérica o un objeto que posterior a la toma fotográfica o de videose le pueda obtener una medida) para que Tracker aproxime y calcule automáticamente la escala con la que ejecutará sus rutinas.

Previo a las fotografías, semidió el líquido vertido de cada recipiente de dos formas: la primera con una jeringa quirúrgica graduada, ver figura 3, mientras que para la segunda se realizó el proceso, por el cuerpo de maestros, con el Tracker y GeoGebra, con la finalidad de medir los tiempos de desarrollo, tener información sobre los posibles problemas a los que se enfrentaría el estudiante durante la actividad y para contrastar las aproximaciones calculadas.

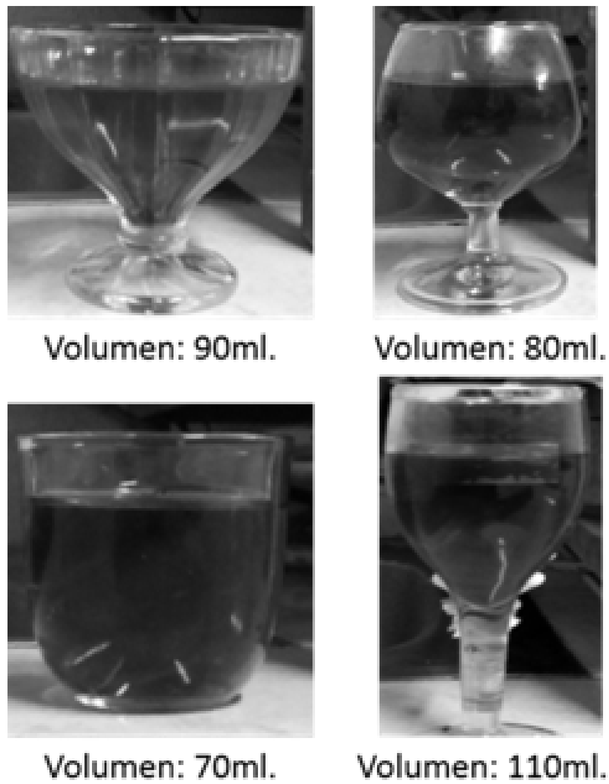


Figura 3. Contenido en mililitros del líquido en cada copa, con la jeringa graduada quirúrgica

Cuando finaliza este proceso, inicia la fase de trabajo en el aula, donde se planean tres sesiones de dos horas cada una. Se dividen en: una sesión de práctica, una sesión de trabajo experimental y una sesión de realimentación. A continuación se describen los resultados de cada sesión.

Sesión uno

La labor de los docentes fue generar actividades que sean significativas y accesibles para los alumnos. Un grupo de docentes evaluaron las actividades con la finalidad de identificar la pertinencia del material. Resultado de esto, se propuso generar una actividad de acercamiento al modelado de las copas, que consistió en una práctica guiada cuyo objetivo fue modelar el volumen de una papaya, fruta conocida por su forma ovalada.

Esta actividad promovió que los estudiantes vivieran la experiencia del modelado y manifestar sus dudas e inquietudes sobre la actividad.

Para lograr tal meta, se les presentó una secuencia didactica, como elemento promotor de actividades, que los fue orientando paso a paso en el proceso de cálculo del volumen de dicho fruto. Se inicia con la búsqueda de la función de la papaya en Tracker, en donde con las rutinas se puede encontrar las coordenadas cartesianas(x, y) del contorno de la fruta (Ver figura 4).

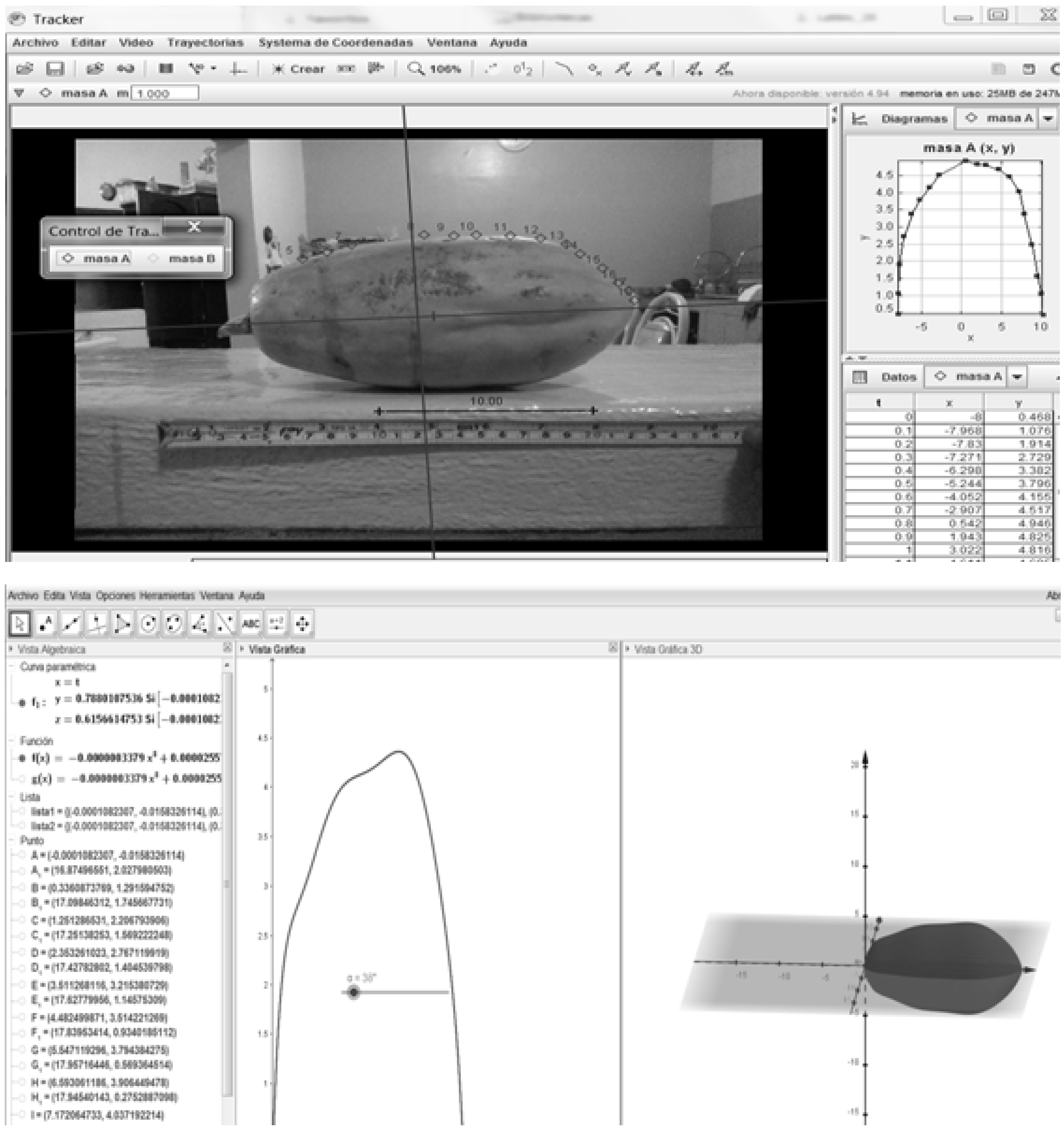


Figura 4. Ejercicio de práctica, el volumen de la Papaya

De esta manera se logró sistematizar un proceso de análisis para aproximar el volumen.

Esta sistematización propuesta, ayudó al alumno a visualizar y obtener el volumen de algunos objetos de su entorno, ya que la metodología requerida fue la misma.Esto es, capturar la fotografía o video digital con una referencia de medida, después obtener coordenadas en Tracker, trasladar las coordenadas a GeoGebra y obtener la función aproximada. Por último, aplicar la integral para obtener el volumen en GeoGebra y aproximar su Volumen.

Sesión dos

Esta sesión es importante, ya que se trata de encontrar y aproximar el líquido que contiene la copa. Previamente a los alumnos se les mostró la instrucción de trabajo para toda la sesión lo que promovió el trabajo en grupos colaborativos. Los profesores únicamente participaron en resolver dudas sobre procedimientos técnicos. En la figura 5 se presentan las distintas copa con las que trabajaron las binas en cada salón de clase.

Figura 5. Distintas formas y volúmenes de copas

Se solicitó a los estudiantes que, una vez que terminen de explorar y calcular un volumen aproximado de la copa que a cada equipo se le asigno, redactaran un reporte con sus resultados, observaciones y conclusiones respecto al trabajo que se realizó.

Sesión tres

Se solicitó a los estudiantes exponer sus dudas o problemas que se generaron durante las sesiones anteriores y de esta forma, en sesión plenaria, dar solución y así aclarar, retroalimentar y sobre todo, enriquecer el trabajo que se debe reportar.

Resultados

Las conversiones se ven presentes en los reportes que entregaron los alumnos, Duval (2006) menciona que si los alumnos logran pasar de un registro visual (en este caso la fotografía o video de la copa) al registro gráfico que se logró con la obtención de las coordenadas del contorno de la copa, se promueve un aprendizaje en el alumno ya que alcanza a visualizar el modelo matemático del contorno de la copa.

Otro resultado que arrojo el estudio, cuando fue necesaria la conversión Duval (2006) de un registro analítico a registro numérico fue al calcular el volumen a partir del modelo matemático de contorno de las copas. Presentaron dificultades en el establecimiento de los límites de integración que representan el nivel del líquido en la copa, lo cual les arrojo resultados alejados de la cantidad real del volumen del líquido.

Como producto de la sesión tres, se solicitó a los alumnos elaborar un reporte final, donde los docentes involucrados analizan los resultados de los equipos colaborativos. Se encontró que algunos alumnos mostraron cálculos aproximados del volumen de los líquidos contenidos por las copas, mientras que otros mostraron variaciones considerables en sus cálculos.

El análisis detallado de los reportes de los alumnos, la información que se recopilófuediversa y enriquecedorapara el grupo de docentes que participaron en esta propuesta. Por ejemplo, algunos equipos lograron obtener el volumen aproximado de los líquidos contenidos en las copas. Otros equipos no logran acercarse o sobrepasarse de manera considerable la cantidad de líquido real.

En la figura 6, se presentan algunos casos de reportes de alumnos en donde mencionan que sus cálculosvariaban considerablemente respecto al volumen real que contenían las copas. Los estudiantes no encontraban explicación de por qué obtuvieron estas diferencias con sus cálculos.

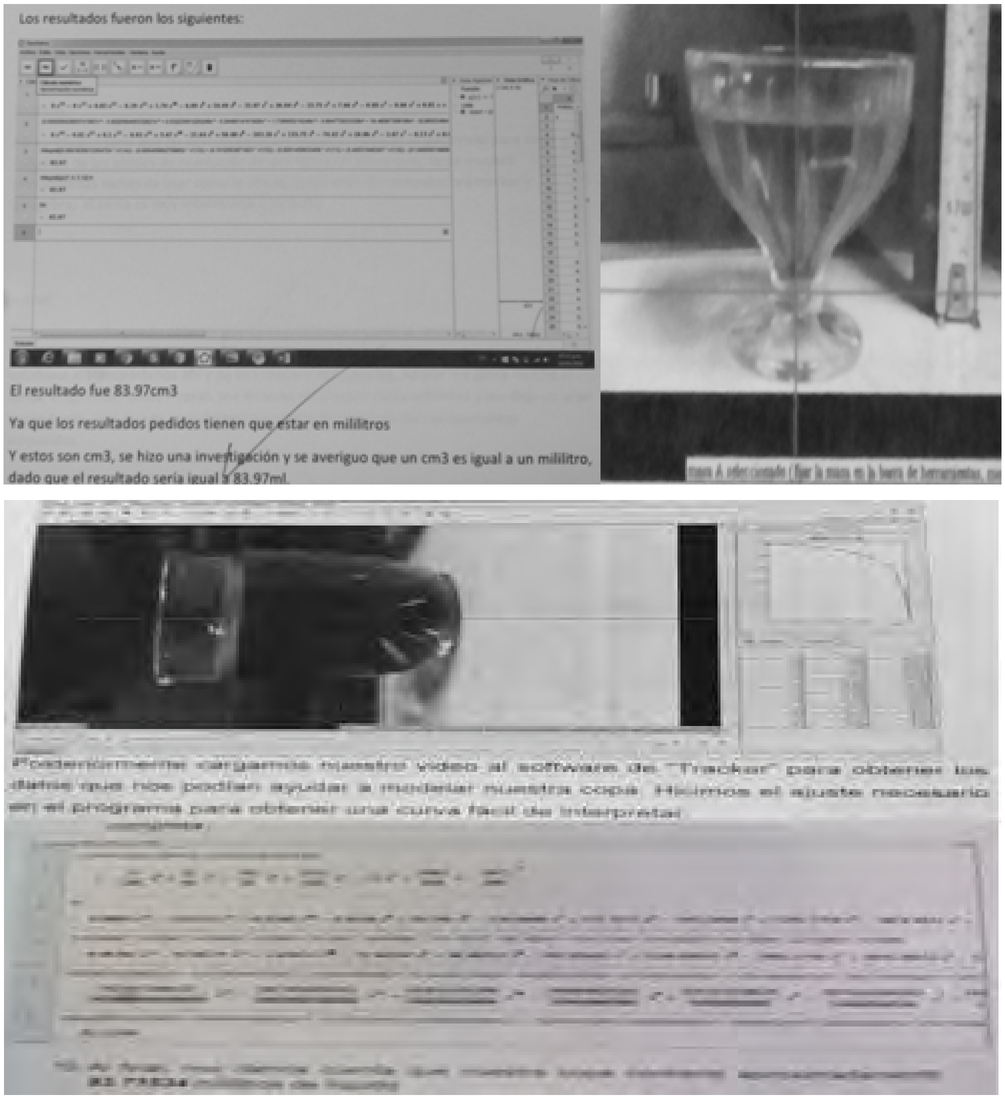


*Figura 6.*Obtención del Volumen aproximado de dos casos, con auxilio de las rutinas de Tracker y GeoGebra

Por otro lado se observó que las conclusiones de los equipos de trabajo fueron variadas, ya que la mayoría presentaron evidencias de haber entendido y comprendido para qué sirve la integral y sus aplicaciones y mostraron un uso adecuado del software como complemento del trabajo en el aula. Pero también nos encontramos con diversos cuestionamientos que manifestaron los alumnos después de realizar la actividad. Hubo estudiantes que no les agrado en lo absoluto romper con el formato de lápiz y papel para realizar sus actividades, otros prefirieron trabajar en soledad, y no siguieron instrucciones establecidas (ver tabla 1).

Conclusiones

Además con la propuesta se logró que los estudiantes resignificaran en su contextos cotidiano los conceptos que fueron tratados en el aula (integral definida, función,áreas, etc.) desde un enfoque meramente teórico. Los estudiantes identificaron el concepto de la integral definida para calcular el volumen de diversos objetos de su entorno (como una botella de agua, una hamburguesa, de un tornillo, de una pipeta, un tanque de presión, etc.)

En la propuesta fue imperante promover el concepto de la integral definida desde diversos registros de representación, ya que, de acuerdo con Duval (2006) esto posibilita el aprendizaje más amplio de conceptos matemáticos y su aplicación en diversos contextos.

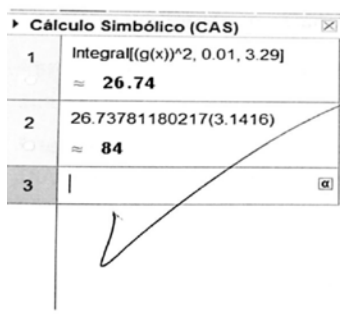
Tabla 1.

Conclusiones varias de los alumnos

Mi conclusión sería que las herramientas tecnológicas facilitan el desarrollo para sacar el volumen de los sólidos de revolución de una figura en 3D ya que, te da muchas herramientas fáciles de usar como lo son los programas de computadora tracker y geogebra, el tema es muy interesante y para mí.
En este examen, puedo decir que fue un poco más rápido nuestro procedimiento, creo que memorizamos bien los pasos, y no sé si estemos bien, pero fue una actividad muy dinámica, no me gusta escribir mucho en cuaderno, aprendí algunas funciones de los software que utilizamos, creo que aunque no seamos arquitectos, necesitaremos en alguna ocasión programar algo como esto, no lo sé igual y a lo mejor hasta nos toca hacer programas para arquitectos, nunca está de más aprender algo nuevo.
Creo que el uso de las tecnologías para el aprendizaje resulta verdaderamente eficiente, ya que a los alumnos nos resulta más atractivo y menos aburrido aprender de esta forma que de la forma convencional y si más maestros utilizaran estas técnicas algunas materias que nos resultan un poco tediosas y complicadas, se nos harían más dinámicas.
El cálculo integral tiene un amplio alcance en nuestra vida diaria, con los sólidos de revolución nos dimos un claro ejemplo que no todo es teoría, sino que también se puede aplicar a la vida diaria y con ayuda de algunos software podemos hacer muchas cosas que yo antes no tenía idea.
Esta unidad me pareció muy interesante, no tenía idea que se podía sacar el volumen o peso de un objeto mediante el cálculo integral, por el cual rompe todas mis creencias que solamente era teoría y nunca se le podría dar un uso en nuestro día a día

De esta manera en que trabajamos aprendimos a calcular el volumen, en este caso, de un liquido, solo con un video o foto, e introduciendo al programa una medida como referencia, de esta manera podemos calcular el volumen de otro liquido con un volumen gigantesco solo con tener un video y algo que usemos como referencia en el programa.

El recipiente contiene 84ml.



Se observó que la propuesta generó interés y motivación en el estudiante por aprender solidos de revolución en el curso de cálculo integral. Les motivó la idea de obtener información a partir de la fotografía o video digital de objetos de la vida cotidiana.

Algunas dificultades que se identificaron al aplicar la propuesta fueron las siguientes:

- La falta de calidad en los videos y tomasfotográficas.
- El grosor de las copas afecta el volumen calculado con el medido.
- La dificultad que manifestaron algunos alumnos al integrarse al trabajo colaborativo.
- Computadoras lentas.
- Falta de práctica en los software Tracker y Geogebra.
- Apatía de algunos estudiantes al aprender nuevos conceptos matemáticos.
- Alumnos acostumbrados a la clase exposición por parte del académico.
- Alumnos no atendieron las directrices para la sistematización del proceso.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J., Díaz, L. (2015) Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18() 19-48. Recuperado de http://2011.www.redalyc.org/articulo.oa?id=33535428002

Duval, R. (2006) Quelle sémiotique pour l’analyse de l’activité et des productions mathématiques? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea]ISSN 1665-2436. Fecha de consulta: 5 de octubre de 2017. Disponible en:http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509904.

Hitt, F., González-Martín, A. (2015)Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. Educational Studies in Mathematics.88:201–219. DOI 10.1007/s10649-014-9578-7. Springer Science Business Media Dordrecht: USA.

Pantoja, R. Guerrero, M. , Ulloa, R. Nesterova, E. (2016*)* Modeling in problem situations of daily life.*Journal of Education and Human Development,* Vol. 5, No. 1, pp. 62-76. IS**SN**: 2334-2978 (Electronic Version). DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. Published by American Research Institute.Recuperado el 23 de Mayo de 2016 de http://jehdnet.com/.

Zaragoza, G., López, S., Díaz, R. (2006). Construyendo modelos didácticosvirtuales de sólidos derevolución utilizando SolRev. Ingeniería, Revista Académica de la FI-UADY, 10-3, pp.53-59, ISSN: 1665-529X. Recuperado el 4 de octubre del 2017 de http://www.redalyc.org

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática
Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Alejandra Adame Esparza[1], Mónica del Rocío Torres Ibarra[2], Elvira Borjón Robles[3]

Universidad Autónoma de Aguascalientes[1], Universidad Autónoma de Zacatecas[2, 3]

alex280_80@yahoo.com.mx, torres@matematicas.reduaz.mx, eborjon@matematicas.reduaz.mx

Para citar este artículo:

Esparza, A., Torres, M., y Borjón, E. (2017). Una propuesta para la enseñanza de identidades trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México..

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C. Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Alejandra Adame Esparza[1], Mónica del Rocío Torres Ibarra[2], Elvira Borjón Robles[3]

alex280_80@yahoo.com.mx, mtorres@matematicas.reduaz.mx, eborjon@matematicas.reduaz.mx

Universidad Autónoma de Aguascalientes[1], Universidad Autónoma de Zacatecas[2 3]

Palabras clave: Propuesta didáctica, Visualización matemática, Identidades trigonométricas, Representaciones, GeoGebra.

Resumen

La presente investigación, toma como referente teórico la Visualización Matemática (Zimmermann y Cunningham, 1991), con el objetivo crear una propuesta didáctica que, apoyada del software Geogebra, contribuya a la comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en el nivel medio superior. Bajo la metodología de la ingeniería didáctica, se hace un análisis previo del concepto que permite estructurar una serie de actividades para promover la interrelación (tratamiento, tránsito y conversión) de representaciones, y con ello determinar el grado de comprensión que los estudiantes adquieren del concepto, de acuerdo a los niveles de visualización (Hitt, 1998) alcanzados.

Keywords: Teaching approach, Mathematical visualization, Trigonometric identities, Representations, Geogebra.

Abstract

This research takes the Mathematical Visualization (Zimmermann and Cunningham, 1991), as theoretical reference, to creating a didactic approach supported by Geogebra software, that contribute to the understanding Trigonometric Identity in the upper middle level. Under the didactic engineering methodology, a previous analysis of the concept is made that allows structuring a series of activities to promote the interrelation (treatment, transit and conversion) of representations, and with that to determine the degree of understanding that the students acquire, in accordance to the gain levels of visualization (Hitt, 1998).

Introducción

La impartición del tema de Identidades Trigonométricas en el nivel Medio Superior tradicionalmente se aborda de manera algorítmica, lo que ocasiona que la comprensión de las mismas se vea limitada al cálculo numérico.

Esta propuesta busca enriquecer este tratamiento, haciendo que los estudiantes tengan a su disposición diferentes representaciones, con las cuales puedan interactuar y lograr crear imágenes mentales que les permitan la construcción y comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica. En este proceso, el estudiante representa, transforma, propone y logra dar sentido al objeto matemático de Identidad Trigonométrica.

Basados en la Ingeniería Didáctica, (Artigue, Douady, Moreno, y Gómez, 1995), nuestra metodología considera la realización de un análisis preliminar en 3 dimensiones, como base del diseño de una situación didáctica, que será validada mediante un análisis a priori y a posteriori de la misma.

Con todo lo anterior, se diseña, valida y experimenta una secuencia de actividades con uso de tecnología (GeoGebra), como herramientas para la enseñanza y aprendizaje del tema de Identidades Trigonométricas en el nivel medio superior, con la intención de que los alumnos logren, altos niveles de comprensión (Hitt, 1998) promovidos con la construcción de redes de representaciones.

Referente Teórico

Históricamente, la visualización ha jugado un papel muy importante en la comprensión y evolución de las matemáticas, por ejemplo, Torres (2004) menciona que:

> En 1945, Jacques Hadamard, realizó una investigación entre algunos matemáticos a fin de determinar sus métodos de trabajo. La conclusión a la que llegó fue sorprendente: casi todos ellos, salvo contadas excepciones, dijeron no atacar los problemas en términos verbales o algebraicos, sino con base en una vaga imaginación visual (Torres, 2004, p. 20).

En la época de los Pitagóricos, la visualización era sumamente importante, ya que el descubrimiento estaba ligado a procesos visuales; más adelante, en la época de Euclides, imperan en la matemática los procesos lógico-deductivos, en los que la visualización empieza a jugar un papel secundario.

Por esta razón, consideramos que un acercamiento didáctico en el aula debe tomar en cuenta el razonamiento lógico-deductivo (formal), sin dejar de lado la parte inductiva que se promueve en la visualización:

> La visualización matemática de un problema juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión (Hitt, 2003, p. 3).

En el mismo tenor, autores como Zimmermann y Cunningham (1991), señalan que “la visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel, o con ayuda de tecnología), usando tales imágenes efectivamente para un descubrimiento y comprensión matemática. La visualización no es el fin mismo, sino el entendimiento”.

De acuerdo a Hitt (1998), visualizar es crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, usar el papel o la computadora para expresar la idea matemática en cuestión; aclara también que comprender un concepto implica una articulación coherente de las diferentes representaciones que intervienen durante la resolución de problemas, es decir, un concepto matemático visto en sus diferentes representaciones proporcionará información específica, que le darán solidez al concepto mismo.

En relación a las representaciones, Duval (1993) establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación. La comprensión de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación. En otras palabras, la aprehensión de un concepto sólo se logrará si existen actividades de conversión de una representación a otra y viceversa propiciando con esto la construcción de los conceptos matemáticos. Las tareas de conversión entre representaciones y la manipulación coherente de tales representaciones permitirán una sólida construcción del concepto en cuestión.

Así pues, Se presenta el diseño de una secuencia que busca el tránsito entre representaciones semióticas (Duval, 1998), analizada bajo la visualización matemática de Zimmermann y Cunnigham (1991), estrechamente ligada a los niveles de comprensión de conceptos de Hitt (1998), de los cuales se manejan 4 (Adame, 2017).

Metodología

La concepción de la presente propuesta estuvo regida por la metodología de la Ingeniería Didáctica, que se caracteriza "por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (Artigue, et al, 1995, p.36) y que consta de cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación.

El análisis preliminar a su vez de divide en tres dimensiones, la figura 1 muestra cada una de las dimensiones, el análisis que se realizó al respecto y los resultados obtenidos.

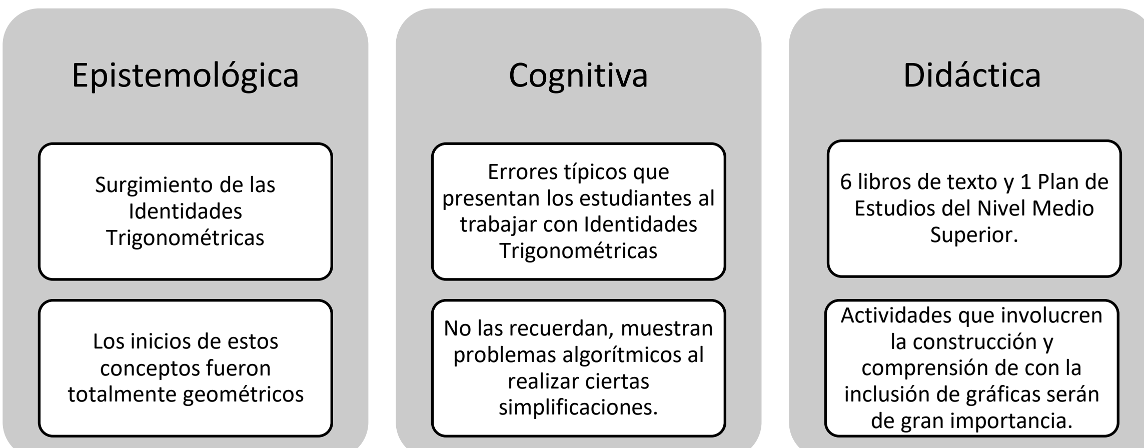


Figura 1. Esquema del análisis preliminar realizado

Tomando en cuenta las tres dimensiones del análisis preliminar, entramos a la segunda fase, concepción y análisis a priori, en la que se diseñó un instrumento interactivo que consta de una secuencia de seis actividades guiadas ligadas a ocho programas desarrollados en el software "GeoGebra", donde los estudiantes pueden interactuar con distintas representaciones del concepto de Identidad Trigonométrica.

A continuación, se describen las actividades contenidas en la secuencia, así como los principales objetivos y análisis a priori que se tiene de cada una de ellas.

Actividad 1. El objetivo de esta actividad es que los estudiantes deduzcan de manera intuitiva las Identidades Trigonométricas básicas. Se les pide que asocien diversas expresiones trigonométricas con una gráfica que es única para cada expresión, como se muestra en la figura 2.

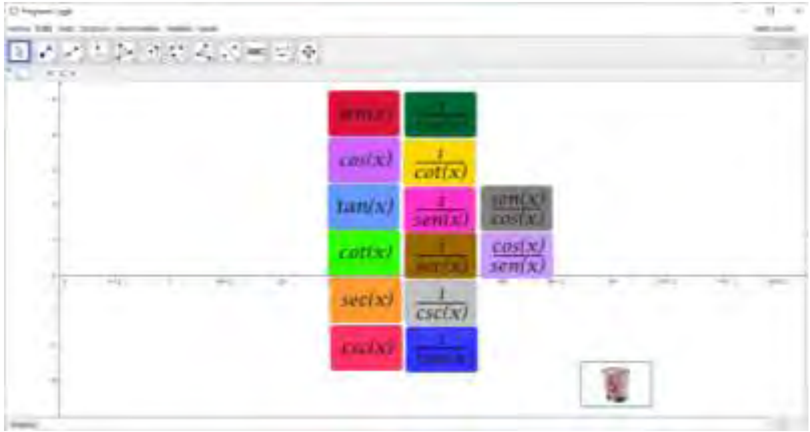


Figura 2. Entorno GeoGebra de la actividad 1

En esta sección el estudiante identifica dos tipos de representaciones del mismo ente matemático, la representación algebraica y la representación gráfica, y se espera que sea capaz de transitar entre ellas.

Actividad 2. El objetivo de esta actividad es que mediante la manipulación del círculo trigonométrico, los estudiantes encuentren los valores de las expresiones trigonométricas para distintos ángulos e identifiquen cuáles valores son idénticos (véase figura 3).

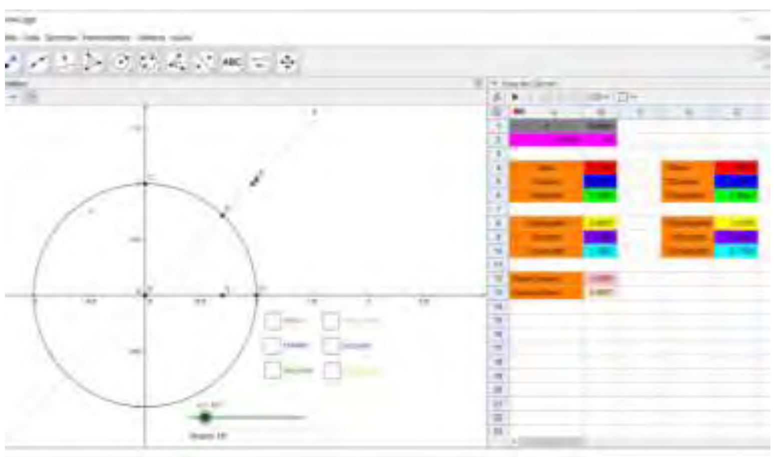


Figura 3. Representación tabular empleada en la actividad 2

En esta sección, mediante la representación tabular, podrán observar la similitud de los valores obtenidos y la equivalencia entre expresiones trigonométricas distintas

Actividad 3. El objetivo es que los estudiantes deduzcan la Identidad Trigonométrica $sen^2x + \ cos^2x = 1$ y comprendan su significado; se utiliza como recurso el círculo trigonométrico y el Teorema de Pitágoras (véase figura 4).

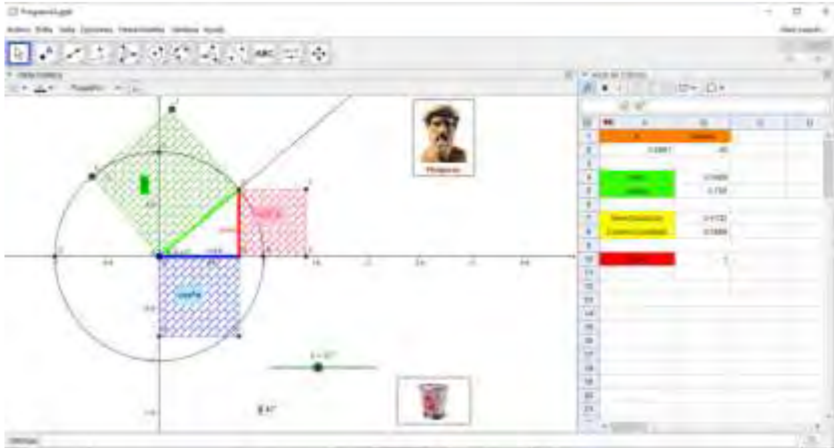


Figura 4. Representación gráfica de la actividad 3

Actividad 4. El objetivo es mostrar al estudiante que existen expresiones trigonométricas en apariencia iguales, pero que no son identidades trigonométricas (véase figura 5); se les muestra una supuesta equivalencia entre expresiones trigonométricas y se le cuestiona de qué manera se podría saber si la expresión es verdadera. Se espera que el estudiante haga referencia en su respuesta a alguna de las alternativas propuestas con anterioridad como son el trazo de gráficas y/o la tabulación.

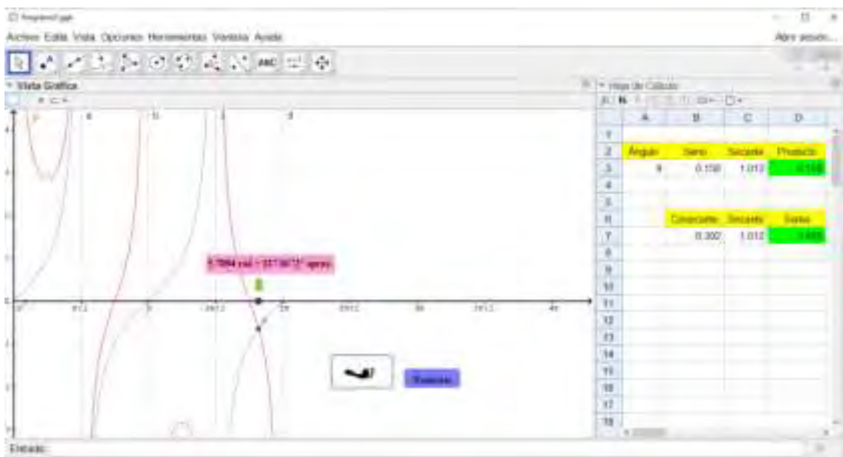


Figura 5. Ambiente de trabajo de la actividad 4

En esta actividad se les define el concepto formal de Identidad Trigonométrica y se les pide que saquen sus propias deducciones. Se espera que el estudiante concluya que la expresión trabajada no es identidad porque no es válida para todos los valores de ángulos.

Actividad 5. Su objetivo es mostrar al estudiante que los valores de cualquier ángulo en expresiones trigonométricas equivalentes hacen verdadera la identidad. Se muestra una equivalencia entre expresiones trigonométricas (figura 6) y mediante el trazo de gráficas y evaluaciones en diversos ángulos en una representación tabular, van descubriendo que realmente se trata de una equivalencia.

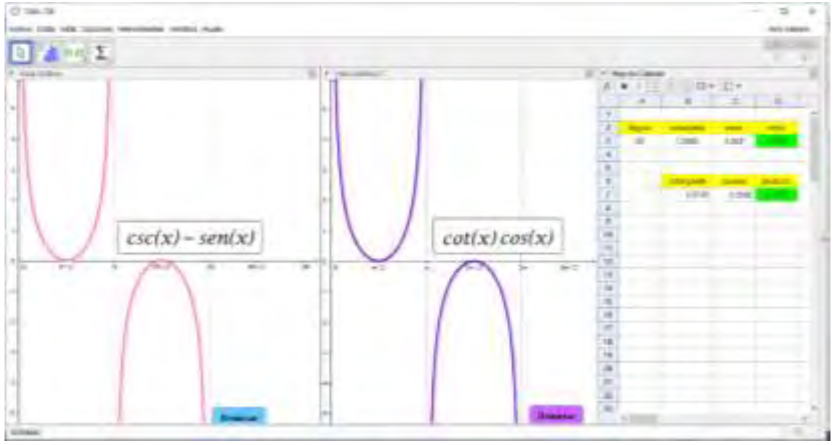


Figura 6. Entorno gráfico y tabular utilizado en la actividad 5

Actividad 6. En esta actividad se busca introducir un método para comprobar una equivalencia de manera algorítmico-formal, sin necesidad de obtener valores para casos particulares (véase figura 7). Se muestran los gráficos de ambos lados de la equivalencia y el estudiante va haciendo modificaciones en las expresiones encontrando que existen cambios que perjudican las gráficas iniciales y otros cambios que mantienen las gráficas intactas.

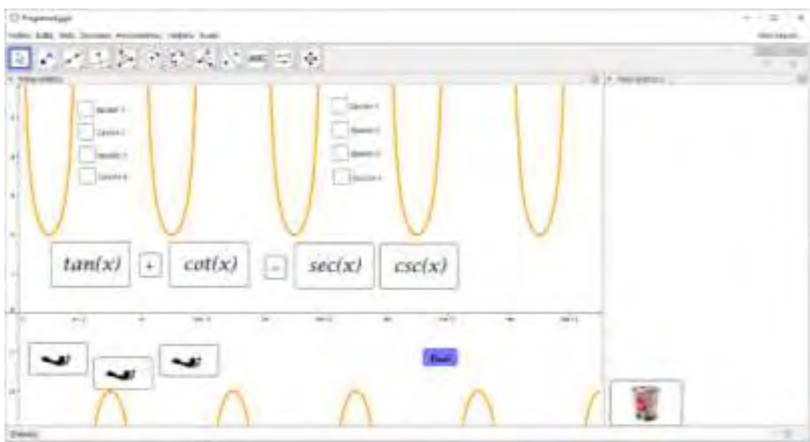


Figura 7. Entorno de trabajo para la actividad 6

La segunda fase de la metodología, se refiere a la experimentación; ésta se llevó a cabo en el del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes (CEM-UAA) con un grupo mixto de 51 estudiantes (33 mujeres y 18 hombres) del segundo semestre (véase figura 8), cuyas edades oscilaban entre los 15 y 16 años; se realizó en el aula habitual de clases, contando con varias computadoras portátiles para el desarrollo de las actividades en GeoGebra.

Figura 8. Grupo de estudiantes trabajando en la propuesta

En todo el momento el docente-investigador estuvo presente como guía, coordinando los tiempos de cada una de las actividades y dando retroalimentaciones pertinentes y oportunas.

En total se aplicaron 6 actividades en un lapso de 7 días, en sesiones de aproximadamente 50 minutos en donde los estudiantes interactuaron con el software, al mismo tiempo que completaban las actividades de la secuencia.

Una vez concluida esta etapa, nuestra metodología propone realizar un Análisis a Posteriori, que consiste en una confrontación entre lo esperado y lo ocurrido; para ello, se procedió a hacer una revisión de las respuestas de los estudiantes, implementando una codificación de las redes de representación (tratamientos, coordinaciones y conversiones), logradas por cada estudiante (Adame, 2017), con la finalidad de determinar el nivel de visualización (Hitt, 1998) alcanzada, un el ejemplo de esto se presenta en la figura 9.

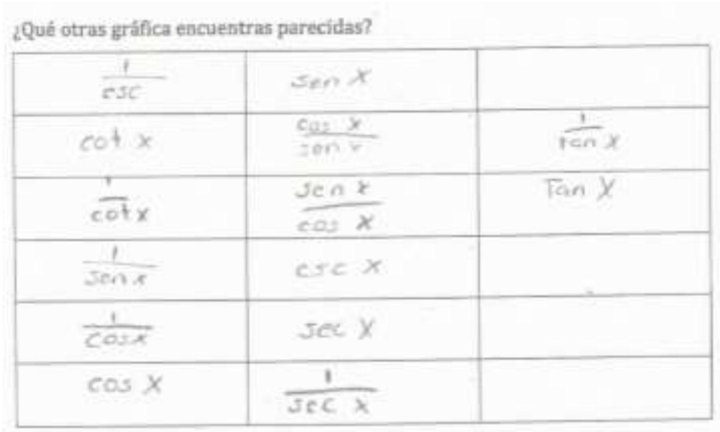
	Pregunta 1	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 3
	TT+	CT->A	CT->A	CT->V	CA->V
E_1	0	0	1	1	0
E_2	1	0	2	1	0
E_3	0	0	0	1	0
E_4	0	0	0	1	0
E_5	1	0	1	1	0

Figura 9. Ejemplo de codificación y condensado de respuestas

Resultados

Los resultados que se muestran a continuación representan una síntesis de las tablas de codificación creadas para ubicar a los alumnos en los diferentes niveles de visualización de acuerdo al número de interrelaciones realizadas de manera satisfactoria en las actividades planteadas.

En actividad 1, si el estudiante identificó que existen expresiones trigonométricas distintas que producen las mismas gráficas completaría las especificaciones del nivel 2 de visualización.


¿Qué otras gráfica encuentras parecidas?

$\frac{1}{csc}$	sen x	
cot x	$\frac{cos\ x}{sen\ x}$	$\frac{1}{tan\ x}$
$\frac{1}{cot\ x}$	$\frac{sen\ x}{cos\ x}$	Tan X
$\frac{1}{sen\ x}$	csc x	
$\frac{1}{cos\ x}$	sec X	
cos X	$\frac{1}{sec\ x}$	

Figura 10. Respuesta de un estudiante nivel 2 en actividad 1

Logramos observar que en general, los estudiantes pueden identificar similitudes en la representación gráfica y que existen expresiones trigonométricas (en apariencia distintas) que producen las mismas gráficas.

Respecto a la actividad 2, se esperaba que el estudiante, pudiera observar la similitud de los valores numéricos de las distintas identidades, presentadas en una representación tabular con diferentes ángulos; con ello serían capaces de transitar del registro tabular al algebraico; sus respuestas nos dejan ver que lograron identificar la equivalencia de las identidades presentadas en la actividad (ver figura 11) y con ello ubicarse en el nivel 3 de visualización.

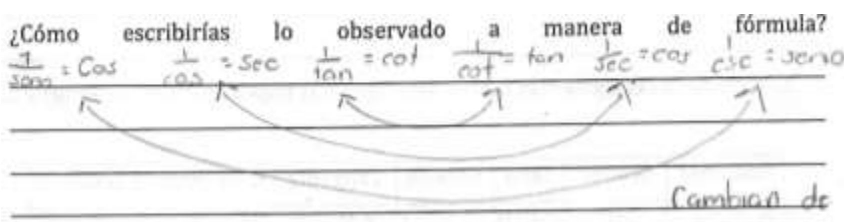


Figura 11. Respuesta de alumno en la actividad 2

En la actividad 3, con ayuda de la representación gráfica y tabular, los estudiantes identifican lo que sucede con la suma del sen^2x y cos^2x para distintos valores de ángulos, con ello, pueden deducir una expresión matemática (ver figura 12) adquirir el nivel 1 de visualización.

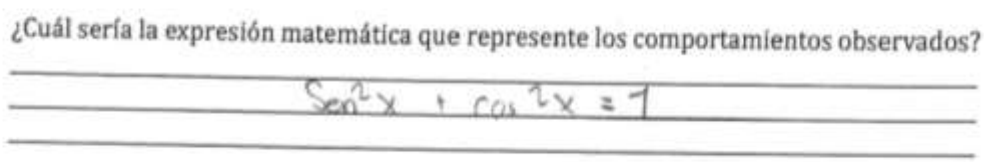
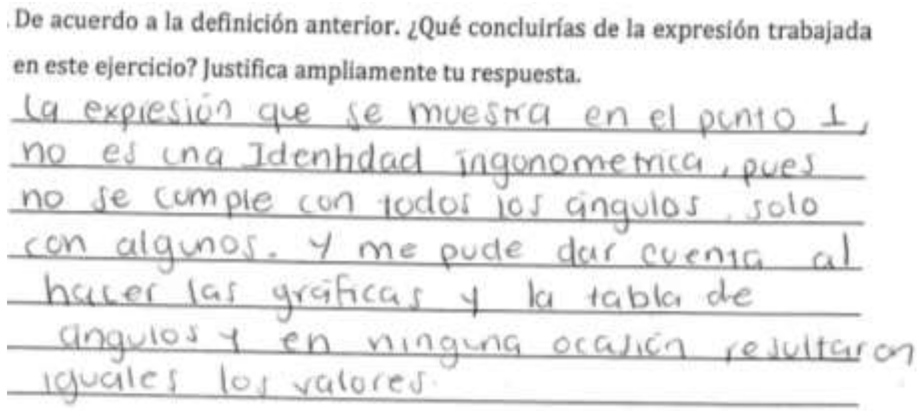


Figura 12. Respuesta obtenida en la actividad 3

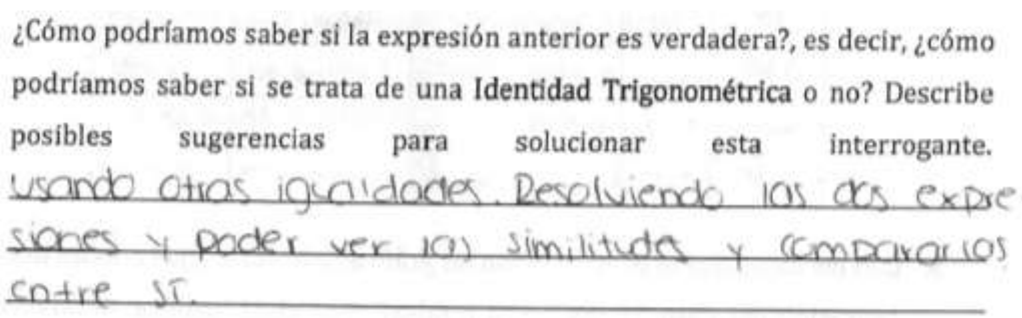
En la actividad 4, tras trabajar con una expresión que no representa una identidad, poco a poco, con ayuda de la representación de gráfica y aritmética presentada en distintos valores particulares, logran identificar la falsedad (ver figura 13), e indicar que no se trata de una identidad.


De acuerdo a la definición anterior. ¿Qué concluirías de la expresión trabajada en este ejercicio? Justifica ampliamente tu respuesta.

la expresión que se muestra en el punto 1, no es una Identidad trigonometrica, pues no se cumple con todos los angulos, solo con algunos. y me pude dar cuenta al hacer las graficas y la tabla de angulos y en ninguna ocasión resultaron iguales los valores.

Figura 13. Respuesta de un estudiante, pregunta Actividad 4

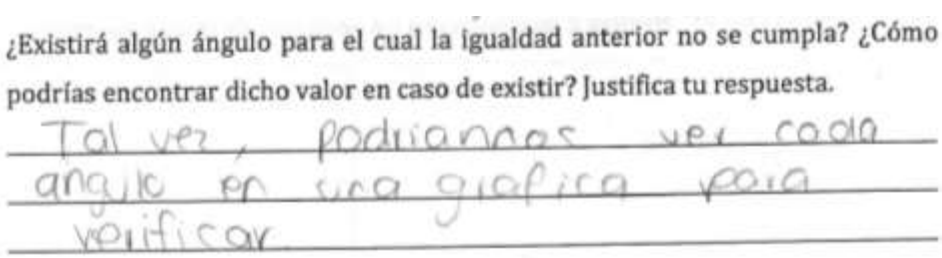
En la actividad 5, se pretende que una vez que detectaron cuándo una ecuación trigonométrica no es una identidad, tengan elementos para identificar cuándo ésta se cumple, se les presenta una en particular en representación gráfica y tabular; esperando que ellos lo deduzcan, como se muestra en la figura 14.


¿Cómo podríamos saber si la expresión anterior es verdadera?, es decir, ¿cómo podríamos saber si se trata de una **Identidad Trigonométrica** o no? Describe posibles sugerencias para solucionar esta interrogante.

usando otras igualdades. Resolviendo las dos expresiones y poder ver las similitudes y compararlos entre si.

Figura 14. Respuesta de alumno en actividad 5

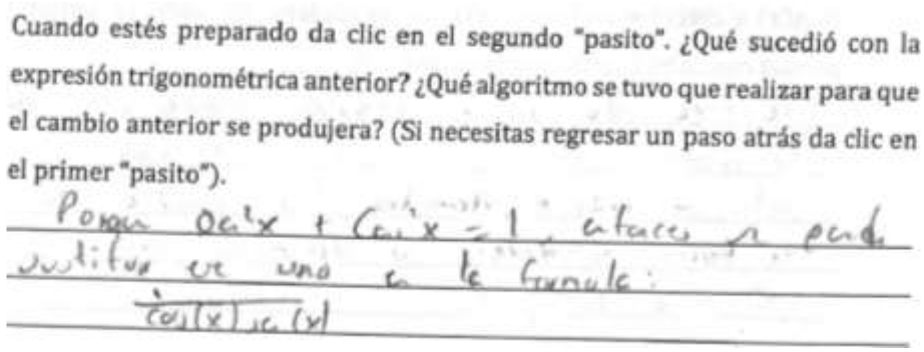
Casi al término de la actividad se le cuestiona al estudiante si cree que habrá una manera de probar si una expresión es verdadera o no sin utilizar un software como GeoGebra, sus respuestas (figura 15) dejan ver que hacen referencia al tipo de actividades realizadas previamente.


¿Existirá algún ángulo para el cual la igualdad anterior no se cumpla? ¿Cómo podrías encontrar dicho valor en caso de existir? Justifica tu respuesta.

Tal vez, podriamos ver cada angulo en una grafica para verificar

Figura 15. Respuesta de alumnos a formas de encontrar identidades

En relación a la última actividad de la secuencia, los estudiantes mostraron que podían identificar identidades equivalentes por diferentes métodos (ver figura 16), con lo cual podemos ver que ellos han sido capaces de desprender el concepto de su representación, es decir, apropiarse del mismo,


Cuando estés preparado da clic en el segundo "pasito". ¿Qué sucedió con la expresión trigonométrica anterior? ¿Qué algoritmo se tuvo que realizar para que el cambio anterior se produjera? (Si necesitas regresar un paso atrás da clic en el primer "pasito").

Porque $Sen^2x + Cos^2x = 1$, entonces se puede sustituir en uno en la formula:

$\cos(x)\,sc(x)$

Figura 16. Respuesta de alumno a actividad 6

Con las actividades planteadas, una vez que se crearon las redes de representaciones, de los 51 estudiantes que participaron, encontramos que 46 alcanzaron un nivel 3 de comprensión, mientas que 5 fueron capaces de transformar, generar, comunicar y reflexionar sobre la información que se les presentó, lo que para nosotros los hace visualizadores en potencia, es decir, pudieron alcanzar el nivel 4, que fue el más alto que se promovió con la jnn .

Conclusiones

En una época en donde todo cambia a pasos agigantados, es importante reflexionar sobre las formas de enseñanza en las aulas. En este sentido la tecnología puede tomar un papel relevante al momento de ser utilizada en beneficio del proceso de enseñanza-aprendizaje, proponiendo alternativas didácticas que la incluyan.

Los resultados arrojados en este estudio dan prueba de que la visualización matemática, concebida a través de un diseño cuidadoso de actividades en el que intervienen tanto la interrelación de diversas representaciones de los objetos matemáticos como las herramientas tecnológicas, son un medio que permiten a los estudiantes desprender el objeto de sus representaciones, al tiempo que al crear redes entre estas últimas van logrando un mayor nivel de comprensión de los objetos trabajados.

La utilización de una herramienta tecnológica fue crucial para este estudio, pues favoreció de sobremanera la actitud de los estudiantes hacia el tema; además de que la representación de los objetos no habría sido posible de otro modo; aún más, la implementación de la metodología elegida, en la que se realizan diversos análisis preliminares como base principal para la concepción de la secuencia, nos permitió considerar aspectos en los que los estudiantes pudieran externar las imágenes mentales que en ellos se generan al momento de manipular el objeto en sus diferentes representaciones, creando con ello redes de representación lo suficientemente sólidas para dar muestra de la comprensión del objeto mismo.

Referencias Bibliográficas

Adame, A. (2017). Una propuesta de Enseñanza para la Construcción y Comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en el Nivel Medio Superior. Tesis sin publicar, Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México.

Artigue, M., Douady, R. Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Recuperado de:

http://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, Vol. 5.*

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Diferent Representations Liked to the Concept of Function. *JMB, Journal of Mathematical Behavior*. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Hitt, F. (2003). *Que signifie être compétent dans une théorie des représentations des concepts mathématiques?* Universidad Francisco de Paula Santander, Colombia.

Programa de la Materia de Geometría y Trigonometría del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes. Recuperado de: http://www.uaa.mx/centros/cem/

Torres, C. (2004). Lo visual y lo deductivo en matemáticas. *Miscelánea Matemática Núm. 40.*

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics.* Mathematical Association of America.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO, HEURÍSTICO Y CREATIVO EN AMBIENTES VIRTUALES: UNA PROPUESTA

José Efrén Marmolejo Valle, Gema Rubí Moreno Alejandri, José Efrén Marmolejo Vega

jmarmolejov@uagrovirtual.mx, *alejandrigemath@uagrovirtual.mx*, *efrenmarmolejo@uagrovirtual.mx*

Para citar este artículo:

Marmolejo, Valle, J. E., Rubí, A. Marmolejo, Vega J. E. (2017). Desarrollo del pensamiento lógico, heurístico y creativo en ambientes virtuales: Una propuesta. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO, HEURÍSTICO Y CREATIVO EN AMBIENTES VIRTUALES: UNA PROPUESTA

José Efrén Marmolejo Valle, Gema Rubí Moreno Alejandri, José Efrén Marmolejo Vega
jmarmolejov@uagrovirtual.mx, alejandrigemath@uagrovirtual.mx, efrenmarmolejo@uagrovirtual.mx

Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad Matemáticas y Sistema de Universidad Virtual, México.

Palabras Clave: Pensamiento lógico, heurístico y creativo, ambientes virtuales, enseñanza problémica.

Resumen

Desde la Declaración Mundial sobre la Educación Superior en el Siglo XXI (UNESCO, 1998) se tiene un marco para analizar las ventajas y el potencial de las nuevas tecnologías de la información y comunicación en los nuevos entornos pedagógicos que están surgiendo en la educación a distancia y los sistemas "virtuales" de enseñanza.

En este trabajo se muestran las experiencias en la Unidad de Aprendizaje en modalidad virtual de "Pensamiento Lógico, Heurístico y Creativo" (PLHyC) de la Etapa de Formación Institucional de las carreras de Licenciatura de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro).

Bajo perspectiva teórica de la Enseñanza Problémica y de la relevancia que hoy tienen las Tecnologías de la Información y Comunicación se diseñó el curso de Pensamiento lógico, heurístico y creativo. Esta propuesta se ofrece en línea por el Sistema de Universidad Virtual a través de su plataforma multimodal. La metodología propicia un ambiente proactivo en el que el alumno transita de la intuición a la formalización de argumentos y razonamientos mediante la realización de actividades lúdicas interactivas de búsqueda de estrategias y procesos lógicos, conducentes a que con argumentaciones cada vez más consistentes concluyan en explicaciones fundamentadas.

Introducción

Desde la Declaración Mundial sobre la Educación Superior en el Siglo XXI (UNESCO, 1998) se tiene un marco para analizar las ventajas y el potencial de las nuevas tecnologías de la información y comunicación en los nuevos entornos pedagógicos que están surgiendo en la educación a distancia y los sistemas "virtuales" de enseñanza. Así, las Instituciones de Educación Superior (IES) están obligadas a dar respuesta a las necesidades de su entorno económico y social en forma integral. Bajo este marco, es necesaria la implementación de modelos educativos innovadores, aplicando de forma integral las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) y las Tecnologías del Aprendizaje y Conocimiento (TAC) a efectos de que puedan brindar mejores servicios educativos de calidad e inclusión social.

En particular, la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro) tiene muy claro que debe fortalecer, expandir y diversificar de manera permanente sus capacidades de educación a distancia o virtual, abierta y continua. Por lo tanto, para ampliar la oferta educativa en modalidad a distancia el H. Consejo Universitario reformó su estructura organizativa en 2013 incorporando la Universidad Virtual, instancia que el 20 de marzo de 2015 pasó a ser Sistema de Universidad Virtual (SUVUAGro) cuyo objetivo es: Desarrollar oferta educativa a distancia a través de un modelo académico, curricular y pedagógico apoyado en las TIC, que forme recursos humanos en los distintos niveles educativos que oferta la UAGro, capaces de aplicar conocimientos y valores adquiridos en el entorno social, económico y tecnológico, contribuyendo a su progreso y al de la sociedad. El SUVUAGro tiene la facultad de generar, diseñar, implementar, evaluar y administrar la oferta educativa de tipo medio superior y superior, así como educación continua en la modalidad a distancia o virtual. Para lograrlo mantiene vinculación con las Escuelas y Facultades interesadas en ofertar y desarrollar Programas Educativos (PE), actualización docente, unidades de aprendizaje (UAp) y cursos de educación continua en dicha modalidad y mediante el establecimiento de nodos académicos regionales de la UAGro Virtual y nodos comunitarios en el estado de Guerrero y fuera de sus fronteras para fortalecer estas acciones, de acuerdo a las necesidades y exigencias de la sociedad.

Para ello, cuenta con un sólido equipo interdisciplinario de profesionales formado por expertos en contenidos, en pedagogía, tecnología educativa y en entornos virtuales, diseñadores gráficos, comunicólogos, programadores, correctores de estilo, mercadólogos, psicólogos, etc., que trabajan de manera colaborativa y coordinada para hacer posible el diseño y producción de ambientes virtuales de aprendizaje.

Este trabajo es el resultado de experiencias en la Unidad de Aprendizaje en modalidad virtual de “Pensamiento Lógico, Heurístico y Creativo” (PLHyC) de la Etapa de Formación Institucional de las carreras de Licenciatura de la UAGro, impartida por el Sistema de Universidad Virtual y diseñada conjuntamente con investigadores de la Facultad de Matemáticas.

Referente teórico

Acerca de los aspectos relativos a la modalidad a distancia

Desde la Declaración Mundial sobre la Educación Superior en el Siglo XXI, la UNESCO (1998) se refiere a las ventajas y el potencial de las nuevas tecnologías de la información y comunicación…”al crear nuevos entornos pedagógicos que van desde los servicios de educación a distancia hasta los establecimientos y sistemas “virtuales” de enseñanza superior capaces de salvar las distancias y establecer sistemas de educación de alta calidad, favoreciendo así el progreso social y económico y la democratización así como otras prioridades sociales importantes”.

Así también, este organismo advierte que “Las nuevas tecnologías abren paso a una educación basada en el desarrollo del aprendizaje electrónico (e-learning). Este término sirve para designar una amplia gama de utilizaciones de esas tecnologías, desde el trabajo en ordenador de las aulas hasta las carreras cursadas totalmente a distancia que han aparecido hace poco. La enseñanza virtual permite una supervisión individualizada, unida a una flexibilidad de la gestión del aprendizaje y a una mayor autonomía en la adquisición del saber. Más allá de las ofertas educativas institucionales, Internet tiende a convertirse en el medio privilegiado de la autodidáctica, suministrando instrumentos de aprendizaje informal y facilitando la creación de aulas virtuales.”

En tanto que en 2009 la UNESCO destaca que “El aprendizaje abierto y a distancia y el uso de las TIC ofrecen oportunidades de ampliar el acceso a la educación de calidad, en particular cuando los recursos educativos abiertos son compartidos fácilmente entre varios países y establecimientos de educación superior.” Así mismo, asegura que “La aplicación de las TIC a la enseñanza y el aprendizaje encierra un gran potencial de aumento del acceso, la calidad y los buenos resultados:”

Para diseñar Unidades de Aprendizaje a distancia se utiliza el modelo pedagógico del SUVUAGro que promueve un aprendizaje socio-constructivista centrado en el aprendiente, de carácter flexible ya que el aprendiente puede realizar actividades síncronas y asíncronas, las actividades programadas no requieren establecer horarios para todos los actores que intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje, cada uno realiza sus actividades de acuerdo a su disponibilidad de tiempo y las pautas establecidas por el SUVUAGro. En este modelo se hace énfasis en el auto-aprendizaje del aprendiente con la orientación del facilitador y apoyado en todo momento por un monitor académico y el responsable del soporte tecnológico, fomentando el apoyo e intercambio de conocimiento con todos los actores (Figura 1).

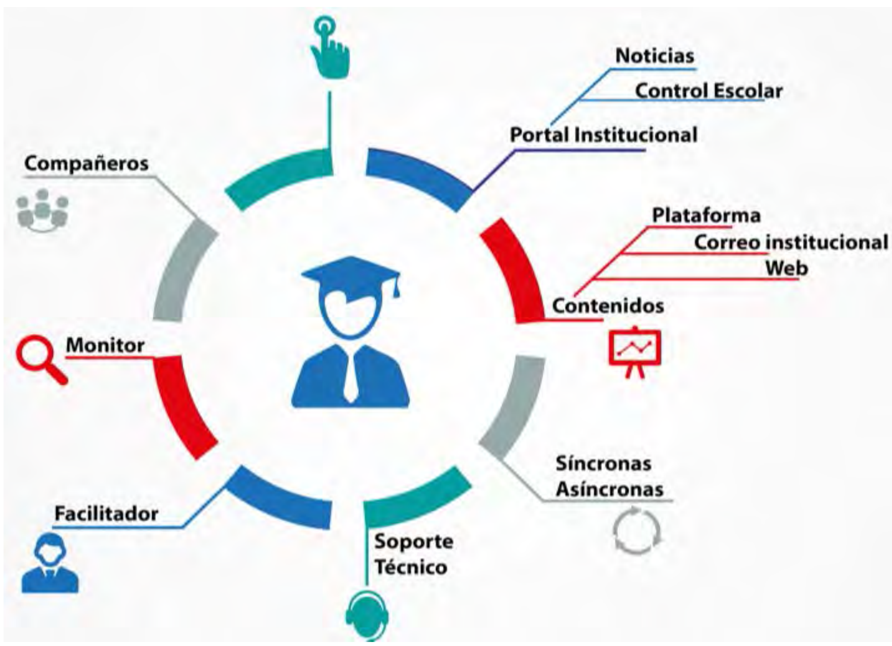


Figura 1. Modelo pedagógico SUVUAGro (Marmolejo, 2016).

El diseñar estrategias de aprendizaje en ambientes virtuales requiere mucho compromiso para mantener la calidad que requieren las nuevas necesidades de los ciudadanos digitales con la incorporación de esquemas de aprendizaje autónomo, además de aportar herramientas de inclusión y alfabetización digital para no aumentar la brecha cognitiva que hoy en día existe.

Los diseñadores deben de tener muy claro que la implementación de la tecnología no implica por sí misma mejores resultados académicos, se requiere del análisis y el sustento pedagógico de modelos educativos en ambientes virtuales.

Las estrategias de aprendizaje son procedimientos que un aprendiente emplea en forma consciente, controlada e intencional como instrumentos flexibles para aprender significativamente y solucionar problemas (Gaskins y Elliot, 1999). Por lo tanto es fundamental que el experto en contenidos y el diseñador instruccional diseñen estrategias de aprendizaje bien definidas para propiciar una comunidad de aprendizaje y permitir que los aprendientes investiguen los contenidos temáticos como información de interés personal. Cuando se crea una comunidad de aprendizaje podemos con ella, lograr que los estudiantes sean líderes en su aprendizaje y por lo tanto se logra la responsabilidad del autoaprendizaje (Marmolejo, 2016).

Los facilitadores y diseñadores de contenidos de las UAp en la modalidad virtual utilizan una amplia taxonomía digital (recursos aplicados a una estrategia de aprendizaje) que permite diseñar utilizando las herramientas web más innovadoras para enriquecer el proceso se enseñanza aprendizaje.

Figura 2. Plataforma de ambiente virtual de aprendizaje

Acerca de la Enseñanza Problémica como concepción teórica subyacente

Como premisa del Enfoque Histórico Cultural, el hombre comienza a pensar sólo cuando aparece la “necesidad de comprender algo”. De modo que, “el momento inicial del pensamiento es generalmente una situación problémica”.

La *enseñanza problémica*, según Majmutov (1983), busca la “asimilación no solo de los resultados del conocimiento científico, sino también de la vía, del proceso de obtención de dichos resultados; incluye , asimismo, la formación de la independencia cognoscitiva del alumno y el desarrollo de sus capacidades creativas”. De modo que, coadyuva al “desarrollo de las necesidades cognoscitivas y a la formación de una personalidad intelectualmente activa” del alumno. Justo estos elementos teóricos, son compatibles con la intencionalidad institucional de esta unidad de aprendizaje.

La Enseñanza Problémica posee categorías fundamentales: la situación problémica, el problema docente, la pregunta problémica y las tareas problémicas. A continuación se describen brevemente.

Una *situación problémica* es “un estado psíquico de dificultad intelectual que surge en el hombre cuando en una situación objetiva no puede explicar el nuevo hecho mediante los conocimientos que tiene o los métodos que ya conoce sino que debe hallar un nuevo método de acción” (Majmutov, 1983).

Hernández (2008) afirma que en la situación problémica provoca en el alumno: a) desconocimiento de la solución, pero conciencia de que existen posibilidades cognoscitivas para resolver la contradicción; b) enfrentamiento a algo incomprensible, desconocido, inesperado, alarmante; c) motivan por la solución de la contradicción implícita.

Es necesario aclarar que la pregunta, condiciones o medio diseñado no se ha de confundir con la situación que se propone provocar en el alumno, el cual es un estado psíquico interno, contradictorio, que provoca una insatisfacción entre lo conocido y lo que está por conocer (la propia situación problémica). Estos estados de conflicto cognitivo son, desde este punto de vista, propiciadores de la actividad intelectual denominada actividad de aprendizaje.

De manera que, en el diseño se buscó que mediante la interacción entre el alumno y el entorno virtual surjan situaciones problémicas que planteen una meta comprensible para quien la va a resolver y que permita aproximaciones a la solución a partir de sus conocimientos previos, a través de las actividades planteadas.

En el análisis de la situación problémica, donde se separa lo conocido y lo buscado y se determinan sus nexos, es decir, se realiza la formulación del *problema docente*. Las intuiciones implicadas en la búsqueda de respuestas son resultado de un proceso de organización de la información con la que se cuenta y de su diálogo con los nuevos datos.

Después, comienza el proceso de búsqueda de su solución, esto es, la *tarea problémica*: "... una actividad que conduce a encontrar lo buscado, a partir de la contradicción que surgió durante la formación de la situación problémica en que se reveló la contradicción" (Majmutov, 1983).

Se delega al alumno el desarrollo independiente de estas dos categorías en un primer momento del curso.

En esta diligencia el facilitador estimula a los alumnos empleando *preguntas problémicas* cuando es necesario. Se trata de un impulsor directo del movimiento del conocimiento. "La pregunta se argumenta y contesta de una vez, es un eslabón en la cadena del razonamiento que suponen las actividades propuestas por la tarea. Como eslabón de la cadena, la pregunta expresa, de forma concreta, la contradicción entre los conocimientos y los nuevos hechos" (Majmutov, 1983). Sin embargo, no cualquier pregunta es problémica. Para alcanzar este estatus, la pregunta debe tener un carácter heurístico, y por tanto, compromete a cuidarse en su formulación de no descubrir el paso siguiente. Es un estímulo a la reflexión del alumno en la búsqueda independiente de la solución del problema. Esto evidencia la importancia que tiene para el facilitador el desarrollo de habilidades para la elaboración esmerada de las preguntas problémicas.

En este punto la bina *Evidencias-Cuestionario de Reflexión* aporta a los facilitadores información con la que se puede valorar: a) el proceso de resolución realizado, y b) los rasgos esenciales de las formas del pensamiento lógico, heurístico, y creativo (desde la percepción del alumno) en los que centró su atención el alumno. Esto permite al facilitador, proveer al alumno preguntas problémicas necesarias para identificar, concluir, continuar, analizar, o redireccionar ideas de solución.

En la solución de un problema nuevo, no es suficiente poseer un amplio bagaje de conocimientos, más bien es necesario dominar algunas técnicas y estrategias para atacar el problema. Generalmente el proceso se inicia con procedimientos de ensayo y error: se prueban hipótesis, ideas, resultados particulares (Polya, 1970). Al resolver varios problemas cuidadosamente seleccionados, poco a poco se van construyendo ciertas relaciones que permiten elaborar procedimientos más sistemáticos.

Metodología

La metodología para el diseño de UAp del Modelo SUVUAGro es evolucionar de metodologías centradas en el facilitador a metodologías de aprendizaje centradas en el aprendiente, que requiere de su participación en la toma de decisiones y responsabilidades en el proceso de aprendizaje. La estructura didáctica considerada en el Modelo SUVUAGro permite diseñar estrategias didácticas como un proceso interactivo de toma de decisiones entre el aprendiente y el facilitador, donde la participación del aprendiente es un elemento central.

La UAp se diseño de tal manera que los aprendientes desarrollen los conocimientos y habilidades necesarias para lograr los objetivos de aprendizaje tanto a nivel de cada UAp como el perfil de egreso. Es importante considerar que para el diseño de Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA) se debe resaltar la orientación interdisciplinaria y aplicada al Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), desde esta perspectiva, el esquema didáctico adquiere una posición central y uno de los aspectos principales con que se enfrenta es la identificación y definición de los elementos esenciales del entorno de aprendizaje en el proceso de diseño, utilización y evaluación de los AVA.

Esta estructura didáctica contempla la presentación y por cada bloque 3 etapas en donde se clasifica el tipo de actividades a desarrollar en actividades de inicio, desarrollo y cierre, la UAp está diseñada en la plataforma del campus virtual. Se utiliza el LMS Moodle adaptado y rediseñado al modelo del SUVUAGro.

La estructura general del curso consta de tres bloques. Inicia colocando al aprendiz frente a situaciones problémicas extraídas de juegos de lógica, estrategia y creatividad. Por decisiones didáctico-metodológicas los tres bloques corresponden a funciones específicas: Experimentación inicial, Institucionalización y Contextualización.

En el bloque I las actividades diseñadas se eligieron de modo que promovieran la construcción de conceptos a partir de experiencias concretas, en las que los alumnos puedan observar, explorar, conjeturar, interactuar entre ellos y con el facilitador.

El incentivo y la motivación intrínseca que supone el entretenimiento, el juego en particular, como acto voluntario y deseado que se hace por sí mismo es de inestimable valor en el contexto educativo (García, 2016). De modo que, gran parte de las actividades propuestas resaltan su aspecto lúdico debido a su enorme potencial.

Algunos autores (Bañeres, et al, 2008; García, 2016), han confirmado beneficios educativos del juego como: infundir estímulo por sí mismo, desarrollador del pensamiento abstracto debido a que la ficción del juego es una vía para ello, reductor de la gravedad de las consecuencias de los errores y los fracasos, desarrollar estrategias para ganar, facilitador del establecimiento de relaciones e inferencias, ser un medio socializador y de exploración conceptual, ser un medio de exploración y de invención, propiciar el espíritu de iniciativa y la creatividad, finalmente, potenciar actitudes como las de auto-confianza y perseverancia en la búsqueda de soluciones.

Otro objetivo es que, a través de actividades específicas, los alumnos identifiquen las características del pensamiento lógico, heurístico, y creativo. Para ello, acompañando a cada actividad, se invita a reflexionar sobre el proceso de realización de éstas, con la finalidad de fijar la atención en los rasgos esenciales de las formas del pensamiento lógico, heurístico, y creativo (desde la percepción más básica hasta formas más elaboradas de razonamiento y de argumentación).

El bloque II pretende institucionalizar las reflexiones realizadas en el primer bloque, ahondando ahora en las características del pensamiento heurístico, creativo y lógico. El objetivo es crear consciencia en el alumno de que los procesos experimentados por él se corresponden con los preceptos teóricos. El conocimiento de estas técnicas y estrategias, así como las habilidades para hacer uso de ellas en situaciones problémicas son el centro de interés en este bloque. Se busca que ellos retomen las actividades y reflexionen nuevamente, pero ahora desde los elementos teóricos expuestos. Las actividades pretenden, por ejemplo, concientizar que el uso de los principios y estrategias heurísticas ayuda significativamente en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.

Para sistematización de los conceptos abordados se concluye con una fase que comprende un conjunto de actividades de mayor profundidad, en las que se invita a reflexionar y argumentar sobre las formas de pensamiento heurístico, lógico y creativo (enfatizando las características esenciales de estas).

Finalmente, el bloque III consiste en la elaboración de un proyecto basado en la experiencia obtenida en el curso, del conocimiento pertinente del área específica de su formación y de la consulta a expertos del área profesional de estudiante. El propósito es identificar formas del pensamiento, implícitas o explícitas, en la situación específica identificada, argumentando con suficiencia lo ya expuesto. En esta fase se requiere que participen en foros de discusión para comunicar los resultados obtenidos y cómo se desarrollaron las actividades.

rimentación inicial

Institucionalización

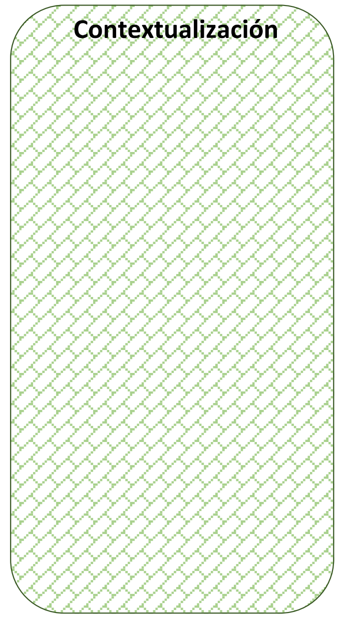


Figura 3. Estructura metodológica del Curso PLHyC

Resultados

De los resultados que se han obtenido al llevar este curso a un ambiente virtual se enfatizan los siguientes:

- **Beneficios de la evaluación no automatizada**.
  Dado que la evaluación por parte del facilitador no está automatizada, hay una personalización en los comentarios de retroalimentación en el momento de evaluación (incluso, en algunos casos, previo a ese momento). De manera que el estudiante puede atender (por elección personal) a los comentarios y mejorar su desempeño en dicha actividad. Así, se han dado casos de retroalimentaciones reiteradas a los diferentes niveles de resolución de cierta actividad alcanzados por los alumnos. Las preguntas problémicas han sido, en este proceso, el motor de este progreso.

Actividad 3.2 La Mosca Saltarina	100.00	0–100	100.00 %	Qué bueno que la simetría te haya ahorrado tiempo, energías y esfuerzo en tu exploración… Sólo quedó algo… La actividad consistía en averiguar "si podrá conseguirlo siempre. Si es así, describe un recorrido posible. Si no lo es, demuestra por qué." Es decir, había que ver si lo podía lograr desde cualquier casilla, de modo que había que analizar en cuáles sí y en cuáles no (lo hiciste) y por qué (esa explicación faltó para las que experimentaste pues queda claro para las simétricas a éstas). ¿Tu cuestionario de reflexión?
Actividad 3.4 ¿No le diste cuerda a tu reloj?	80.00	0–100	80.00 %	Hola Iván, dices que Carlos antes de salir de su casa para ir a casa de su amigo miró la hora que era, cuando llegó a casa de su amigo miró la hora para ver cuanto tiempo tardaba de su casa a la de su amigo. ¿crees que así se calcula correctamente el tiempo de ida?¿no se supone que el reloj se detuvo en algún momento del día y tiene una hora no exacta? Por otra parte, en que parte de tu razonamiento ocupas el hecho de que ¿Cómo es posible esto sin saber de antemano el tiempo que tardaba en el camino? (Supongamos que el tiempo de ida a casa del amigo es exactamente igual al tiempo de vuelta). Me parece que en tu razonamiento no diste cuenta de estos detalles.
Actividad 3.5 Trece ratones	100.00	0–100	100.00 %	Bien hecho
Actividad 3.8 Descomposición de figuras	70.00	0–100	70.00 %	Hola Iván te felicito por tu gran esfuerzo, te invito a que posteriormente retomes con iniciativa la resolución de este problema.

Figura 4. Ejemplo de comentarios de retroalimentación en la evaluación de las actividades

- **Valor especial de los *cuestionarios de reflexión* a cada actividad.**
  La evaluación no se centra en la solución (por si sola) de la situación problémica.
  Los cuestionarios de reflexión, después de cada actividad resuelta, han tenido un valor esencial en la valoración de las acciones realizadas en la resolución de la actividad planteada, así, como para el planteamiento de comentarios de retroalimentación. El contar con estas reflexiones, aunado a las evidencias entregadas del proceso de resolución de la situación problémica, ofrece a los facilitadores amplia información que ayuda a valorar tanto el proceso de resolución realizado, como los rasgos esenciales de las formas del pensamiento lógico, heurístico, y creativo en los que centró su atención el alumno. A su vez, con esta información, el facilitador está en posición de proveer al alumno preguntas problémicas necesarias para identificar, concluir, continuar, analizar, o incluso redireccionar ideas de solución.

Figura 5. Muestra de la bina *Evidencias de la actividad realizada-Cuestionario de Reflexión a la misma* en el desarrollo de un Tema en particular.

- **El papel de los foros en la reflexión y coevaluación de lo aprendido.**
  Ortíz (2004), recalca que “el estudiante no adquiere la experiencia histórico-social solamente mediante su propia actividad, sino también en su interacción comunicativa con otras personas”. En este sentido, la intercomunicación entre alumnos y con el facilitador que se desarrolla en los foros como espacio de reflexión, afirmación y refutación de argumentos referidos a las actividades del curso, fortalecen el aprendizaje de los participantes, pues al contrastar sus ideas con las de los otros se reafirman o modifican sus concepciones, las que al interiorizarlas conscientemente le producen un aprendizaje significativo. Es previsible que al inicio los argumentos sean poco específicos, dando oportunidad al facilitador de intervenir con preguntas problémicas que orienten el desarrollo y fortalecimiento de las argumentaciones y focalicen convenientemente el tema de discusión.

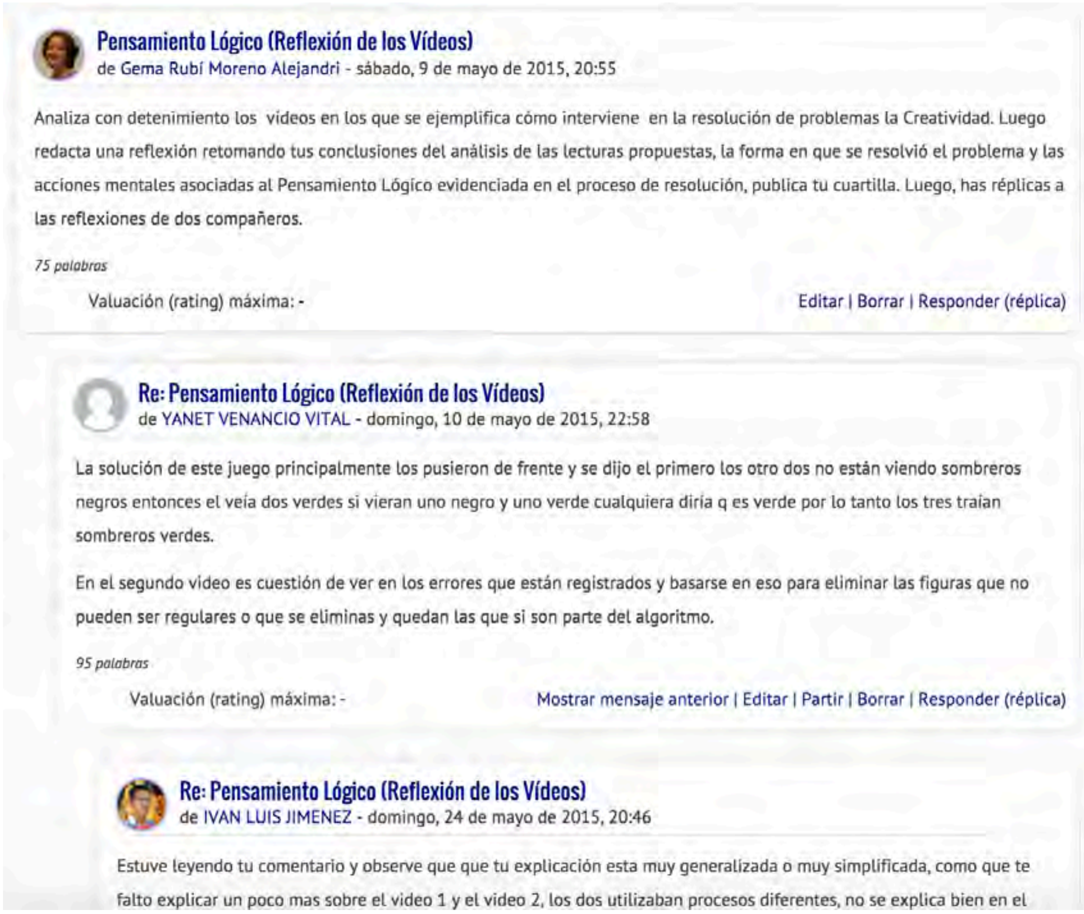


Figura 6. Ejemplo de participación de los alumnos en los foros de reflexión.

Conclusiones

La experiencia hasta ahora obtenida reporta que las actividades interactivas en Ambientes virtuales, flexibilizan el proceso de enseñanza y potencian el de aprendizaje, propiciando un espacio de aprendizaje a distancia para la confrontación de los estudiantes con situaciones problémicas que permitan poner en práctica de manera consciente sus habilidades del pensamiento.

Lo hasta ahora experimentado nos conduce a reflexionar, y profundizar sobre la hipótesis hasta ahora planteada del valor epistemológico que las tecnologías representan para la construcción del conocimiento, es necesario que las plataformas de aprendizaje que se utilicen, se adapten a nuestras necesidades académicas y no nosotros a ellas.

Se debe fomentar en las instituciones la cultura digital, en la formación en habilidades digitales docentes y redefinir los roles de los actores del proceso de aprendizaje.

Para enfocar al aprendiente como un ser creativo, con habilidades y talento requiere de un facilitador con una visión crítica y más responsable que la del docente tradicional. Debido a que no solo proporciona una atención individual o provoca momentos de trabajo colaborativo sino que debe desarrollar la competencia de profundizar en las inteligencias múltiples para orientar a los aprendientes en las actividades a realizar.

Desde una perspectiva crítica y constructivista requiere que la plataforma de aprendizaje sea flexible para adaptar diferentes estrategias planeadas al diseñar el curso y tener las competencias para trabajar el aprendizaje situado, por ejemplo con aprendientes de diferentes carreras como lograr un aprendizaje interdisciplinar para resolver un problema en común según su contexto. Esta motivación de aprendizaje situado permitirá generar un nuevo aprendizaje colaborativo intercultural.

Referencias bibliográficas

Bañeres, et al (2008). *El juego como estrategia didáctica*. Claves para la innovación educativa. Venezuela: Editorial Laberinto Educativo.

García, L., (2016). El juego y otros principios pedagógicos. Supervivencia en la Educación a Distancia y Virtual. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 19 (2), 09-23.

Gaskins, I., y Elliot, T., (1999). *Cómo enseñar estrategias cognitivas en la escuela*. Argentina: Paidós.

Hernández, J., (2008). La enseñanza problémica. Su importancia en la motivación. *Varona*. 46, 40-45.

Majmutov, M., (1983). *La Enseñanza Problémica*. Cuba: Pueblo y Educación.

Marmolejo, E., (2012). *Los retos del docente 3.0.* Recuperado el 1 de Septiembre, 2015, de http://biotecnolocus.com/somece2012/2012memorias/eSOMECE.html

Marmolejo, E., (2016). Modelo de educación a distancia para la Universidad Autónoma de Guerrero. Tesis Doctoral no publicada, Colegio de Guerrero A.C, México.

Ortiz, A., (2004). *Metodología de la enseñanza problémica en el aula de clases*. Colombia: Ediciones ASIESCA.

Polya, G., (1970). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

UNESCO (1998). Declaración Mundial sobre la Educación Superior en el siglo XXI: Visión y Acción. Conferencia Mundial sobre la Educación Superior. Francia.

UNESCO (2005). *Hacia las sociedades del conocimiento.* Ediciones. UNESCO.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

GENERALIZACIÓN A TRAVÉS DE SUCESIONES FIGURALES EN BACHILLERATO

Mónica Torres Ibarra, Elvira Borjón Robles, Leticia Sosa Guerrero, Nancy Calvillo Guevara

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

mtorres@matematicas.reduaz.mx, borjonrojo@hotmail.com, lsosa19@hotmail.com, ncalvill@matematicas.reduaz.mx

Para citar este artículo:

Torres, M., Borjón, E., Sosa, L. (2017) Generalización a través de sucesiones figurales en bachillerato. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

GENERALIZACIÓN A TRAVÉS DE SUCESIONES FIGURALES EN BACHILLERATO

Mónica Torres Ibarra, Elvira Borjón Robles, Leticia Sosa Guerrero, Nancy Calvillo Guevara

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

mtorres@matematicas.reduaz.mx, borjonrojo@hotmail.com, lsosa19@hotmail.com, ncalvill@matematicas.reduaz.mx

Palabras clave: sucesiones figúrales, generalización, álgebra, representaciones

Resumen

La presente investigación tiene por objetivo promover la generalización de patrones reconocida como uno de los procedimientos principales de la producción del conocimiento, partiendo de sus tres problemas fundamentales: Fenomenológico, epistemológico y Semiótico (Radford, 2013), particularmente se promueve el desarrollo del pensamiento algebraico. Se diseña e implementa un instrumento apoyado de tecnología (Microsoft Word, Geogebra y Moodle) que permite identificar los diferentes elementos que componen el concepto de sucesión: dominio, codominio, conjunto discreto de puntos, etc. a partir de una aproximación visual de secuencias figúrales de patrones, buscando con ello un acercamiento al concepto de sucesión en alumnos de bachillerato. Este trabajo tiene relevancia debido a que las sucesiones aparecen en los diferentes niveles de educación en México y en pruebas de ingreso a nivel profesional.

Keywords: figurative sequences, generalization, algebra, representations

Abstract

The present research aims to promote the patterns generalization recognized as one of the main procedures of production knowledge, starting from its three fundamental problems: Phenomenological, Epistemological and Semiotic (Radford, 2013), particularly promotes the development of algebraic thinking. It is designed and implemented an instrument supported by technology (Microsoft Word, Geogebra and Moodle) that allows to identify the different elements that make up the concept of succession: domain, codominio, discrete set of points, etc. from a visual approximation of patterns sequences of figures, thus seeking an approach to the concept of succession in high school students. This work has relevance because successions appear in the different levels of education in Mexico and professional admission tests.

Introducción

La habilidad de contar con un razonamiento matemático está presente en la vida diaria y se fomenta en los planes y programas de estudio en la Educación básica en México, como lo describen Torres, Borjón y Hernández (2013), quienes hacen un análisis de los objetivos planteados en cada uno de los niveles sobre el tema de sucesiones; ellas mencionan la importancia de este concepto al promover en el educando desde la noción de orden, pasando por la formulación de relaciones y creación de reglas, hasta la interpretación de modelos en diferentes situaciones; que convergen necesariamente en la generalización.

Sin embargo, llegar a esta generalización no es una tarea fácil, Radford (2012) menciona que los alumnos tienden a centrarse en la estructura numérica de los términos y no en su estructura espacial y que esta última es la que provee los índices perceptivos generalizables, indicando que, para lograrlo, el alumno debe pasar por procesos de determinación y abstracción.

Con base en ello, se trabaja en una propuesta que pone en juego estructuras espaciales por medio de sucesiones figúrales, que con el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, como apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje, contribuye en la formación de imágenes mentales que encaminan al alumno a la estructuración del concepto de sucesión.

Por otra parte, el trabajo con representaciones figúrales ha estado enfocado a niveles de enseñanza básica, sin embargo, consideramos que poner en juego este tipo de estrategias en niveles avanzados permitirá acceder a un entendimiento conceptual, en concordancia con lo que afirma Zimmermann (1990, citado en Hitt, 2003, pág. 217)

> *Conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso de cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema.*
>
> *Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual, el cual es ampliamente reconocido como carente en la mayoría de los cursos de cálculo como es actualmente enseñado. La manipulación algebraica ha sido enfatizada en demasía y . . . en el proceso el espíritu del cálculo se ha perdido.*

Así pues, el trabajo se fundamenta en la representación figural, a partir de la cual se propiciará un tránsito entre diferentes representaciones del concepto de sucesión, lo que permitirá que el alumno externe sus imágenes mentales, es decir, la visualización que alcanza.

Referente Teórico

Trabajar con el tema de sucesiones, promueve en los educandos un razonamiento matemático que permite alcanzar diversos niveles de abstracción para representar y dar solución a un problema determinado. De acuerdo al análisis de Torres, Borjón y Hernández (2013), en el nivel bachillerato, el aprendizaje esperado al trabajar con sucesiones es que el estudiante pueda "Analizar las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento", así pues, el contenido de nuestra propuesta está encaminado a potenciar el pensamiento algebraico del concepto de sucesión al identificar los elementos que componen al mismo y generalizarlo, es decir, estimar el comportamiento en un punto.

Partimos de la premisa de que la generalización, debe atender tres problemas fundamentales mutuamente relacionados que menciona Radford (2013, pág. 3):

1. *Fenomenológico, planteado alrededor de la escogencia de las determinaciones sensibles, un problema en el que participan entre otros, la intuición, la intención, la atención y la sensibilidad.*
2. *Epistemológico, que consiste en la extrapolación o generalización propiamente dicha y a través de la cual se produce el nuevo objeto.*
3. *Semiótico, que resulta de los medios a través de los cuáles se denota el objeto generalizado.*

De esta manera, una secuencia figúral, permitirá a los alumnos identificar determinaciones sensibles como similitudes y diferencias de patrones, que no solo se basen en cantidades, sino en formas, colores, acomodos, etc., de acuerdo con los elementos que envuelven la generalización:

1. *Una característica común local es notada a partir de un número finito de términos, esta etapa requiere hacer una escogencia entre determinaciones sensibles potenciales.*
2. *Esa característica es generalizada a los otros términos de la secuencia. La generalización puede ser algo que es solamente plausible (abducción):*
   a. *Cuando es usada para pasar de un término a otro, llegamos a una generalización aritmética – No hay deducción.*
   b. *Cuando se realiza por ensayo y error, los alumnos producen la fórmula, pero no la deducen – Todavía no es algebraica.*
   c. *Cuando la característica es utilizada de manera analítica, usada para producir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término llegamos a una generalización algebraica.*

(Radford, 2013, pág. 6-7)

La figura 1, muestra en forma de diagrama, lo que Radford (2013) expresa para lograr la generalización algebraica de secuencias figúrales

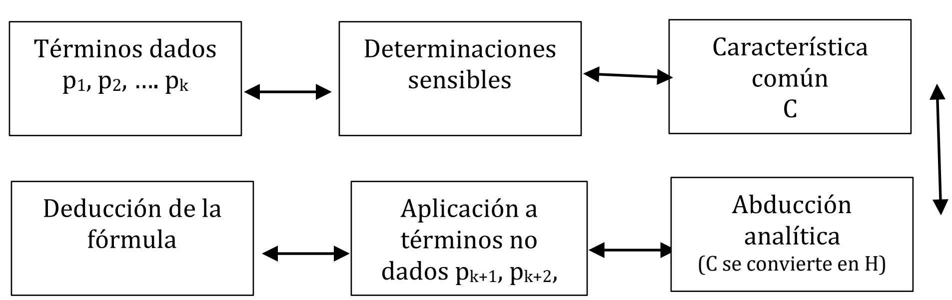


Figura 1. Diagrama del proceso de generalización algebraica de secuencias figúrales (Radford, 2013)

Para encaminar a la abducción, se hace uso de algunas representaciones semióticas, (Duval, 1999), entendidas como "una forma de exteriorizar las representaciones mentales por medio de producciones constituidas por el empleo de signos, Las producciones se pueden representar de forma verbal, numérica, algebraica y gráfica; pueden incluir diferentes formas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc.", es decir, estas representaciones pueden ser utilizadas con la como una forma visualización, donde los alumnos exterioricen las determinaciones que dan lugar a sus conclusiones.

Zimmermann y Cunningham (1991) describen la visualización matemática como "el proceso de formar imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con ayuda de tecnología) usando tales imágenes efectivamente para un descubrimiento y comprensión matemática". En este sentido, entendemos por visualización la exteriorización de imágenes mentales con que los alumnos logran encaminarse hacia la conceptualización, que va más allá de la simple percepción, en concordancia con Hitt (2003), quien afirma que:

> *La percepción la tomaremos como la función por la que la mente de un individuo organiza sus sensaciones y se forma una representación interna de los objetos externos, en cambio, la visualización tiene que ver con un conocimiento directo e intuitivo que se realiza inconscientemente.*
>
> *(Hitt, 2003, pág. 207)*

Para alcanzar este objetivo, hacemos uso de software dinámico, en la idea de que este contribuirá en la formación y exteriorización de imágenes mentales, que, por medio de la visualización, encaminará a los estudiantes hacia la conceptualización de una sucesión, en concordancia con la idea de Hitt (2003), quien afirma:

> *Es necesario implementar en el aula de matemáticas tareas en las que la actividad matemática demande el uso coherente de diferentes representaciones. La tecnología, desde este punto de vista, servirá como herramienta fructífera para la construcción de conceptos matemáticos más profundos que se reflejen en procesos exitosos por parte de los estudiantes en la resolución de problemas.*
>
> *Hitt (2003, pág. 218)*

Metodología

La propuesta consta de una secuencia didáctica compuesta por cuatro ejercicios (en los que se trabajan dos sucesiones lineales y dos sucesiones cuadráticas) y un cuestionario guía, con el objetivo de aproximarlos a la generalización de sucesiones figúrales, con el apoyo de software para su ejecución, utilizado de la siguiente manera:

1. GeoGebra. Serie de aplicaciones diseñadas con la finalidad de que los alumnos interactúen, mediante representaciones figúrales, tabulares y gráficas, el comportamiento de las sucesiones que intervienen en la propuesta. (figura 2)

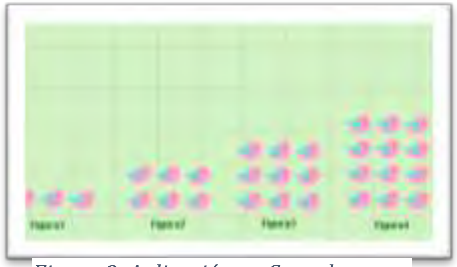


Figura 2. Aplicación en Geogebra

2. Microsoft Word. Instrumento en el que se describen, a través de preguntas guiadas, los pasos para llevar a cabo la secuencia, además, en él se almacenan los resultados de la experimentación individual de cada alumno (figura 3).

Figura 3. Cuestionario contestado en MSWord

3. Plataforma Moodle. Permite a los participantes tener acceso a los materiales diseñados, y una vez realizada la secuencia, es la base para la recogida de datos, los alumnos cuentan con datos para ingresar a la misma (figura 4).

Figura 4. Entorno de la plataforma Moodle utilizada

Con la interrelación de estas aplicaciones (ver figura 5), se espera que los alumnos sean capaces de:

1) Identificar el número de elementos de la figura dada en la n posición de una sucesión,
2) Ver a la sucesión como un conjunto de parejas ordenadas
3) Identificar dominio y codominio de los conjuntos de parejas obtenidos y
4) Generalizar la sucesión mediante representaciones analíticas.

Figura 5. Algunas de las sucesiones presentadas en GeoGebra

La dinámica se estructura de la siguiente forma: Se trabaja en dos sesiones de 50 minutos, con dos grupos de bachillerato, de 10 alumnos cada uno, los cuales tienen a su disposición un equipo de cómputo con acceso a internet para su trabajo individual; los alumnos acceden a la plataforma Moodle para descargar los archivos necesarios, trabajan simultáneamente entre GeoGebra y Word, (ver figura 6)

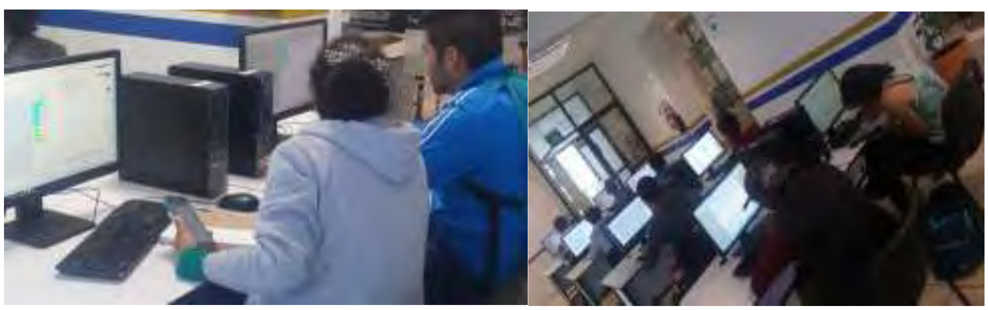


Figura 6. Alumnos interactuando entre las aplicaciones

En GeoGebra manipulan el valor de n como un deslizador que genera determinadas posiciones de la sucesión, así, mediante la representación figúral se caracterizan los problemas fenomenológicos, la representación tabular exterioriza los problemas epistemológicos y la representación gráfica y algebraica permiten analizar las estructuras semióticas, además, la representación verbal expresada en el archivo de Word, permitirá analizar la dimensión espacial que la secuencia figural les permite visualizar; finalmente, los participantes guardan las modificaciones en el archivo correspondiente y lo suben a la plataforma Moodle, donde se concentran para su posterior análisis.

Una vez almacenados los archivos, se termina la sesión y se procede a realizar la categorización de acuerdo con la fenomenología que propone Radford (2013), al mismo tiempo, se analiza si los alumnos identificaron las componentes del concepto (dominio, rango).

Resultados

A continuación, se presentan los principales resultados categorizados en fenomenológicos, epistemológicos y semióticos, separados de acuerdo con el tipo de problemas abordados en cada uno:

1. Problemas fenomenológicos, centrados en la representación figural.
    a. Problemas con sucesiones de comportamiento lineal, solo el 20% de los participantes pudieron descontextualizar la representación figural de su valor numérico, un ejemplo de ello se muestra en la figura 7, identificando que la secuencia tiene un comportamiento establecido entre el dominio y el rango, denotando con ello que para el nivel bachillerato, no se trabajan determinaciones sensibles de posición, si no que se encuentran en una dimensión epistemológica, en la que determinan el valor a través de una fórmula, es decir, logran una generalización aritmética.

Y, ¿Cómo cr
crees que s
final 2 estre
de figura m

Si Susana quiere construir la figura 30, explica ampliamente lo que debe hacer para construirla. Pues debe poner 3 de base y el número que quiere llegar en este caso 30 de altura

Figura 7. Representación verbal con identificación espacial

    b. Ejercicios de sucesiones con comportamiento cuadrático, el 11% de los participantes reflejan en sus respuestas determinación basada en forma y estructura de los componentes de la figura en la n posición (como se muestra en figura 8), mientras que 5 de cada 10 dan su argumento en base a una determinación numérica (ver figura 9).

El número de la figura, y el número de flores que contiene se relaciona de la manera n^2, es decir que a medida que el número de la figura aumenta, los elementos que posee la figura es el número de posición que ocupa por el mismo, en forma de un cuadrado, es decir de base el número de la posición de la figura y de altura el mismo número hasta cubrir toda la superficie de un cuadrado

Figura 8. Identificación espacial de una función cuadrática

Que aumenta una fila de base de 3 estrellitas en cada figura al deslizarse y va aumentando 3 estrellitas en cada figura.

Figura 9. Determinación aritmética del comportamiento de la función

2. Problemas epistemológicos, centrados en una representación tabular en la aplicación creada, donde los participantes interactúan con una representación tabular del concepto, autocompletando algunos campos y permitiendo que el usuario completara algunos otros situados estratégicamente, relacionando lo que se visualiza en la representación figural y el comportamiento a predecir en determinado punto (ver figura 10), esta estrategia permitió observar si los participantes utilizan un razonamiento epistemológico o semiótico a la hora de determinar valores numéricos.

Figura 10. Tránsito entre la representación figural y tabular del concepto

Los resultados muestran que el 50% de los participantes argumentan su respuesta basados en una estrategia epistemológica (figura 11), mientras que el 42% emplea una estrategia aritmética (figura 12) donde observan además vestigios del empleo de estructuras semióticas (figura 13); lo que permite deducir que para los estudiantes de bachillerato tiene un efecto más favorable la visualización numérica.

2. ¿Encuentras alguna relación entre los números que completaste?
Se multiplica el número de la figura por ella misma y se le suma 1

Figura 11. Uso de estrategias aritméticas

¿Encuentras alguna relación entre los números que completaste? Es la figura al cuadrado más 1.

Figura 12. Uso de estrategias epistemológicas

¿Encuentras alguna relación entre los números que completaste?

$f(n) = 3n - 1$

Figura13. Uso de estrategias semióticas

3. Estructuras semióticas, siguiendo el guion de la propuesta, una vez que los participantes logran transitar de la representación figural a la tabular, es momento de analizar el comportamiento de la sucesión en una representación gráfica (ver figura 15); en este sentido, se observa que esta representación es un elemento que les permite identificar en la mayoría de los casos de manera muy rápida una función y argumentar con base en estructuras semióticas, un ejemplo de ello se muestra en la figura 14. Cabe mencionar que esta representación causó sorpresa en los participantes al visualizar que los elementos de una sucesión se representan gráficamente como un conjunto de puntos discretos.

De acuerdo a lo que observas, qué relación existe entre los puntos y la función que graficaste en el punto anterior? Es una función elevada al cuadrado una parábola

Va aumentando de forma exponencial.

Figura 14. Argumentación en base a la representación gráfica

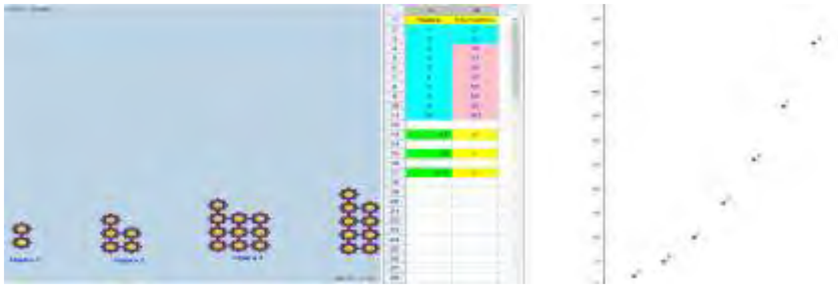


Figura 154. Manipulación de la secuencia en 3 representaciones simultáneas

Sin embargo, en relación con los problemas semióticos, aunque si bien el 93% de los participantes pudieron estructurar una fórmula que generalizará la secuencia, o bien describirla con sus propias palabras, existieron casos aislados en que este paso no se alcanzó, como se muestra en la figura 16.

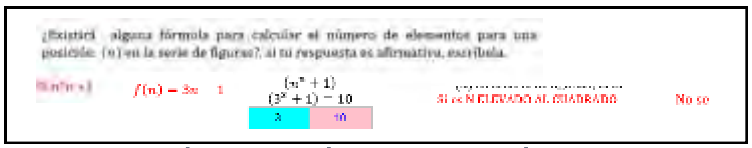


Figura 16. Algunas generalizaciones presentadas

4. Identificación de elementos del concepto, una vez que los estudiantes fueron visualizando los comportamientos en diferentes representaciones, se les pidió que detectaran algunos de los elementos del concepto, punto en el que se crearon algunas confusiones, al no relacionar la primera componente de las parejas ordenadas con el domino de la función, en este caso el lenguaje influyó de sobremanera, pues ellos no lo habían trabajado como componentes de parejas, sin embargo sus respuestas dan muestra también de que tienen clara la diferencia entre el dominio y el rango de la función, un ejemplo de esto se muestra en la figura 17.

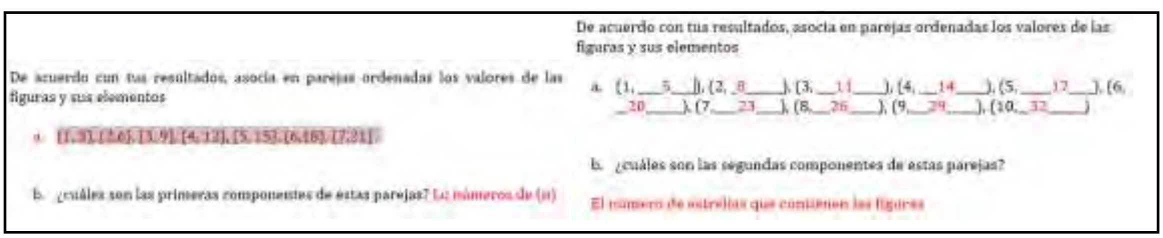


Figura 17. Identificación de dominio y rango

Conclusiones

El análisis de los resultados obtenidos en la puesta en marcha, ponen de manifiesto que los estudiantes de bachillerato son capaces de interpretar una sucesión figural, detectando en ella de manera acertada los elementos de la función, sus conjeturas dejan ver que hay indicios de una apropiación vaga del concepto.

Con respecto a alcanzar una visualización, encontramos si bien en su mayoría los estudiantes de bachillerato alcanzan un nivel epistemológico respecto a la representación figural, les es posible acceder al nivel semiótico una vez que el concepto se les presenta en las diferentes representaciones.

Respecto al uso de sucesiones figúrales en el nivel bachillerato, los resultados nos muestran que este tipo de representaciones permite a los estudiantes desprenderse del análisis aritmético y detectar la estructura espacial del concepto.

En general, consideramos que el uso de tecnología permitió la visualización matemática en el sentido de Zimmerman y Cunningham debido a que se partió de una imagen para deducir diversas componente de la sucesión, como por ejemplo conjunto de parejas ordenadas cuyo primer elemento es un número natural.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1999). Semiosis y Pensamiento Humano (Traducido por Myriam Vega Restrepo). Santiago de Cali Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. PNA, 6(4) (pp 117-133)

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En Rico, L., Cañadas M. C., Gutiérrez, J, Molina, M. y Segovia I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática, Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 2-12). Granada España: Editorial Comares

Torres, M., Borjón, E., Hernández, J. (2013). Una aproximación al concepto de sucesión con uso de tecnología por medio de representaciones semióticas en el nivel bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 2011-2018). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Zimmermann, W., y Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. Visualization in teaching and learning mathematics, 1-7.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO

Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Diana del Carmen Torres Corrales, Evaristo Trujillo Luque, Felipe de Jesús Castro Lugo, Julia Xóchilt Peralta García, Julio César Ansaldo Leyva.

Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON), México

jesuseduardo12@hotmail.com, *d.torres@live.com.mx*, *evaristo.trujillo@itson.edu.mx*, *felipe.castro@itson.edu.mx*, *julia.peralta@itson.edu.mx*, *julio.ansaldo@itson.edu.mx*

Para citar este artículo:

Hinojos, J. E., Torres, D. C., Trujillo, E., Castro, F. J., Peralta, J. X., Ansaldo, J. C. (2017). Resolución de problemas de optimización en un entorno tecnológico. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO

Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Diana del Carmen Torres Corrales, Evaristo Trujillo Luque, Felipe de Jesús Castro Lugo, Julia Xóchilt Peralta García, Julio César Ansaldo Leyva.

Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON), México

jesuseduardo12@hotmail.com, *d.torres@live.com.mx*, *evaristo.trujillo@itson.edu.mx*, *felipe.castro@itson.edu.mx*, *julia.peralta@itson.edu.mx*, *julio.ansaldo@itson.edu.mx*

Resumen

La diversidad de contextos en los que se lleva a cabo la instrucción y la variada formación de los profesores de matemáticas en el Instituto Tecnológico de Sonora, ha propiciado la creación de un taller con el fin de estandarizar las competencias matemáticas de los docentes que participan con el Departamento de Matemáticas. Con base en el principio de la resignificación progresiva de la Teoría Socioepistemológica, se pretende por medio del taller, desarrollar en los profesores el pensamiento geométrico y variacional a través de la resolución de problemas de optimización, utilizando tecnología, para contextualizar las prácticas matemáticas y configurar los significados que se construyen alrededor del concepto de derivada, considerando que este tipo de actividades permite apreciar a las matemáticas en su carácter instrumental al resolver problemas en situaciones reales.

Palabras clave: Pensamiento geométrico y variacional, optimización, GeoGebra

Introducción

En México existe amplia diversidad en contextos, realidades y sobre todo, en la formación académica de los docentes que imparten clases de Matemáticas en todos los niveles educativos, sin embargo, es en Medio Superior y Superior, en los que la formación del docente varía de forma más marcada, entre matemáticos, ingenieros, químicos, arquitectos, educadores, administradores, entre otros; esta misma situación se presenta en los estudiantes de Maestría en Matemática Educativa (algunos de ellos profesores en servicio), lo que propicia que su formación resulte más compleja (Montiel, 2014).

Esta situación ocurre en las distintas culturas y las condiciones en las que se instruye a los profesores cambian de país a país, por lo tanto, los investigadores en Educación Matemática y los formadores de profesores de Matemáticas se enfrentan a problemas diferentes (Gómez, 2005).

En el Instituto Tecnológico de Sonora, las cosas no son muy distintas a las mencionadas anteriormente, esto ha motivado la creación de talleres con el fin de estandarizar las competencias matemáticas de los profesores; en particular, la competencia que se busca desarrollar mediante este taller es el pensamiento geométrico y variacional a través de la resolución de problemas de optimización en un entorno tecnológico basado en GeoGebra.

La elección de este software para generar un entorno tecnológico es debido a que permite interactuar con los diversos registros de representación de un mismo objeto matemático de manera dinámica y todos los cambios generados en el mismo son observables en tiempo real, además de tratarse de una herramienta gratuita y disponible en múltiples plataformas.

El uso de los diversos registros de representación de los objetos matemáticos da la pauta para acudir a problemas en los que se privilegie el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional, como la forma idónea de arribar a los conceptos del Cálculo de una forma efectiva, significativa y con sentido, puesto que el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional, a diferencia del algebraico, requiere de la formación de conceptos apropiados, del desarrollo de habilidades, la formación de actitudes y hasta una ruptura con la forma de pensamiento algebraico para dar una resolución exitosa a los problemas (Nieto, Chavira y Viramontes, 2011).

Lo anterior es acorde a lo que menciona Cantoral (2013), la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento, pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos, así como una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos.

El taller está proyectado en dos etapas, la primera incluye a profesores que imparten clases de Cálculo en los niveles Medio Superior y Superior y la segunda a estudiantes de licenciatura

Objetivo

Crear un taller para resolución de problemas de optimización en un entorno tecnológico basado en GeoGebra para desarrollar el pensamiento geométrico y variacional, a fin de estandarizar las competencias matemáticas de los docentes a nivel Medio Superior y Superior.

Marco Teórico

El marco teórico en que se sustenta la creación del taller es la Teoría Socioepistemológica, en particular, el principio de la resignificación progresiva o apropiación a través de la actividad (Cantoral, 2011).

Esto se explica porque la vida del individuo está en constante cambio e interacción con diversos contextos, lo cual permite que se resignifiquen los saberes hasta el momento construidos, enriqueciéndolos con nuevos significados (resignificación progresiva) (Reyes, 2011). En ese sentido se asume a la cognición como la capacidad de hacer emerger el significado a partir de realimentaciones sucesivas entre lo humano y su medio ambiente próximo a partir de una interacción dialéctica entre protagonistas (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006). Sin embargo, para establecer una distinción entre los significados asociados a los conceptos matemáticos, con los significados asociados a la actividad humana, se habla de significación para referirse al proceso de construir los últimos (Montiel y Buendía, 2013).

Se considera que un escenario pertinente para resignificar el pensamiento geométrico y variacional de los profesores es un entorno tecnológico, como el programa GeoGebra. Su elección se debe a que es gratuito y libre, además de brindar las bondades que da la tecnología: cambios en tiempo real, reproducibilidad casi instantánea, precisión en las construcciones, dinamismo, entre otros.

Lo anterior, se sustenta en lo que menciona Rojano:

> Los ambientes tecnológicos se conceptualizan como agentes de cambio con capacidad de revolucionar las prácticas en el aula, reformular los contenidos a

> enseñar, la forma de enseñarlos y los roles tanto del docente y el alumno, sin embargo, para lograr convertir los recursos tecnológicos en agentes de cambio, es necesario que tanto docentes y alumnos primeramente estén familiarizados con el uso apropiado de los recursos tecnológicos y por lo tanto es primordial la capacitación en este tipo de escenarios (Rojano, 2003).

Dado lo anterior, se considera que la resolución de problemas de optimización dentro de un entorno tecnológico permite contextualizar las prácticas matemáticas y configurar los significados que se construyen alrededor del concepto de la derivada.

Metodología

El taller se detalla en su versión para estudiantes, el desarrollo del mismo se divide en 2 sesiones de 4 horas cada una.

La primera sesión comienza con el planteamiento de un problema de tiro parabólico, sin proporcionar una función que modele la situación, para resolverlo se organiza a los participantes en equipos y, se les proporcionan rotafolios y marcadores para que elaboren una presentación en la quese muestre el procedimiento utilizado para resolver el problema.

Terminada la actividad anterior, se invita a los equipos a presentar su procedimiento,; debido a las diferentes formas de resolver un problema de aplicación para el que no se proporciona una función, se espera observar procedimientos distintos entre los diferentes equipos.

Posterior a la presentación de los procedimientos de los equipos, se plantea un segundo problema, pero en esta ocasión se proporciona una función que modela al problema, nuevamente se organiza a los participantes en equipos y, se les proporcionan rotafolios y marcadores para que elaboren otra presentación en la que se muestre el procedimiento utilizado para el nuevo problema, para posteriormente invitarlos a mostrarlo, en esta ocasión se espera observar procedimientos parecidos entre los equipos.

Una vez terminada la presentación por parte de los equipos se les enfrenta a un tercer problema, para el que obtener una función a partir de la información proporcionada y derivarla, resulta complicado, por lo que se propone modelar el fenómeno utilizando GeoGebra a fin de resolverlo de manera aproximada, analizando y reflexionando, acerca de la pertinencia del uso del software en la solución de los problemas y las ventajas de observar de forma dinámica los cambios generados en la construcción.

La segunda sesión consiste en profundizar en el uso de GeoGebra como herramienta para acceder a los objetos matemáticos que intervienen en la resolución de problemas de optimización,. Con dicha finalidad se construye un applet de GeoGebra que recibe una función como entrada y por medio de la recta tangente a un punto sobre la función se observa la dimensión geométrica que nos permite obtener la primera y segunda derivada de la misma a partir del comportamiento de la pendiente de la recta tangente.

Además de lo anterior, el applet permite observar y analizar que la primer derivada de la función nos indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento (si es positiva o negativa), y qué valor de la derivada coincide con los máximos y mínimos de la función, así cómo el comportamiento de la segunda derivada de la función indica la concavidad y los puntos de inflexión; en la figura 1 se muestra la pantalla de GeoGebra con el applet terminado.

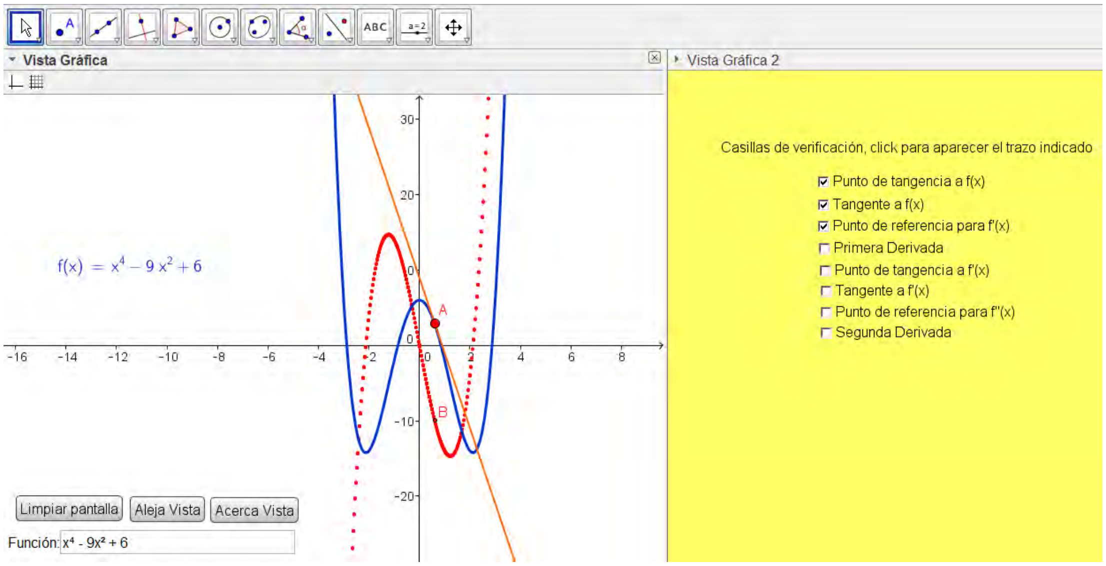


Figura 1. Applet de GeoGebra para los problemas de optimización.

Exposición de la propuesta y resultados

El taller se llevó a cabo con la asistencia de 30 estudiantes de Ingeniería en Gestión Empresarial en el Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán.

Durante la primer sesión se mostraron desconcertados, pues según sus impresiones, el primer problema presentado en el taller corresponde a la materia de física y no a una clase de matemáticas y puesto que no disponían de una fórmula específica para plantear y resolver el problema, no lograron llegar a una solución para el mismo, pero se observó que todos los equipos utilizaron procedimientos diferentes, en la figura 2 se muestra en enunciado del primer problema.

Un proyectil es lanzado desde el nivel del suelo hacia arriba de manera vertical, la rapidez inicial es de 50 m/s; se considera la gravedad a nivel del mar (9.8 m/s^2) y se desprecia la resistencia del aire.

- ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará el objeto?
- ¿En qué momento la rapidez del objeto será de 10 m/s?

Figura 2. Problema 1 presentado en el taller.

El segundo problema se ilustra en la figura 3, en esta ocasión se les proporciona la fórmula que modela al problema, los estudiantes no tuvieron dificultad para analizar la situación y lograron resolver el problema mediante el algoritmo de calcular la derivada e igualarla a cero.

La posición en el aire de un delfín que salta fuera del agua está determinada por la siguiente función

$$f(x) = -x^2 + x + 2$$

Determine la altura máxima que alcanzará el delfín en el salto.

Figura 3. Problema 2 presentado en el taller.

Al terminar los dos problemas anteriores se hizo una pausa para reflexionar acerca de los procedimientos realizados por los estudiantes al intentar resolver los problemas y cómo la centración en los procedimientos algebraicos ha disminuido la conceptualización y el aspecto geométrico que le proporciona la riqueza a los problemas de optimización; concluida la reflexión se presentó el tercer problema que se muestra en la figura 4.

Se tienen dos postes de alturas y= $\mathbf{5}\ \boldsymbol{metros}$ y x= $\mathbf{7}\ \boldsymbol{metros}$, separados una distancia d= $\mathbf{14}\ \boldsymbol{metros}$ entre sí, ambos atados por medio de dos tramos de cable a una estaca en común situada en algún punto de la separación entre ellos; como se muestra en la siguiente figura.

¿En que posición deberá colocarse la estaca con el fin de minimizar la cantidad de cable utilizada (2 decimales de precisión)?

Figura 4. Problema 3 presentado en el taller.

Al intentar responder al problema presentado, los estudiantes primeramente se enfrentaron a encontrar la función que modela al problema, la cual después debía derivarse e igualarse a cero, para posteriormente encontrar el valor de x que proporciona el valor mínimo solicitado,; ningún estudiante fue capaz de resolver el problema completamente, debido principalmente a deficiencias en el tratamiento algebraico, no se presentó la respuesta al problema puesto que sería retomado en la segunda sesión del taller. La función y su derivada se presentan en la figura 5.

$$L(x) = \sqrt{x^2+25} + \sqrt{(14-x)^2+49} \longleftarrow$$ Función que modela el problema

$$L'(x) = \frac{-14\sqrt{x^2+25} + x\sqrt{x^2+25} + x\sqrt{(14-x)^2+49}}{\left(\sqrt{x^2+25}\right)\left(\sqrt{(14-x)^2+49}\right)} \longleftarrow$$ Su derivada

Figura 5. Función y derivada del tercer problema.

Durante la segunda sesión, se retomó el tercer problema, pero en esta ocasión poniendo haciendo énfasis en la resolución del mismo, utilizando GeoGebra, la actividad consistió en guiar a los estudiantes a reproducir la construcción geométrica del problema mediante el uso de segmentos de recta y puntos en el plano en una de las vistas gráficas del programa (ventanas que muestran un eje cartesiano en blanco donde es posible observar la representación gráfica de los objetos matemáticos;, GeoGebra dispone de dos 2 Vistas Gráficas independientes de dos 2 dimensiones y una de tres 3 dimensiones dependiente de la llamada Vista Gráfica 1), mientras que en la segunda vista gráfica se utilizaron puntos, rastros, los ejes y texto para identificar el punto de optimización de forma visual, en la figura 6 se muestra la construcción geométrica del problema.

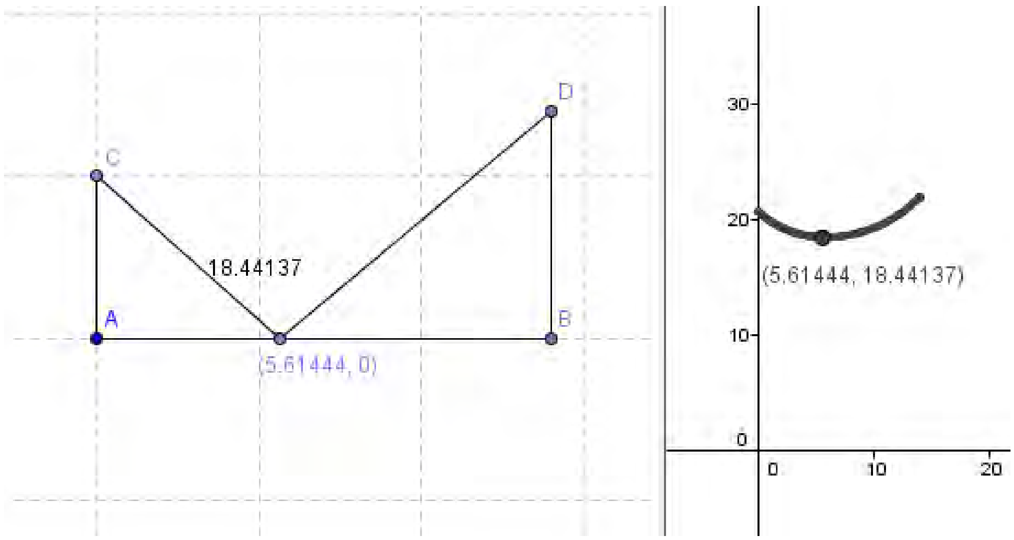


Figura 6. Construcción geométrica del tercer problema en GeoGebra.

Posteriormente se introdujo la función que modela al problema en la barra de Entrada de GeoGebra y utilizando la herramienta de Inspección de funciones se encuentra el punto mínimo de la función completa en el intervalo de 0 a 14 (posibles posiciones de la estaca que separa a las banderas del problema) y se comparó con el resultado aproximado obtenido mediante la construcción geométrica., Mediante esta actividad, los estudiantes fueron capaces de identificar que los problemas de optimización pueden modelarse de forma geométrica, observar sus modificaciones y cambios en tiempo real y obtener resultados aproximados o exactos dependiendo de la cantidad de decimales (resolución) que se solicita, en la figura 7 se muestra la ventana del Inspección de funciones.

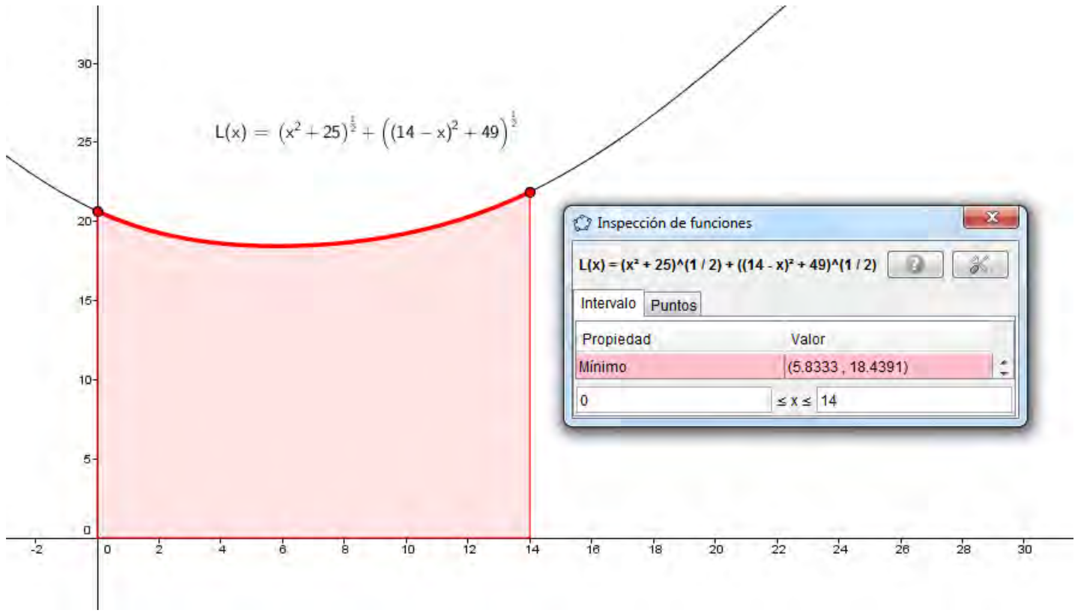


Figura 7. Ventana de Inspección de funciones en GeoGebra.

Terminado el problema y reflexionando sobre las ventajas del uso de GeoGebra para resolver problemas de optimización se orientó a los estudiantes a construir el applet mencionado anteriormente e ilustrado en la figura 1, este applet permite profundizar sobre la dimensión geométrica que existe detrás del algoritmo de derivar e igualar a cero, se puede observar que por medio de la recta tangente a un *punto móvil* en la función gráficay un punto externo a ella con la misma coordenada en *x* que el anteriormente mencionado, y coordenada en *y* igual a la pendiente de la recta tangente, todas las posiciones del punto externo coinciden exactamente con todos los posibles valores en *y* que puede tomar la derivada de la función y que es precisamente donde la derivada cruza al eje de las *x* (su valor en *y* es igual a cero) o bien, la recta tangente a la función es paralela al eje *x* (su pendiente es igual a cero), la función alcanza su punto máximo o mínimo. El mismo procedimiento se realiza sobre la gráfica de la la primer derivada para obtener la segunda derivada y de esta forma, comprobar la concavidad de la función y ubicar sus puntos de inflexión. En la figura 8 puede observarse la construcción de la primera derivada mediante este procedimiento y en la figura 9, la construcción de la segunda derivada.

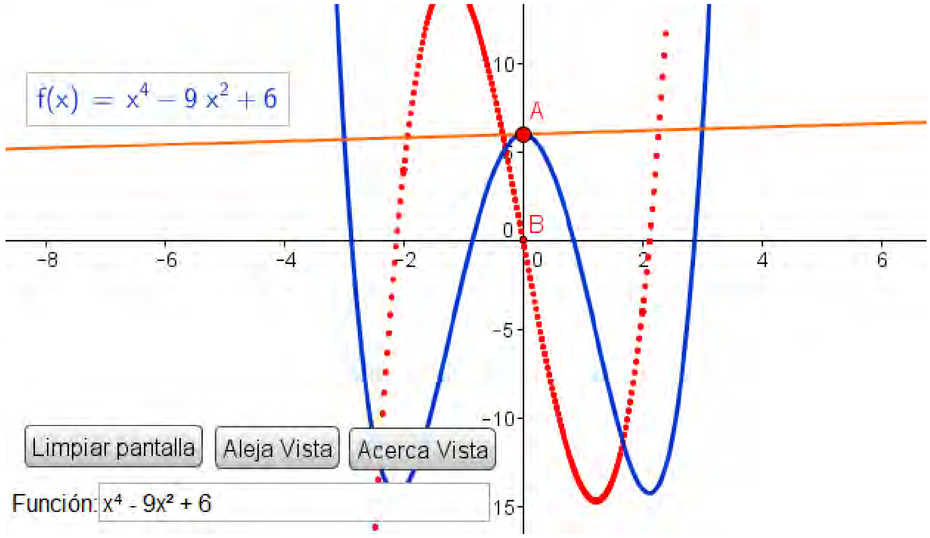


Figura 8. Construcción de la primera derivada con GeoGebra.

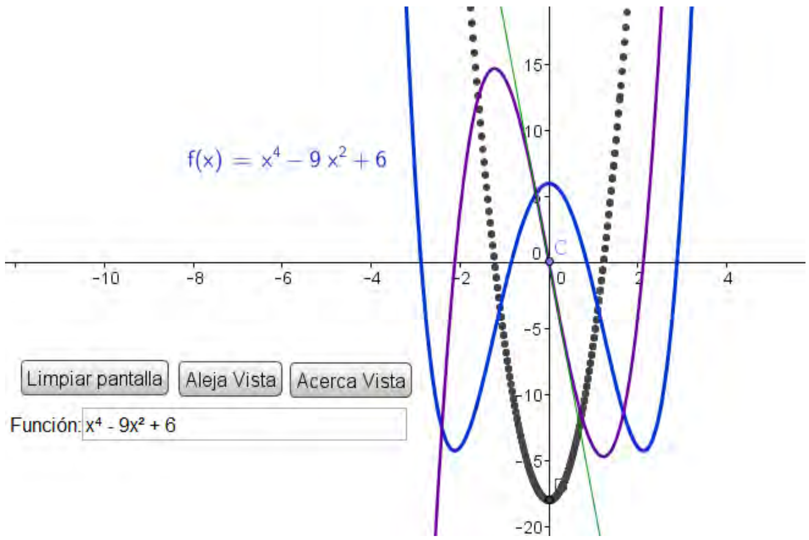


Figura 9. Construcción de la segunda derivada con GeoGebra.

Conclusiones

Con base en las observaciones y los resultados obtenidos en la primera sesión del taller, se puede concluir que al proporcionarles a los estudiantes una función o modelo matemático para encontrar el valor máximo o mínimo de un fenómeno, son capaces de utilizar el algoritmo de derivar e igualar a cero la función para obtener el resultado, sin embargo, al proporcionarles únicamente el texto sin una fórmula establecida de inicio, no son capaces de obtenerla.

Además, fue posible observar que mediante el uso del software GeoGebra y su capacidad de modelar de forma geométrica las situaciones-problema planteadas a los estudiantes, éste les permite profundizar y reflexionar acerca de la dimensión geométrica y variacional del problema, sin necesidad de recurrir al uso del álgebra para el mismo proceso.

Posteriormente, la construcción del applet de las derivadas a partir de la pendiente de la recta tangente permitió a los estudiantes comprender el uso del algoritmo de "derivar e igualar a cero" una función por lo siguiente:

- Fueron capaces de observar en tiempo real cómo cambia la pendiente de la recta tangente y cómo estos cambios son mostrados como un punto que con su movimiento describen el comportamiento de la derivada de la función.
- Mediante las gráficas, identificaron que al cruzar la derivada al eje de las *x*, dicho valor coincide siempre con un máximo o un mínimo de la función.
- Además, apoyados con la gráfica de la segunda derivada, sus signos y sus cruces con el eje de las *x*, les fue posible determinar la concavidad de la función.

Referencias

Cantoral, R. (2011). Fundamentos y Métodos de la Socioepistemología. Simposio en Matemática Educativa. Recuperado el 21 de diciembre de 2013 de http://www.youtube.com/watch?v=byHKKFnAq5Y&feature=youtu.be

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. Distrito Federal, México: Secretaría de Educación Pública.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. L. Radford y D'Amore, B. (Editores invitados), 27-46.

Gómez, P. (2005). Diversidad en la formación de profesores de Matemáticas: en la búsqueda de un núcleo común. *Revista EMA*, *10*, 242-293.

Montiel, G. (2014). Comunicación personal, Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa XXVIII, 31 de Julio 2014.

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del Pensamiento Funcional-Trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari y G. Martínez (Coords.), *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas*, 169 - 205. México: Díaz de Santos.

Nieto, N., Chavira, H. y Viramontes, J. (2011). Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional con el CABRI II PLUS®, *El cálculo y su enseñanza II*. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de Instituto Politécnico Nacional.

Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas.* (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de Instituto Politécnico Nacional, México.

Rojano, T. (2003). *Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México*. Recuperado de http://lets.cinvestav.mx/Portals/0/SiteDocs/MediatecaSS/lets_sur_mediateca_rojano_Incorporaciondeentornos.pdf.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

TRAZO DE TANGENTES MEDIANTE GEOGEBRA: UN EJEMPLO CON EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Cesar Martínez Hernández[1], Ricardo Ulloa Azpeitia[2]

[1]Universidad de Colima (México), [2]Universidad de Guadalajara (México)

cesar.martinez@cucei.udg.mx, ricardo.ulloa@cucei.udg.mx

Para citar este artículo:

Martínez, C., Ulloa, A. (2017). Trazo de tangentes mediante geogebra: un ejemplo con el teorema del valor medio. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

TRAZO DE TANGENTES MEDIANTE GEOGEBRA: UN EJEMPLO CON EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Cesar Martínez Hernández[1], Ricardo Ulloa Azpeitia[2]

[1]Universidad de Colima (México), [2]Universidad de Guadalajara (México)

cesar.martinez@cucei.udg.mx , ricardo.ulloa@cucei.udg.mx

Resumen

El presente documento da cuenta de una investigación sobre la influencia del uso de Geometría Dinámica para el aprendizaje de conceptos del Cálculo Diferencial. En particular, se reportan primeros resultados acerca del trazo de tangentes a la curva de una función cuadrática en el ambiente Geogebra a partir de las condiciones establecidas en el Teorema del Valor Medio de Lagrange. Dichos resultados muestran las dificultades de estudiantes de la Maestría en enseñanza de las Matemáticas para utilizar Técnicas propias de la Geometría dinámica que permiten dar solución al problema planteado en el contexto de este tipo de ambiente tecnológico.

Palabras clave: Teorema del valor medio, Geogebra, Técnica, Teoría

Introducción

Existen publicaciones en las que se describen investigaciones realizadas con el uso de tecnología para el Cálculo. En Ferrara, Pratt y Robutti (2006) se incluye una compilación de estudios sobre los conceptos de límite, derivada e integral. El tema particular sobre el que enfoca el trabajo que se reporta incide sobre el aprendizaje del Teorema del Valor Medio de Lagrange (TVM). Se considera, con base en la literatura revisada, que utilizar un ambiente de geometría dinámica, en este caso, Geogebra, facilita a los estudiantes su comprensión sobre conceptos del cálculo diferencial, dado el potencial para construir modelos dinámicos (Reyes & Santos, 2009).

En Guven (2008) y Reyes & Santos (2009) se describen las posibilidades de emplear geometría dinámica para examinar relaciones matemáticas. En estos estudios se muestra cómo el lugar geométrico; que surge en las exploraciones potencializa el desarrollo de conjeturas sobre las relaciones matemáticas de los objetos involucrados en el modelo dinámico. Es decir, desde el punto de vista del marco teórico considerado, con el uso de Geogebra se propicia el desarrollo de nuevas Técnicas; las cuales, pueden posibilitar resolver la Tarea planteada y promover la construcción de Teoría en torno al TVM.

Objetivo

Identificar las dificultades que enfrentan los alumnos al utilizar Geogebra para desarrollar nuevas *Técnicas instrumentadas* como el uso del “lugar geométrico” para resolver la *Tarea* planteada.

Marco Teórico

El marco teórico en el que se apoya la investigación es la *aproximación instrumental* del uso de herramientas tecnológicas. De acuerdo con Artigue (2002) esta perspectiva teórica tiene dos influencias: una es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), la otra es la ergonomía cognitiva (Vérillon & Rabardel, 1995). La investigación aquí reportada se basa, principalmente en el enfoque antropológico conocido como *Tarea-Técnica-Teoría* (Artigue, 2002; Lagrange, 2003). Sin embargo, también se considera el enfoque ergonómico, respecto al concepto de *instrumento*; sin ahondar en el proceso de la *génesis instrumental*.

En el primer enfoque, el énfasis es en el desarrollo de *Técnicas* y de *Teoría* por los estudiantes (en torno a cierta *Tarea* planteada) cuando usan tecnología para resolverla. El término *Tarea* se refiera al problema o la situación problemática (expresada mediante un verbo) plasmada en una Actividad; en la cual está involucrado el objeto u objetos matemáticos que interesan estudiar. La *Técnica* es un método o una manera de resolver la *Tarea*; es una combinación compleja de razonamiento y trabajo rutinario que tiene tanto valor pragmático, como epistémico (Artigue, 2002, p. 48). Esta función epistémica de la *Técnica* ha sido el foco de atención en varias investigaciones (e.g., Kieran & Drijvers, 2006) respecto del incremento de la *Teoría* que los estudiantes desarrollan cuando hacen uso de artefactos tecnológicos.

En el segundo enfoque, el ergonómico, se hace una distinción entre dos términos, *artefacto* e *instrumento*. El *artefacto* es una herramienta (física o simbólica), en nuestro caso Geogebra, que no tiene sentido para resolver la tarea; en cambio, el *instrumento* es una construcción psicológica que involucra al artefacto (su uso) y el desarrollo de esquemas debido a dicho uso. El proceso mediante el cual un artefacto se convierte en un instrumento (por el usuario) se llama génesis instrumental; el cual, involucra dos procesos dialécticos llamados instrumentación e instrumentalización. De esta manera, el énfasis de este segundo enfoque es el estudio de la génesis instrumental; en particular, los esquemas desarrollados por el usuario del artefacto (i.e., el uso como instrumento).

Debido a la naturaleza de los esquemas, esta investigación se centra en estudiar las Técnicas y la Teoría que emergen en la resolución de la Tarea propuesta a los estudiantes, mediante el uso de Geogebra. Además, se utiliza el término *Técnica instrumentada* (Kieran & Drijvers, 2006) que combina los dos enfoques; en el cuál la idea es estudiar las Técnicas y la Teoría asociada a éstas bajo la idea del uso del artefacto como un instrumento. Es decir, más que estudiar los esquemas desarrollados por el usuario del artefacto tecnológico, interesa estudiar las Técnicas como la parte "visible" de dichos esquemas.

Esta aproximación teórica ha sido explotada con éxito en investigaciones relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza, principalmente del álgebra en ambientes de cálculo simbólico. Sin embargo, también se ha mostrado ser pertinente para el estudio en ambientes de geometría dinámica (Leung, Chan, & Lopez-Real, 2006).

Metodología

Una vez revisada la literatura que da sustento a la problemática de la investigación, fue diseñada una secuencia de Actividades; en la cual la Tarea consiste en Trazar y determinar la ecuación de la recta tangente a la curva de una función cuadrática a partir de las condiciones establecidas en el Teorema del Valor Medio de Lagrange. La Actividad consiste en dos fases. La primera, involucra sólo trabajo con papel-y-lápiz; en donde los estudiantes recurren a sus conocimientos (Técnicas y Teoría) algebraicos, de geometría analítica y de cálculo diferencial, principalmente para resolver la Tarea propuesta.

La segunda fase es similar a la primera salvo que permite trabajar con Geogebra; con la restricción de no utilizar Técnicas del cálculo diferencial ni los comandos relativos a este con que cuenta Geogebra. Así, los instrumentos para el acopio de datos consisten en las hojas de trabajo (Actividades diseñadas). También se recurrió a la videograbación de las sesiones de la toma de datos y al software SCREEN2EXE que captura la pantalla de la computadora; para con ello, visualizar la secuencia del trabajo de los estudiantes con Geogebra. Estos instrumentos de acopio de datos permitieron llevar a cabo la triangulación en el análisis de los mismos.

La población participante en la investigación fueron 16 estudiantes de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas; que en ese momento cursaban el cuarto semestre de su posgrado. Todos los participantes conocían Geogebra y tenían, al menos, año y medio de experiencia en el uso de este software. Por ello, no fue necesario un entrenamiento previo sobre cómo usar este tipo de tecnología para que se pudieran implementar las Actividades diseñadas. De los participantes, excepto uno, los demás contaban, al momento de la toma de datos, con experiencia docente, algunos en el nivel universitario, otros a nivel medio superior y algunos en el nivel de secundaria. La preparación profesional de la población es de licenciados en matemáticas, ingenieros en diversas áreas y un economista.

Las sesiones de implementación de las actividades fueron incluidas como parte de uno de los cursos de la maestría que llevaban los estudiantes y que estaba a cargo de uno de los investigadores. Es decir, el investigador fungía en ese momento como profesor de los estudiantes participantes. El desarrollo de las Actividades se llevó a cabo durante tres sesiones con una duración de aproximadamente 2 horas cada una. Los estudiantes trabajaron en equipos de dos integrantes, formados por ellos mismos con la finalidad de promover el diálogo entre ellos y de esta manera registrar en audio las reflexiones provocadas por el uso de Geogebra respecto a la Tarea planteada.

El análisis de los datos se llevó a cabo con un enfoque cualitativo; en éste, como lo indican Miles y Huberman (1994), una actividad central es explicar las formas como las personas en acomodos o situaciones particulares comprenden, dan razones de, actúan y manejan situaciones. En este sentido, el análisis se enfocó en cómo los estudiantes resuelven la Tarea planteada, primero con sus Técnicas y Teoría de papel-y-lápiz; es decir, mediante sus conocimientos previos de álgebra, geometría y cálculo diferencial. Segundo mediante el uso de Geogebra; donde pueden utilizar sólo Técnicas algebraicas y de geometría, así como los comandos para trazos y propios de la Geometría dinámica (e.g., deslizadores, lugar geométrico, etc.) para así investigar el potencial de este software con base en el modelo dinámico (en el sentido de Reyes & Santos, 2009) de la situación problemática propuesta que es posible construir con Geogebra.

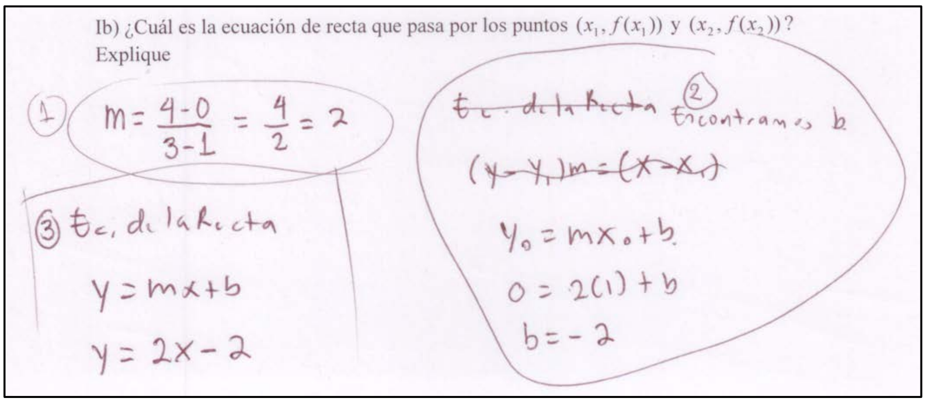
Análisis de datos y discusión de resultados

A continuación es presentado parte del análisis llevado a cabo hasta este momento; el cuál se ejemplifica con el trabajo de tres Equipos. Consideramos que el trabajo de estos estudiantes da muestra del tipo de actividad matemática llevado a cabo por los participantes, tanto en papel-y-lápiz como con Geogebra y permite observar las dificultades que enfrentaron al momento de trabajar en el ambiente de Geometría dinámica. El análisis en este reporte se enfoca sólo en las Técnicas utilizadas por los estudiantes y no en la

Teoría que las sustenta. Sin embargo, de acuerdo con la aproximación instrumental, la Técnica no está disociada de la Teoría y viceversa.

Sobre las Técnicas de papel y lápiz

De acuerdo con los datos recabados, los ocho Equipos recurrieron a sus conocimientos tanto de geometría analítica como de cálculo diferencial para encontrar las ecuaciones las rectas secante y tangente a la curva de la función dada. Las Figuras 1 y 2 muestran el trabajo de uno de los Equipos (Equipo I en adelante).



Ib) ¿Cuál es la ecuación de recta que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$? Explique

(1) $m = \frac{4-0}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$

(2) ~~Ec. de la Recta~~ Encontramos b

$\cancel{(y-y_1)m=(x-x_1)}$

$y_0 = mx_0 + b$

$0 = 2(1) + b$

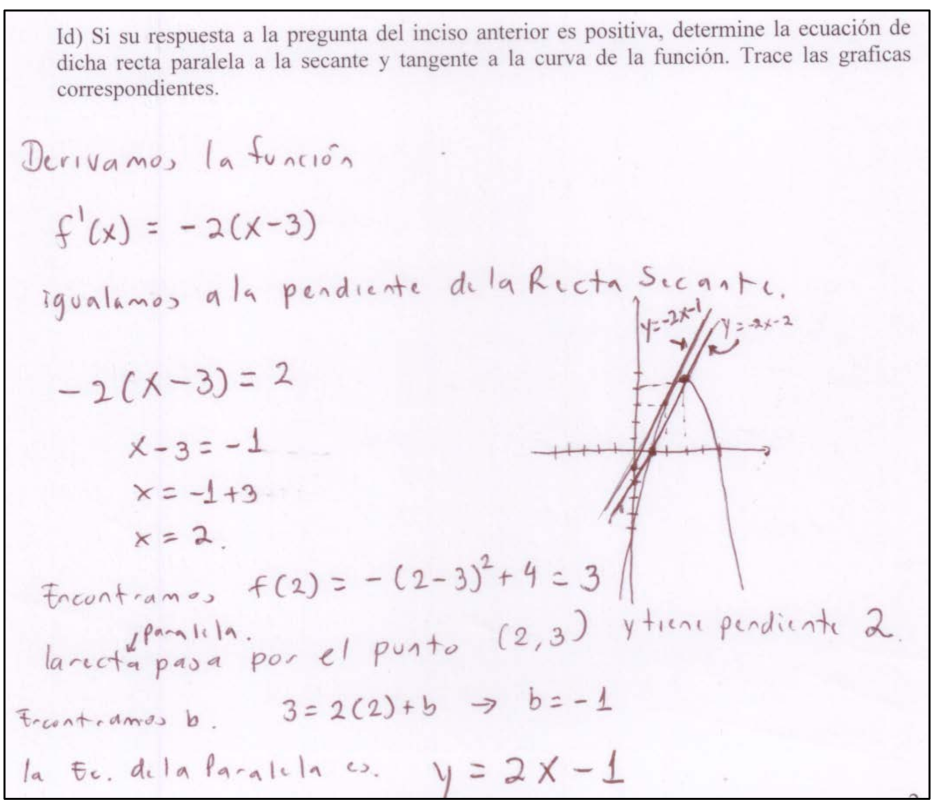
$b = -2$

(3) Ec. de la Recta

$y = mx + b$

$y = 2x - 2$

Figura 1. Técnica de papel-y-lápiz del Equipo I para determinar la ecuación de la recta secante.



Id) Si su respuesta a la pregunta del inciso anterior es positiva, determine la ecuación de dicha recta paralela a la secante y tangente a la curva de la función. Trace las graficas correspondientes.

Derivamos la función

$f'(x) = -2(x-3)$

igualamos a la pendiente de la Recta Secante.

$-2(x-3) = 2$

$x - 3 = -1$

$x = -1 + 3$

$x = 2$.

Encontramos $f(2) = -(2-3)^2 + 4 = 3$

la recta paralela pasa por el punto $(2,3)$ y tiene pendiente 2.

Encontramos b. $3 = 2(2) + b \rightarrow b = -1$

la Ec. de la Paralela es. $y = 2x - 1$

Figura 2. Técnica de papel-y-lápiz del Equipo I para trazar la recta tangente a la función.

Como se observa en las Figuras 1 y 2, el Equipo I traza la secante a la curva de la función planteada en la Actividad mediante el cálculo de los parámetros *m* (pendiente) y *b* (ordenada al origen); es decir, recurren a la ecuación explícita de la recta. Otros Equipos sustituyen en la ecuación de la recta dados dos puntos por donde ésta pasa. Todos los Equipos plantearon correctamente la ecuación de la recta secante a la función propuesta, lo cual era previsible dadas las características de la población

Para trazar la recta tangente a la función dada y paralela a la recta secante propuesta por cada Equipo, prevaleció la Técnica de derivación (Figura 2), lo que se esperaba sucediera dados los conocimientos previos de cálculo diferencial de la población participante. Es decir, la Técnica consistió en el procedimiento de derivar la función (con lo que obtienen la expresión general de la pendiente de las rectas tangentes) y calcular las coordenadas del punto de tangencia tales que satisfagan la condición de paralelismo con la recta secante.

La Técnica de derivación (Figura 2) fue la más utilizada por los otros Equipos. Quienes no procedieron de esta manera debido a la configuración de su construcción (la elección de los puntos de intersección entre la función dada y la recta secante), es decir, debido a las coordenadas de los puntos elegidos para trazar dicha recta secante. En este sentido, la configuración inicial de su construcción (la forma de visualizar el trazo de la recta secante) influyó en la Técnica para determinar la tangente a la curva y a la vez paralela a la secante. La Figura 3 muestra el registro escrito de este tipo de trabajo.

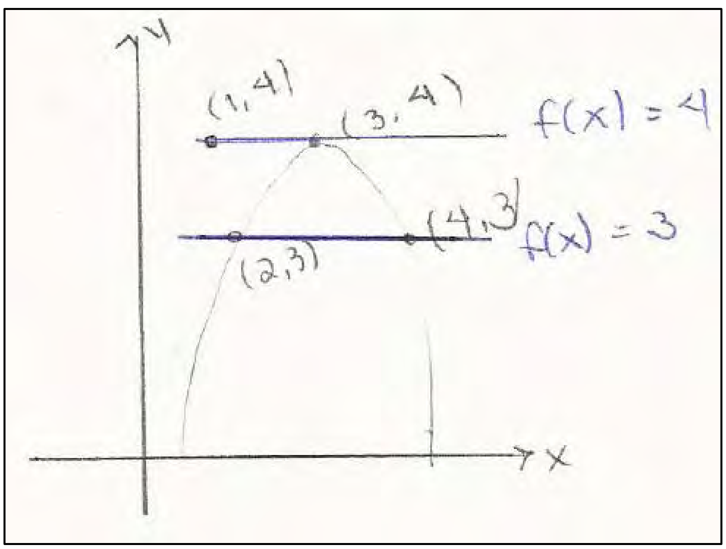
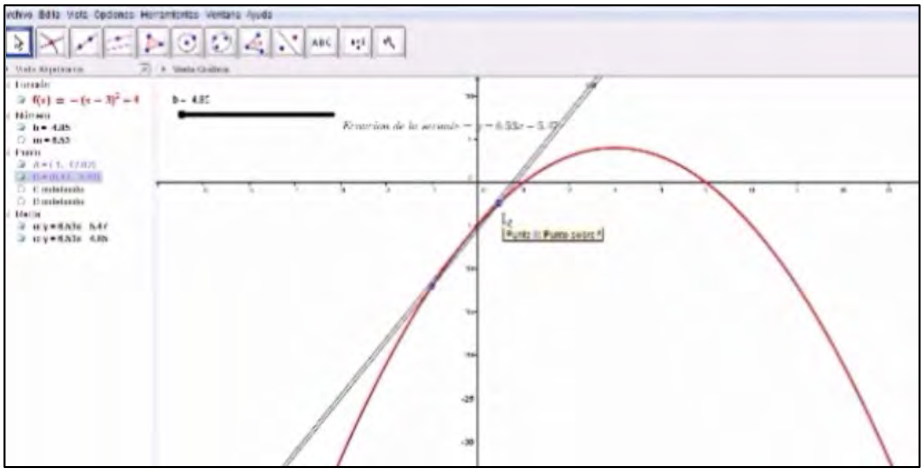


Figura 3. Trazo de las rectas secante (paralela al eje x) y tangente (y paralela a la secante) a la curva de la función dada del Equipo II.

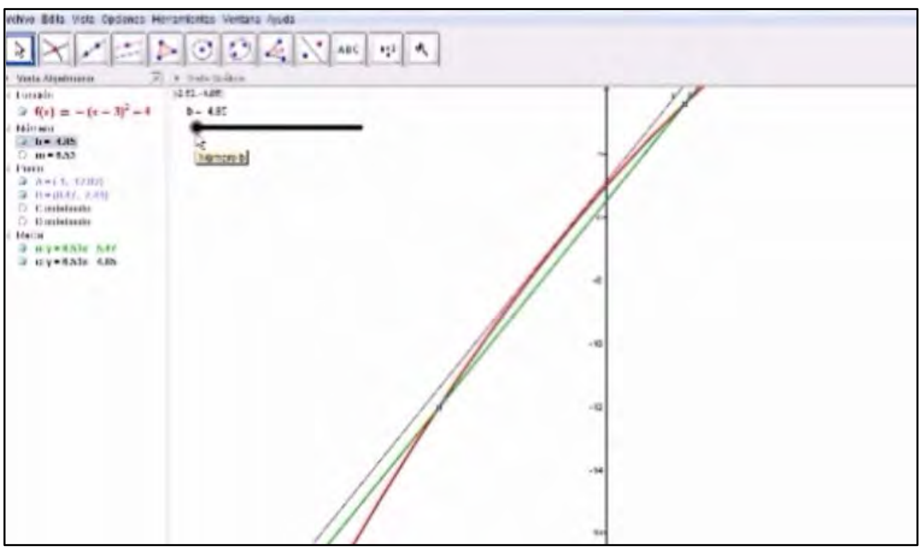
Sobre las Técnicas con Geogebra

Una vez que los estudiantes usan el software Geogebra para intentar resolver la Tarea (trazar y determinar la ecuación de la recta tangente a la curva de la función cuadrática y paralela a una secante de la misma) se identifican dos Técnicas: ensayo y error por arrastre, y una "extrapolación" de cálculos algebraicos al ambiente Geogebra. En cuanto al arrastre, se identifican dos tipos: arrastre directo de los objetos involucrados en la construcción geométrica y el uso de deslizadores. Discutiremos este último caso.

La Figura 4 es parte de la construcción llevada a cabo por dos de los participantes (Equipo III en adelante), en donde se observa que utilizan el arrastre auxiliados mediante un deslizador para trazar la recta solicitada. Sin embargo, esta construcción es por ensayo y error, ya que en realidad no permite un trazo exacto.



A)



B)

Figura 4. Construcción del Equipo III para el trazo de la recta tangente a la curva de la función dada mediante la Técnica del deslizador.

Los intentos previos del Equipo III, consisten en utilizar, directamente, los comandos de Geogebra para el trazo de rectas. Sin embargo, se dan cuenta que éstos no son suficientes para completar la Tarea pedida y a partir de ello optan por utilizar un deslizador. El siguiente extracto de la conversación entre los integrantes de este Equipo da cuenta de las reflexiones que emergen en ellos.

Estudiante A: Yo creo que es mejor colocar un deslizador […] Ya *m* [Se refiere a la pendiente de la recta tangente] ya la definimos como el valor de la pendiente de la recta secante.

Estudiante B: Y *b* [se refiere a la ordenada al origen de la recta tangente] ya también está definida.

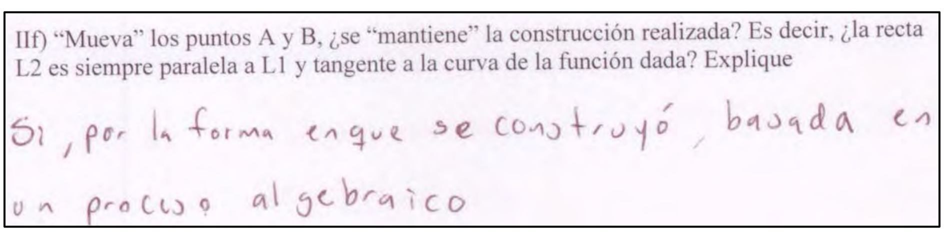
Estudiante A: Y b está definida por el deslizador. Entonces, ahora sí […] Voy a marcar la intersección de la recta paralela [a la secante] a la recta que pasa por A y B [se refiere a las intersecciones de la secante con la curva de la función], marco la intersección y lo que voy a hacer es variar el valor de b [se refiere al deslizador] para modificar el cruce con el eje de las y’s.

Investigador: La ordenada al origen.

Estudiante A: Exactamente. Cuando se vuelva un solo punto [Refiriéndose a las intersecciones] [..] Entonces ya lo único que hay que preocuparnos es por modificar *b* [el valor del deslizador asociado a la ordenada al origen] de tal manera que cuando se acerquen sólo marquen un solo punto [Se refiere a que la intersección sea en sólo un punto].

La construcción propuesta por el Equipo III es una aproximación a la solución de la Tarea ya que no es posible determinar si en efecto la recta paralela es tangente a la curva, por ejemplo, si se utiliza el comando “zoom” se observa que la tangencia no se cumple. De esta manera, sólo se cumple con la condición de paralelismo. Así, sólo se trata de una aproximación; en todo caso, dentro del ambiente Geogebra puede considerarse, la solución, como un caso particular, desde el punto de vista del modelo dinámico construido.

El otro tipo de solución propuesta consistió en hacer los cálculos algebraicos que demanda la situación planteada e “introducirlos” en el ambiente Geogebra. Es decir, en estos casos, no se utilizó Geogebra para dar solución a la Tarea, sino las Técnicas de papel-y-lápiz. La siguiente Figura muestra el registro escrito del Equipo I en donde se observa lo comentado.


IIf) “Mueva” los puntos A y B, ¿se “mantiene” la construcción realizada? Es decir, ¿la recta L2 es siempre paralela a L1 y tangente a la curva de la función dada? Explique

Si, por la forma en que se construyó, basada en un proceso algebraico

Figura 5. Explicación de la solución planteada por el Equipo I mediante Geogebra

Conclusiones

Con base en las respuestas dadas por los participantes, las Técnicas de papel-y-lápiz (sus conocimientos algebraicos, de geometría y de cálculo) les permitieron dar solución a la Tarea en un medio estático; no así en el dinámico. Es decir, si bien uno de los Equipos logró trazar en el ambiente Geogebra la recta tangente solicitada, su respuesta estuvo apoyada en sus cálculos algebraicos (Figura 5), en este sentido, su respuesta no está basada en las Técnicas que provee la Geometría dinámica. Por su parte, los Equipos que hicieron uso de las características de Geogebra, utilizaron sólo el arrastre sin explorar las posibles relaciones matemáticas de la configuración del modelo dinámico.

De acuerdo con lo anterior, se observan, de análisis de los datos, dos dificultades principales. Por un lado, la dificultad ya reconocida en la literatura (e.g., Trouche & Guin, 1999) sobre la complejidad del proceso de la génesis instrumental. Es decir, de la dificultad intrínseca de que un artefacto se convierta en un instrumento (para el usuario). En este sentido se observa una tendencia, en la población objeto de estudio, a sólo usar la técnica de arrastre, la cual es necesaria pero no suficiente para dar respuesta al problema planteado en la actividad diseñada.

Por otro lado, la configuración inicial (en papel-y-lápiz) y sus conocimientos algebraicos y geométricos también influyeron en la forma en que utilizaron Geogebra, en el sentido de que sólo "trasladaron" sus resultados de papel-y-lápiz a la construcción planteada con Geogebra. La influencia fue a tal grado que en realidad sólo utilizaron el software como un graficador de sus resultados de papel-y-lápiz. Es decir, sus Técnicas institucionalizadas de papel-y-lápiz fue otra de las dificultades que los alumnos enfrentaron al utilizar Geogebra.

Agradecimientos

La investigación reportada fue auspiciada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología como parte de la Estancia Posdoctoral vinculada al fortalecimiento del Posgrado Nacional (Convenio N° 290807_UDG/2013-3). Agradecemos también las facilidades otorgadas por las autoridades del Posgrado Receptor de la Universidad de Guadalajara para llevar a cabo la investigación.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245-274.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*, 221-266.

Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of researchon the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 237-274). The Netherlands: Sense Publishers.

Guven, B. (2008). Using dynamic geometry software to gain insight into a proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13(3),* 251–262

Kieran, C. & Drijvers P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*, 205-263.

Lagrange, J-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J.T. Fey (Ed.), *Computer algebra systems in secondary school mathematics education* (pp. 269–283). Reston, VA: NCTM.

Leung, A., Chan, Y. & Lopez-Real, F. (2006). Instrumental genesis in dynamic geometry environments. En C. Hoyles, J-B. Lagrange, L.H. Son & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction*, pp. 346-353. Hanoi, Vietnam: ICMI.

Reyes, A. & Santos, L. M. (2009). Teachers' construction of dynamic mathematical models based on the use of computational tools. En S. L. Swars, D. W. Stinson & L-S. Shonda (Eds.), *Proceedings of 31st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 5, pp. 218-225. Atlanta, GA: PME-NA.

Trouche, L. & Guin, D. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*, 195-227.

Vérillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*, 77-103.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

PIZARRÓN DIGITAL INTERACTIVO, PARA ABORDAR REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN UN CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Ruth E. Rivera Castellón, Maximiliano De Las Fuentes Lara, Milagros Guiza Ezkauriatza, Ana Dolores Martínez Molina

Universidad Autónoma de Baja California, México.

rrivera@uabc.edu.mx, maximilianofuentes@uabc.edu.mx, mguiza@uabc.edu.mx, ana.dolores.martinez.molina@uabc.edu.mx.

Para citar este artículo:

Rivera, R. De las Fuentes, M., Guiza, M., Martínez A. D. (2017). Pizarrón digital interactivo, para abordar representaciones gráficas en un curso de cálculo diferencial: una propuesta didáctica. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

PIZARRÓN DIGITAL INTERACTIVO, PARA ABORDAR REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN UN CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Ruth E. Rivera Castellón, Maximiliano De Las Fuentes Lara, Milagros Guiza Ezkauriatza, Ana Dolores Martínez Molina

Universidad Autónoma de Baja California, México.

rrivera@uabc.edu.mx, maximilianofuentes@uabc.edu.mx, mguiza@uabc.edu.mx, ana.dolores.martinez.molina@uabc.edu.mx.

Resumen

La enseñanza de las matemáticas en el nivel superior en ingeniería, pretende que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos los cuales deben estar disponibles y ser aplicados en contextos diferentes al original. Los bajos porcentajes de aprobación en el curso de Cálculo Diferencial, propiciaron el diseñó de un juego didáctico que incluye al pizarrón digital interactivo para el estudio y tratamiento de la graficación paramétrica, tema medular del curso. Los resultados de la implementación del juego se consideran exitosos en virtud de evidenciar disposición, motivación y un protagonismo importante por parte de los estudiantes que utilizaron el pizarrón digital. Se encontraron mayores niveles de eficiencia en los indicadores de logro cuando se utiliza el juego didáctico, al representar gráficamente una función exponencial a partir de su expresión algebraica.

Palabras clave: Pizarrón digital, graficación paramétrica

Introducción

Los cursos de matemáticas de nivel superior en ingeniería pretenden que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos (funciones, límites, continuidad, derivada, integral, etc.), los cuales deben ser aplicados en otros contextos diferentes al cual se aprendieron. Al revisar las características de la enseñanza de las matemáticas para ingeniería (Muñoz, 2005; Vilanova, Rocerau, Medina, Astiz, Oliver, Vecino y Valdez, 2005; Deiros, 2003; Gerald, 2002) es factible percatarse del empirismo con el que los docentes atienden los procesos educativos, además de un estilo usual de exposición magistral que minimiza el protagonismo del estudiante y excluye el uso de los recursos tecnológicos.

Estadísticas llevadas a cabo en la Facultad de Ingeniería Mexicali (FIM) permiten observar porcentajes promedio de aprobación en periodo ordinario del orden del 55% en los cursos de Cálculo Diferencial. Autores (Karen, 2000; Queralt, 2000; Bower, 2003; Heugl, 2003; Laborde, 2003; De Faria, 2005) afirman que la incorporación de tecnología en la enseñanza de las matemáticas, contribuye a modificar los enfoques de enseñanza y evaluación, a la vez que estimulan la actividad intelectual de los estudiantes.

Una investigación reciente (Díaz, Herrera, Recio y Saucedo, 2013) en la cual se utilizó una herramienta interactiva previamente diseñada para la enseñanza del concepto de límite de una función, mostró de manera significativa una diferencia favorable para el grupo experimental en cuanto a la comprensión de dicho concepto desde una perspectiva numérica y geométrica.

En una investigación reciente (Álvarez, Salvati, Nussbaum y Milrad, 2013) bajo una perspectiva constructivista que incluye la tecnología del pizarrón digital y con el propósito de que los alumnos del séptimo grado enfrenten y resuelvan problemas sobre fracciones, se encontró un desempeño favorable con aquellos alumnos que incursionaron en la temática con el apoyo de la pizarra digital, a diferencia de aquellos estudiantes que no la utilizaron, sin embargo, dado que el grupo de trabajo es pequeño (seis estudiantes) se tienen aún dudas de la replicabilidad en entornos con una mayor cantidad de alumnos. Por ello, se prevén investigaciones con grupos de clase numerosos y con los temas de un curso completo.

Los resultados de una investigación llevada a cabo por Santos y Arteaga (2000) con 40 estudiantes de nivel medio superior para explorar la competencia sobre el uso de conexiones entre representaciones gráficas y simbólicas que involucran conceptos de variación y optimización, permiten concluir que el uso eficaz de las representaciones por los estudiantes robustece su comprensión matemática, propician que en el proceso de enseñanza se incluya la interpretación de problemas originales a partir de las distintas representaciones.

La motivación y el protagonismo es una característica muy destacada cuando se incorpora el pizarrón digital interactivo (PDI) en las actividades de enseñanza (Hervás, Toledo y González, 2010) además de su versatilidad, aceptación y fácil manejo (Domingo, Cacheiro y Dulac, 2009).

Objetivo

Comparar la eficiencia de los conocimientos que alcanzan los estudiantes cuando se aborda la graficación paramétrica en el curso de Cálculo Diferencial a partir de un esquema de enseñanza tradicional y otro que utiliza un juego didáctico con pizarrón digital interactivo.

Marco Teórico

Un esquema reformado de enseñanza es descrito por Gerald (2002), en el cual apunta que se avoca a un currículo estandarizado con un alto nivel en los procesos de razonamiento, los cuales son la expectativa central del curso, además, se valora que los estudiantes determinen modelos y hagan conexiones, lenguaje y comunicación matemático relacionado con la vida real, y actividades contextualizadas, las que permiten abordar la resolución de problemas de calidad, y con énfasis reducido en la rutina de cálculos, tal aprendizaje es mejor evaluado a través de auténticos problemas abiertos, además de métodos alternos de evaluación, aunque en menor grado mediante preguntas de respuesta breve y pruebas estándar para valorar ciertas habilidades.

Desde la perspectiva de la teoría de representaciones semióticas de Duval, los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, consecuentemente para su estudio y tratamiento se requiere contar con representaciones de los mismos, las externas a las que hacemos alusión pueden ser de carácter geométrico, algebraico y numérico del objeto. A través de estos procesos de representación, tratamiento y conversión, se permite exteriorizar las representaciones mentales de los individuos, se motiva la retroalimentación y mejoramiento de las mismas. Lo cual conduce a la formación de preceptos matemáticos y a la conceptualización de objetos matemáticos.

Investigaciones de especialistas en matemática educativa enmarcados en la teoría de las representaciones semióticas indican que es común confundir precisamente los objetos matemáticos y sus representaciones, quizá esta confusión se deba al estudio y tratamiento de los conceptos de matemáticas basado únicamente en alguna de las representaciones, o bien, por tratar de manera aislada dichas representaciones. A la vez, es muy común que dentro de los programas o contenidos temáticos de los cursos de matemáticas, se establezca como objetivo, que el estudiante adquiera o desarrolle ciertas competencias o habilidades específicamente en alguna de las representaciones citadas.

La teoría de las representaciones de Duval da primordial importancia a la habilidad para cambiar de un registro de representación semiótica a otro, (Descartes designó el término registro para referirse a los espacios diferentes de representaciones semióticas) dicha habilidad resulta necesaria para el aprendizaje de las matemáticas, además de considerar al conocimiento conceptual (la comprensión) como el invariante de múltiples representaciones semióticas.

Metodología

Se realizó un estudio explorativo y comparativo con dos grupos de estudiantes en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California, la cual tiene como propósito la formación profesional de estudiantes en el área de la ingeniería. En virtud de manipular de manera intencional variables independientes y medir la variable dependiente, así como para el establecimiento de la comparación de los dos grupos el diseño de investigación utilizado fue el denominado cuasiexperimento de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006), toda vez que no se tiene la seguridad sobre la equivalencia inicial de los grupos. Las conjeturas de esta investigación se sujetaron a la prueba de hipótesis de medias (Walpole y Myers 1989).Con el propósito de comparar a los grupos de control y experimental se utilizó el examen colegiado de Cálculo Diferencial, instrumento de medición válido y confiable, de criterio, alto impacto y alineado con el currículo. Dicho instrumento está constituido por 60 reactivos de opción múltiple. En este documento solo se consideran los indicadores de logro asociados a los reactivos que motiva el juego didáctico, mismos que están declarados en la Tabla 1.

Exposición de la propuesta

Se diseñó una estrategia didáctica para el estudio y tratamiento de la graficación paramétrica, que forma parte del curso de Cálculo Diferencial y que se imparte en la FIM de la Universidad Autónoma de Baja California.

El diseño se basa en la teoría de representaciones de Duval (2006a, 2006b) y Hitt (2003), toda vez que las actividades que los estudiantes tienen que realizar en la estrategia, se enfatiza la habilidad para cambiar de un registro de representación a otro. El PDI es un mediador tecnológico de avanzada en la implementación de la estrategia didáctica. Su uso contempla los criterios y consideraciones de algunos especialistas del área (Hervás, Toledo y González, 2010, Giandini y Salerno 2009, Garibay, Vázquez, Castañeda y Hernández, 2008).

La estrategia usada para abordar el tema de construcción de gráficas por parámetros, es hacer uso de la herramienta brindada por el PDI llamada *The mathematical Toolkit*, con la cual se pueden graficar hasta cinco funciones explícitas en un solo plano y ver la tabla de valores generados para cada una de ellas. La estrategia consiste en darle al alumno cinco funciones (en este caso se ejemplifica con gráficas de funciones de segundo grado) con diferentes parámetros para que bosqueje su gráfica. Después de 15 minutos de trabajo por parte del alumno, se ingresan las funciones en la herramienta *toolkit* del PDI y se selecciona la opción de *hide graph* a la izquierda de cada función para que no se vea la gráfica de todas las funciones al mismo tiempo; ya que están registradas las funciones, el maestro muestra la función base, (ver figura 1) patrón o de referencia

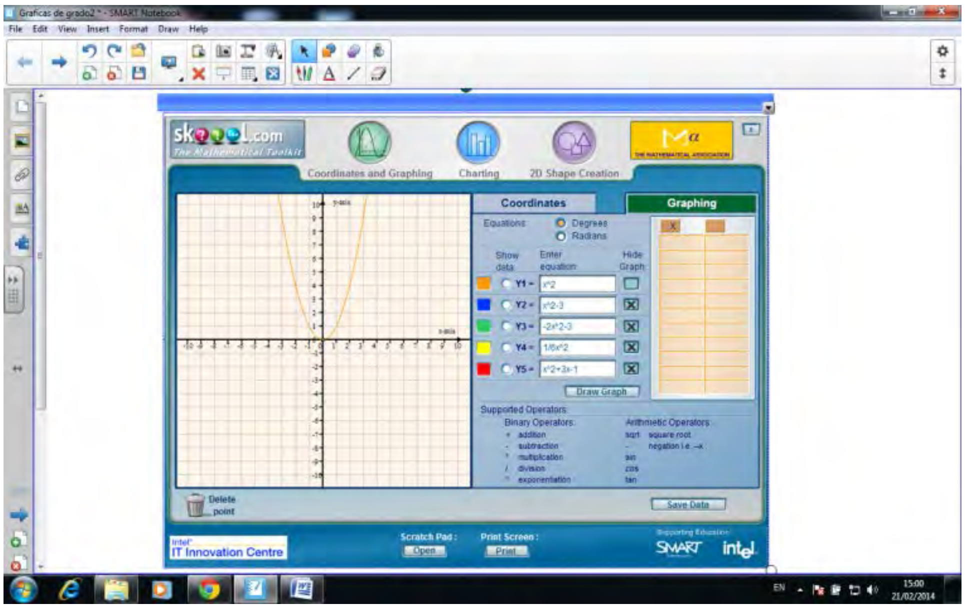


Figura 1. Gráfica de referencia de la función

A continuación el profesor pregunta a los alumnos cómo esperan que sea la gráfica de la segunda función, después de un tiempo de reflexión los alumnos dan sus opciones y después, el maestro descubre la gráfica de la función, simultáneamente se muestra la tabla (lado derecho) con los valores obtenidos en la evaluación numérica (ver figura 2).

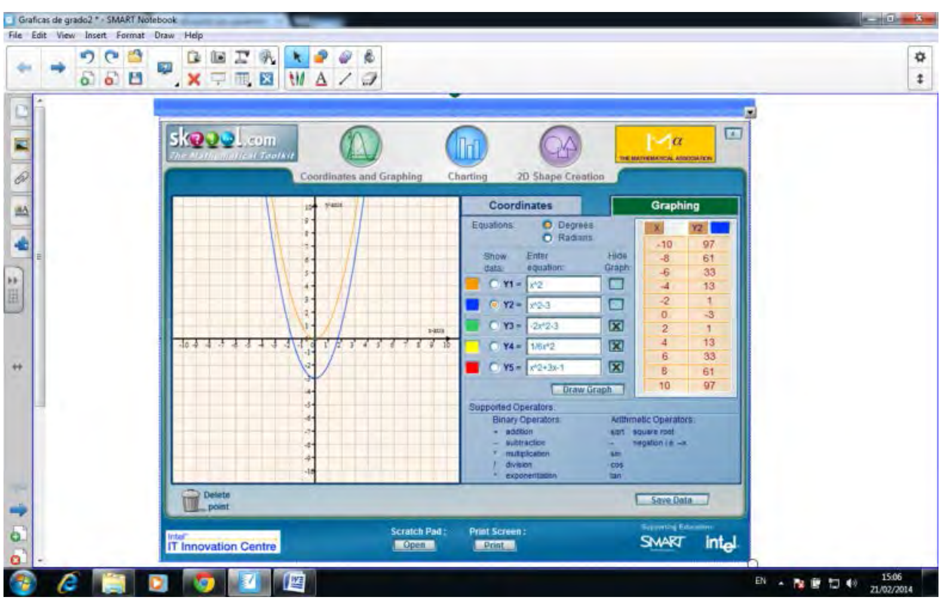


Figura 2. Gráfica de referencia de la función

El mismo proceso ocurre para el resto de las funciones, mismas que se refieren a parábolas con desplazamientos horizontales o verticales, así como reflexiones con respecto al eje horizontal, hasta que finalmente se descubren todas las gráficas en el mismo plano (ver figura 3).

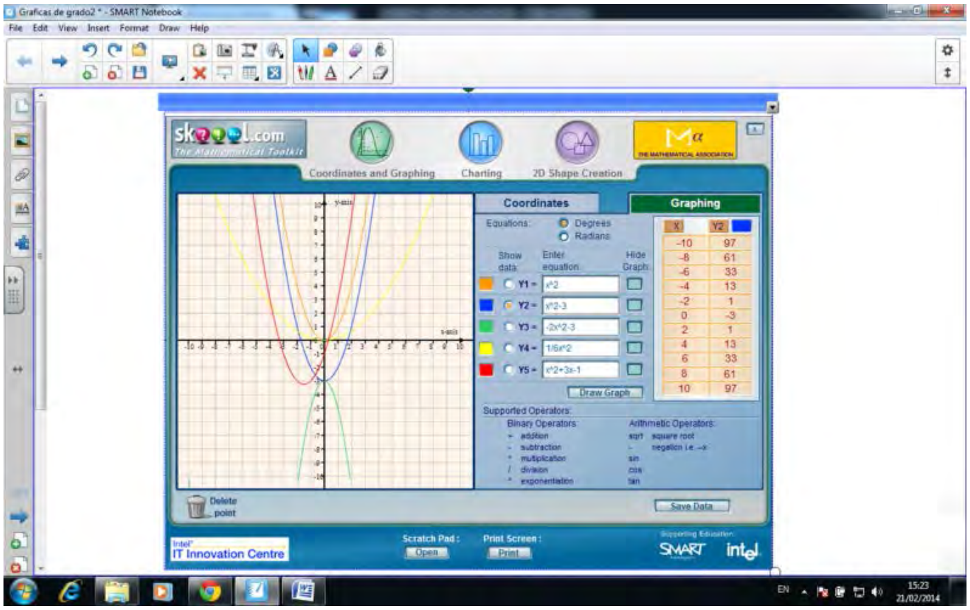


Figura 3. Gráfica del resto de la funciones de segundo grado

Resultados

Con la estrategia didáctica, se promueve en el alumno mayor eficiencia del conocimiento matemático relacionado con el tratamiento de la graficación paramétrica, dicha eficiencia se determina a partir de indicadores de logro (Zabala y Arnau, 2008).

La conformación inicial de los grupos con los estudiantes participantes en el estudio fue aleatoria y la aplicación de instrumentos de medición en la FIM (De Las Fuentes, et al. 2010) sobre la eficiencia de conocimientos tratada a partir de índices promedio de competencias matemáticas y actividades cognitivas (representación, tratamiento y conversión) permiten declarar que no hay diferencia significativa en cuanto a las actividades cognitivas (representación, tratamiento y conversión) de los estudiantes tanto de los grupos con enseñanza tradicional, como de los grupos en los que se incluyó el uso del PDI.

La confiabilidad del instrumento de medición se determinó con el método de mitades partidas, de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006). La confiabilidad calculada es 0.87, considerada como aceptable para Contreras, Bachhoff y Larrazolo (2004) para el caso de exámenes estandarizados.

A continuación (ver Tabla 1) se presentan los resultados comparativos obtenidos de la administración del instrumento de medición, mismo que se aplicó a 751 estudiantes al finalizar el curso de cálculo diferencial, 121 de ellos se conformaron en cuatro grupos de estudiantes y contaron con la tecnología del PDI, mientras que el resto abordo el curso de cálculo diferencial sin tecnología. Los resultados que se muestran solo contemplan los indicadores de logro impactados por el uso del PDI.

Tabla 1. *Comparativo de los índices promedio de dificultad e indicadores de logro entre los estudiantes que si utilizaron y los que no utilizaron tecnología del PDI.*

Reactivo	Indicador de logro	Grupos con PDI	Grupos sin PDI	Prueba de hipótesis
12	Representar gráficamente una función lineal a partir de su expresión algebraica	0.77	0.76	No hay diferencia significativa
14	Representar gráficamente una función polinomial a partir de su expresión algebraica	0.68	0.69	No hay diferencia significativa
15	Representar gráficamente una función racional a partir de su expresión algebraica	0.64	0.60	No hay diferencia significativa
16	Representar algebraicamente una función por partes a partir de su gráfica	0.70	0.64	No hay diferencia significativa
20	Representar algebraicamente una función trigonométrica a partir de su gráfica	0.75	0.71	No hay diferencia significativa
22	Representar gráficamente una función exponencial a partir de su expresión algebraica.	0.74	0.64	Si hay diferencia significativa

Conclusiones

El balance general del estudio se considera exitoso en virtud de evidenciar disposición, motivación y un protagonismo importante por parte de los estudiantes que utilizaron el PDI, además,los resultados de la aplicación muestran mayores niveles de eficiencia en cinco de los seis indicadores de logro cuando se utiliza la actividad didáctica mediante el PDI, en particular, representar gráficamente una función lineal a partir de su expresión algebraica, representar gráficamente una función racional a partir de su expresión algebraica, representar algebraicamente una función por partes a partir de su gráfica, representar algebraicamente una función trigonométrica a partir de su gráfica, y representar gráficamente una función exponencial a partir de su expresión algebraica, en tanto que en este último indicador de logro, con un nivel de confianza del 95% y estadístico se obtuvo una diferencia significativa a favor del uso del PDI. La incorporación del PDI le facilitó al docente la promoción de las discusiones, observar los avances de sus alumnos, detectar dificultades y responder dudas individuales (Villarreal, 2006).

Aunque las vertientes de análisis y desarrollo de esta tecnología son diversas, desde la perspectiva del rendimiento del alumno no hay evidencia suficiente sobre el impacto de esta en el aprendizaje de los estudiantes (Gandol, Carrillo y Prats, 2012; Dorado, 2011; Torff y Tirotta, 2010; Smith, Higgins, Wall y Miller, 2005). Esta investigación y los resultados derivados de ella, pretenden abonar precisamente a la determinación del rendimiento escolar del alumno mediante los indicadores de logro.

Referencias bibliográficas

Álvarez, C., Salvati, S., Nussbaum, M. y Milrad, M. (2013). Collboard: Fostering new media literacies in the classroom through collaborative problem solving supported by digital pens and interactive whiteboards. *Computers & Education*, *63*, 368-379.

Bower, B., Brueningsen, C., Brueningsen, E., Gough, S. y Turley, W., (2003).*Discovering Math on the Voyage 20: Explorations*. E.U.A. Ed. Texas Instruments.

Contreras, L., Bachhoff, E. y Larrazolo, N. (2004). *Educación, aprendizaje y cognición. Teoría en la práctica*. México. Ed. Manual Moderno.

Deiros, F. B., (2003). Apuntes sobre didáctica de la matemática para ingeniería. Recuperado el 12 de junio de 2007 del sitio web: http://www.ilustrados.com/publicaciones/EpyAVkkkykeLzKtzAv.php

De Las Fuentes, M., Arcos, J. y Navarro, C. (2010). Impacto en las Competencias Matemáticas de los Estudiantes de Ecuaciones Diferenciales a Partir de una Estrategia Didáctica que incorpora la Calculadora. *Formación universitaria*, *3*(3), 33-44. Recuperado en 10 de diciembre de 2014, de http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-50062010000300005&lng=es&tlng=es. 10.4067/S0718-50062010000300005.

De Faria, E., (2005).Matemáticas y nuevas tecnologías en Costa Rica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*, 749-754. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Díaz, J., Herrera, S., Recio, C. y Saucedo, M. (2013). Herramienta interactiva en la comprensión del límite de una función. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *26*,1887-1896. México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Domingo J., Cacheiro, M. y Dulac, J. (2009). La pizarra digital interactiva como recurso docente. Teoría de la Educación. *Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, *10*(2), 127-145, Universidad de Salamanca. España.

Dorado, C. (2011). Creación de objetos de enseñanza y aprendizaje mediante el uso didáctico de la pizarra digital interactiva (PDI). Teoría de la Educación. *Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, *12*(1), 116-144, Universidad de Salamanca, España.

Duval, R., (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Journal of Educational Studies in Mathematic*, *61*(1-2), 103-131.

Duval, R., (2006b). Quelle sémiotique pour l’analyse de l’activité et des productions mathématiques? *RELIME*, *9* (Especial), 45-81,

Gandol, F., Carrillo, E. y Prats, M. (2012). Potencialidades y limitaciones de la pizarra digital interactiva, una revisión crítica de la literatura. *Revista Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación.*

Garibay B., Vázquez R., Castañeda M. y Hernández M., (2009). El Pizarrón Interactivo Promethean: su uso en las asignaturas de ciencias y tecnología a nivel pregrado. UAG, México.

Gerald, A. G., (2002). Representaciones en el aprendizaje de las matemáticas y resolución de problemas. En L. D. English (Ed.), *Manual de investigación internacional en educación matemática* (pp. 197-218). New Jersey, EE. UU.

Giandini, V. y Salerno, M., (2009). La geometría, los ingresantes y el software maple, Formación Universitaria, 2(4), 23-30.

Hernández, S. R., Fernández, C. C., y Baptista, L. P., (2006). *Metodología de la Investigación* (cuarta edición). México. Ed. Mc. Graw Hill.

Hervás, C., Toledo, P. y González, M. (2010). La utilización conjunta de la pizarra digital interactiva y el sistema de participación senteo: una experiencia universitaria. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, *36*, 203-214. Universidad de Sevilla. España

Heugl, H., (2003). La necesaria competencia algebraica fundamental en la época de los CAS, En A. Del Castillo, et al, (Eds.), *Antología de lecturas: El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico*, 29-66.Sonora, México.

Hitt, E. F., (2003). Una reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes de Tecnología. *Boletín de la Asociación Venezolana*, *10*(2), 12-21

Karen, D., (2000). La influencia de la tecnología en las normas sociomatemáticas en un curso de ecuaciones diferenciales, 219-224. Recuperado el 12 marzo de 2007 del sitio http://www.matedu.cinvestav.mx/e-librosydoc/pme-procee.pdf.

Laborde, C., (2003). ¿Por qué la tecnología es hoy indispensable en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?, En J. Jiménez, et al (Eds.), *Antología de lecturas. El uso del CAS voyage 200 como recurso didáctico*, 115-127. Sonora, México.

Muñoz, A. (2005). El uso inadecuado de conceptos matemáticos en las escuelas de ingeniería. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*, 377-382.México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Queralt, T. (2000). Un enfoque constructivista en el aprendizaje de las matemáticas con las calculadoras gráficas. *Centro de información, innovación y recursos educativos de Torrent* (CEFIRE). España.

Santos, M. y Arteaga, C. (2000). Comprensión de las representaciones gráfica y simbólica por los estudiantes en las funciones y sus relaciones.524-530.Recuperado el 12 marzo de 2007 del sitio http://www.matedu.cinvestav.mx/e-librosydoc/pme-procee.pdf.

Smith, H., Higgins, S., Wall, K y Miller, J. (2005). Interactive whiteboards: boon or bandwagon? A critical review of the literature. *Journal of Computer Assisted Learning* Vol.*21*, 91–101

Torff, B. y Tirotta, R. (2010). Interactive whiteboards produce small gains in elementary students' self-reported motivation in mathematics. *Computers and Education*, *54*, 379-383.

Vilanova, S., Rocerau, M., Medina, P., Astiz, M., Oliver, M., Vecino, S. y Valdez, G., (2005). Concepciones de los docentes sobre la matemática, su incidencia en la enseñanza y el aprendizaje. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta*

Latinoamericana de Matemática Educativa, *18*, 444-449.México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Walpole, R. E., y Myers, R. H., (1989). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. (Segunda edición). México: Interamericana.

Zabala, A., y Arnau, L., (2008). *11 Ideas clave, ¿Cómo aprender y enseñar competencias?* (Segunda edición).Barcelona. Ed. Grao.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

LA NOCIÓN DE APROXIMACIÓN EN EL AMBIENTE TECNOLÓGICO PROPORCIONADO POR GEOGEBRA (ATIAM)

María de Lourdes Guerrero Magaña, Patricia Manríquez Zavala, Juan Carlos Proa Prado

Universidad de Guadalajara. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México.

Lourdes.Guerrero@gmail.com, *pati.manriquez@gmail.com*, *morelia_juancarlos@hotmail.com*

Para citar este artículo:

Guerrero, M., Manríquez, P., Proa, J. C. (2017). La noción de aproximación en el ambiente tecnológico proporcionado por geogebra (ATIAM). *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

LA NOCIÓN DE APROXIMACIÓN EN EL AMBIENTE TECNOLÓGICO PROPORCIONADO POR GEOGEBRA (ATIAM)

María de Lourdes Guerrero Magaña, Patricia Manríquez Zavala, Juan Carlos Proa Prado

Universidad de Guadalajara. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México.

lourdes.Guerrero@gmail.com, pati.manriquez@gmail.com, morelia_juancarlos@hotmail.com

Resumen

Se presentan resultados de investigación relativos a una indagación sobre la noción de aproximación de medidas en objetos geométricos usando Geogebra. Los resultados muestran que los estudiantes de bachillerato tienen nociones débiles del concepto de aproximación aun cuando sus recursos aritméticos son bastos. Estos resultados permitieron, por un lado, analizar la potencialidad que tiene para el aprendizaje el conectar ideas geométricas y aritméticas y, por otro, entender mejor las fortalezas y dificultades que enfrentan los estudiantes. Enmarcamos este trabajo en la teoría de representaciones de Duval (1993), así como en los trabajos de Núñez y Cortés (2008) sobre Ambientes Tecnológicos Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas (ATIAM), y Kuzniak (2012, 2013) sobre la importancia de transitar entre diferentes campos de las matemáticas.

Palabras clave: Aproximación, Conectando la aritmética y la geometría, Software de geometría dinámica, Medición, Versatilidad en el uso de recursos matemáticos

Introducción

Una de las consecuencias de la globalización es la necesidad de que los estudiantes cuenten con ciertas competencias que les permitan enfrentarse a nuevas situaciones; es por ello que, para hacer frente a esta situación, el joven estudiante necesita de una formación integral basada en una actualización constante y dinámica que se adapte a los distintos cambios de la sociedad. Con este planteamiento, el método de enseñanza tradicional, con aún una gran variedad de rastros palpables del conductismo de los años 80, no es que el que el alumno de hoy y de mañana requieren.

En este mismo contexto, el avance constante en el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en todos los ámbitos de nuestra vida, genera la necesidad de buscar innovar los métodos de enseñanza-aprendizaje basados en las TIC.

El uso de la tecnología ha permitido el manejo dinámico interactivo de múltiples sistemas de representación, lo que ha repercutido en un aprendizaje que hace más énfasis en los conceptos y el entendimiento matemático. Así mismo, las TIC han permitido tener una mayor comprensión de los problemas y dificultades que enfrentan los estudiantes durante el aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos.

Las primeras experiencias con la utilización de software en los salones de clase de matemáticas (laboratorios) fue una tarea ardua, que muchas veces traía consigo más desventajas que beneficios debido, entre otras cosas, al alto costo que representaba adquirir una computadora, lo cual no la hacía un artefacto de acceso general. Así mismo, el software desarrollado era poco amigable y transparente con tiempos de ejecución prolongados, lo que producía experiencias didácticas poco útiles desde el punto de vista del aprendizaje matemático. Sin embargo, con el paso del tiempo, hemos presenciado una actualización casi continua tanto de equipos como de software. Las necesidades actuales en la ciencia y en la tecnología, han encontrado un aliado en el uso de software, el cual ha necesitado de especialistas que lo adapten a la ciencia, lo que a la vez conlleva consigo un software cada vez más eficiente y dedicado a usos muy específicos en diversas ramas como la enseñanza de las matemáticas.

Los benéficos que se vislumbran por el uso de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, son considerables. Uno de ellos es la posibilidad de manejar dinámicamente objetos matemáticos en múltiples registros de representación dentro de esquemas interactivos, difíciles de lograr con los medios tradicionales no fácilmente manipulables. Así, el conocimiento matemático obtenido a través de la exploración de los objetos asume características no tradicionales.

Por lo anteriormente señalado, la investigación se sustentó sobre la necesidad de buscar formas en que los estudiantes de bachillerato, a través del uso de herramientas tecnológicas y de actividades de aprendizaje, generaran un aprendizaje conceptual acerca de las nociones de aproximación y estimación en ambientes de aprendizaje interactivos. Nociones que si bien están relacionadas con el estudio de la aritmética, a la que los estudiantes se enfrentan prácticamente durante toda la primaria y parte de la secundaria en nuestro país, son escasamente tratadas en el currículo y en el aula. Esta situación es compartida por los estudiantes en otros países de tal forma que varios investigadores (Chang, K., Males, L., Mosier, A. & Ginulates, F., 2011; Gooya, S., Khosroshahi, L. & Teppo, A., 2011; Hannighofer, J., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Weirich, S. & Robitzsch, A., 2011; Smith, J., Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Teppo, A., 2011) han resaltado la necesidad de utilizar actividades que favorezcan el desarrollo de estas habilidades.

Objetivo

El objetivo primario de la investigación, fue tener un mejor entendimiento de los procesos que siguen los estudiantes y los recursos matemáticos que utilizan cuando trabajan con Geogebra en actividades de aproximación que combinan de manera natural dos áreas básicas en las matemáticas escolares: la geometría y la aritmética.

Algunos objetivos adicionales fueron:

- Contar con información bien documentada sobre las fortalezas y dificultades en el aprendizaje de la noción de aproximación, de estudiantes de bachillerato.
- Generar actividades de aprendizaje conceptual que apoyen el uso de los recursos tecnológicos en el aula de matemáticas, particularmente de la utilización de software educativo de geometría dinámica.

Para lograr estos objetivos se plantearon las siguientes preguntas de investigación: ¿Qué características del software Geogebra permiten generar un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes logren desarrollar habilidades para estimar y aproximar cantidades numéricas?, ¿qué importancia da el estudiante al uso de software educativo para el aprendizaje de las matemáticas? y ¿qué estrategias y recursos matemáticos utilizaron los estudiantes para enfrentarse a las situaciones planteadas en las actividades?

Marco teórico

Muchas investigaciones se han realizado alrededor del uso de recursos tecnológicos en diferentes campos de las matemáticas escolares como el álgebra (Guerrero, L., Rojano, T., Maviriks, M., & Hoyles, C., 2011; Filloy, Puig, & Rojano., 2008; Kieran, 2007; Guerrero & Rivera, 2002; Rojano, 2001), la geometría (Kuzniak & Rauscher, 2011), o el cálculo (Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997), estudiando los procesos y nuevos acercamientos al aprendizaje usando estas herramientas. Sin embargo, es necesario estudiar también qué sucede en las interacciones entre diferentes dominios específicos de las matemáticas (Kuzniak, 2012, 2013) con el fin de comprender el funcionamiento global del trabajo matemático. Kuzniak (2012) señala que éste debe ser un ir y venir dentro de los diferentes espacios de trabajo matemático (ETM) que se les presentan a los estudiantes en el aula. Dicha interacción puede darse en algunos ámbitos de manera más natural; es el caso, por ejemplo de la geometría y la aritmética, en las que, a través del concepto de medida, pueden conjugarse conceptos de ambos ETM.

Particularmente, en la investigación que se reporta, analizamos la actividad realizada por los estudiantes de bachillerato en tareas que combinan el trabajo geométrico con el trabajo aritmético en Geogebra. Dicha combinación además permite pensar en un ETM como el contexto para promover el aprendizaje de conceptos en otro ETM; es decir, no resulta necesario “salir” del ámbito de las propias matemáticas para tratar de dar sentido y motivar el aprendizaje de las mismas. Así mismo, los medios tecnológicos y el software educativo que permiten mostrar, manipular y explorar diferentes representaciones de conceptos matemáticos (Duval, 1993), están siendo las herramientas idóneas para promover la integración de diferentes espacios de trabajo matemático (ETM).

Aunado al uso de la tecnología en el aula, es necesario crear verdaderos ambientes de trabajo matemático que promuevan el aprendizaje; así, en esta investigación hemos retomado las ideas emanadas de múltiples investigaciones con relación a la generación de entornos de aprendizaje colaborativos y de trabajo individual. Particularmente, hablamos de los Ambientes Tecnológico Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas (ATIAM), término acuñado por Núñez y Cortés (2007) para describir los trabajos realizados en la línea de investigación sobre el uso de tecnología computacional para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en la que también convergen aspectos y tendencias educativas actuales como: el desarrollo y uso de programas de cómputo, el uso de diversas plataformas de Internet y la utilización de calculadoras, entre otros, tanto desde la perspectiva de los profesores (didáctica y enseñanza) como desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas (aspectos cognitivos) (Cortés, Guerrero, Morales & Pedorza, 2014).

El uso de la tecnología en el aula de matemáticas modifica las relaciones entre los diversos actores que interactúan en ella; es en este sentido, que se ha definido un ATIAM como “aquel [ambiente] que se genera en el espacio o entorno donde los actores de los procesos de enseñanza y de aprendizaje (profesor y alumno) y el objeto de conocimiento, interactúan de forma organizada a través de una metodología que incluye actividades de aprendizaje con el uso de tecnología” (Cortés, Núñez, 2007).

La investigación realizada alrededor de los ATIAM (Cortes, Núñez 2007; Núñez, Cortes 2008; Núñez 2008), ha mostrado que estos ambientes tecnológicos tienen potencial para favorecer, en los estudiantes, el desarrollo de habilidades para la construcción de procesos de aprendizaje y de conceptos matemáticos. Para la creación de un ATIAM es preciso contar con: 1) una propuesta teórica de enseñanza y/o aprendizaje; 2) actividades que faciliten y estimulen la construcción de aprendizajes; y, 3) una metodología de enseñanza acorde con los puntos anteriores (Núñez, Cortés 2008).

La investigación que se reporta tiene que ver con el aprendizaje de nociones de aproximación y estimación. Si bien, como se ha mencionado previamente, se hace uso de un espacio de trabajo geométrico (ETG) como contexto, el énfasis del análisis se da en términos de estas nociones.

Actualmente el currículo de matemáticas del nivel básico se centra en el desarrollo de competencias así como del aprendizaje de conocimientos mediante la resolución de problemas. Dicho currículo ha relegado a segundo término algunas nociones básicas que resulta necesario retomar ya que son parte de la alfabetización matemática requerida por todo ciudadano competente; es decir, forman parte del conocimiento fundamental (SEP, 2011). Una de ellas es la capacidad para hacer aproximaciones; en la vida diaria tenemos necesidad de hacerlo todos los días y de muchas formas: Al manejar, estimamos velocidades; al ir al mercado estimamos precios y medidas; al darnos cuenta que nos equivocamos al hacer una operación o al juzgar la validez de ciertas afirmaciones cuantitativas. Generalmente hacemos estimaciones cualitativas y cuantitativas; sin embargo, muchos de los fenómenos que nos afectan se han vuelto tan complejos que no podemos percibirlos directamente o tratarlos de manera puramente cualitativa.

Si bien en el currículo actual se hacen diferentes recomendaciones para generar un alfabetismo funcional, del cual la aritmética es parte fundamental, la noción de aproximación es escasa en las situaciones que se les presentan a los estudiantes, sobreponiendo a ella el uso de la calculadora de bolsillo como un auxiliar en la resolución de problemas.

Esta situación es compartida por los estudiantes en otros países; diferentes investigadores (Chang, K., et al. 2011; Gooya, S., et al., 2011; Hannighofer, J., et al., 2011; Smith, et al., 2011) han resaltado la necesidad de incorporar al currículo actividades que favorezcan el desarrollo de estas habilidades.

Metodología

Para el presente trabajo de investigación se diseñaron y adecuaron tres tareas para ser utilizadas como contexto de la actividad: Construyendo polígonos, Construcción de polígonos regulares utilizando triángulos isósceles y El problema de la caja. La primera de las mismas se aplicó a un grupo de 14 estudiantes de bachillerato y las dos restantes a un segundo grupo de alumnos. Hay que hacer notar que las actividades: Construyendo polígonos y Construcción de polígonos regulares a través de triángulos isósceles tratan el mismo tema, aunque con diferente enfoque y por supuesto con preguntas distintas, situación que nos da además la oportunidad de hacer una comparación entre las respuestas de los grupos.

La intervención educativa para la investigación se realizó con alumnos de la escuela preparatoria Melchor Ocampo dependiente de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y del Conalep II, Morelia.

El primer grupo de 14 estudiantes se conformó por jóvenes que de manera voluntaria decidieron participar en el estudio. Éstos a su vez se dividieron (de manera voluntaria) en cinco grupos con 2 personas, un grupo de 1 persona y un grupo de 3 personas.

En el Conalep II, Morelia, se contó con diferente número de alumnos participantes en cada una de las actividades que realizamos: en las actividades de polígonos contamos con la participación de 26 alumnos, que a su vez se dividieron en doce equipos con dos estudiantes y dos equipos con un alumno. Mientras que para la actividad denominada El problema de la caja, contamos con la participación de 13 alumnos que se dividieron de 6 equipos de 2 integrantes y uno de 1.

Esta experimentación se realizó en el periodo del 3 de mayo al 17 de junio de 2013. El diseño y desarrollo de la misma se vinculó con una concepción de enseñanza y aprendizaje sustentado en el trabajo colaborativo, caracterizado por la aceptación compartida de responsabilidades mutuas de los miembros participantes en un equipo o en un grupo, en el que los roles del profesor y los alumnos son pieza fundamental, así también, se relacionaron al diseño y desarrollo del modelo interactivo con una reflexión individual acerca de los que se requería indagar.

A lo largo de la implementación se puso a disposición de los estudiantes en todo momento:

1. Computadora de escritorio a la mano para manejo personal.
2. Software GeoGebra instalado en la computadora de uso personal.
3. Un proyector, donde también se dio al alumno una introducción al manejo del Software GeoGebra, además de explicarle algunas situaciones donde había duda general.
4. Materiales convencionales (Hojas de trabajo, Hojas de cuadernos, Pizarrón blanco y plumines).

Dado que los alumnos desconocían el software Geogebra, se les dio una pequeña introducción sobre su manejo, haciendo principal énfasis en las herramientas utilizadas en el desarrollo de la actividad.

Con los alumnos del Conalep II, Morelia, se trabajó durante tres sesiones de dos horas cada una, mientras en la preparatoria Melchor Ocampo se les dio únicamente una sesión de dos horas.

Exposición de la propuesta

La propuesta consistió en la implementación de tres actividades en un ETG que, a través del concepto de medida, se combina con la noción aritmética de aproximación. Enseguida se explica con detalle una de ellas y, por cuestión de espacio, solamente se hacen comentarios a las otras.

La actividad denominada Construcción de polígonos regulares usando triángulos isósceles, consta de tres secciones. La primera de ellas corresponde a un fundamento teórico donde se espera que el alumno, a través de contestar una serie de preguntas, sea capaz de recordar algunos conocimientos previos clave. La segunda parte de la actividad corresponde a tareas utilizando el software Geogebra en la que se proporciona una construcción geométrica que los estudiantes tienen que manipular. Se trata de la partición tradicional de un polígono regular en tantos triángulos isósceles congruentes como el número de lados del mismo. En ésta se pide a los estudiantes trabajar con el ángulo central (el ángulo de la figura 1) en casos de polígonos regulares especialmente complejos, como el de 7 lados, en el que dicho ángulo solo puede darse de manera aproximada debido a las limitaciones del sistema de cómputo; limitaciones que en este caso se aprovechan para generar una actividad significativa para los estudiantes, creando condiciones para realizar procesos de experimentación y permitiendo un trabajo de carácter exploratorio (Guerrero & Cortés, 2013; Tanguay et al., 2013). Mediante ciertos cuestionamientos incluidos en una hoja de trabajo, se pide a los estudiantes que manipulen el ángulo y la medida del lado para, en un proceso de aproximación, logren cerrar lo mejor posible el polígono.

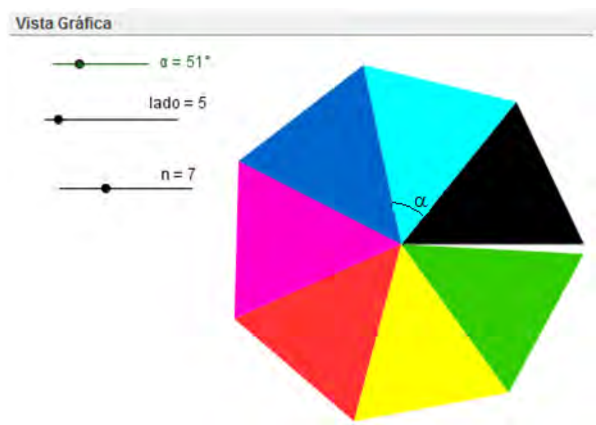


Figura 1. Construcción interactiva diseñada para la actividad de aproximación angular

Así mismo, interesaba que el alumno obtuviera la relación de proporcionalidad inversa entre el número n de triángulos que se necesitan para construir un polígono y el ángulo α respectivo; esto es, $n = \frac{k}{\alpha}$ con k constante y que reflexionara sobre la relación entre el ángulo α y la longitud l del lado.

La tercera sección de esta actividad dio la oportunidad a los estudiantes de plasmar algunas conclusiones acerca de los resultados que habían obtenido, como el por qué no se puede construir un polígono regular de siete lados, o que investigaran sobre otros casos de polígonos regulares y sus propiedades métricas, como para los que es imposible realizar una construcción geométrica mediante la estrategia planteada.

La primera de las actividades aplicadas, denominada Construyendo Polígonos, trata también de la posibilidad o imposibilidad de construcción de polígonos regulares a partir de triángulos. En ella se proporciona a los estudiantes un archivo en el que pueden disponer de un conjunto hasta de 15 triángulos isósceles, todos congruentes a uno dado (ver figura 2). Con dichos triángulos, se pide a los estudiantes construir polígonos uniendo los triángulos por vértices y lados. Los estudiantes pueden variar el ángulo en el vértice del triángulo isósceles, la medida de su base y el número de triángulos que requieren. En la hoja de trabajo correspondiente a esta actividad, se hacen preguntas acerca de cuánto deberá medir el ángulo en el vértice A del triángulo ABC, para construir polígonos regulares con diferente número de lados, ya que la actividad trata de hacer al estudiante reflexionar sobre la posibilidad (o no) de construir polígonos regulares de la manera en que comúnmente se tratan dichas figuras en los libros de texto al hablar de su perímetro o de su área.

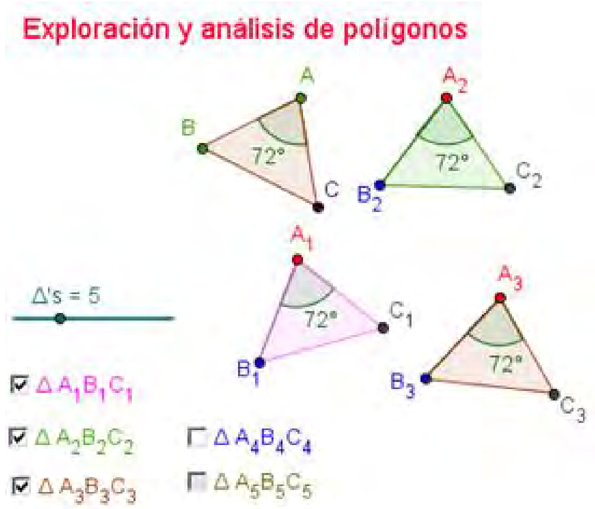


Figura 2. Actividad del archivo en GeoGebra

Otra de las actividades, denominada El problema de la caja, consiste en una simulación en Geogebra en la que los estudiantes tienen que manipular ciertas medidas, como la altura de la caja de un camión de carga que transita por una calle con cierta pendiente (también manipulable), con el fin de que éste pueda ser estacionado bajo un cobertizo. Se pretende que la experimentación (Guerrero & Cortés, 2013) con el modelo virtual ayude a los estudiantes a mejorar sus habilidades de aproximación. Es claro que aunque la caja del camión tenga una medida un poco inferior a la altura del cobertizo, éste no necesariamente puede entrar sin chocar en el techo. Los estudiantes deben manipular ya sea el ángulo de inclinación de la calle (el ángulo de la figura 3) o la altura de la caja del camión con el fin de lograr la meta. Se pide, en una hoja de trabajo, hacer ciertas tareas relacionadas con la manipulación de las cantidades descritas para ajustar lo mejor posible las medidas.

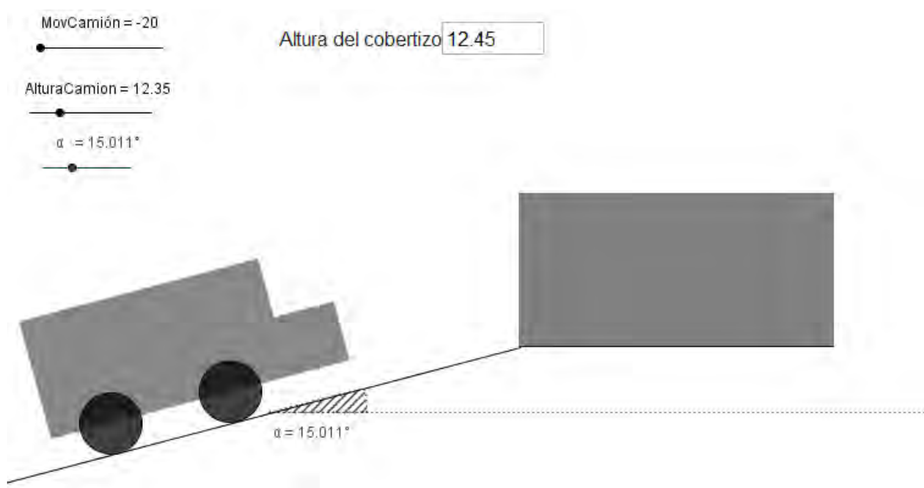


Figura 3. Construcción interactiva diseñada para la actividad de aproximación

Resultados

Una característica básica de los alumnos como respondieron a las actividades, es el escaso nivel de profundidad del conocimiento geométrico que considerábamos indispensable para trabajar en las actividades y que corresponde a un curso de geometría básica. Ejemplos que consideramos dentro de esta categoría son: los triángulos isósceles tienen dos lados iguales, la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180 grados, los ángulos en el triángulo equilátero son iguales, un polígono regular de *n* lados tiene exactamente *n* vértices. Así mismo, los alumnos nos informaron tener total desconocimiento en el uso de software de geometría dinámica, como Geogebra.

Otra circunstancia importante que encontramos al trabajar con los alumnos, fue que en la mayoría de las situaciones éstos responden de forma muy sencilla (ingenua en ocasiones) englobando una sola idea. Esto es, los alumnos fueron incapaces de poner en marcha y combinar varias ideas para la solución de un mismo problema.

Por otro lado, los estudiantes pudieron responder correctamente a preguntas relativas a los ángulos en polígonos regulares en algunos casos; por ejemplo, en el caso del pentágono señalan que la medida del ángulo α es de 72° "*porque en total son 360° y se dividen entre 5*". Sin embargo, en casos como el del heptágono, los estudiantes muestran dificultades debido a que en dichos casos "no se tiene un valor exacto" al dividir el ángulo total (360°) por el número de lados (7). Una respuesta como la siguiente: "El polígono de 7 lados no es un polígono regular porque le falta cerrarse", muestra que los estudiantes manejan los conceptos solamente a nivel perceptivo.

En la tabla 1 se muestran algunos resultados obtenidos del trabajo de los estudiantes con relación a la construcción presentada en la primera actividad aplicada, en donde con base en la manipulación de un conjunto de triángulos isósceles congruentes, se pide a los estudiantes la construcción de un polígono reglar. Una respuesta típica se muestra en la figura 4.

Figura 4. Respuesta típica de los estudiantes

Como se puede observar los alumnos logran establecer por sí mismos un resultado importante en términos de la construcción: la imposibilidad de construir geométricamente ciertos polígonos. Así mismo, podemos observar la confusión que tienen con algunos conceptos matemáticos, como el de proporcionalidad.

Tabla 1. *Parte de las respuestas de los equipos a la actividad Construyendo polígonos.*

Equipo 1, sec. 424	No, porque le faltó cerrarse
Equipo 2, sec. 424	No, porque sobran partes en el polígono
Equipo 3, sec. 424	No, tenía siete lados aunque uno era de menor tamaño
Equipo 4, sec. 424	No, porque no es exacto
Equipo 1, sec. 403	Si, pues cuando vamos cambiando las medidas, cambias los ángulos y salen diferentes figuras, polígonos regulares e irregulares
Equipo 2, sec. 403	No, porque tiene 7 lados iguales y no es proporcional
Equipo 3, sec. 403	Sí, por los lados que obtuvimos.
Equipo 4 y 5, sec. 403	Sí
Equipo 6 y 7, sec. 403	No respondieron

En el caso del heptágono, los estudiantes logran hacer aproximaciones para el ángulo solamente hasta la tercera cifra decimal del ángulo sin que puedan cerrar completamente el polígono. No logran dar explicaciones pertinentes a este fenómeno ni ir más allá en las aproximaciones. Sus respuestas a preguntas relativas a la exactitud de resultados son muy básicas, englobando solamente una idea geométrica perceptiva sin conexión con los valores numéricos que obtienen.

Conclusiones generales

En el currículo de matemáticas se establece que existe un polígono regular de *n* lados para cada entero $n > 2$ y, para cada uno de ellos, el ángulo central mide $\frac{360}{n}$ grados. Se espera también que el estudiante comprenda que ciertas fracciones no pueden expresarse de manera exacta en una forma decimal finita, y que no siempre es posible utilizar el signo de igualdad entre una fracción de la forma $\frac{m}{n}$ y una escritura decimal finita que represente lo mismo. Se insiste en la necesidad de utilizar diferentes formas de escritura de los números y que dichas formas serán útiles en el trabajo matemático posterior; sin embargo, estas ideas se dan de manera aislada, de tal forma que generan dificultades conceptuales en el aprendizaje de los estudiantes como lo muestra esta investigación.

Si bien los estudiantes que participaron en esta investigación se vieron interesados en realizar las actividades y trabajaron en ellas a lo largo de todas las sesiones sin tener dificultades en el manejo del software (aun cuando señalaron que nuca habían trabajado con un SGD), mostraron dificultades para seguir un argumento lógico y sus ideas fueron muy intuitivas y carentes de formalismo. Los estudiantes no trataron de comprobar sus respuestas por otros medios y además se observaron respuestas contradictorias en diferentes situaciones. Estas dificultades muestran que los estudiantes tienen problemas aún con nociones muy básicas, como las asociadas a los polígonos regulares.

Por otro lado, el software Geogebra posibilitó estudiar la abertura que queda en algunos polígonos "regulares"; haciendo que los estudiantes se percaten de este tipo de dificultades de construcción. Fue un importante auxiliar que ayudó a obtener información de manera experimental.

Referencias Bibliográficas

Aspinwall, L., Shaw, K. & Presmeg, N. (1997). Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections between a Function and its Derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 33(3), 301-317.

Cortés, C., Guerrero, L., Morales ch., & Pedorza, L. (2014) Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): Aplicaciones Tecnológicas para el Aprendizaje de las Matemáticas. En: (2014) Agustín Carrillo (Ed.) *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. No 39. Septiembre 2014, pp. 141-161.

Chang, K., Males, L., Mosier, A. & Ginulates, F. (2011) Exploring US textbooks' treatment of the estimation of linear measurements. *ZDM*, 43(5), 697-708.

Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°5, p. 37-65. IREM de Strasbourg.

Filloy, E., Puig, L., Rojano. T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. Springer, USA.

Gooya, S., Khosroshahi, L. & Teppo, A. (2011) Iranian students' measurement estimation performance involving linear and área attributes of real-world objets. *ZDM*, 43(5), 709-722.

Guerrero, L. & Cortés, C. (2013) Ambientes tecnológico – interactivos para el aprendizaje de las matemáticas: investigaciones y experiencias en geometría y cálculo. En: Rojano, T. (Editora) *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas*. Ed. Trillas, México.

Guerrero, L. y Rivera, A. (2002) Exploration of patterns and recursive functions. En: Proceedings of the 24th PME-NA Conference, vol. 1. Athens, GA, USA.

Guerrero, L., Rojano, T., Maviriks, M., Hoyles, C. (2011). Critical Moments in generalization tasks. Building algebraic rules in a digital sign system. En: Wiest, L. R., & Lamberg, T. (Eds.) Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of *Mathematics Education.* Reno, NV: University of Nevada, Reno.

Hannighofer, J., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Weirich, S. & Robitzsch, A. (2011) Revealing German primary school students' achievement in measurement. *ZDM*, 43(5), 651-665.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En: Lester, Jr., (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kuzniak, A. (2012) Understanding the nature of the geometric work through its developement and its transformations. *12th International Congress on Mathematical Education*, COEX, Seoul, Korea.

Kuzniak, A. (2013) Travail mathématique et domaines mathématiques. To appear in A. Kuzniak et P. R. Richard (eds), *Proceedings of the 3rd symposium Espace de Travail Mathématique*. Université de Montréal.

Kuzniak, A. & Rauscher, J. (2011) How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 77 (pp.129–147).

Núñez, E. y Cortés, C. (2008) Propuesta de una metodología de enseñanza usando ambientes tecnológicos interactivos. En: R. Pantoja, E. Añorve, C. Cortés y L. Osornio (Editores) *Investigaciones y propuestas sobre el uso de la tecnología en educación matemática.* Vol. 1, 121-231, Editorial AMIUTEM.

Rojano, T. (2001). Algebraic Reasoning with Spreadsheets. *Proceedings of the International Seminar "Reasoning explanation and proof in school mathematics* *and their place in the intended curriculum"*. Qualificactions and Curriculum Authority. Cambridge, UK, pp. 1-16.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* Subsecretaría de Educación Básica de la SEP, México.

Smith, J., Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Teppo, A. (2011) Learning, teaching, and using measurement: introduction to the issue. *ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 43, 617–620.

Tanguay, D., Geeraerts, L., Saboya, M., Venant, F., Guerrero, ML. & Morales, Ch. (2013) An activity entaliling exactess and aproximation of angle measurment in a DGS. *CERME 8*. 6-10 de febrero, Turquía.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN MODELOS VIBRATORIOS ABORDADOS CON EL USO DE LA CALCULADORA GRAFICADORA TI NSPIRE CX CAS

Ricardo Solórzano Gutiérrez, María Guadalupe Vázquez Rodríguez, Irma Xóchitl Fuentes Uribe

Universidad de Guadalajara, Centro de Enseñanza Tecnica Industrial, Mexico.

ricardo_sg75@hotmail.com, *magpevrs@hotmail.com*, *xochitl.fuentes@cucea.udg.mx*

Para citar este artículo:

Solórzano, R., Gutiérrez, Vázquez, M. G., Fuentes, I. X. (2017). Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en modelos vibratorios abordados con el uso de la calculadora graficadora TI NSPIRE CX CAS. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN MODELOS VIBRATORIOS ABORDADOS CON EL USO DE LA CALCULADORA GRAFICADORA TI NSPIRE CX CAS

Ricardo Solórzano Gutiérrez, María Guadalupe Vázquez Rodríguez, Irma Xóchitl Fuentes Uribe

Universidad de Guadalajara, Centro de Enseñanza Tecnica Industrial, Mexico.

ricardo_sg75@hotmail.com, *magpevrs@hotmail.com*, *xochitl.fuentes@cucea.udg.mx*

Resumen

En la enseñanza de las matemáticas es fundamental la simulación de problemas cotidianos y para ello, las ecuaciones diferenciales ordinarias permiten modelar problemáticas ingenieriles que hoy en día se requieren resolver con mayor precisión. Uno de los casos a presentarse en este XI Seminario, es el de entender el comportamiento de un sistema vibratorio forzado armónicamente y qué variables están relacionadas con esta clase de movimiento. Para ello, es necesario no solamente resolver las ecuaciones que se pueden generar a través de la metodología tradicional, sino que el utilizar la tecnología, en este caso a través de la calculadora TI Nspire CX Cas se podrá profundizar en la relación que existe entre variables como el amortiguamiento del sistema y la frecuencia de oscilación de la fuerza, además de poder visualizar con el uso de gráficas, la interacción de estas variables y conducir a recomendaciones favorables para el control del propio sistema.

Palabras Claves: Vibración, Función Armónica, Fuerza Excitadora, Amortiguador.

Introduccion

En los últimos años, los recursos tecnológicos han sido uno de los principales promotores para el proceso de enseñanza aprendizaje, sobretodo en el área de las ingenierías, ya que a través de software libre, herramientas de cómputo y diversas aplicaciones en los teléfonos celulares, abren la puerta a la posibilidad de complementar la catedra tradicional de clase, apoyando a la solución de los modelos matemáticos que involucran diversos fenómenos físicos, y que para el caso de las vibraciones mecánicas, permite al profesor profundizar en aspectos prácticos del área de interés, dejando de lado los procesos matemáticos tradicionales de resolver una ecuación diferencial de segundo orden con métodos de solución extensos y que no son prioritarios en el curso, por ejemplo la transformada de Laplace, variación de parámetros, etc., dándole mayor importancia a la interpretación de resultados en la respuesta esperada de un modelo vibratorio.

En el entorno laboral, donde la solución de problemas es una constante para el campo ingenieril, el recurso tecnológico permite que se pueda aplicar acciones correctivas en el desarrollo del problema y que la premura de la solución pueda reducir riesgos, disminuir costos y ser eficientes en los procesos productivos. Por tal motivo, el uso de herramientas tecnológicas y en específico, la calculadora graficadora TI Nspire CX Cas, representa una herramienta fundamental para cumplir los objetivos del curso de Vibraciones Mecánicas que actualmente se imparte en el Centro de Enseñanza Técnica Industrial, y que tienen que ver no solamente con la creación de los modelos vibratorios formulados matemáticamente, sino que también se requiere conocer las diversas variables dinámicas que afectan o contribuyen al movimiento y sobretodo, que solución se puede plantear para la reducción de la vibración.

Homogeneizar los métodos de enseñanza, es un reto que se ha propuesto la Academia de Control del propio Centro, ya que uno de los principales objetivos que se tienen es el de propiciar que el alumno tenga un mayor interés por el uso de la tecnología y que la pueda aplicar en aspectos prácticos de profesión.

Objetivo

Este trabajo pretende mostrar, algunos ejercicios en los que a través de utilizar la tecnología, el alumno plantea y resuelve modelos vibratorios y que al relacionar gráficamente las variables dinámicas asociadas al comportamiento del sistema, pueda tener una interpretación adecuada sobre los efectos de estas variables en el movimiento de la masa a través del tiempo.

Marco teorico

En los últimos años, el uso de la tecnología ha tenido diversas aplicaciones, entre ellas destacan la del entorno educativo, esto con la finalidad de ofrecer al estudiante ambientes de trabajo que estimulen su reflexión, lo cual los convierte en un activo responsable de su propio aprendizaje, es decir, al proveer un espacio común entre el maestro y el estudiante, la retroalimentación de información reducirá el miedo del estudiante a expresar algo erróneo y por lo tanto, se aventurará más a explorar (Castillo,2008). Sin embargo, Pomerantz (1997) señala que existen algunos mitos acerca del uso de la calculadora, entre otros, el que los estudiantes pierden habilidades al usarlas porque las calculadoras hacen todo el trabajo por él, volviéndolo dependiente. Al respecto, considera que estos mitos únicamente sirven para hacer más lento, la inevitable implementación de la tecnología en los salones de clase y pone a los estudiantes en desventaja. En un mundo que está siendo cubierto por la tecnología, es necesario que estos mitos sean redimensionados, ya que las calculadoras pueden ser apropiadamente incorporadas como una herramienta para fomentar el aprendizaje.

En el ámbito de la aplicación de las ecuaciones diferenciales, Hernández (1997) señala que el uso de las TIC es importante en procesos donde la memorización y el desarrollo de algoritmos repetitivos no es lo primordial en el proceso de enseñanza, el hecho de que esta herramienta se utilice, es para vincular el efecto que tiene los elementos de rigidez, disipación y fuerza excitadora con la amplitud de oscilación de los sistemas vibratorios, y por lo tanto el resultado esperado es que el alumno pueda asimilar el comportamiento de las variables dinámicas más importantes para vincular sus efectos en la amplitud de oscilación.

Metodología

El Centro de Enseñanza Técnica Industrial, a través de la Academia de Control perteneciente a la carrera de Ingeniería Mecatronica, ha solicitado a sus profesores que los recursos tecnológicos existentes en el mercado sean una prioridad en su utilización, no solamente por la eficiencia que tienen estos en depurar procesos que consumen periodos de tiempo prolongados, sino que permiten al alumno complementar su aprendizaje, utilizándolos mediante un razonamiento lógico-matemático para desarrollar su ingenio y que le permita resolver problemas eficientemente, identificando los problemas que los originan y el cómo resolverlo de la manera más eficiente.

Por lo tanto, la propuesta en este trabajo es mostrar un problema común de vibraciones como un sistema de un grado de libertad, el cual se resolverá a través del modelo matemático tradicional, y comparar la solución con el uso de una herramienta tecnológica, en este caso el uso de la calculadora graficadora TI Nspire CX Cas, para posteriormente dejar al alumno en un proceso de reflexión, para obtener conclusiones con respecto al efecto que tienen las variables dinámicas inmersas en el modelo y que a través de su representación gráfica, visualice la mejor solución al problema planteado, y defina la forma de como eliminarlas o simplemente reducirlas a un nivel satisfactorio.

Exposicion de la propuesta

A continuación se muestra un ejemplo tipo a resolver. En este se toma en cuenta el proceso tradicional de solución y además lo complementa el uso de la calculadora graficadora TI Nspire CX Cas, para comprobar lo ya realizado.

Problema:

Una máquina de 10 Kg está montada en una base la cual esta soportada por 4 resortes equidistantes cuya rigidez es de 1000 N/m cada uno, y se encontrará amortiguado a través de una constante c= 40 N–seg/m. Sí al accionarse la máquina, induce una vibración con una fuerza excitadora de 100 N y una frecuencia de 1.60 Hz. Determine el Factor de amplificación del sistema. (ver figura 1).

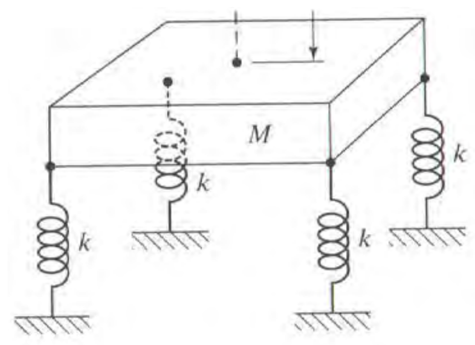


Figura 1. Modelo masa-resorte.

<u>Definición de la solución</u>:

Para plantear la ecuación de movimiento, se requiere verificar el tipo de movimiento que tendrá la masa, en este caso el sistema se encuentra sin amortiguamiento, por lo tanto, la ecuación diferencial será:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(wt)$$

En esta ecuación, las variables están definiendo lo siguiente:

$$m = \text{ masa } = \frac{\text{Peso}}{\text{Aceleracion Gravitacional}} = 10Kg$$

$$k = \text{ rigidez } = \sum_{i=1}^{n} K_i = 4(1000N/m) = 4000N/m$$

$$c = \text{ Constante de amortiguamiento} = 40N - seg/m$$

La relación de amortiguamiento que tiene el sistema es:

$$\xi = \frac{\text{Constante de Amortiguamiento}}{\text{Constante de Amortiguamiento Critico}} = \frac{40N - seg/m}{2mw_n} = \frac{40}{2(10)(\sqrt{\frac{4000}{10}})} = 0.10$$

La fuerza excitadora presente en el sistema estará dada por el dispositivo mecánico y por lo tanto, su magnitud y frecuencia están representados por:

$$F_0 = \text{ Fuerza } = 100N$$

$$w = \text{Frecuencia circular de la fuerza } = 2\pi f = 2\pi\left(1.6\,\text{Hz}\right) = 10.053\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

Así, los valores obtenidos sustituyéndolos en la ecuación diferencial de movimiento seleccionada estará definida por:

$$10\ddot{x} + 40\dot{x} + 4000x = 100\cos\left(10.053t\right)$$

Solución utilizando tecnología:

Esta ecuación diferencial al resolverla, tendrá como función de posición de la masa a través del tiempo, la gráfica mostrada en la figura 2. Esta representación se puede obtener con cualquier graficador, sin embargo, la importancia de mostrarla es el de hacer ver al alumno que la respuesta total del sistema está formada por la suma de dos partes, la respuesta transitoria definida en la parte inicial de la oscilación, y la respuesta estacionaria definida por la fuerza excitadora y que corresponde a la oscilación de amplitud constante.

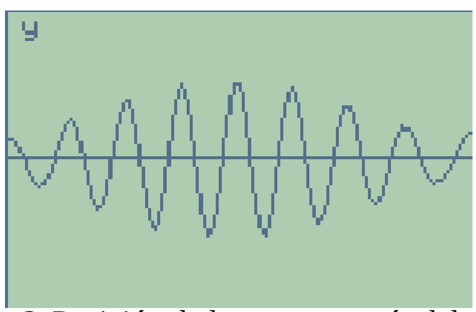


Figura 2. Posición de la masa a través del tiempo.

La máxima ordenada de la gráfica en el estado estacionario, es decir, cuando el sistema está afectado por la fuerza excitadora, debe encontrarse a través de:

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}} = \frac{100N}{\sqrt{(4000 - ((10)(10.053)^2))^2 + ((40)(10.053))^2}} = 0.033m$$

Para el factor de amplificación, es decir la relación entre la respuesta dinámica con respecto a la respuesta estática y que permite visualizar el efecto de la fuerza excitadora sobre el sistema, se podrá utilizar la expresión:

$$\left(\frac{X}{\delta_{ST}}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

La relación de frecuencias, identificada como r representa una comparativa entre la frecuencia de la fuerza excitadora con respecto la frecuencia de oscilación del propio sistema, y que debe calcularse a través de:

$$r = \frac{w}{w_n} = \frac{10.053 \,{}^{rad}\!/_{seg}}{\sqrt{\dfrac{k}{m}}} \qquad r = \frac{w}{w_n} = \frac{10.053 \,{}^{rad}\!/_{seg}}{\sqrt{\dfrac{4000}{10}}} = 0.502$$

Por lo tanto, el factor de amplificación se determina sustituyendo los valores solicitados en la expresión.

$$\left(\frac{X}{\delta_{ST}}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1-(0.502)^2)^2 + (2(0.1)(0.502))^2}} \qquad \left(\frac{X}{\delta_{ST}}\right) = 1.32$$

El resultado obtenido define que la amplitud de oscilación se incrementa en un 32%, por el efecto de la fuerza excitadora presente en el sistema.

Para comprender el efecto que tiene la influencia de la fuerza excitadora en los desplazamientos del sistema, se pide al alumno que grafique la función anterior, es decir que represente el factor de amplificación en términos de la relación de frecuencias. En la figura 3 se puede observar dicha representación. Esto permite al alumno visualizar como los desplazamientos de la masa no son constantes, existe una relación específica de frecuencias que genera un valor máximo en la gráfica y que a partir de dicho valor, los desplazamientos se reducen considerablemente. Esto no lleva a incorporar conceptos como el de resonancia, ya que este valor máximo se encuentra cerca de la relación de frecuencia de uno.

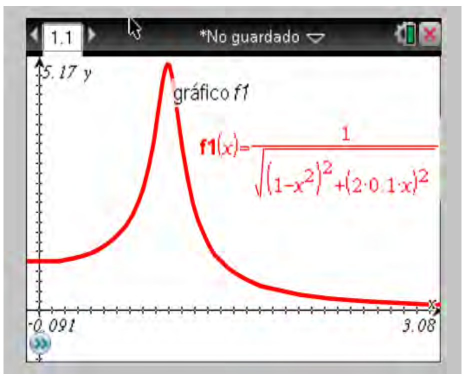


Figura 3. Factor de amplificación del efecto dinámico.

Si además, se solicita al alumno que incorpore el efecto del amortiguamiento en la gráfica del factor de amplificación, esto con la finalidad de observar el comportamiento de los desplazamientos de la masa, en términos de la relación de frecuencias, así la gráfica resultante se muestra en la figura 4.

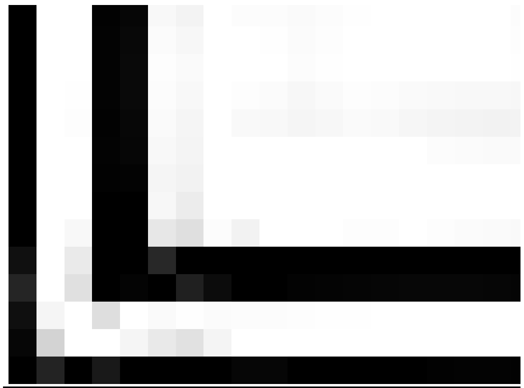


Figura 4. Factores de Amplificación de acuerdo al nivel de amortiguamiento.

En ella es posible visualizar que a medida que se incrementa la variable de amortiguamiento, los desplazamientos de la masa disminuyen significativamente, sin importar la relación de frecuencias que se tenga en el modelo vibratorio. Esto permite concluir al alumno que a medida que el amortiguamiento se incrementa, es posible reducir las amplitudes de oscilación, dado que la energía presente se disipa gradualmente a través del tiempo.

Este problema resuelto con la calculadora graficadora TI Nspire CX Cas, permite visualizar la solución de cualquier ecuación diferencial, a través de la instrucción mostrada en la figura 5. Esto permite que, al tener la función solución se pueda representar la posición de la masa en cualquier instante de tiempo a través de su gráfica. Al tener esta representación, es posible obtener desplazamientos en tiempos específicos, es decir, buscar aquella posición en el tiempo que se requiera o en este caso, se puede localizar el valor máximo de la respuesta estacionaria calculada previamente a través del proceso tradicional mostrado en el problema anterior.

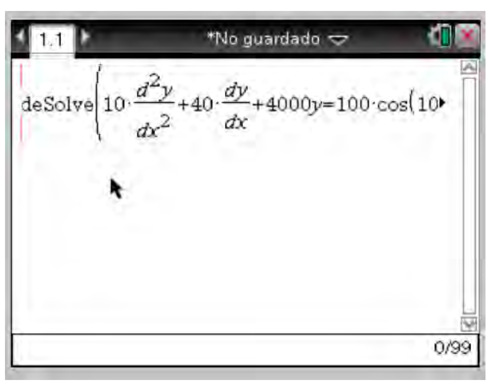


Figura 5. Instrucción de solución en la calculadora graficadora TI Nspire CX-Cas.

Otra de las ventajas que tiene el uso de esta herramienta tecnológica, es de poder parametrizar las soluciones de las variables dinámicas inmersas en los modelos vibratorios. Por ejemplo, una ventaja de realizar lo anterior, es la visualización del cambio en el factor de amplificación en base al cambio en la relación de frecuencias del sistema. La figura 6, muestra dicha relación.

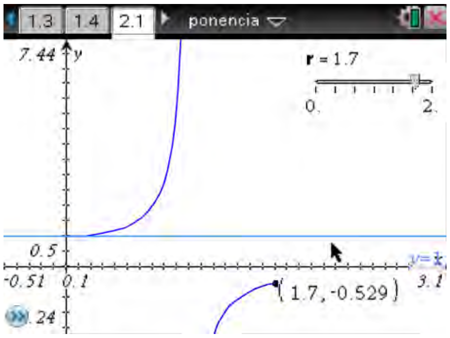


Figura 6. Visualización de la variación del factor de amplificación en relación al cambio de frecuencias.

Experimentacion

Este trabajo se planteó con dos grupos de 40 alumnos aproximadamente, cada uno de ellos pertenecen al sexto semestre de la carrera de Ingeniería Mecatrónica. En uno de los grupos piloto, se trabajó de la manera tradicional (Grupo A) dirigido por el profesor Ricardo Solórzano. Mientras que en el segundo grupo (Grupo B), se utilizó la calculadora graficadora TI Nspire CX Cas, el cual estuvo dirigido por la profesora María Guadalupe Vázquez.

Grupo A:

En este grupo, se trabajó de la manera tradicional, es decir de manera expositiva, donde el uso de la tecnología se limitaba a las operaciones básicas para generar las soluciones. El manejo de modelos gráficos se limitó a los esbozos de figuras y graficas que el profesor realizaba en el pizarrón, además las variables dinámicas que se presentaban en los modelos solo se trabajaron en clase, con algunos valores específicos, dado a lo prolongado del proceso de cálculo que implicaba.

Grupo B:

En este grupo se empleo la calculadora graficadora TI Nspire, la cual era utilizada por los alumnos para desarrollar sus soluciones en cada problema propuesto. Los resultados que se buscaron, era medir la efectividad del recurso tecnológico en los exámenes planteados, el alumno no solamente se limitaba a calcular las variables dinámicas inmersas en los problemas, sino que también identificara la raíz que lo ocasionaba y que además, proporcionara una recomendación para mejorar el comportamiento del sistema, es decir, que las oscilaciones disminuyeran significativamente para evitar algún daño en los equipos. Con esto último se podría medir el avance en el aprendizaje de los alumnos. También, se exploró en gran medida el poder gráfico que proporciona la calculadora, además que se enriqueció el aprendizaje ya que se trabajó con gráficas interactivas representadas por variables dinámicas, lo cual permitió al alumno, desarrollar su aprendizaje.

Resultados

Los resultados que se obtuvieron en el semestre fueron los siguientes:

Ambos grupos demostraron que en el cálculo de las variables dinámicas los resultados eran satisfactorios y que los procesos matemáticos se habían comprendido correctamente; sin embargo, en cuanto a la habilidad para entender la relación entre variables y asociar su comportamiento para dar solución al problema, el grupo de enseñanza tradicional tuvo una calificación de 62 puntos comparado con los 79 puntos del grupo que utilizó la herramienta tecnológica. La razón de lo anterior, es que en el primer caso, los alumnos están limitados a tener que realizar los procesos paso a paso, consumiendo una gran parte de tiempo aunado a los errores de procedimiento que generalmente ocurren. En el segundo, los alumnos al tener el recurso tecnológico pueden utilizarlo para incorporar gráficas de la relación entre las variables dinámicas, lo cual permite visualizar al alumno a entender el efecto que tienen estas en los desplazamientos del sistema. Es indudable que, el hecho de incorporar tecnología, minimiza los errores de cálculo susceptibles de un proceso tradicional y que además, el alumno tenga un aprendizaje más significativo de los resultados obtenidos.

Conclusiones

Los sistemas vibratorios de un grado de libertad modelados matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias permiten utilizar herramientas computacionales y/o calculadoras graficadoras que brindan en forma inmediata resultados de los parámetros dinámicos del sistema, así como el comportamiento de estos a través del tiempo. Esto permite tomar decisiones fundamentales en el proceso de mitigar los efectos nocivos del movimiento vibratorio, como la fatiga de los materiales involucrados, la reducción de ruido y sobretodo, prevenir eventos catastróficos como la resonancia del sistema.

El uso de la calculadora graficadora TI Nspire CX Cas, proporciona al alumno un panorama más amplio en la forma que puede visualizar aspectos técnicos y especializados como los presentados en el problema anterior y que son:

- Un sistema con nulo amortiguamiento no necesariamente puede generar oscilaciones dañinas, ya que a través de conocer la relación entre las frecuencias de la fuerza excitadora con respecto a la frecuencia del sistema y visualizar el comportamiento del factor de amplificación podemos revisar de forma inmediata si el incremento de la amplitud de oscilación es riesgosa o no, de acuerdo a la gráfica mostrada en donde se vinculan ambas variables. Si esta relación llegara a ser cercana a la unidad, tendríamos problemas de resonancia y por lo tanto incrementar la rigidez del sistema o incorporar un elemento amortiguador, será la tarea fundamental para controlar las vibraciones.
- La presencia de una fuerza excitadora hará que el sistema pueda oscilar forzadamente debido al desplazamiento que sufrirá la masa a través del tiempo. Este deberá alcanzar un valor máximo, el cual es necesario predecir para establecer posible daños que podrían ocurrir en la estructura.
- El amortiguamiento en los sistemas vibratorios reducen radicalmente la amplitud de oscilación del sistema, por lo que deben de incorporarse elementos de este tipo para disipar la energía presente en el movimiento de la masa.
- La relación de frecuencias contribuye adicionalmente a la reducción de la amplitud de oscilación ya que a mayores relaciones, se ha visto que el factor de amplificación disminuye gradualmente. Esto debido a que la fuerza excitadora actúa tan rápidamente que no alcanza a contribuir al movimiento de la propia masa del sistema.

Los resultados que se obtuvieron del estudio realizado, demuestran que el uso correcto de la tecnología, además de evitar procesos extensos de cálculo, facilitan la interacción de varias variables, logrando con ello concentrarse en la solución y utilizarla para establecer propuestas de solución las cuales son fácilmente comprobables al crear algoritmos que comprueben su efectividad.

La diferencia de puntaje entre las dos propuestas fue de 17 puntos, lo cual es bastante significativa y pone de manifiesto que el trabajo con tecnología reduce considerablemente los errores producto del propio proceso de solución. Además, se demostró que el alumno tuvo un mejor entendimiento en la interacción de las variables dinámicas que afectan el desplazamiento de la masa, lo cual contribuye al proceso de enseñanza-aprendizaje en el movimiento de un sistema vibratorio.

Referencias bibliograficas

Balachandran y Magram (2006), *Vibraciones*, Ed. Thomson, Segunda Edición.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), pp. 171-194. Recuperado el 30 de mayo de 2013 de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Hernández, J.L., (2005). "*Solución de Ecuaciones diferenciales Simbólicas y numéricas*", Instituto Tecnológico de Aptizaco. Recuperado el 03 de marzo de 2013 de

http://es.extpdf.com/dennis-g-zill-matematicas-2-pdf.html#a2

Hernández, A., (1997). *"Nuevas tendencias en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias"*, Memorias del Séptimo Seminario Nacional sobre calculadora y computadora en el aula; Cd Madero Tamaulipas.

Pomerantz, H. (1997). The Role of Calculators in Mathematics Education. *Document prepared for the Urban Systematic Initiative/Comprehensive Partnership for Mathematics and Science Achievement*, Dallas Texas. Recuperado el 15 de enero, 2013 de http://education.ti.com/sites/US/downloads/pdf/therole.pdf

Rodríguez, R. (2012). *Modelación y Uso de Tecnología TI Nspire CAS CX en la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales*; ITESM Campus Monterrey, Publicaciones Texas Instruments. Recuperado el 15 de enero, 2013 de http://education.ti.com/sites/LATINOAMERICA/downloads/pdf/Modelacion_y_TI-Nspire_CX_CAS.pdf

Singiresu, S. R. (2012), *Vibraciones Mecánicas* (5ª. ed.). México: Pearson.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

PROBLEMATIZACIÓN EN ALUMNOS Y USO DE LAS TIC EN UN PRIMER CURSO DE CÁLCULO EN EL CUCEI DE LA UDEG

Jorge Alberto Torres Guillén, Teresa Gabriela Márquez Frausto, Gabriela Godínez Dietrich, Rosa Elena Hernández Hernández

CUCEI, Universidad de Guadalajara

jorge2667@yahoo.com, tgmarques@yahoo.com, ggdietrich@hotmail.com, roseh.mx@hotmail.com.

Para citar este artículo:

Torres, J. A., Márquez, T. G., Gódinez, G., Hernpandez, R. E. (2017). Problematización en alumnos y uso de las TIC en un primer curso de cálculo en el CUCEI de la UDEG. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

PROBLEMATIZACIÓN EN ALUMNOS Y USO DE LAS TIC EN UN PRIMER CURSO DE CÁLCULO EN EL CUCEI DE LA UDEG

Jorge Alberto Torres Guillén, Teresa Gabriela Márquez Frausto, Gabriela Godínez Dietrich, Rosa Elena Hernández Hernández

CUCEI, Universidad de Guadalajara

jorge2667@yahoo.com, tgmarques@yahoo.com, ggdietrich@hotmail.com, roseh.mx@hotmail.com.

Resumen

En este trabajo se analiza la problemática del alto índice de reprobados en el primer semestre en la asignatura de cálculo1, factores que van desde lo institucional, docente, administrativo, infraestructura y lo inherente al estudiante. Se analizan tambien las estadísticas de las calificaciones de los alumnos de ingeniería en los últimos cuatro años, se obtuvo la apreciación de profesores y alumnos acerca de los exámenes departamentales y del ambiente entre docentes, se analizaron los posibles factores que afectan el rendimiento académico (RA) de los alumnos, se consultaron trabajos de investigación relacionados, se obtuvieron encuestas de opinión de los estudiantes acerca del uso de las TIC por los profesores. El estudio propició investigación documental para resolver el problema y sustentar el proyecto. Con el resultado del análisis implementar acciones apoyados en las TIC que conduzcan al mejoramiento del RA de los estudiantes.

Palabras clave: Rendimiento académico, Precálculo, TIC, Moodle, Diseño Instruccional

Introducción

Problema de Investigación.

El CUCEI al igual que otros centros de estudios universitarios de la U de G no escapa a la problemática en el rendimiento escolar bajo de los alumnos. Evidenciado por los altos índices de reprobación en las asignaturas de matemáticas.

Una de las asignaturas donde se observa esta problemática es la de Precálculo, ésta se imparte en el primer semestre para todas las carreras de licenciatura en Ingeniería del CUCEI, es la primera asignatura en la línea del cálculo que cursa el estudiante. Dicha asignatura es importante en la formación de los estudiantes de ingeniería ya que es la piedra angular en el conocimiento de las matemáticas, es una materia en la que el alumno aprenderá las propiedades de los números, sus operaciones fundamentales, la simplificación y descomposición de expresiones algebraicas en formas más sencillas. Asimismo, la resolución de ecuaciones y sistemas, el análisis e interpretación de resultados y sus gráficas, analizará y aplicará leyes y teoremas fundamentales, utilizará funciones y sus gráficas, aplicará sus propiedades que le permitan resolver ecuaciones, es por lo tanto fundamental para que el alumno al cursar las siguientes asignaturas de la línea de las matemáticas no de traspiés en su trayectoria como estudiante de la ingeniería.

Antecedentes

En el primer bimestre y después de haber cursado el alumno la asignatura de precálculo, existen altos índices de reprobación en los exámenes departamentales, como se observa en la tabla 1, donde se muestra las calificaciones promedio en el primer departamental y segundo departamental. En el ciclo 2011B, un total de 1929 alumnos obtuvieron el promedio de 53.2 de calificación en el primer examen parcial aplicado, en el segundo parcial obtuvieron la calificación aprobatoria de 63.51. En el ciclo 2012A los resultados fueron reprobatorios en los dos exámenes parciales, obteniendo los alumnos un bajo rendimiento con promedio de 57.16 en el primer examen departamental y de 52.11 en el segundo examen departamental.

Tabla 1. *Calificaciones promedio en el curso de precalculo ciclos 2011B al 2012B, CUCEI. (Fuente: Estadísticas del Departamento de Matemáticas del CUCEI)*

Ciclo	Total alumnos	1er. Dep	2do. Dep	Puntos	Ordinario	Extraordinario
2013 A	1555	55.87	54.93	31.85	65.45	59.14
2012 B	2101	48.66	60.64	33.08	64.39	45.16
2012 A	1959	57.16	52.11	30.84	63.61	49.32
2011 B	1929	53.2	63.51	33.06	67.88	54.9

Además, cabe señalar que existe una relación entre los alumnos del calendario A y B y su rendimiento académico en la asignatura de precálculo. En la tabla 2, en su columna 8, se muestra el número de alumnos aprobados en ordinario, observamos que en el ciclo 2010A, aprobaron 974 de 1831 alumnos, se observa que el 41.52% reprobaron el examen ordinario. En contraste con el ciclo 2012A donde el 50.48% de los alumnos reprobaron, se observa un 8.96 % de incremento en el índice de reprobación. En el examen extraordinario de precálculo, de los 801 alumnos reprobados en el calendario escolar 2011B volvieron a reprobar el 89.4%, y de los 989 alumnos reprobados en el calendario 2012A volvieron a reprobar el 92.5%, y en el 2012B de los 923 alumnos reprobados en periodo ordinario sólo el 5.63% aprobaron el examen extraordinario, percibimos en los estudiantes semestre tras semestre desaliento y decepción para presentar el examen extraordinario.

El porcentaje promedio de reprobación, después del examen extraordinario en la asignatura de precálculo, del 2010A al 2012B, es del 39.52%, porcentaje nada deseable en cualquier institución. Este porcentaje de rendimiento escolar es un problema tal como se observa en la columna 12 de la tabla 2, donde se identifica cómo ese índice de reprobación se ha ido incrementando del calendario 2010A al 2012B.

Tabla 2. *Estadística de alumnos del CUCEI aprobados y reprobados en el curso de precálculo. (Fuente: Estadísticas del Departamento de Matemáticas del CUCEI).*

1 Ciclo Esc.	2 1er Dep	3 2do Dep	4 Puntos	5 Ord	6 Ext.	7 Total alumnos	8 Aprob Ord.	9 Aprob Extra.	10 Total Aprob.	11 % Aprob.	12 % Repro
2010 A	50.97	55.02	29.35	60.9	60.4	1831	974	193	1167	63.70	36.86
2010 B	55.32	61.62	31.31	65.5	58.9	1858	1127	138	1265	68.08	31.92
2011 A	52.77	53.04	30.36	61.6	49.0	1773	890	72	962	54.26	45.74
2011 B	53.20	63.81	33.06	67.8	54.9	1929	1128	85	1213	62.88	37.12
2012 A	57.16	52.11	30.81	63.6	49.3	1959	970	75	1045	53.34	44.66
2012 B	48.66	60.64	33.08	64.4	45.1	2101	1178	52	1230	58.54	41.46

En este fenómeno educativo, el alto número de reprobados, es sin duda un indicador del bajo rendimiento académico de los alumnos, ello representa un problema dentro de nuestra institución. Se percibe una falta de actitud positiva, en un porcentaje considerable de los estudiantes, desgano y decepción en el estudio en las primeras pruebas o exámenes. Esto por consecuencia, conduce a los alumnos a la deserción escolar, disminuyendo la eficiencia de formación de los distintos programas de licenciaturas en el CUCEI, la consecuencia, es un menor número de alumnos capaces de desarrollar un rol significativo como profesionales especializados en la sociedad.

Por el contrario en el inicio del semestre se percibe que el alumno por su necesidad de aprender está motivado, tiene deseo de perseverar para lograr un objetivo al final del semestre, este movimiento está relacionado con su actitud, componente importante en su toma de decisiones. En los distintos programas del CUCEI, la primera decisión que el estudiante aplica es la de seleccionar a sus profesores de acuerdo a sus necesidades o expectativas de aprendizaje, el profesor que tiene reconocimiento entre los estudiantes, es el que logra llenar su aula de clase para impartir la asignatura. Es obvio, que el alumno que tiene deseos de aprender buscará al profesor que cubra sus expectativas intelectuales, otros alumnos buscarán al profesor por su carisma, por su forma de relacionarse con los alumnos en el aula de clase, por su estilo de impartir la clase o por ser "flexible" a la hora de evaluar.

Por otra parte, se considera que uno de los factores que afecta el rendimiento escolar es la rivalidad/reto entre estudiantes de mismo rendimiento, si un grupo llena su cupo con estudiantes de alto rendimiento, es estimulante tanto para los alumnos como para el profesor, pero si se llena con estudiantes de bajo rendimiento, ¿Cuál es el reto o rivalidad que puede haber entre estos estudiantes? ¿Qué retos significan para el profesor?

Dentro de los elementos externos al individuo que pueden interactuar con los determinantes personales, se encuentran aspectos como el tipo de universidad, los servicios que ofrece la institución, el compañerismo, el ambiente académico, la actitud y formación del docente y condiciones económicas entre otras, la interacción de estos factores externos puede afectar el rendimiento académico del estudiante para bien o para mal.

Una de las actividades docentes que, como elemento externo interactúa con los determinantes personales de los estudiantes es el trabajo de Academia de las diferentes asignaturas. La academia de precálculo está conformada por los profesores que imparten dicha asignatura, ellos se reúnen al menos tres veces al semestre, para planear y evaluar las actividades académicas de este órgano académico, proponer problemas para los exámenes departamentales, su elaboración y aplicación.

En años recientes se ha observado que al elaborar los problemas para exámenes, la academia de precálculo ha sufrido la consecuencia de sus actos, ha perdido el rumbo en la aplicación de los objetivos de evaluación, algunas academias han aprobado que una comisión de dos o tres profesores sean los encargados de diseñar y proponer los problemas en la forma de opción múltiple que se aplicarán en los dos exámenes ordinarios (Departamentales) o en el extraordinario. Propiciando que se apliquen problemas para el examen de lo que a ese pequeño grupo le gustaría cuestionar, sin llegar a ningún acuerdo con todos los miembros de la academia para evaluar las habilidades y competencias adquiridas por los alumnos, los objetivos de enseñanza-aprendizaje, los contenidos temáticos de la asignatura, sin haber aplicado y homologado los procesos (actividades de aprendizaje) y productos de aprendizaje, los criterios e indicadores de evaluación, es decir, sin un diseño instruccional del curso.

Otro problema detectado es el afán de algunos profesores quienes pretenden “distinguirse”, o en el peor de los casos, el presidente de academia de cumplir al 100% o al menos de lograr un máximo de avance, imponiendo su criterio y decidiendo arbitrariamente abarcar más temas para examen de lo que el promedio de profesores cubrió, sin importar las consecuencias que pueden arrojar altos porcentajes de reprobación en los estudiantes. Al aplicar a todos los alumnos que reciben el curso de precálculo, un examen donde no hay homogeneidad en los aprendizajes logrados al final del curso y que además el nivel de avance del programa del profesor no refleja un buen aprovechamiento por el alumno.

Se percibe desaliento y desilusión en los estudiantes posterior a los exámenes debido a que se le ha dado la opción al alumno de acuerdo a una política aprobada por la administración del Centro Universitario, de darse de baja de la asignatura si el estudiante obtuvo una mala nota después del primer examen departamental, situación que en nada beneficia en su autoconcepto. Los profesores aprecian la ausencia de varios estudiantes, esta situación todavía es más notoria en los exámenes extraordinarios donde hay grupos donde el 30% al 50% de alumnos reprobados en etapa ordinaria ya no se presentan a aplicar el examen.

Ante esta problemática surgen las siguientes preguntas ¿La instrucción planeada e impartida por los docentes satisface las necesidades de los estudiantes? ¿El docente se apoya de materiales instruccionales apropiados para realizar su labor docente? ¿El tipo de exámenes realmente evalúa el aprendizaje de los alumnos? ¿Las políticas implementadas por la administración en beneficio de los alumnos impactan en indicadores de excelencia?

La evaluación es un componente importante de la práctica docente. Es poco común en nuestro Centro Universitario que el docente al inicio del semestre realice un examen previo, que incluya preguntas que le proporcionen información sobre si los estudiantes tienen los conocimientos previos requeridos para abordar la asignatura y le proporcione información de lo que ya saben los alumnos sobre el tema. Es poca la utilización de datos de pruebas preliminares o pretest, con la cual se puede planear la instrucción que satisfaga las necesidades de los estudiantes. Pocos son los docentes que evalúan a los estudiantes a lo largo de la unidad para comprobar su progreso, calificando las tareas que les asignan entre semana y realizan retroalimentación. Pocos los docentes que al final de la unidad, hacen una evaluación formativa para averiguar lo que los estudiantes han aprendido y lo que todavía tienen que recuperar o trabajar. Tal evaluación resulta eficaz cuando se utilizan los datos obtenidos a través de esta secuencia para planificar la enseñanza que garantice el éxito del estudiante.

"Es hora de tener un debate serio sobre el propósito de la evaluación y su impacto de la enseñanza de las matemáticas en nuestros estudiantes. La obsesión por la preparación de la prueba es más perjudicial que útil para asegurar la motivación y el éxito de los estudiantes. Los profesores tienen que colaborar entre sí y con los administradores para determinar una política y un plan de exámenes que apoye a los estudiantes e informe acerca de su instrucción. Debemos ser la voz que hable en nombre de los estudiantes, centrado en el aprendizaje significativo en lugar de la presión llevada a cabo. No estoy sugiriendo que bajemos nuestros estándares para los estudiantes. No estoy sugiriendo que eliminemos buenas evaluaciones. Estoy sugiriendo reexaminar nuestra obsesión con la preparación de las prueba y las pruebas estandarizadas que toman días de instrucción, y considerar cuidadosamente el impacto que esto tiene en nuestros estudiantes y en nuestra enseñanza.

Ningún maestro eficaz quiere dejar de dar instrucción de alta calidad por prepararse para un examen, sabemos que la instrucción de alta calidad es la mejor preparación para el examen que podemos dar a los estudiantes" (Gojak, 2014).

Tal parece que la institución se centra en procesar grandes cantidades de estudiantes en forma eficiente y no en maximizar su aprendizaje, lo cual sugiere un cambio en la administración actual, que se orienta a la toma de decisiones, por uno que se centre en el aprendizaje y produzca el desarrollo de los estudiantes.

Por otra parte ¿El estudiante promedio realmente se esfuerza por lograr buenos resultados académicos o se sujeta de la tablita salvadora para seguir sobreviviendo en su tránsito como estudiante de Ingeniería? Tal como la contribución del RGEPA en favorecer que el alumno mantenga una actitud muy cómoda hacia la institución, que consiste en transitar por ella con sólo el esfuerzo necesario. Lo que propicia que el estudiante continúe sus estudios con carencias debido a su bajo rendimiento escolar, y en caso dado la deserción o el egreso con deficiencias.

Los grupos que llenan su cupo disponible en el CUCEI, el primer día y a primera hora de que se abre la oferta académica, son los grupos de los docentes que tienen características como: buena química con los estudiantes, que son pacientes, que explican bien, que son excelentes profesores, que llevan orden en su exposición oral y en el pizarrón, orden en las tareas de los alumnos, son agradables para los alumnos. Los profesores menos solicitados tendrán cierta ausencia de las características antes mencionadas. El alumno con buen rendimiento aprende a pesar del maestro, pero recibe además una ayudadita al llevársela más tranquila y relajada, el alumno promedio se da cuenta que a pesar de un 60 de promedio en los exámenes multiplicado por 0.60 y con el 40% del "profe" ya obtuvo un 76 de calificación final, ¿es bueno, No?.

"Las notas obtenidas como un indicador que certifica el logro alcanzado, son un indicador preciso y accesible para valorar el rendimiento académico, si se asume que las notas reflejan los logros académicos en los diferentes componentes del aprendizaje, que incluyen aspectos personales, académicos y sociales" (Rodríguez, Fita y Torrado, 2004).

La capacidad, la suerte y la dificultad de la tarea académica, son los factores causales a los que los estudiantes acuden con más frecuencia para justificar sus logros académicos. Según la causa que el estudiante atribuya, así va a incidir sobre el autoconcepto, su confianza en sus capacidades y en las conductas futuras de logro académico, el rendimiento académico previo influye sobre el autoconcepto académico y esta relación, a su vez, repercute en los resultados académicos actuales (Garbanzo. 2007).

La capacidad percibida por parte del estudiante, el rendimiento académico previo y creer que la inteligencia se desarrolla a partir del esfuerzo académico, contribuyen a mejorar un autoconcepto académico positivo. No en vano en las últimas décadas se ha incorporado el autoconcepto académico como una variable motivacional.

Lo ideal sería, que la mayoría de los alumnos iniciaran los estudios de licenciatura con actitud positiva, con mucha motivación para aprender, incluso si tal fuera el caso, algunos alumnos aún podrían encontrar abrumadora o desilusionante la actividad escolar. En este caso, los docentes debemos considerar ¿cómo lograr que los estudiantes participen de manera activa en el trabajo de la clase? es decir, cómo generar un estado de motivación para aprender, qué materiales los pueden ayudar en la instrucción que susciten interés y motivación en el aprendizaje.

Nuestro compromiso tal como está plasmado en la misión del CUCEI, es desarrollar habilidades, valores, actitudes y competencias profesionales en nuestros alumnos, de modo que sean capaces de educarse a sí mismos a lo largo de su vida y finalmente que los estudiantes participen cognoscitivamente, en otras palabras, que piensen a fondo acerca de qué quieren estudiar.

Ahora en nuestros días los profesores estamos encarando el reto de utilizar las Tecnologías de la Comunicación e Informaxión (TIC) para ayudar considerablemente en los logros académicos de los estudiantes, yendo más allá de las prácticas tradicionales de enseñanza. El docente requiere ir a la par con las TIC, como un apoyo para planificar e implementar materiales y estrategias de enseñanza que conduzcan a obtener resultados óptimos en su trabajo de enseñanza, estrategias que susciten en el alumno motivación e interés por aprender.

Con el objetivo de apoyar el proceso de enseñanza y el aprendizaje de las asignaturas que se imparten en las carreras de Ingeniería, se utiliza en el CUCEI la plataforma MOODLE como Ambiente Virtual de Apoyo al Aprendizaje (AVAA). Dicha plataforma permite a los profesores de las tres divisiones que conforman el CUCEI, complementar sus actividades académicas.

El CUCEI desarrolla sus funciones sustantivas a través de doce departamentos que se agrupan en tres divisiones. Desde 1991 ha contado con un campus central y tres sedes adicionales fuera del campus. Esas sedes corresponden al Departamento de Madera, Celulosa y Papel, el Departamento de Ingeniería de Proyectos, y el Instituto de Astronomía y Meteorología.

En la plataforma MOODLE se encuentra en servicio el material complementario de 270 cursos en total; 99 elaborados por docentes que imparten asignaturas en la División de Ciencias Básicas, 87 de profesores que dan servicio a la División de Ingenierías, y 84 de educadores adscritos a la División de Electrónica y Computación. La tabla 3 muestra el número de profesores y número de materiales que apoyan los cursos.

Tabla 3. *Estadística de materiales complementarios de los cursos en la plataforma moodle del CUCEI. (Fuente: Estadísticas de la Plataforma moodle del CUCEI).*

Núm. de Profesores	Departamento	Núm. de cursos
División de Ciencias Básicas		
17	Matemáticas	34
13	Farmacobiología	21
8	Física	13
20	Química	31
División de Ingenierías		
5	Ing. Civil y Topografía	9
13	Ing. Industrial	26
10	Ing. Mecánica Eléctrica	18
20	Ing. Química	33
1	Ing. de Proyectos	1
División de Electrónica y Computación		

28	Ciencias Computacionales	82
2	Electrónica	2
Total 260		Total 270

Como se observa en la tabla 3, el Departamento que tiene mayor producción de material complementario (82 cursos) es el Departamento de Ciencias Computacionales (DCC), es de comprender que los profesores adscritos a ese departamento tienen la formación que les facilita la creación de material electrónico, sin embargo la opinión de los alumnos han señalado aspectos desfavorables en cuanto al diseño instruccional de los cursos, como por ejemplo, la falta o poca planeación, estructura y organización, asimismo, en cuanto asesoría, existe poca o nula comunicación, interacción, retroalimentación y evaluación continua.

Esto se fundamenta en una encuesta realizada por Pérez (2013) a alumnos que cursaron asignaturas de ingeniería de software l, sistemas de información financiera y taller de bases de datos del DCC en el CUCEI, donde para dichos cursos se utiliza la plataforma AVAA como una herramienta útil e interesante para profesores y alumnos.

En dicha encuesta aplicada a los alumnos, en lo referente al uso de las TIC, la planeación, contenidos, estructura y organización de los cursos, así como en la evaluación continua y retroalimentación de las actividades en el MOODLE, opinaron lo siguiente:

- *“Pues, como extra podría decir que hay maestros que lo descuidan mucho, que no están al tanto de las actividades de subir y de calificarlas, muchos las descuidan y hay quienes no ponen en claro que se debe hacer y eso resulta confuso, creo que no la aprovechan como una herramienta, pues eso es, y no ha tenido la función como tal por parte de todos”.*
- *"Un chat en el cual hubiera clase en línea, los maestros estuvieran presentes para cualquier aclaración o duda acerca de la actividad a realizar así como también referencias de página actuales de la información que se imparte en clases".*
- *“Un poco de más interacción entre el alumno y el profesor”.*
- *“Está bien la herramienta, siempre y cuando los maestros no la utilicen como sustituto de sí mismos”.*
- *“Más material de apoyo”.*
- *“Algún apartado de apuntes que los maestros puedan subir para mayor aprendizaje”.*
- *“Me gustaría en lo personal, que hubiera más información de cada una de las materias, así como libros o tutoriales, como el tutorial de postgres que se subió desde un principio del semestre en moodle, me sirvió bastante.....”.*
- *“Creo que hace falta más contenido multimedia”.*

Estos comentarios evidencian que el material de apoyo de los profesores no es un buen complemento instruccional, no hay organización de las actividades a desarrollar por el alumno, no hay suficiente material educativo, el docente no evalúa continuamente y en la mayoría de las actividades no proporciona retroalimentación, además no ha habido comunicación asíncrona e interacción entre asesor y alumno, dicho proceso ha provocado confusión y descontento en los alumnos con los profesores.

Las TIC han colaborado en hacer más fácil la tarea del docente, los profesores del DCC han pasado buena parte de su formación involucrados con la tecnología de la computación, sin embargo, la efectividad en la instrucción no ha dejado satisfechos a sus estudiantes, estos los califican como inefectivos y el material educativo de apoyo, lejos de guiar a los alumnos, se ha convertido en una varita que los apalea, en lugar de motivarlos a estudiar.

El material instruccional de acuerdo con Merril (2010) para ser efectivo debe contener tres principios importantes:

1) mostrar a los alumnos qué es lo que queremos enseñar.

2) dar la oportunidad al estudiante de poner en práctica lo aprendido, no sólo por medio de exámenes de opción múltiple o departamentales, los cuáles muchas veces sólo se refieren a preguntar lo que han aprendido o preguntado, debemos involucrar a los alumnos a hacer predicciones, encontrar soluciones en tareas más avanzadas, los docentes debemos cuestionarnos a conciencia si en verdad nuestra práctica en verdad es práctica.

3) motivar al alumno a aprender, haciendo el papel de asesor, guía y realimentándolo, la verdadera motivación viene cuando el estudiante es capaz de hacer algo que no era capaz de hacer anteriormente, el verdadero aprendizaje se logra cuando implementamos los principios básicos de instrucción, hacer o aplicar lo que estas aprendiendo en el contexto de los problemas reales.

El diseño instruccional tiene como objetivo final, la planificación de una serie de componentes, que guíen el aprendizaje de los estudiantes, utilizando las TIC como medios en la utilización del material instruccional, entre los que podemos contar, proyectores de transparencias, computadoras, software apropiado, salas virtuales, y móviles tales como tablets y teléfonos. Los profundos cambios que se han producido a raíz de los avances tecnológicos no han dejado atrás la forma como se viene diseñando la instrucción.

Con la intención de establecer relaciones entre Diseño Instruccional y las TIC, se resalta el hecho que los diversos modelos de diseño instruccional proceden de perspectivas teóricas distintas por lo cual no existe una teoría instruccional única; de hecho, existen muchas combinaciones y variaciones de ellas y las mismas se diferencian en función del enfoque acerca del aprendizaje que posea quien las haya generado.

Los adelantos de la tecnología informática está incidiendo en la concepción de los diseños instruccionales, abordados ya no sólo como procesos sistemáticos, sino sistémicos, entendiendo por ello que, en el diseño instruccional, se conciben fases cada una estrechamente relacionada con las demás. Los diseños instruccionales de hoy día se caracterizan por ser procesos integrales y holísticos, dialécticos, creativos y flexibles, de tal manera que el diseño de instrucción está en abierta actualización y adaptación.

El DI se concibe como un momento del proceso de ingeniería de la planificación de la enseñanza, implica prever, organizar y ofrecer pautas para el logro de aprendizajes por parte del estudiante. Como proceso intencional, puede estar centrado solamente en lo que el docente espera observar en el alumno, como muestra del aprendizaje obtenido. No obstante, las TIC, como medios de comunicación, han desatado cambios profundos en el campo de la planificación instruccional, como se señaló anteriormente.

Es importante destacar que el proceso de diseño instruccional, con el apoyo de las TIC, ofrecen múltiples perspectivas de creación. El diseño instruccional dejó de ser lineal. Se presenta como el pensamiento, múltiple, dialéctico, holístico, lo que desemboca en una diversidad de interacciones, que deben ser integradas. Esto se desprende del hecho que, hoy día, el aprendizaje no se aborda como algo aislado, estrictamente individual, sino como el resultado de los esfuerzos asociados de grupos de personas que procuran resolver un problema. Por lo tanto, es necesario formular diseños instruccionales que permitan el acceso a la información de manera compartida, a través de la facilitación de debates generadores de conocimientos, dentro de grupos de discusión. Dichas oportunidades requieren ser diseñadas, obviamente, lo que plantea retos teóricos en materia de DI. Recurrir al internet no es la solución en sí, puesto que trae al diseñador, muchas exigencias en términos de reflexión teórica y metodológica.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación están proporcionando una visión cada vez renovada de los modelos de diseño instruccional, han tenido mucha incidencia en la redefinición de los modelos de DI, al hacerlos pasar de modelos centrados en la enseñanza a modelos centrados en el alumno. Estos últimos describen y promueven actividades que fortalecen la capacidad de un aprendizaje duradero, transferible y auto-regulable por parte del alumno, ya que concibe al sujeto como un ser que percibe, codifica, elabora, transforma la información en conocimientos, y la utiliza para la superación de problemas y la generación de nuevos conocimientos.

Las TIC, desempeñan un papel cada vez más significativo en diversos contextos, específicamente en el educativo; los docentes tienen a su disposición diversos medios audiovisuales, informáticos, los cuales han aumentado apreciablemente las posibilidades de presentación de información al nivel instruccional, pero para que esta diversidad de medios sea incorporada efectivamente a la práctica docente, no basta con que existan o estén a su disposición; es necesario que los docentes dominemos efectivamente una serie de conocimientos, bases y principios que garanticen su incorporación de manera reflexiva y crítica, y que además, tomen en consideración el nuevo contexto educativo generado por la denominada era del conocimiento y la información.

Entre esos principios se encuentran los referidos al dominio de habilidades necesarias para el diseño y posiblemente producción de medios, materiales y ambientes instruccionales adecuados a las características de la población estudiantil, así como del contexto instruccional.

Los profesores del siglo XXI tenemos un nuevo reto, el de diseñar la instrucción de sus asignaturas, el trabajo aunque parece arduo, puede ser asociado con otros docentes en equipos multidisciplinarios o transdisciplinario, que se encargarían de su implantación tecnológica y evaluación del proceso concerniente al diseño instruccional.

Conclusiones

Los resultados del estudio concluyeron que la institución se centra en procesar cantidades de estudiantes y no en maximizar su aprendizaje, esto sugiere cambio en la toma de decisiones administrativas, por uno que se centre en el aprendizaje y produzca el desarrollo del estudiante. La mayoría de profesores imparten clases de manera tradicional y un bajo porcentaje de docentes usan MOODLE como apoyo en la instrucción y de estos, pocos lo utilizan de manera eficiente.

Investigaciones han mostrado que el Internet es la herramienta computacional más frecuentemente usada (Fox, 2005), los estudiantes tienen acceso casi instantáneo a ilimitados recursos, por lo tanto, ellos pueden rápidamente localizar, evaluar y recolectar información de una variedad de fuentes. Como docente será importante planear actividades que involucren activamente a los estudiantes en el proceso de información y reporte de resultados que sean significativos en las tareas asignadas. La investigación por los estudiantes también puede ampliarse a que se incluya información de libros, periódicos, y gente. El uso de múltiples recursos asegurará que para los trabajos, los estudiantes no sólo corten y peguen información encontrada en la web.

Nunca antes los estudiantes habían tenido acceso a tan vasta cantidad de datos e información, los estudiantes usan recursos tecnológicos para resolver problemas, realizar informes, ahora son capaces de examinar información más cercanamente a través de herramientas tales como hojas de cálculo, base de datos y dispositivos de video y de audio digital. Además el software educacional es un excelente medio para involucrar en las tareas académicas a los alumnos.

Sin embargo la computadora no es una varita mágica, por lo que es necesario aplicar tecnología instruccional cuya definición es la teoría y práctica de diseño, desarrollo, utilización, administración y evaluación de los procesos y recursos de aprendizaje, el ingrediente intelectual y humano

[]...no debemos trabajar respaldados en la falacia de que la enseñanza asistida por computadora puede constituir un recurso autónomo completo de enseñanzas. Ninguna computadora podrá jamás ser programada con respuestas a todas las preguntas que los estudiantes formularán, y en las áreas menos establecidas del conocimiento son esenciales la discusión e interacción entre alumnos y, entre éstos y el profesor para que ocurra el aprendizaje. (Ausubel et al., 2009. p. 339).

Existe la necesidad de abatir el alto índice de reprobación en la asignatura de precálculo e índices de deserción, implementar estrategias que maximicen el aprendizaje de los estudiantes que cursan la asignatura con apoyo de la plataforma MOODLE, diseñar material instruccional, probar científicamente su eficacia, implementar un proyecto de asesoría a alumnos en línea y formar académicos en investigación para apoyar al docente en el diseño instruccional para mejorar sus cursos online.

Al analizar la complejidad de la problemática, este trabajo condujo a una investigación que se enfocó al problema del rendimiento académico bajo con relación al diseño instruccional. Lo anterior, en un ambiente de aprendizaje en un entorno apoyado por las TIC.

Referencias Bibliográficas

Ausubel, D. P., Novak J. D., y Hanesian H. (2009). *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* Reprint (2009), México; Trillas. 623.

Fox, E. (2005). Tracking U.S. trends. Education week: Technology Counts 2005, 24(35), 40-80.

Garbanzo Vargas Giselle María (2007). “Factores asociados al rendimiento académico e estudiantes universitarios, una reflexión desde la calidad de la educación superior Pública”. Costa Rica, Revista Educación 2007, año/vol 31, número 001

Gojak Linda M. (2013) Are We Obsessed with Assessment? NCTM *Summing Up*, November 4.

Merril D. (2010). "*Diseño Instruccional*". Recuperado el 20 nov. 2013 de http://www.youtube.com/watch?v=cd6Y5e-PuR0

Pérez Torres Griselda (2013). "Evaluación de los cursos implementados en AVAA del Departamento de Ciencias Computacionales". Tesis doctoral. UMG.

Rodríguez, S., Fita, E., Torrado, M. (2004). *"El rendimiento académico en la transición secundaria-universidad". Revista de Educación*, 334, 391-414. Recuperado de http://www. doredin.mec.es/documentos/008200430373.pdf

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

USO DE LAS ECUACIONES ESTRUCTURALES EN LA CONFIRMACIÓN DE MODELOS CAUSALES HACIENDO USO DEL SOFTWARE AMOS VERSIÓN 19

[1]Felipe Santoyo Telles, [1]Miguel Ángel Rangel Romero, [1,2]Eliseo Santoyo Teyes, [1,2]Viviana Santoyo Telles

[1]Centro Universitario del Sur, Universidad de Guadalajara.
[2]Centro de Bachicherato Tecnológico, Industrial y de Servicios #226. Ciudad Guzmán, Jalisco, México

felipes@cusur.udg.mx; marangel@cusur.udg.mx; esantoyo25@hotmail.com; viviana_santoyo@hotmail.com

Para citar este artículo:

Santoyo, F., Rangel, Á, Santoyo, E., Santoyo, V. (2017). Uso de las ecuaciones estructurales en la confirmación de modelos causales haciendo uso del software AMOS versión 19. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

USO DE LAS ECUACIONES ESTRUCTURALES EN LA CONFIRMACIÓN DE MODELOS CAUSALES HACIENDO USO DEL SOFTWARE AMOS VERSIÓN 19

[1]Felipe Santoyo Telles, [1]Miguel Ángel Rangel Romero, [1,2]Eliseo Santoyo Teyes, [1,2]Viviana Santoyo Telles

[1]Centro Universitario del Sur, Universidad de Guadalajara. [2]Centro de Bachicherato Tecnológico, Industrial y de Servicios #226. Ciudad Guzmán, Jalisco, México

felipes@cusur.udg.mx; marangel@cusur.udg.mx; esantoyo25@hotmail.com; viviana_santoyo@hotmail.com

Resumen

Un modelo matemático representa cualitativa y/o cuantitativa una parte concreta de la realidad, en el cual se muestran las relaciones predominantes entre sus elementos, sobre los cuales se pueden –y es necesario– realizar previsiones. De acuerdo con Bollen (2002), los fenómenos están influenciados por causas tangibles y elementos no observables (variables latentes). Los Modelos de Ecuaciones Estructurales (SEM, Structural Equation Models), han permitido la contrastación empírica de modelos que incluyen efectos causales entre variables latentes y variables observables; dichos modelos permiten entre otras cosas, la contrastación de teorías a través de la evidencia empírica. El Análisis Factorial Confirmatorio (AFC) es un procedimiento de análisis encuadrado en los modelos de Ecuaciones Estructurales (SEM), cuyo propósito se centra en el estudio de los modelos de medida. En consecuencia, es una estrategia sumamente útil en el ámbito de la prueba de hipótesis y la confirmación de teorías. En el presente trabajo se utilizan modelos de ecuaciones estructurales, concretamente, el análisis factorial confirmatorio, en relación a la validez de las escalas de medida cuando se proponen modelos causales.

Palabras clave: Análisis Factorial, Modelos causales, Estadística multivariable

Introducción

Los modelos de ecuaciones estructurales, al facilitar la contrastación empírica de modelos que incluyen efectos causales entre variables no observables (latentes), y entre éstas y variables observables, han permitido una mayor flexibilidad metodológica en el quehacer investigativo. Ofrecen, entre otras posibilidades estimar dependencias múltiples, poseen la capacidad de representar conceptos no observados a través de indicadores y permiten tener en cuenta el error de medida en el proceso de estimación.

Dentro de las aplicaciones de los modelos (SEM) existen diferentes posibilidades de estudio, desde análisis de trayectorias (regresiones múltiples); Análisis congenérico (se crea un conjunto de variables latentes que tienen sus indicadores); Análisis confirmatorio de factores (se plantea la interrelación entre factores que tienen sus indicadores); Análisis de indicadores múltiples (variables latentes dependientes influyen sobre variables observadas); Análisis estructural (Variables latentes pueden influir sobre otras variables latentes).

La medición de la conducta perfeccionista desde una perspectiva multidimensional inició en los 90´s. Hewitt y Flett (1991) diseñaron un conjunto de reactivos denominados MPS-H (por sus siglas en inglés) que incluía tres dimensiones del constructo, perfeccionismo autorientado, perfeccionismo orientado hacia otros y el perfeccionismo socialmente prescrito. La conducta perfeccionista es una variable relacionada con otros problemas psicológicos (e.g., depresión, trastornos alimentarios, ansiedad, abuso de sustancias, trastorno obsesivo compulsivo, entre otros). En la presente investigación se reportan datos de la validación de la Escala Multidimensional de Perfeccionismo (MPS-F) en población mexicana utilizando muestra clínica, poniendo énfasis en la utilización de modelos de ecuaciones estructurales, concretamente, el análisis factorial confirmatorio (AFC), en relación a la validez de las escalas de medida.

Instrumento

Escala Multidimensional de Perfeccionismo. Es un auto-informe que se utiliza para medir la conducta perfeccionista desde una perspectiva multidimensional. Está conformado por 35 reactivos con cinco opciones de respuesta. Se califica conforme a una escala Likert donde 1 = Totalmente en desacuerdo y 5 = Totalmente de acuerdo. Puntuaciones más altas significan mayor presencia de la conducta perfeccionista. La versión en español que se utilizó en el presente estudio fue validada por Franco et al. (2010).

Análisis de los datos

Utilizando el paquete estadístico SPSS versión 17 y con el objetivo de conocer las características psicométricas del cuestionario se llevaron a cabo análisis de consistencia interna (alfa de Cronbach). Como una medida de adecuación muestral y con el objetivo de corroborar la factibilidad para realizar un análisis factorial se utilizó el método de KMO (Kaiser-Meyer-Olkin). Para validar la hipótesis nula de variables iniciales incorrrelacionadas se utilizó la prueba de esfericidad de Bartlett. Se desarrolló un análisis factorial exploratorio el cual fue confirmado haciendo uso del software estadístico AMOS versión 20.

Análisis factorial exploratorio

Debido a que previamente no se han establecido consensos sobre el número de factores que debe de contener el instrumento (MPS-F), primeramente se planteó la necesidad de realizar un análisis factorial exploratorio. Para corroborar la pertinencia del mismo, es decir, si existía o no correlación entre el conjunto de ítems del cuestionario y un numero de dimensiones no medidas, se realizó una matriz de correlaciones mediante el método de KMO (Kaiser-Meyer-Olkin) el cual funge como una medida de adecuación muestral. En este caso el puntaje obtenido fue de .91, lo que indica una alta correlación debido a que se encuentra muy cercano a la unidad, por tanto, evidencia la conveniencia de realizar un análisis factorial (Vicente y Oliva, et al., 2000; Pérez, 2001).

La prueba de esfericidad de Bartlett (1950) arrojó un *p-value* >0.05, por lo que no resulta significativa la hipótesis nula de variables iniciales incorrrelacionadas y por lo tanto se puede confirmar que tiene sentido aplicar el análisis factorial (Pérez, 2001).

Una vez descrito que es conveniente realizar el análisis factorial, se partió primeramente de una solución inicial, donde existen tantos componentes como variables. Para definir el número de factores a considerar se utilizaron los criterios de; gráfico de sedimentación muestra cuantos factores existen por encima de la unidad, -valor sobre el que se determinan las puntuaciones válidas como factores explicativos- (Peña, 2002; Pérez, 2001). Criterio de Kaiser (valores propios superiores a la unidad); y como criterio de asignación de ítems a los factores se consideraron cargas factoriales mayores a 0.4 (Cliff y Hamburger, 1967). Los factores retenidos deben tener al menos dos variables con pesos altos en ellos.

Se empleó el método de extracción de máxima verosimilitud y rotación varimax (varimax con Kaiser). En Tabla 1 se muestra la distribución de los reactivos por factor y sus respectivos pesos factoriales.

Tabla 1. *Matriz de componentes Rotados*

	Factor			
	1	2	3	4
SMEAN(mps13)	.703	.262		.216
SMEAN(mps18)	.679	.181	.108	
SMEAN(mps14)	.667	.280		.204
SMEAN(mps9)	.611	.290		
SMEAN(mps23)	.574	.484		
SMEAN(mps25)	.561	.360		
SMEAN(mps10)	.521		.182	.124
SMEAN(mps24)	.467	.134		.227
SMEAN(mps4)	.464	.337		
SMEAN(mps5)	.422	.177		
SMEAN(mps3)	.325	.264	-.155	.235
SMEAN(mps22)	.289	.589		.116
SMEAN(mps35)	.244	.554		
SMEAN(mps28)	.245	.549		
SMEAN(mps33)	.144	.536		
SMEAN(mps17)	.349	.533		.114
SMEAN(mps26)		.516	.124	.345
SMEAN(mps21)	.390	.459		.145
SMEAN(mps32)	.193	.452		.147
SMEAN(mps34)	.358	.431		.107
SMEAN(mps1)	.107	.286	.202	.198
SMEAN(mps29)		.114	.716	
SMEAN(mps7)		-.114	.677	
SMEAN(mps8)			.635	.120
SMEAN(mps31)			.626	.210
SMEAN(mps27)			.604	-.198
SMEAN(mps2)		.139	.559	.170
SMEAN(mps16)		-.244	.465	.337
SMEAN(mps30)	.179	.230	.359	.317
SMEAN(mps6)	.249	-.136	.322	.205
SMEAN(mps15)	.310	.268		.563
SMEAN(mps12)	.311		.197	.544
SMEAN(mps11)	.149	.247	.159	.488
SMEAN(mps19)	.454		.223	.469
SMEAN(mps20)		.278	.309	.378

Método de extracción: Máxima verosimilitud.
Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser.
a. La rotación ha convergido en 8 iteraciones.

Basado en los criterios anteriormente señalados la estructura original obtenida sugiere considerar un modelo con 5 factores, los cuales resumen el 64.6% de la variabilidad total. Sin embargo, lo establecido en esta investigación fue trabajar con 4 factores, con los cuales se explica el 64% de la varianza. Con la solución inicial (5 factores) la delimitación de las variables que forman cada factor no es clara, dado que el último factor solamente estaba conformado por un ítem.

Análisis factorial confirmatorio

El análisis factorial exploratorio (AFE), permite que todos los ítems puedan saturar en todos los factores, por ende, todos los factores pueden estar correlacionados. Una característica esencial del análisis factorial confirmatorio (AFC) es que el investigador define con antelación todos los aspectos relevantes del modelo, aspectos que deben estar sólidamente fundamentados en la teoría previa y en la evidencia conocida. El AFC no explora la relación entre variables o constructos, sino que las contrasta, el AFC es, en consecuencia, una estrategia sumamente útil en el ámbito de la confirmación de teorías.

Dado que el análisis exploratorio se caracteriza porque no se conocen a priori el número de factores y que el análisis de tipo confirmatorio los factores están fijados a priori, se utilizó el AFC para corroborar la hipótesis de que las relaciones existen (factores) dado que las variables (ítems) son manifestaciones comunes de 4 factores no "observables”

De acuerdo con Bentler y Chu (1987) y Lomax (1982) un instrumento de medición eficaz estaría en el orden de los 30 items. Conjuntos muy grandes de datos con frecuencia resultan en valores sobre calculados de χ^2, de modo que el ajuste global del modelo a los datos se torna complejo. Un modelo AFC ideal, en consecuencia con lo afirmado, debería incluir como máximo 30 variables observadas (Ítems) y 6 variables latentes (Dimensiones). El modelo debería incluir aquellas variables que resultaran relevantes, omitiendo el resto, en otras palabras, el modelo debería ser lo más parsimonioso posible.

El principal indicador del ajuste de un modelo AFC es la distribución χ^2, sin embargo, dado que en muchas ocasiones la distribución de los datos no se ajusta a la distribución χ^2 éste indicador no es utilizado como prueba única o concluyente de bondad del ajuste del modelo, lo anterior radica en que su valor está influenciado por el tamaño de la muestra, para superar estos inconvenientes, se han desarrollado diferentes índices parciales de ajuste, tanto de carácter absoluto -SRMR, GFI, AGFI, PGFI-, como parsimonioso –RMSEA-, predictivo -ECVI, CAIC, BIC- o incremental -CFI, TLI, NFI, PNFI, RNI, PCFI- (Hu & Bentler, 1995; Jackson, 2007). En términos generales un análisis factorial tiene sentido si se cumplen dos condiciones: parsimonia e interpretabilidad. Como se mencionó con antelación existen diversos índices de ajuste, y ninguno de ellos por separado es suficiente para determinar que el modelo se ajusta a los datos. Con el fin de ejemplificar de manera detallada el ajuste de los datos se recomienda la combinación de diversos indicadores, tales como: χ 2 a través del CMIN, RMSEA, ECVI, SRMR, GFI y CFI (Boomsna, 2000; McDonald y Ho, 2002).

Resultados del modelo

Para correr un AFC primeramente se tomó de la base total muestreada (371 sujetos) una sub muestra, obtenida ésta una vez colocada una variable de selección, lo anterior permite seleccionar una o un conjunto de las variables del archivo de datos como variable filtro, lo que da como resultado la definición de una sub-muestra de sujetos los cuales cumplen una determinada condición, la de haber sido seleccionado aleatoriamente. En la figura 1 se muestra el modelo a validar.

Una vez establecido el modelo teórico a comprobar (modelo de 4 factores extraídos en el análisis exploratorio), se realizó un análisis factorial confirmatorio para comprobar que los 35 items de los cuales está conformado la Escala Multidimensional de Perfeccionismo se agrupan en 4 sub grupos llamados dimensiones. La Tabla 2 se muestra los resultados obtenidos en la propuesta del modelo.

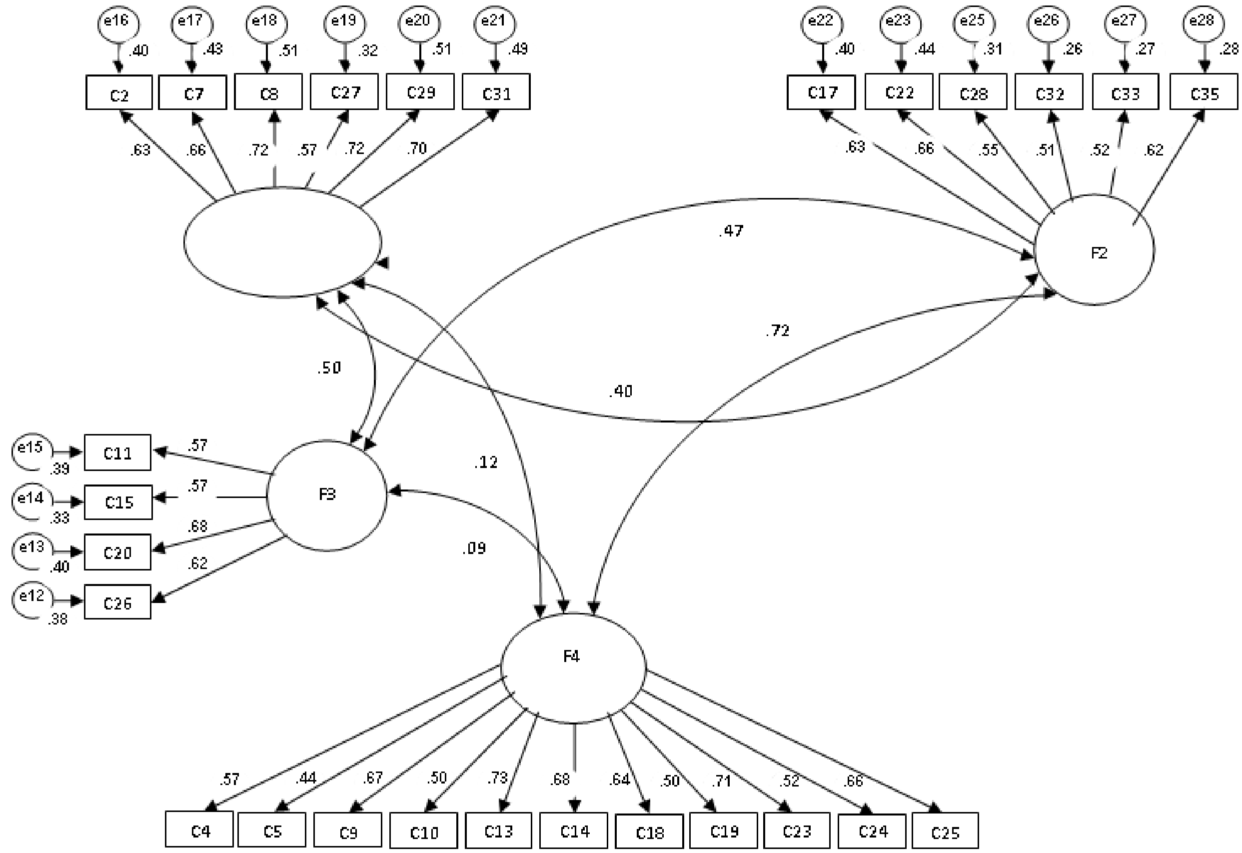


Figura 1. *Modelo estructural de la MPS-H*

Tabla 2. *Síntesis de resultados del modelo*

Modelo Factorial	CMIN	GFI	CFI	RMSEA
1 factor	3.34	0.8	0.59	0.093
4 factores	2.1	0.9	0.9	0.056
5 factores	2.8	0.82	0.85	0.063

CMIN: Chi^2/G.L

CFI: Comparative fix index

GFI: Goodness of fit index

RMSEA: Root mean square error of approximation

Una medida de discrepancia entre las relaciones supuestas en el modelo y las relaciones que se encuentran entre las variables para la muestra es el indicador *CMIN* (equivalente a dividir el valor de χ^2 / df) nos indica que si la relación es 1 entonces el modelo se ajusta de manera perfecta. Suelen considerarse aceptables si son menores de 5 (Wheaton et al, 1977). El principal problema de éste indicador es que es sensible al tamaño muestral. También es importante mencionar que como indicador se recomienda que los grados de libertad sean del orden de 2 a 1 o 3 a 1 siendo éste un indicativo de un ajuste aceptable entre el modelo hipotético y los datos de la muestra (Carmines and McIver, 1981). Otros investigadores han recomendado utilizar diferentes proporciones tan bajas como 2 o tan alto como 5 para indicar un ajuste razonable (Marsh and Hocevar, 1985).

Los valores de los estadísticos de bondad del ajuste (*CGFI*) varían por lo general entre 0 y 1, con 1 indicando un ajuste perfecto. Valores superiores a 0.9 sugieren un ajuste satisfactorio entre las estructuras teóricas y los datos empíricos, y valores de 0.95 o superiores, un ajuste óptimo, de acuerdo con García, Gallo y Miranda (1988) estos indicadores son los menos afectados por el tamaño de la muestra.

Como medida del valor de aproximación (*RMSEA = 0.056)* indica un buen ajuste del modelo propuesto (inferior a .05 es bueno; entre .05 y .08 razonable; entre .08 y .10 mediocre; por encima de .10 el modelo debería ser rechazado). En términos generales es bien aceptada la opinión de que un valor de alrededor de 0.08 o menos para el *RMSEA* indica un error razonable de aproximación (Browne y Cudeck, 1993).

En términos generales, el investigador busca que su modelo se ajuste a la matriz de covarianzas de la población, pero de igual manera se podría estimar su falta de ajuste. Esto es lo que pretende el índice Estimated Non-centrality Parameter (*NCP=529.16*). El valor de la discrepancia es de 529.16 -valor razonablemente bajo como para considerar la aceptación de la hipótesis de nulidad-. Los intervalos de confianza al 90% (442.44; 623.61), lo que justifica el comentario anterior, así pues, la diferencia entre la matriz de covarianzas de la población y la reproducida no puede considerarse excesiva, lo que apoya el ajuste del modelo a los datos.

La validez convergente se evalúa en los modelos AFC revisando los valores de t correspondientes a las saturaciones factoriales. Si todas las saturaciones de los indicadores que evalúan el mismo constructo fueran estadísticamente significativas dispondríamos de evidencia a favor de la validez convergente de los indicadores, en la medida en que valores significativos de t indican que, efectivamente, todos los indicadores evalúan el mismo constructo. En el trabajo propuesto los valores de t obtenidos en las 4 subescalas son todos ellos estadísticamente significativos con un valor crítico de $t=1.96$ con $p<.05$.

Conclusión

El modelo de ecuaciones estructurales (Structura Equation Modeling, SEM) permite examinar simultáneamente una serie de relaciones de dependencia, se considera una extensión de varias técnicas multivariadas como la regresión múltiple y el análisis factorial (Kahn, 2006). Una característica particular que lo diferencian de las otras técnicas multivariadas, es la capacidad de estimar y evaluar la relación entre constructos no observables, denominados generalmente variables latentes. En el presente estudio se validó a través de un Análisis Factorial Confirmatorio que los 35 items (variables observadas) de los cuales está conformado la Escala Multidimensional de Perfeccionismo se agrupan en 4 sub grupos llamados dimensiones (variables latentes), obteniendo con ello la validación de un modelo teórico propuesto.

Referencias bibliográficas

Bentler, P. M., y Chu, C. (1987). Practical issues in structural modeling. *Sociological Methods & Research, 16*, 78-117.

Bollen, K. A. (2002). Latent Variables in Psychology and the Social Sciences. *Annual review of Psychology, 53*, 605-634.

Boomsma, A. (2000). Reporting Analyses of Covariance Structures. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 7* (3), 461–483.

Browne, M. W. y Cudeck, R. (1993). Alternative ways of assessing model fit. In Bollen, K. A. y Lonj, J. S. [eds.] *Testing structural equation models*. Newbury Park, C. A: Sage, 136-166.

Carmines, E. G. y McIver, J. P. (1981). Analizyng models with unobserved variables. In Bohrnstedt, G. W. y Borgatta, E. F. [Ed.] *Social measurement: current issues*. Beverly Hills: Sage.

Cliff, N. y Hamburger, C.D. (1967). The study of sampling errors in factor analysis by means of artificial experiments. *Psychological Bulletin*, *68*, 430-445.

Franco, K., González, O. L., Díaz, F. J., López-Espinoza, A., Martínez, A. G. & Aguilera, V. (2010). Reliability and validity of Bulimic Investigatory Test Edinburgh on Mexican women. *Journal of Behavior, Health & Social Issues, 2*, 17-24.

García, E., Gallo, P. y Miranda, R. (1998). Bondad de ajuste en el análisis factorial confirmatorio. *Psicothema, 10*, 717-724.

Hewitt, P. L., Flett, G. L. & Ediger, E. (1995). Perfectionism traits and perfectionistic self-presentation in eating disorder attitudes, characteristics, and symptoms. International Journal of Eating Disorders, 18(4), 317-326.

Hu, L. T., & Bentler, P. M. (1999). Cutoff criteria for fit indices in covariance structure analysis: Conventional criteria versus new alternatives. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 6,* 1-55.

Jackson, D. L. (2007). The effect of the number of observations per parameter in misspecified confirmatory factor analytic models. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 14* (1), 48–76.

Kahn, J. H. (2006). Factor analysis in Counseling Psychology research, training and practice: Principies, advances and applications. *The Counseling Psychologist, 34*, 1-36.

Lomax, G. R. (1982). A guide to LISREL-type structual equation modeling. *Behavior Research Methods & Instrumentation, 14*, 1-8.

Marsh, H. W. y Hocevar, D. (1985). Application of confirmatory factor analysis to the study of self-concept: First and higer-order factor models and their invariance across groups. *Psychological Bulletin, 97*, 562-582.

McDonald, R. P., & Ho, M. R. (2002). Principles and Practice in Reporting Structural Equation Analyses. *Psychological Methods, 7* (1), 64–82.

Peña, D. (2002). *Análisis de datos multivariantes*. España. Ed: Mcgraw-hill

Pérez, C. (2001). *Técnicas Estadísticas con Spss*. Ed: Prentice Hall.

Vicente Y Oliva, M., Manera, J., y Blanco, F.J. (2000). *Análisis Multivariante para las Ciencias sociales*. Ed: Dykinson.

Wheaton, B., Muthén, B., Alwin, D. F. y Summers, G. F. (1997). Assessing reliability and stability in panel models. In Heise, D. R. [Ed.] *Sociological Methodology.* San Francisco: Jossey-Bass, 84-136.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LÍMITE Y CONTINUIDAD DE UNA VARIABLE REAL

María Inés Ortega Arcega[1], Alicia López Betancour[2], Barbara Olvera Carballo[1], David Zamora Caloca[1].

Universidad Autónoma de Nayarit[1], Universidad Juárez del Estado de Durango[2]. México

maijua9@hotmail.com abetalopez@gmail.com barbara.olvera@hotmail.com davidzamoracaloca@yahoo.com.

Para citar este artículo:

Ortega, M. I., López, A., Olvera, B., Zamora, C. (2017). Secuencias didácticas para el aprendizaje de límite y continuidad de una variable real. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LÍMITE Y CONTINUIDAD DE UNA VARIABLE REAL

María Inés Ortega Arcega[1], Alicia López Betancour[2], Barbara Olvera Carballo[1], David Zamora Caloca[1].

Universidad Autónoma de Nayarit[1], Universidad Juárez del Estado de Durango[2]. México

maijua9@hotmail.com abetalopez@gmail.com barbara.olvera@hotmail.com davidzamoracaloca@yahoo.com.

Resumen

En el Área de Ciencias Básicas e Ingenierías (ACBI) de la Universidad Autónoma de Nayarit (UAN) se planteo elaborar un libro de texto integrado de secuencias didácticas para el aprendizaje de límites y continuidad, apoyados con actividades didácticas, la resolución de problemas, el trabajo en grupo colaborativo, en videos explicativos y los softwares WinPlot y GeoGebra. En la elaboración de las secuencias didácticas se integraron problemas de corte epistemológico y didáctico relacionados con los contenidos de límites y continuidad, en el que se incluyeron problemas de la vida cotidiana. Como actividad final se pretende valorar el efecto sobre el aprendizaje de los alumnos sobre los conceptos de límite y continuidad, con la propuesta de enseñanza basada en el libro de secuencias didácticas.

Palabras claves: Secuencias didácticas, Límites y Continuidad, Grupo colaborativo.

Introducción

En México, alrededor de los años ochentas se inició la modernización educativa y descentralización con la que se ha pretendido lograr la excelencia académica, la calidad educativa y la eficiencia y modernización de la educación. Con esto se procuró direccionar a las Instituciones de Educación Superior (IES) para cambiar sus proyectos educativos y procesos formativos. El programa de modernización de la educación en el país y la política educativa de mejoramiento de la calidad en la educación superior se enfoca en la evaluación permanente del proceso educativo, en búsqueda de competitividad, en los criterios para el financiamiento, en la vinculación con el sector social y productivo, así como la reorientación de las políticas educativas.

La reforma universitaria en la UAN inicia en los años 1998, 1999 y 2000 con la formulación del Plan de Desarrollo Institucional, que se integra fundamentalmente de tres apartados: la reforma académica, la reforma administrativa y la reforma normativa. Los ejes estratégicos son las evaluaciones externas, el diseño del currículo, las nuevas carreras y los posgrados de calidad, todos ellos relacionados con la formación integral de los estudiantes. La estrategia básica para el nuevo modelo académico lo constituye el diseño curricular que se implantó para ofrecer nuevas posibilidades formativas, que respondan a las demandas sociales y necesidades de los sectores laborales. Se propuso que el currículo integre como elementos fundamentales, la flexibilidad e innovación con soporte en las competencias profesionales, que se concrete en el aula a través de un proceso educativo centrado en el aprendizaje y apoyado en las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) (Modelo Académico y Curricular, 2002).

Si bien es cierto, en teoría, que la reforma académica de la UAN, debería ser ya una realidad, al menos en el esquema actual del ACBI de la UAN, prevalece el modelo tradicional de enseñanza, centrado en la clase conferencia, en el que la interacción estudiante-profesor, estudiante-estudiante está basada en la repetición y desarrollo de algoritmos, en lugar de propiciar una enseñanza centrada en estrategias como la resolución de problemas y el aprendizaje colaborativo, como se ha propuesto en las secuencias didácticas de límites y continuidad, objetivo central de la investigación educativa que aquí se propone, así como de la reforma académica de la UAN.

Antecedentes

En Pantoja, Betancourt, Ortega y Hernández (2014) se reporta el Diseño Instruccional (DI) elaborado para el aprendizaje de límites y continuidad de una variable real, sustentado en las TIC, resolución de problemas y aprendizaje colaborativo, investigación aplicada en cuatro instituciones de educación superior: Instituto Tecnológico de Cd Guzmán (ITCG), Universidad Juárez del Estado de Durango (UJED), Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP) y en Universidad Autónoma de Nayarit (UAN).

El DI se integra de un cuaderno de trabajo apoyado en el *software WinPlot*, videos digitales, dos exámenes (diagnóstico y postest) y una encuesta de opinión. Cada institución adaptó el DI a las características de sus estudiantes, ya que son distintas las carreras que ofertadas por las instituciones. En el ITCG, se probaron los videos digitales explicativos y en el desarrollo de las actividades; en la UJED se implementó una conferencia sobre el concepto del infinito, con la finalidad de ubicar a los estudiantes de la carrera de matemáticas en este concepto difícil de entender; en la UASLP se aplicó de manera electrónica el cuestionario de Felder-Silverman con la finalidad de detectar las diferentes forma de aprendizaje de los estudiantes, en su mayoría de ingeniería. En la UAN se implantó una entrevista clínica sobre el desarrollo instruccional, con la finalidad de conocer la opinión de los alumnos sobre esta forma de enseñar, sobre tres temas específicos: el examen postest, el trabajo colaborativo y las TIC (Videos digitales explicativos y WinPlot).

Con base en las observaciones de la Reforma Universitaria en la UAN que se sugiere la elaboración de materiales con las TIC (multimedia, video digital, software y sitios en Internet) que apoyen de manera sistemática el aprendizaje de los alumnos (Modelo Académico y Curricular, 2011) y como resultado de las recomendaciones que hacen las diferentes instituciones de nivel superior que llevaron a la práctica el diseño instruccional de límites y continuidad de una variable real, se registra el proyecto en la Secretaria de Investigación y Posgrado de la UAN con registro SIP13-10 cuyo objetivo central fue la elaboración del libro:"Secuencias didácticas para el aprendizaje de límites y continuidad de una variable real".

Para cada bloque temático se han generado igual número de secuencias didácticas, que se entiende como el proceso educativo que innova el profesor para generar las actividades de enseñanza, así como también organiza las acciones que desarrollará el alumno para aprender, ya sea en el aula o fuera de ella y que incide en forma directa, orientando a fomentar, mediante la resolución de problemas y el trabajo colaborativo, las competencias previas y por adquirir (Tobón, Pimienta y García, 2010).

Trabajo colaborativo

Los puntos que se tomaron para el trabajo colaborativo son:

- **Cooperación**. Los estudiantes se apoyan mutuamente para cumplir con un doble objetivo: lograr conocimiento de límites y continuidad, además de desarrollar habilidades de trabajo en equipo. Los estudiantes comparten metas, recursos, logros y entendimiento del rol de cada uno;
- **Responsabilidad**. Los estudiantes son responsables de manera individual de la tarea que les corresponde. Al mismo tiempo, todos en el equipo deben comprender todas las tareas que les corresponde a sus compañeros (responsabilidad de su propio aprendizaje y codependencia positiva entre los miembros del grupo);
- **Comunicación**. Los miembros del equipo intercambian información y materiales se ayudan mutuamente, ofrecen retroalimentación y analizan las conclusiones de cada uno para lograr pensamientos y resultados de mayor calidad (liderazgo);

- **Autoevaluación**, Los equipos deben evaluar cuales acciones han sido útiles y cuáles no. Los miembros de los equipos establecen las metas, evalúan periódicamente sus actividades e identifican los cambios que deben realizarse para mejora su trabajo en el futuro.

Secuencias didácticas

El eje central de la propuesta son las secuencias didácticas, que se definen como conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas apoyadas en una serie de recursos (Tobón, *et al*, 2010, p. 20). Las secuencias didácticas tienen seis componentes (Ver Figura 1), el primero es la situación problema del contexto, con la finalidad de que los alumnos formulen hipótesis y busquen explicar la situación o resolver el problema. El segundo son las competencias a formar, mientras que el tercero son las actividades de aprendizaje, lo referente a la evaluación se considera en el cuarto, el quinto trata de los recursos y por último, en el sexto, el proceso metacognitivo.

Figura 1. Principales componentes de una secuencia didáctica, Tobón, Pimienta y García (2010).

Las secuencias didácticas que se construyeron son:

- Procesos infinitos y concepto limite
- Acercamiento numérico y gráfico
- Definición de limite y propiedades
- Técnicas para calcular limites
- Limites Especiales
- Asíntotas verticales
- Asíntotas horizontales
- Asíntotas oblicuas
- Definición de continuidad
- Discontinuidad removible y de salto finito e infinito.

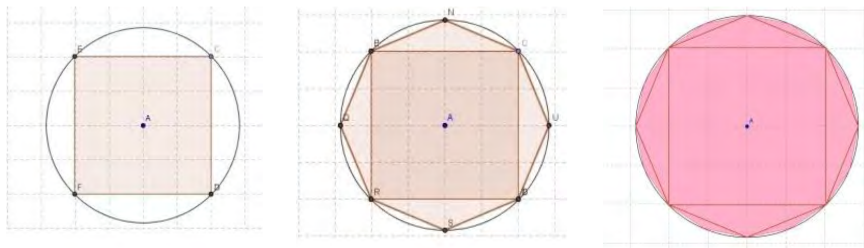
La secuencia Procesos infinitos y concepto de límite se presenta en función de las seis secciones propuestas:

1. La situación problema del contexto:

Aproximación del área del círculo por:

a. Por medio de la medición del radio y aplicación de la fórmula.

   a. Dos acciones:
      i. Dibujar círculos en WinPlot con la hoja cuadriculada.
      ii. Se les entregan círculos dibujados en papel milimétrico.
   b. Por medio de polígonos inscritos y circunscritos en WinPlot para aproximar la circunferencia y el área del círculo. Iniciar con un cuadrado, luego un octágono, un hexadecágono, hasta un polígono de 2^n lados.



2. Las competencias genéricas y las específicas que corresponden al tema de límites.

2.1 Competencias de énfasis (saber hacer)

- Analiza con su GC la palabra límite para identificar diferencias en el significado que tiene en la vida cotidiana y en las matemáticas.
- Calcula áreas de figuras geométricas para fortalecer los conocimientos previos.
- Compara las áreas de figuras geométricas con el área del círculo para aproximar su área con una cantidad de cifras predeterminadas.
- Relaciona el problema del círculo con los procesos infinitos para dar idea de lo que significa límite y su concepto.
- Interpreta los procesos infinitos para construir la noción intuitiva de límite.

2.2 Criterios

- Diferenciar procesos infinitos y finitos.
- Precisar procesos infinitos y finitos.
- Presentar un ejemplo de proceso infinito.
- Incentivar el procesamiento lógico, algorítmico, heurístico, analítico y sintético para propiciar un aprendizaje significativo.
- Procesar e interpretar datos para emitir un juicio sobre la solución de un problema.

2.3 Evidencias

- Examen de diagnóstico.
- Conferencia “Procesos infinitos y concepto de límite".
- Cuestionario.
- Actividad 1.
- Reporte de consulta de videos.

2.4 Competencias genéricas

Saber conocer:

- Fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de polígonos para su aplicación en el cálculo de áreas de regiones en el plano cartesiano.
- Nomenclatura de las partes importantes de los polígonos para aplicarlas a problemas de cálculo de perímetros y áreas.
- Aplicar las operaciones con los números reales para el cálculo de perímetros y áreas de polígonos.
- Utilizar WinPlot para promover el uso de gráficas funciones.
- Calcular tablas numéricas de valores de una función para su aplicación en problemas de límites.

Saber ser:

- Trabaja en equipo colaborativo para lograr aprendizaje.
- Respeta la opinión de sus compañeros para promover la confianza en el grupo colaborativo.
- Expresa sus ideas y puntos de vista con claridad para propiciar un debate científico en torno al tema en cuestión.
- Defiende su punto de vista con respeto para no provocar malestar en sus compañeros de GC.
- Expone los resultados obtenidos en la solución de un problema ante el grupo, para discutir colaborativamente y elaborar la mejor propuesta.

2.5 Criterios

- Examen de diagnóstico	30
- Cuestionario	30
- Colaboración en el equipo	5
- Evaluación de los demás miembros del equipo	5
- Reporte de consulta de videos	20
- Reporte	10

3. Actividades

3.1 Actividades con el Docente

- 3.2 Organizar los grupos de acuerdo al resultado del examen diagnóstico.
- 3.3 Resolver la Actividad 1 para discutirlo en equipo.

3.2. Actividades de Aprendizaje autónomo: Reporte y entrega de cuaderno de trabajo.

Nivel Inicial-receptivo

- Leer la actividad.
- Ver los videos.
- Calcular áreas de polígonos.
- Sabe usar el WinPlot.
- Ver el video de introducción al concepto de límite.

Nivel Básico

- Calcular el área del círculo por aproximación con polígonos inscritos.
- Valora sumas infinitas y finitas con y sin calculadora.

- Elabora tablas numéricas en WinPlot para calcular series numéricas.

Nivel Autónomo

- Calcula sumas finitas e infinitas con autonomía.
- Discute con sus compañeros el proceso infinito de aproximar el área del círculo por polígonos, haciendo hincapié que en el proceso de aproximación el número de lados del polígono infinitamente grande $\left(\lim_{n\to\infty}\right)$ y que la diferencia entre el área del círculo es infinitamente pequeño $\left|A_{cuadrado} - A_{poligono}\right| < \varepsilon$.
- Muestra a sus compañeros de Grupo Colaborativo cómo se aproxima una suma infinita a un valor con decimales.
- Argumenta ante sus compañeros de GC lo que considera infinitamente grande y lo infinitamente pequeño.
- Elabora un reporte sobre el cálculo aproximado de sumas infinitas.

Nivel Estratégico

- Discute con sus compañeros de GC el concepto de proceso infinito.
- Elabora un reporte sobre procesos finitos e infinitos, para discutirlo con sus compañeros de GC.
- Muestra a sus compañeros de GC ejemplos de procesos infinitos en la vida cotidiana.
- Discute con sus compañeros de GC ejemplos de procesos infinitos en la historia.
- Plantea a sus compañeros la relación entre los procesos infinitos y el concepto de límite.

Metodología

- Se inicia con una conferencia o plática que aborde los procesos finitos e infinitos con el grupo al cual se le aplicará la estrategia, al terminar se les proporcionará un cuestionario para que lo contesten en forma individual.
- Se verá el video de procesos infinitos y finitos, para al final discutirlo en grupo.
- Se evaluará a los alumnos con un examen de diagnóstico y dependiendo de la calificación de los estudiantes se integran en grupo colaborativo de cuatro, un estudiante con alto conocimiento, dos estudiantes en situación intermedia y un estudiante con baja calificación.
- Las actividades se les entregarán a los alumnos impresas.
- Al final de cada actividad se le pedirá al alumno que entregue un reporte de lo aprendido en cada actividad.

Actividad 1. Dibujar en GeoGebra con la herramienta adecuada cinco círculos y con la fórmula calcular el área de dichos círculos. En tu cuaderno de trabajo llena una tabla con la siguiente forma y contesta las preguntas.

Círculo	Radio	Fórmula	Área	Perímetro
Círculo 1				
Círculo 2				
Círculo 3				

Círculo 4				
Círculo 5				

Describe qué fue lo que utilizaste para calcular el área y el perímetro.

¿Con cuántos decimales utilizaste el valor de Pi?

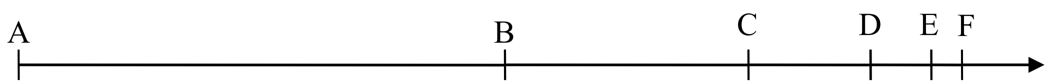
¿Sabes qué número es Pi y cuantos decimales tiene?

Actividad 2: Cuestionario C01: Procesos infinitos e introducción al concepto de límite.

Entregar al alumno al final de la sesión 1.

Actividad extraclase realizada en equipo como preparación a su discusión al inicio de la sesión 2.

1. Dado un segmento $\overline{AB} = 1\,\text{m}$. Supóngase que otro segmento $\overline{BC} = \frac{1}{2}\,\text{m}$ es añadido. Se continua de esta manera, añadiendo segmentos de $\frac{1}{4}\,\text{m}$, $\frac{1}{8}\,\text{m}$, $\frac{1}{16}\,\text{m}$, etc.



NOTA: Tus respuestas deben considerar que los segmentos de recta representan un intervalo o subconjunto de los números reales y que la adición de segmentos implica agregar una cantidad numérica.

Pregunta	SI	NO
¿El proceso de añadir segmentos es infinito?	(__)	(__)
¿La suma de los segmento $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\cdots=2$?	(__)	(__)
¿Es $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\cdots \neq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$?	(__)	(__)
¿El límite se alcanza?	(__)	(__)

2. En una hoja cuadrada. marca los puntos medios de los lados del cuadrado inicial y traza líneas para unir los puntos de tal manera que obtengas un nuevo cuadrado. Ver Figura 2. Elimina los cuatro triángulos rectángulos que se forman al unir los puntos medios (indicados con color azul). Continúe el mismo proceso, y construya otro cuadrado. Ahora recorte de nuevo los correspondientes triángulos rectángulos.

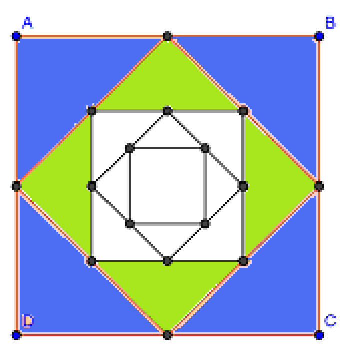
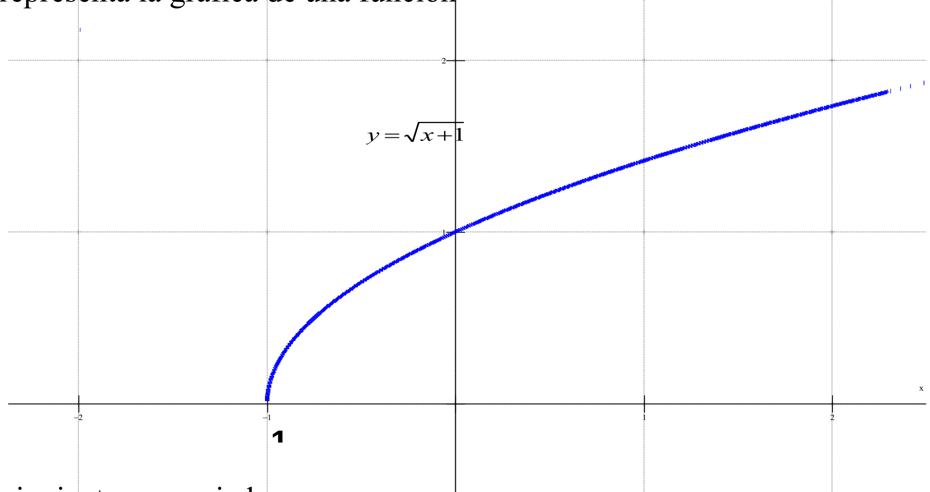


Figura 2. Proceso infinito.

Evalúa las siguientes proposiciones como verdaderas (V) o falsas (F).

Afirmación	F	V
El proceso de construcción de los cuadrados es infinito	(__)	(__)
El área del cuadrado construido continuamente, se aproxima a cero.	(__)	(__)
El área del cuadrado “final” es igual a cero.	(__)	(__)
Si el límite del área es igual a cero, entonces se dice que el límite se alcanza.	(__)	(__)
Es necesario que el límite se alcance para que exista.	(__)	(__)
El tener límite el área del cuadrado implica que se alcance.	(__)	(__)

3. La figura representa la gráfica de una función



Completa los siguientes enunciados

El valor de la función *f(a)* tiende a _____________cuando el valor de x → -1 y cuando el valor de x es muy grande, *f(a)* tiende a __________________ .

Entonces, se puede predecir que el límite de la función es ___________ cuando x → -1. Recordemos que el concepto de límite desde una perspectiva matemática. Procura entender el límite de una función en la proximidad de x = __________ sin importar que pase en dicho punto. Es decir, puede el valor de la función *f(a)* ser parte del _________________, incluso **NO** existir.

Por ejemplo, que ocurre con el valor de *f(a)* cuando el valor de x se aproxima a -2. El límite _____________________ porque está fuera de su dominio.

5. Recursos

- Actividad de Aprendizaje A01
- Cuestionario C01
- Discusión D01 Procesos infinitos y aproximación al área del círculo
- Problemas P01.
- Video digital explicativo introducción al límite (V01) y procesos infinitos (V02).
- Software WinPlot
- Software GeoGebra

6. El proceso de metacognición.

En el formato de las secuencias didácticas de límites y continuidad se propone algunos apartados para que el estudiante reflexione sobre su desempeño y el de sus compañeros de equipo, ya que la socialización del conocimiento es parte de la convivencia diaria en las instituciones educativas, por eso en las secuencias se ha integrado el trabajo colaborativo y el autónomo que hace responsable al estudiante de su aprendizaje, que se promueva el respeto a las opiniones de sus compañeros, así como propiciar la honestidad, puntualidad y la motivación por aprender matemáticas.

Conclusiones

Las secuencias didácticas son una forma alternativa de organizar los contenidos matemáticos, que tienen por objetivo que el estudiante logre aprendizaje con el trabajo colaborativo y autónomo, en este caso de límites y continuidad. Las secuencias didácticas conforman un gran apoyo para que el alumno analice, conjeture y redacte sus propias conclusiones, lo que permite el aprender a aprender. La consulta de los videos se sugiere que sea en grupo colaborativo y en trabajo extraclase. Es cierto que el video se debe de ver en conjunto con el especialista de matemáticas, pero también el alumno debe tener la capacidad para, al menos, lograr entender lo mínimo de los contenidos tratados en el video.

Los valores son aspectos importantes porque la socialización del conocimiento es parte de la convivencia diaria en las instituciones educativas y con las secuencias didácticas propuestas se propicia la motivación para aprender, al igual que la honestidad, la puntualidad y el respeto, ya que las generaciones actuales de alumnos universitarios tienen tanta distracciones, que resulta casi imposible competir con las actividades planeadas para trabajo en el aula.

Se ha incluido el trabajo con el Software libre WinPlot y el GeoGebra, para incentivar los acercamientos gráfico y numérico en el cálculo de límites, apoyados con los cuestionarios y los problemarios.

Los instrumentos de evaluación se considera que cumplieron con la función encomendada dentro de las secuencias didácticas, pero son perfectibles, así que en reunión posterior con los investigadores del ITCG, UAN, UJED y UASLP, se analizarán en detalle la información generada respectivamente, tendiente a mejorar las actividades para aprendizaje.

Este tipo de trabajos son propuestas didácticas para optimizar la labor docente, con la finalidad de que se le dé un cambio sustantivo a la tarea que los actores de la enseñanza y aprendizaje desarrollan en el aula, que de la misma forma como se propone que los alumnos trabajen colaborativamente, los profesores agrupados en las academias o en los cuerpos académicos sesionen y propongan alternativas de enseñanza de las matemáticas, para lograr en el estudiante un aprendizaje significativo.

Referencias Bibliográficas

Fregoso, J. R. (2006). *Aprendizaje de límites de funciones racionales con el empleo de software Winplot.* Tesis de Maestría en Ciencias en Enseñanza de las Matemáticas. Departamento de matemáticas. CUCEI. Universidad de Guadalajara

González L., Radillo, M. y Paredes, I. (2010). El uso de diferentes programas de cómputo para la enseñanza del límite de una función racional, caso 0/0. *Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas*.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En L. Guerrero, R. García R, A. Sepúlveda & C. Cortés (Ed.), *Memorias de las conferencias plenarias del XI Encuentro de Profesores de Matemáticas*. Morelia, Michoacán, pp. 1-26.

Martínez, J. C., Pantoja, R., Castillo, L. Hernández, J. C. (2011). Ambientes para aprendizaje apoyados con el winplot y el video digital: el caso de límites y continuidad. *Memoria del 8o*

SEMINARIO NACIONAL. Enseñanza de las Matemáticas con las Tecnologías de la Información y Comunicación.

Martínez, J. C., Castillo, L., Pantoja, R., Nesterova, E. (2010). Los profesores de matemáticas usan los videos, los investigadores de matemáticas los rechazan, pero son parte de las nuevas tecnologías ¿o no?. *Lecturas: Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas Vía la Computadora, Volumen IV, 2010.* Departamento de Ciencias Básicas, ITCG. DGEST. SEP.

Modelo Académico y Curricular (2002). UAN

Modelo Académico y Curricular (2011). UAN

Ortega, M. I. (2012). Trabajo Colaborativo y la entrevista clínica en el aprendizaje de límites y continuidad. *Memoria de la Jornada de Investigación 2012.*

Ortega, M. I., Pantoja, R., Mendoza, S. Castillo, L. *Límites y continuidad en un ambiente para aprendizaje con video digital y winplot en la universidad autónoma de Nayarit*. *REVISTA FUENTE.* ISNN 2007-0713, Vol.3, Pag.69-81.

Pantoja, R., Betancourt, A. Ortega, M. I., Hernández, J. C. (2014). Diseño instruccional para el aprendizaje del concepto de límite: Un estudio de caso en el ITCG, la UJED, la UASLP y la UAN. *REVISTA UNION*. www.fisem.org/web/union, ISSN: 1815-0640, Número 37. Marzo de 2014, páginas 91-110.

Pantoja, R., Martínez, J. C., Nesterova, E., Castillo, L. (2011). Diseño instruccional con soporte en videos digitales y WinPlot para el aprendizaje de Límites. *Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*. ISBN: 978-607-7782-91-9.

Tobón, S., Pimienta, J. y García, J. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias.* México: Pearson Educación.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

MODELACIÓN MATEMÁTICA DE SITUACIONES PROBLEMA CON VIDEO DIGITAL Y TRACKER

Rafael Pantoja Rangel, Elena Nesterova, María de Lourdes Guerrero Magaña.

Departamento de Matemáticas, CUCEI. Universidad de Guadalajara. México.

rpantoja@prodigy.net.mx, elena.nesterova@cucei.udg.mx, lourdes.guerrero@gmail.com.

Para citar este artículo:

Pantoja, R., Nesterova, E. Guerrero, M. L. (2017). Situaciones problema con video digital y Tracker. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

MODELACIÓN MATEMÁTICA DE SITUACIONES PROBLEMA CON VIDEO DIGITAL Y TRACKER

Rafael Pantoja Rangel, Elena Nesterova, María de Lourdes Guerrero Magaña.

Departamento de Matemáticas, CUCEI. Universidad de Guadalajara. México.

rpantoja@prodigy.net.mx, elena.nesterova@cucei.udg.mx, lourdes.guerrero@gmail.com.

Resumen

Se presentan situaciones problema que alumnos de educación superior grabaron en video en el aula, en espacios libres y en la unidad deportiva, en la que participaron como protagonistas, con la finalidad de relacionar e interpretar sus propios movimientos con objetos matemáticos. El escenario de grabación se preparó para usar el programa Tracker, interfase entre lo real y lo modelado, que genera a partir del video, datos numéricos, gráficas y un conjunto restringido de funciones. Los contextos tratados son: el lanzamiento de un balón, el corredor, el ciclista, el motociclista, automóviles reales y de fricción, la caída libre, rueda que gira sin resbalar, el péndulo y llenado y vaciado de recipientes. Los estudiantes en trabajo colaborativo analizaron la situación problema, la relacionaron, la discutieron, elaboraron un reporte y lo presentaron en sesión plenaria. Se evidencia aprendizaje, motivación e interés por la relación entre las matemáticas con su contexto.

Palabras clave: Modelación, Grupo Colaborativo, Situación problema, Video digital, Tracker.

Introducción

La inclusión de la modelación matemática en instituciones de educación superior, ha sido relevante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo, en el modelo educativo por competencias en la Universidad de Guadalajara (UdeG) y el Tecnológico de México, SEP, se sugiere que sean incluidos la resolución de problemas, el trabajo colaborativo y el uso de las TIC en el aula como ejes centrales de la labor docente y como promotores del aprendizaje de las matemáticas, mediante las que se generan capacidades, habilidades y valores en los estudiantes.

Toda sociedad requiere que el conocimiento obtenido en las instituciones educativas sea útil, se integre y se reconstruya permanentemente en la vida cotidiana para transformarla. El anclaje en el dominio matemático que se observa en las explicaciones y propuestas didácticas, que obliga a explicar la matemática desde sí misma, no toma en cuenta los otros dominios científicos ni las prácticas de referencia que permitieron el surgimiento del conocimiento matemático (Cantoral y Farfán, 2003), así que es importante integrar en las prácticas escolares situaciones problema relacionados con la vida cotidiana, que propicien de alguna manera la aparición de las matemáticas, para que su integración en la formación del estudiante sea funcional (Cordero, 2004; Hitt, 2007).

En las últimas décadas, la modelación matemática ha sido tema de estudio de investigaciones (Hitt, 2007; Arrieta, Carbajal, Díaz, Galicia, Landa, Mancilla, Medina, R., y Miranda, 2007), que proponen la integración de elementos primordiales como son la resolución de problemas, el trabajo en colaboración y la modelación matemática de situaciones de la vida cotidiana, como un área de interés para propiciar el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes.

Ezquerra (2010) trabajó con sus estudiantes la modelación matemática en distintos contextos, en particular uno de ellos llama la atención porque es una situación de la vida cotidiana ligada con el deporte del Judo, que en nuestra experiencia como profesores de matemáticas, no hubiéramos puesto atención sobre cómo relacionar el movimiento surgido de la aplicación de una "llave de Judo" con la matemática. Ezquerra (2010) afirma que con este tipo de situaciones problema, se logra un aprendizaje significativo, porque los trabajos experimentales, en los que se hace al estudiante partícipe directo de la investigación, son un marco idóneo para mostrar cómo la ciencia está presente en nuestra vida diaria, hecho que fomenta el interés de los estudiantes por aprender matemáticas, propósito a alcanzar con esta propuesta.

Teoría de las representaciones semióticas de Duval

Uno de los objetivos de la investigación en educación matemática es analizar las razones estructurales de los problemas de la comprensión, en el que se establecen distintas representaciones para analizar los procesos de adquisición de conocimiento matemático.

Los polos constitutivos de toda representación están establecidos por:

- El objeto representado.
- El contenido de la representación (lo que una representación particular presenta del objeto).
- La forma de la representación (su modalidad o su registro).

Las representaciones se pueden establecer mediante razonamientos, cálculos o visualización, ya que son consideradas como cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o de nuestro mundo interior, situación que en el caso de la parábola representaría su relación con las situaciones cotidianas del contexto del individuo o de sus conocimientos previos adquiridos en la educación media básica, como puede ser su gráfica, su ecuación o datos numéricos.

En matemáticas es menester poder cambiar de sistema de representación, por medio de la interacción entre las representaciones del objeto matemático, para tratar de que el interesado logre formar una estructura cognitiva, lo que permitirá adquirir conocimiento sobre su entorno y lograr adaptarse a él.

Un objeto matemático puede tener dos tipos de representaciones: externas e internas. Las representaciones externas son conocidas también como representaciones semióticas, que de acuerdo con Duval (1995) (citado en D'Amore, 2004), conforman un sistema de signos que permite llevar a cabo las funciones de comunicación, tratamiento y objetivación, y en cambio no se hace referencia a notaciones convencionales que no forman un sistema. Por ejemplo si se considera al objeto matemático denominado Parábola (Ver Figura 1), las representaciones semióticas son:

- las gráficas de la parábola en sus diferentes posiciones en el plano cartesiano,
- los problemas de la vida cotidiana relacionados con la parábola:

  - un cuerpo deslizándose por un plano inclinado,
  - la trayectoria descrita por el lanzamiento de un balón,
- las ecuaciones de la parábola en sus diferentes formas,
- la obtención de la ecuación a partir:
  - de una gráfica,
  - del lenguaje común y
  - de un conjunto de datos

Todas estas representaciones semióticas o registros semióticos no se obtienen de manera natural, ya que depende de las actividades que diseñe el profesor para que el alumno logre apropiarse de ellos, es decir, deben de ser actividades diseñadas con propósitos comunicativos, como las descritas en esta propuesta.

Duval (2004, 2006) afirma que la actividad intelectual consiste esencialmente en la transformación de las representaciones semióticas, las cuales son de dos tipos: tratamiento y conversión. El tratamiento sucede cuando una transformación produce otra al interior de un mismo registro, lo que hace relevante la elección del "mejor" cambio de registro para resolver el problema dado, al transformar internamente el registro.

En el objeto matemático Parábola, se realizan diferentes transformaciones dentro de un mismo registro, por ejemplo, si se considera el registro analítico, se puede aplicar el tratamiento al pasar de la ecuación ordinaria de la parábola a la ecuación general o viceversa en el registro gráfico se puede aplicar el tratamiento al modificar la posición, el vértice, el foco, o alguno de sus elementos (Ver Figura 2).

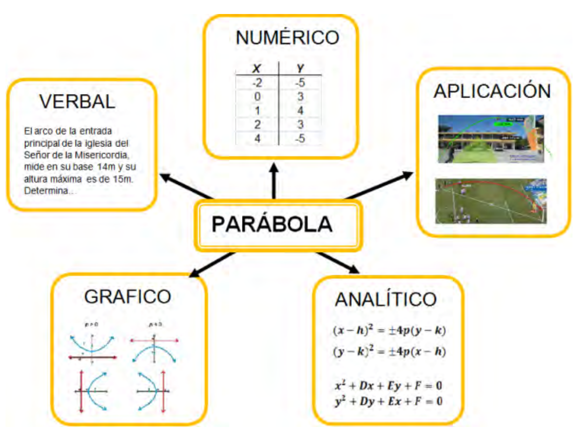


Figura 1. Ejemplo del objeto matemático Parábola y sus representaciones semióticas.

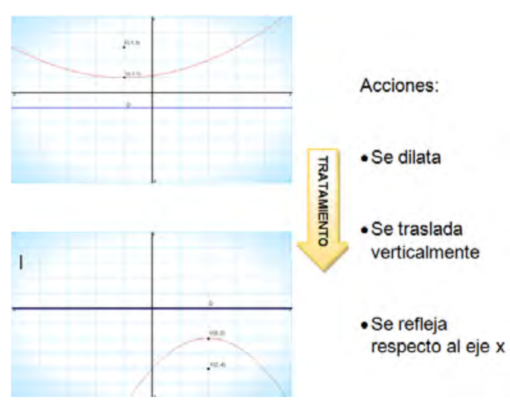


Figura 2. Tratamiento en el registro grafico

La conversión se refiere a la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial, es el cambio de un registro a otro. La conversión cognitiva rápida y espontánea de la coordinación de al menos dos registros de representación es la base de la comprensión de un contenido conceptual. Para la Parábola, es esencial la conversión de un registro a otro, por ejemplo, del registro gráfico al registro analítico (o del registro verbal hacer la conversión al registro gráfico, numérico o analítico) para que el estudiante pueda interiorizar su conocimiento.

El objetivo de la enseñanza de las matemáticas es lograr que el alumno aprenda, entonces es función del profesor que las acciones que emprenda para lograr tal propósito, se integren de los diversos registros semióticos del objeto matemático, en este caso, la parábola, porque una vez que el estudiante desarrolle tales actividades, se pretende que logre interiorizar el conocimiento adquirido, es decir, logre una representación mental del objeto matemático. El aprendizaje de estos registros, las representaciones mentales conocidas también como internas o noética, son la interiorización de las representaciones semióticas. Para Duval (1999), no puede haber noética sin semiótica, además de que la semiótica se adopta como característica necesaria para garantizar el primer paso hacia la noética. Específicamente en el objeto Parábola, una vez que el estudiante reconoce la representación semiótica y puede realizar tratamientos en cada registro y conversiones de un registro a otro, entonces se puede hablar de una noética.

Se pretende que el estudiante:

- reconozca y comprenda todo lo que se relaciona con la parábola a partir de cada uno de los registros de representación semiótica de la misma.
- construya y mantenga imágenes mentales de la parábola, de sus diferentes registros y la capacidad para manipularla mentalmente.
- lograr trasladar la representación de la parábola a partir de sus experiencias en el contexto en el que se desarrolla.

Metodología

La metodología ACODESA (Hitt, 2007), se integra de tres vertientes a saber: Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autorreflexión siendo una adaptación a un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas (Hitt, 2007; González, Hitt, y Morasse, 2008). Es importante señalar que en esta metodología, el profesor no dictamina sobre lo realizado por los alumnos en las primeras etapas, salvo al final, en el proceso de institucionalización.

La metodología ACODESA considera tres etapas en la construcción de dichos conceptos:

Primera etapa: Proponer situaciones problema que generen el uso de los diferentes tipos de funciones en el proceso de modelación matemática, lo que permite que los estudiantes sean capaces de proporcionar una predicción sobre el comportamiento aproximado de la función desde el punto de vista gráfico. Ver Tabla 1.

Segunda etapa: Utilización de las funciones conocidas que son susceptibles de aplicar a diferentes tipos de situaciones. En esta etapa es esencial generar datos y encontrar un modelo matemático (función) que permita explicar el fenómeno o situación particular a partir del modelo matemático obtenido e incluso predecir lo que podría suceder en algún determinado tiempo.

Tercera etapa: Proceso de institucionalización que se refiere al análisis de parámetros de ciertas familias de funciones. En esta etapa se supone que el estudiante debe llegar al saber, que es considerado como lo que todo individuo debe conocer al final de sus estudios en un ciclo e institución determinada.

Tabla 1. *La metodología ACODESA y su relación con el estudio propuesto.*

Trabajo individual (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema).	Se observó en la participación del estudiante en el curso taller, en la modelación de la situación problema, por ejemplo al lanzar el balón o realizar una carrera.
Trabajo en grupo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales).	Se presentó en la grabación de las situaciones problema seleccionadas, la obtención del modelo matemático, en la elaboración de reportes y la presentación del trabajo realizado.
Debate (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones funcionales).	Se llevó a cabo en el curso taller, en la grabación de las situaciones problema, en el proceso de obtención e interpretación del modelo matemático, presentación del trabajo, elaboración de reportes y conclusiones.
Regreso sobre la situación (trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión).	Se presentó en la fase final de experimentación, cuando se llevó a cabo nuevamente el proceso con una situación elegida por ellos mismos así como la realización del análisis correspondiente a cada situación.
Institucionalización. Proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales.	Se observó en la presentación de los trabajos en grupos colaborativos, discusión grupal durante la presentación y revisión de los reportes entregados.

El tipo de investigación empleado es de corte cualitativo, en el que analiza el discurso. Se establecieron criterios de selección de los episodios que se correspondan con las dimensiones de análisis de la práctica de modelación generada en el taller, se analizaron los videos para seleccionar episodios críticos y se hizo una transcripción de los diálogos, para levantar núcleos de sentido a partir de la sensibilidad teórica de los investigadores, para finalmente, triangular la información recabada desde las diversas miradas de los autores, basados en videos, archivos digitales y grabaciones de audio por equipo.

Las fases planeadas para la experimentación fueron:

1. Explicación del funcionamiento del Tracker mediante el análisis de un video digital del lanzamiento de un balón de basquetbol.
2. Organización de los alumnos en equipos de trabajo y selección de las situaciones problema con intención de modelar su movimiento.
3. Selección de las situaciones problema, con la intención de modelar diversas variantes de movimiento, a saber: movimiento parabólico, movimiento circular uniforme, movimiento armónico, movimiento uniforme y uniformemente acelerado y vaciado de recipientes.
4. Planeación de la fase de grabación de video. En esta etapa se captura el movimiento del objeto en video digital, para posteriormente, reproducirlo y obtener datos numéricos, analíticos y gráficos con el Tracker.

5. Articulación de los datos que proporciona el software con el fenómeno a partir de la discusión por equipo.
6. Generación de un discurso plenario acerca de dos situaciones, a partir de la exposición del trabajo de cada equipo y la generación de un debate en su entorno.

Por otra parte, en los últimos años se han realizado numerosas investigaciones en las que se demuestra la conveniencia de usar video digital en el aula con el objeto de alcanzar objetivos de aprendizaje propuestos, que se fundamenta en el potencial de expresión y comunicación que ofrece el video, además que se vive en la actualidad dentro de una sociedad que cada vez es más visual y los estudiantes se interesan más en él, aunado a la disminución del costo de las videocámaras y en el desarrollo de tecnologías que facilitan el uso y distribución de materiales educativos en formatos electrónicos.

La tecnología permite a los estudiantes utilizar materiales multimedia producidos por terceros y/o producir sus propios videos. La producción de clips de video apoya la enseñanza en la mayoría de las materias del currículo porque ofrece al estudiante oportunidades para aprender y comprender, así como desarrollar capacidades intelectuales durante el proceso, promueve que los estudiantes actúen como creadores y diseñadores con el objetivo de alcanzar una mayor profundidad en los temas de estudio.

Registrar en video objetos que se mueven o situaciones reales facilita a los docentes de matemáticas incorporar en el aula investigaciones auténticas que permitan a los estudiantes con ayuda de software, mejorar la comprensión de conceptos mediante representaciones gráficas, analíticas y numéricas de problemas del mundo real. Los videos digitales grabados se procesaron con el programa Tracker, en el que se "marca" la posición de un objeto en cada uno de los cuadros de un clip de video con el fin de obtener información sobre su posición y, a partir de ella, producir gráficos de posición, velocidad, aceleración, fuerza, momento y energía en función del tiempo.

Se eligió como recurso tecnológico ***Tracker***, software libre que permite, a partir de un video digital, el análisis del movimiento de objetos reales en una y dos dimensiones en tiempo real, su posición, velocidad, aceleración, proporciona gráficos y tablas de datos con los valores a partir de situaciones problema, características que permiten al estudiante relacionar la matemática con situaciones problema de su contexto (Ver Figura 3).

A través de Tracker los estudiantes pueden señalar los cuadros por segundo (Ver Figura 4) de video, escoger el origen de la ubicación deseada y calibrar el video para aproximar las unidades de medida en el mundo real con el mundo virtual; luego, el software calcula valores de movimiento, construye gráficas, dibuja y manipula vectores de fuerza, velocidad y aceleración.

Figura 3. Pantalla del Tracker

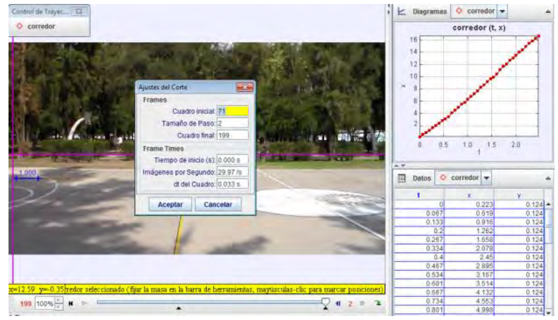


Figura 4. Herramienta de ajuste de corte

La práctica de modelación en el aula se analiza a partir de las dimensiones intenciones, herramientas, argumentos y procedimientos (Pantoja, Ulloa, Nesterova, 2013). Estás dimensiones se corresponden al análisis de las prácticas con las preguntas ¿por qué modela?, ¿con qué modela?, ¿cómo modela? y ¿cómo justifica sus acciones y producciones?

El software Tracker entrega entidades como gráficas, datos numéricos y expresiones analíticas, que los actores articulan y relacionan con los movimientos a modelar. La modelación, así, reside en el acto de articular las entidades mencionadas y se entiende en el acto de la interrelación de lo uno con lo otro y su entorno y donde los alumnos son los actores protagonistas, que desarrollan el guión de la escena. La modelación convive con los integrantes del equipo, en un proceso en activo integrado por los acoplamientos estructurales que hacen emerger las herramientas, los procesos e intencionalidades en la modelación misma, negociadas y compartidas socioculturalmente.

Un esquema representativo de la modelación matemática se muestra en la Figura 5.

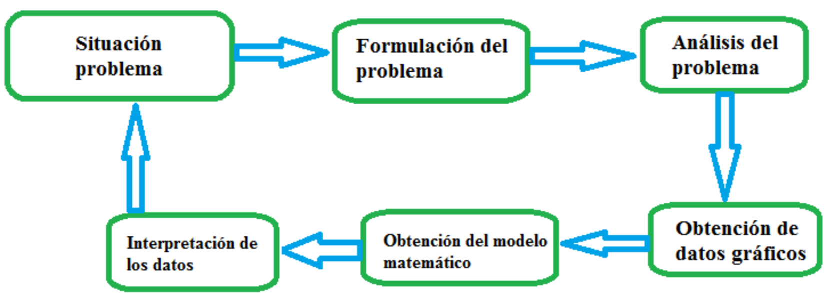


Figura 5. Esquema del proceso de modelación matemática.

La modelación matemática es defendida en varios países como método de enseñanza de las matemáticas en todos los niveles escolares, debido a que permite al alumno no solamente aprender las matemáticas de una manera aplicada a otras áreas del conocimiento, sino también mejora la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar problemas en situaciones reales. Se busca entonces, que la matemática sea para los estudiantes algo útil, que no se vea como algo alejado del realidad y que el conocimiento adquirido sea aplicado en situaciones de interés, que permita resolver problemas, plantear alternativas y predecir ciertos fenómenos a determinadas situaciones.

Según Blomhoj (2004) las actividades de modelación posibilitan el proceso de aprendizaje y permiten establecer raíces cognitivas sobre las cuáles se construyen conceptos matemáticos. De ésta forma, la modelación tiene como propósito describir y analizar situaciones de la vida diaria con el fin de motivar el trabajo con las matemáticas y emplear la matemática como medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones cotidianas.

Es importante mencionar que en los últimos años las estrategias que se utilizan para aprender matemáticas a partir de situaciones y fenómenos del mundo físico han tomado fuerza debido a la aplicación de un método matemático a una situación en contexto conocido. Dicho contexto favorece en el estudiante la comprensión de situaciones problemas y se conoce la utilidad de las matemáticas en la vida diaria, que facilitan la interpretación de la realidad a partir de la detección de las variables participantes y de la recolección de datos que se generan en las situaciones reales o simuladas y modelar las situaciones.

A propósito Freundental (1980) señala que: "*La perspectiva correcta se da principalmente a partir del medio ambiente hacia las matemáticas y no en la otra dirección. No: primero hacer las matemáticas y después regresar al 'mundo real', sino el mundo real primero, y después la matematización. El mundo real ¿qué significa? perdonen esta expresión descuidada. Al enseñar a matematizar el 'mundo real' está representado por un contexto significativo que involucra un problema matemático. 'Significativo' por supuesto que quiere decir significativo para quienes aprenden. Las matemáticas deberían ser enseñadas dentro de contextos y a mí me gustaría que las matemáticas más abstracta fueran enseñadas dentro de los contextos más concretos" (p. 20)*

La secuencia ideal que explica Freundental es lo contrario a lo que usualmente sucede en las aulas de matemáticas, esto es, se dedica mucho tiempo al "enseñar" al alumno a realizar cálculos basado en la repetición de ejercicios, pero muy poco o nulo es el tiempo dedicado a la realización de prácticas con problemas en contextos reales.

De aquí la importancia de retomar el sentido planteado por Freundental a través de la modelación de matemáticas, pues sin duda, lo más importante que ofrece la modelación matemática en situaciones reales, es la motivación que surge en los estudiantes pues se interesan y se les facilita la retención de todo lo que sea posible construir y que tenga sentido en su contexto, con el trabajo en pequeños grupos en el que se propicia el intercambio de ideas y la convivencia entre pares.

Las situaciones problemas que se describen en este trabajo se han desarrollado en tres escenarios en instituciones de nivel superior, a saber: Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán (ITCG) y la Universidad de Guadalajara en el estado de Jalisco, México y la Universidad de los Lagos (UL) en Santiago, Chile. Los alumnos de cada una de las instituciones presentan una motivación y un interés por la novedad y la curiosidad por esta forma alternativa de aprender matemáticas en un contexto diferente al del aula tradicional, en el que relacionan actividades cotidianas con la modelación matemática, mediada por el video digital y el software Tracker, es decir, dejar de lado las tablas de valores planteadas en ejercicios de los libros de texto, o en su caso, inventados por el profesor, por los obtenidos en cada una de los escenarios planteadas.

En este caso, los lugares donde se desarrolló la experiencia didáctica fue en la sala de cómputo, un aula normal, los pasillos y los espacios al aire libre como son la azotea del edificio y la unidad deportiva, sitios donde los participantes en trabajo colaborativo filmaron los videos digitales con la cámara integrada a sus celulares y con videocámaras normales, con objetos de uso común como son la rueda de una bicicleta, una pelota con hilo, un resorte de plástico, un mini juego de basquetbol de juguete, un plano inclinado, dos botellas de soda de plástico y una pelota normal, entre otros objetos.

Resultados: Situaciones problema tratadas

1. Lanzamiento de balón al aro del juego de basquetbol

Esta situación problema se aprovechó para hacer la validación del Tracker y que consiste en que los datos reales grabados y los calculados con el software sean lo más cercano a la realidad y dado que el tiro parabólico es uno de los temas más tratados, con ecuaciones ya establecidas, se hizo una comparación entre la ecuación arrojada por el Tracker y las ecuaciones del movimiento de proyectiles que se encuentran en los libros de Física (Resnick, Halliday y Krane, 2008) referentes a encontrar ciertos parámetros.

En un curso de Física actual, el profesor deduce las ecuaciones que rigen el movimiento de un proyectil, soluciona problemas planteados en los libros, con datos ficticios y estáticos, que el alumno manipula para obtener la respuesta solicitada en el enunciado, sin tomar en consideración que existen alternativas, complementarias a la teoría integrada en los textos, fortalecidas con las TIC y el software especializado, para que el estudiante pueda lograr encontrar las ecuaciones que gobiernan el movimiento de proyectiles, a partir de situaciones problema relacionadas con su entorno.

Se dio por hecho que los alumnos saben que el movimiento consiste en el cambio de posición de un objeto con respecto del tiempo y que, para medir y descomponer el movimiento, es importante ubicar de manera adecuada el sistema de referencia, por qué es un punto clave para el análisis del movimiento y por qué la transición entre los diversos escenarios en juego en el estudio, del contexto real al virtual (de ahí al ambiente matemático y su regreso al entorno), debe ser lo más cercano posible a la realidad, por el hecho de que la modelación matemática de situaciones cotidianas es un acercamiento no ficticio, con el que se busca propiciar un aprendizaje significativo de las matemáticas.

Se toma el caso del lanzamiento de un balón de básquetbol como un ejemplo para validar los resultados arrojados con Tracker, porque se trata de hacer una correspondencia biunívoca entre las ecuaciones del movimiento del tiro parabólico y el modelo matemático arrojado con el Tracker.

En el caso de la propuesta, se ubica al alumno en la cancha de básquetbol (ver Tabla 2) y se le graba cuando lanza el balón hacia el aro; el video digital que se procesa con Tracker, que proporciona las gráficas del movimiento en los planos ***t-x***, ***t-y***, ***x-y***, además del polinomio que se ajusta a dichas gráficas de movimiento, en este caso de primer y segundo grado, con los datos reales obtenidos a partir del video en tiempo real; ya que con Tracker es posible indicar la altura de la persona que lanza el proyectil así como las distancias iniciales del movimiento.

En la Tabla 2 se presentan las gráficas y ecuaciones (1), (2) y (3) que Tracker arroja a partir del tratamiento dado al video grabado por los estudiantes,; en ella se describe el movimiento del balón de basquetbol lanzado al aro del juego, con sus errores estadísticos respectivos, propios de las condiciones climáticas y de manejo de los medios audio visuales.

Por ejemplo un ejercicio tradicional del movimiento parabólico en un curso de física del nivel superior, se resuelve aplicando las ecuaciones de movimiento de la (4) a la (10). Ver Tabla 3.

Así, al comparar las ecuaciones (1) y (5), (2) y (10), (3) y (4) término a término respectivamente, y hacer una manipulación algebraica, se determinan, aproximadamente, los valores de la aceleración de la gravedad $g = 9.4\, m/s^2$, la velocidad inicial $v_0 == 5.874\, m/s$ y el ángulo de tiro, $\theta = 42.334^\circ$. Se aclara que el dato arrojado para la constante conocida como la aceleración de la gravedad, se acerca al valor actual $\left(g = 9.81 \dfrac{m}{s^2} \right)$, que por las condiciones del contexto, como son la inexperiencia de los estudiantes y profesor para grabar un video, las condiciones climáticas o el manejo del programa Tracker, se puede considerar que es una buena aproximación al valor de la gravedad $\left(g = 9.4 \dfrac{m}{s^2} \right)$.

Tabla 2. *Imagen del lanzamiento, gráficas y ecuaciones del lanzamiento del balón.*

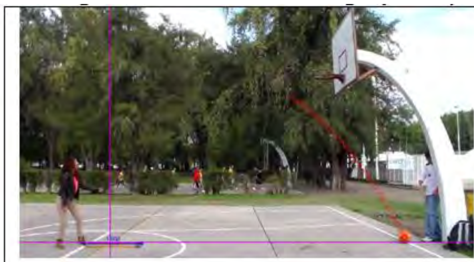
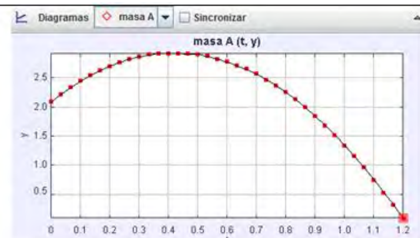
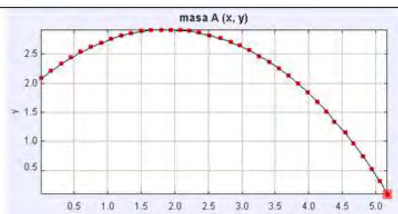
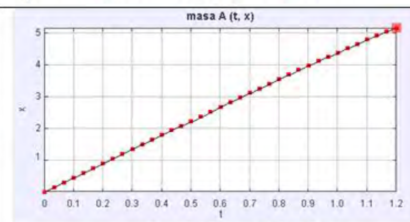
	 $y = 2.009 + 3.956t - 4.7t^2$	(1)	
 $y = 2.053 + .9620x - .2586x^2$	(2)	 $x = .04452 + 4.342t$	(3)

Tabla 3. *Ecuaciones del movimiento.*

$x = x_0 + v_0 \cos(\theta)t$	(4)	$y = y_0 + v_0 sen(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$	(5)	$v_x = v_0 \cos(\theta)$	(6)	$a_x = 0$	(7)
$v_y = v_0 + v_0 sen(\theta) - gt$	(8)	$a_y = -g$	(9)	$y = y_0 + \tan(\theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}x^2$			(10)

Se considera que este tratamiento es una validación de los medios y materiales utilizados, que por cuestiones de la modelación, se requiere valorar, ya que la interface entre la situación real y el video procesado con Tracker, propicia en ocasiones circunstancias que hacen dudar a los actores del proceso sobre la relación existente entre las matemáticas y el mundo real.

2. El corredor

En este caso el equipo que trabajó esta situación problema diseñó tres actividades: el corredor que parte del reposo y con movimiento uniformemente acelerado; en el segundo caso se trata del corredor que entra con una velocidad constante al escenario de grabación y, el último caso es cuando el corredor llega a la meta y se regresa. Los cuestionamientos que se hicieron a los estudiantes, se refirieron a la ubicación del corredor respecto de la gráfica mostrada por el Tracker, así como a la identificación de las variables que intervienen en el movimiento. La marca que hace la interfase entre lo real y el video fue de 2 metros de longitud, que es una unidad de medida que requiere Tracker para generar los valores a partir del plano cartesiano. Ver Figura 6.

Los alumnos ajustaron el video grabado, seleccionaron la parte de su interés para analizar el recorrido de ida y de regreso y con entrada acelerada. En Tracker ajustaron el número de cuadros para relacionar el movimiento, eligieron el sistema coordenado y ubicaron en la cintura del corredor como el punto de referencia para la obtención de los datos, en función de que durante la carrera es una de las partes del cuerpo humano que menos variación tiene. Durante el análisis se dieron cuenta de que los parámetros más relevantes en la carrera son el tiempo y la distancia recorrida, ya que la altura no varía. En la hoja de trabajo se les pidió que generaran las gráficas ***x*** contra ***y***, ***x*** contra ***t***, ***y*** contra ***t***.

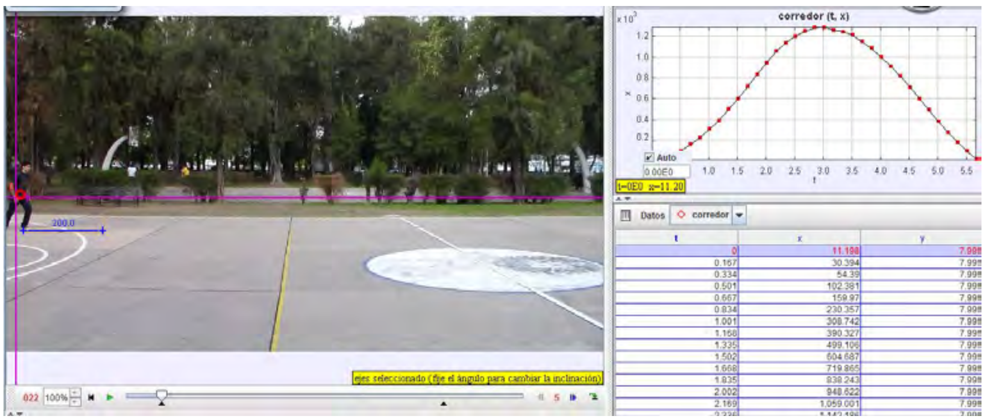


Figura 6. Pantalla del Tracker para el corredor de ida y regreso.

3. Movimiento de un punto sobre una rueda en movimiento sin resbalar

En el caso de la cicloide los alumnos del equipo logran analizar por separado los movimientos de la rueda que gira sin resbalar sobre un plano, con una marca que se distinga, como señal para obtener los datos numéricos; destaca en este caso, el análisis que hacen por separado de las gráficas ***t-x, t-y, x-y***, v_x-x y v_y-y. Para el caso del movimiento en la dirección del eje perpendicular al plano, analizan la gráfica en función del movimiento, inclusive argumentan que es un movimiento cíclico. Al final del video se observa que la rueda se sale de la línea recta, argumento que los alumnos sustentan a partir del análisis de la gráfica y del propio video, grabado en la azotea del edificio de 6 pisos de la Universidad Católica Silva Henriquez, en Santiago, Chile.

El profesor señala la gráfica (Ver Figura 7) y pregunta a los alumnos: ¿aquí que pasó? Daniel señala que hubo un error del camarógrafo, pero en realidad lo que sucede es que relacionan ese salto o falta de simetría en la gráfica ***t-y*** arrojada por Tracker con el fenómeno en términos de que la rueda no sigue una línea recta en su trayectoria y afirman que no es un error del programa. Ante esta situación se logra captar que los alumnos que integran el equipo, intentan encontrar una relación entre la gráfica mostrada por Tracker y la rueda que gira sin resbalar, lo que refleja la relación entre la situación contextual y la gráfica como modelo, es decir, los alumnos realizan un proceso de modelación.

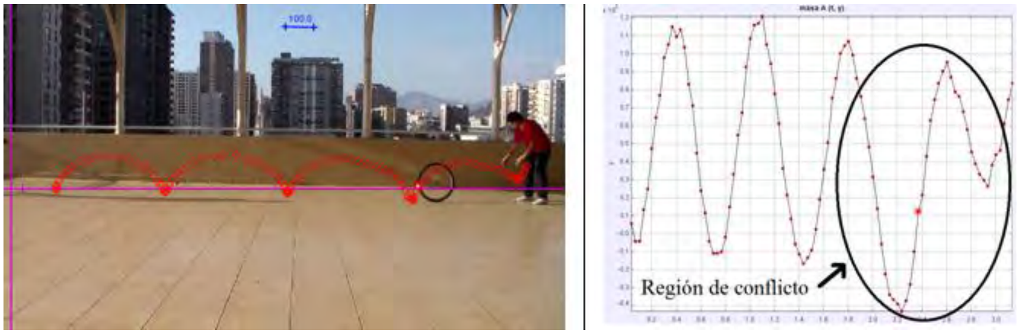


Figura 7. Foto y gráfica del desplazamiento

En la situación de la gráfica ***x-t*** (Ver Figura 8) arrojada por el software Tracker, discuten la naturaleza del movimiento de la rueda con respecto al comportamiento periódico de la gráfica y concuerdan en que proviene de una función sinusoidal, modificada por un parámetro, que tratan de identificar con el uso del Geogebra e intentan con funciones como $f(t) = t\cos(t)$, $f(t) = t + \cos(t)$ que desechan. La primera por qué no se parece en nada a la mostrada por el programa Tracker, mientras que la segunda por no pasar por el origen, que les significa que la rueda parte del reposo, así que identifican que el origen del movimiento es el origen de coordenadas. Enseguida intentan con la función $f(t) = t + \text{sen}(t)$ que les parece más acertada, y además se parece a la ecuación paramétrica de la cicloide $x(t) = r(t - \text{sen}(t))$ para el movimiento horizontal, pero no logran identificarla; se acercan pero no lo logran.

Los alumnos son capaces de identificar el movimiento de la rueda por separado, lo que denota que están cerca de apropiarse del concepto de modelación de la situación cotidiana planteada y sus diferentes formas de representación, como son la expresión analítica al tratar de buscar la expresión matemática que describe movimiento ***t-x, t-y, x-y***, que implícitamente conduce a una relación biunívoca entre las gráficas, los datos arrojados por el Tracker y el movimiento bidimensional de la rueda que se desplaza sin resbalar. Incluso los alumnos explican a partir del movimiento de la rueda, la falta de la simetría en algunos intervalos de las gráficas arrojadas por el software Tracker. Estos comentarios quedaron registrados en el video grabado de su presentación, en el que se señala que se debe a que el movimiento de la rueda no sigue una línea recta. Este análisis resulta de suma importancia ya que refleja que los estudiantes son capaces de visualizar la relación intrínseca entre la situación en contexto y los modelos gráfico y numérico.

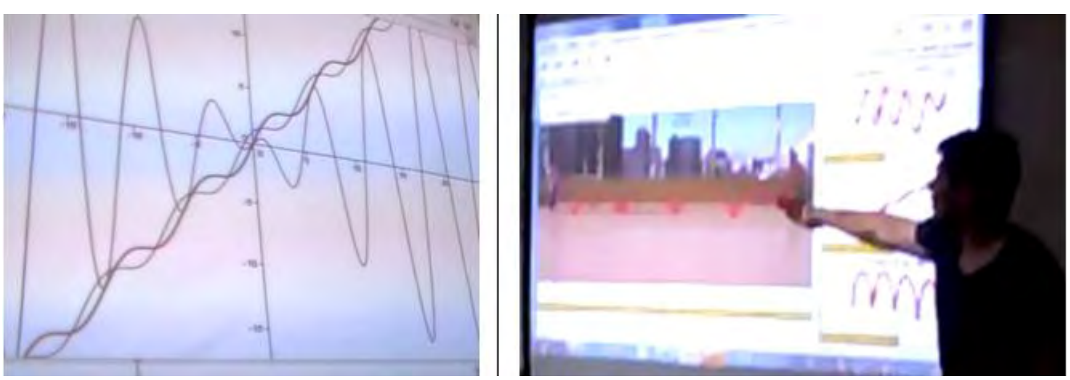


Figura 8. Gráficas que los alumnos analizaron para el movimiento de la rueda que se desplaza sin resbalar.

A partir de la grabación de la sesión referida a las presentaciones, se detallan y discuten los comentarios de los alumnos, conducido con intervenciones del profesor.

Alumna: *De todas las gráficas la que me llamó la atención, de hecho nuestro objetivo, fue encontrar la función, la función,* [y concluye] *una función lineal,*

Pablo interrumpe: *Pero pensamos que podía ser una lineal, que tenía demasiado ruido pero después nos dimos que en la lineal había una cierta,* [y gesticula], …

Daniel: *La única opción es que de todas las funciones …*

Profe de física Eloy: *Lo que le puede dar ese carácter es tomar una lineal con una periódica, es como si uno fuera situado en la rueda, está viendo la base en (0, 0) y si lo miramos desde afuera con la rueda sola, es lineal, la base es lineal, entonces si ponemos las dos cosas estaríamos viendo la composición de la lineal, la suma de las dos cosas.*

Daniel: *De hecho lo que teníamos es una cosa así, y recurrimos a la ayuda del Geogebra.*

Profesor: *¿Por qué le suman la lineal?, ¿qué argumentos físicos?*

Daniel: *En realidad lo graficamos Geogebra.*

Pablo: *Primero lo intentamos con x*cos(x) y nada que ver, y muestran la gráfica*

Pero de hecho esa gráfica que tenemos con el Geogebra no parte de cero, cero, por lo tanto después hicimos la gráfica x+sen(x) y pasa por cero, cero,

Profesor: ¿Por qué físicamente le corresponde esa?

Alumna: *Yo creo que como dice el compañero:, que son los dos fenómenos lo del … circulo unitario y el desplazamiento.*

Daniel: *El desplazamiento es lineal.*

Profesor: ¿Por qué no le afecta a la otra gráfica?

Daniel: *A la distancia porque estaba en desplazamiento cero.*

Profesor: Tenemos dos movimientos. Uno para acá otro para acá, la rueda girando es coseno de x o seno de x pero se le agrega un movimiento a x

Profesor: Raúl ¿tú qué opinas?

Raúl: Separar un poco la matemática y ver lo que también está en la realidad pero no sólo quedando en la ecuación sino también tener el sentido común de decir, bueno, al principio estaba quieta, no puede partir la gráfica de arriba.

Profesor: Pero yo no entendí por qué tu pones así constante

Raúl: Porque la velocidad va descendiendo levemente por el roce del aire en cuanto y nosotros atoramos la pelota y la velocidad prácticamente se mantiene pero siempre descendiendo porque ¡¡aaah!! tiende a detenerse aunque uno piense que va acelerando pero no es así, analizan las irregularidades, por errores del camarógrafo y por las imperfecciones del movimiento de la rueda.

4. El sistema de enfriamiento de un automóvil

En el caso de los alumnos del Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán, eligió el calentamiento del motor de un automóvil estacionado para la obtención de datos a analizar. Se tomó la temperatura del anticongelante con un termómetro digital, que arrojó los valores numéricos en grados centígrados y con la cámara del video filmaron el evento (Ver Figura 9), para posteriormente transcribir y procesar con el software MathCad y obtener la gráficas que describe el comportamiento del sistema de enfriamiento de motor.

En su reporte, los estudiantes señalan que desconocían la forma de cómo el motor se calienta, así como de las partes que integran su sistema de enfriamiento, como son el liquido anticongelante, el ventilador, el termostato y el radiador. Describen que el termostato es una llave de paso que regula la cantidad de agua caliente que ingresa al motor, cuando el motor está frio, éste se cierra para que no ingrese agua y se caliente lo más pronto posible. Los alumnos se preocuparon por investigar las condiciones del contexto de la situación problema, con la finalidad de explicar los datos numéricos obtenidos y su gráfica asociada, tomados de la salida del anticongelante, porque de principio tuvieron problemas para relacionar la gráfica con el calentamiento del motor.

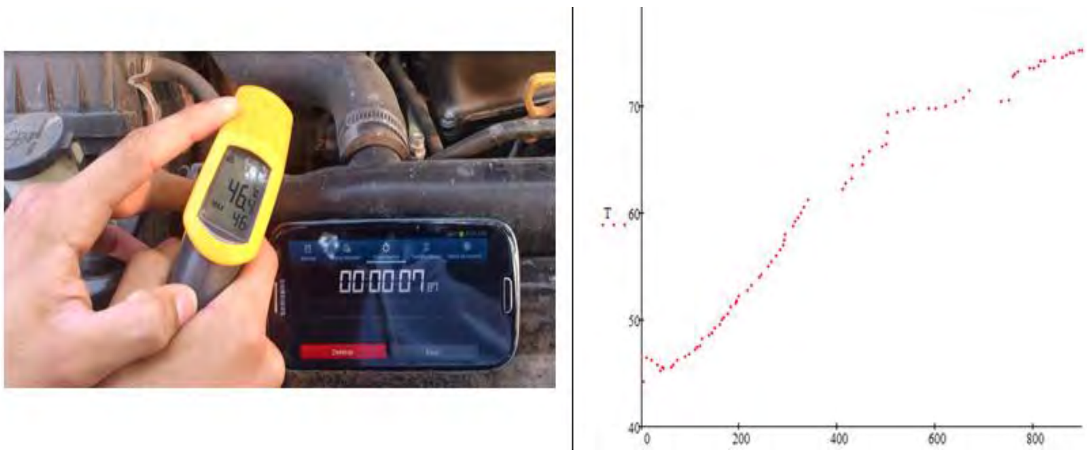


Figura 9. Datos del sistema de enfriamiento y su gráfica

En su reporte escriben: "*como podemos observar en su función gráfica, hay 3 puntos discontinuos, es decir, que hay una separación significativa, el motor influye en el comportamiento de estas 3 etapas, en las cuales influye el ventilador, el radiador, el termostato y la aceleración del motor las cuales explicaremos a continuación*". Se evidencia que tratan de relacionar la gráfica con los elementos del sistema de enfriamiento y prosiguen "*grabamos un video de un aproximado de 15 min., porque los expertos dicen que por lo menos se debe de calentar nuestro vehículo por un mínimo de 15 min., porque es en este tiempo cuando el motor llega a su temperatura estable.*

Al realizar la toma de datos debemos estar consientes de que el motor está a temperatura ambiente, cuando nosotros tomamos las muestras o los datos el motor estaba a una temperatura inicial de 46.6 grados"

Lo que llama la atención es la responsabilidad generada en los estudiantes, porque por iniciativa propia se informaron sobre el funcionamiento del motor para posteriormente tratar de relacionarlos con la gráfica de los datos, es decir, tratar de explicar con las matemáticas la situación problema. "*Para este proceso, se observan tres etapas distintas ya que el motor con sus variables (clima, ventilador, anticongelante etc.) sufren unos efectos y una curva con cambios bruscos de temperatura"*.

Los alumnos identifican, al analizar la gráfica de los datos, tres etapas de funcionamiento, que están de acuerdo con el comportamiento de los datos. Es digno de valorar que la situación problema ubicó a los estudiantes en un escenario que de inicio desconocían, pero en su afán por relacionar las matemáticas con su contexto, se preocuparon por investigar el comportamiento por que afirman "*es importante estudiar la materia de análisis numérico donde nos podemos dar cuenta lo que pasa exactamente en la vida real, es importante saber la aplicación que tiene esto para poder observar los fenómenos que ocurren, y obtener modelos matemáticos precisos que nos permiten ver cómo se mueve o cómo se comporta el fenómeno que estamos analizando, así como lo acabamos de observar con la curva que acabamos de analizar hace un momento"*.

Otras situaciones que se trataron son el ciclista, la motocicleta, el carro, el carro de fricción, el llenado y el vaciado de recipientes y el péndulo, entre algunas más que están en análisis.

Es importante mencionar que las sesiones en clase, las exposiciones realizadas por cada grupo, la grabación de las situaciones de la vida cotidiana, en las tres instituciones en las que se llevaron a cabo estas experiencias se realizaron en un marco de interés y motivación por parte de los estudiantes, reflejado en las entrevistas y los cuestionarios cuantificados en la escala de Likert.

Conclusiones

La elección de situaciones problema genera ventajas sobre las actividades y prácticas realizadas por los estudiantes en el salón de clases, al enfrentar al alumno a un escenario cercano a su contexto, lo que lo motiva a aprender matemáticas de manera lúdica, pues se divierte y le encuentra utilidad a los conceptos y algoritmos matemáticos aprendidos en el aula.

En este tipo de actividades, el estudiante toma el rol activo, ya que a través de su experiencia construye conceptos y desarrolla habilidades, mediadas por la interacción con otros estudiantes, permitiéndose el enriquecimiento y fortalecimiento de las ideas, los conocimientos y los argumentos que cada uno muestra para defender sus puntos de vista. Conocer, escuchar y respetar las aportaciones de los demás compañeros se vuelve indispensable para aprender.

Además con el trabajo colaborativo se favorece la creatividad, la reflexión y la habilidad para tomar decisiones. El trabajo colaborativo les permite discutir ideas, establecer acuerdos a través de diálogo basados en la argumentación, experiencias y conocimientos previos, que potencialmente se convierte en aprendizaje.

El empleo de Tecnología los motiva a descubrir y construir el conocimiento y propicia que el estudiante reflexione sobre los procedimientos empleados y los resultados obtenidos. El programa Tracker es un recurso tecnológico que permite a los estudiantes la manipulación de videos digitales a partir de situaciones problema con medidas reales en tiempo real. Permite la manipulación de los ejes coordenados según el objetivo de los trabajos de los estudiantes, también muestra distintas gráficas que son interesantes para el alumno, quién tratará de explicar lo que significa cada una de ellas en el momento que vive el objeto (o el individuo) en movimiento y va más allá de lo que el alumno observa.

Programas de cómputo como MathCad y GeoGebra sirven de apoyo para dejar en un segundo plano los cálculos tediosos, y enfocar la atención a lo que realmente propicia aprendizaje: el análisis, la interpretación de los datos y gráficos obtenidos a partir de la situación problema.

Durante el proceso de modelación el alumno es capaz de desechar las ideas que no son válidas para la situación en cuestión, discute, expone y aclara ideas en un proceso de colaboración. La modelación matemática no es un proceso sencillo, ya que los estudiantes no están familiarizados con este tipo de escenarios para lograr aprendizaje de matemáticas, aunque las situaciones empleadas en esta investigación pueden ser descritas por funciones estudiadas en cursos anteriores, la interpretación y vinculación con la situación problema se complica cuando se descompone el movimiento.

Sin embargo; la participación de los estudiantes en la toma de videos en espacios libres, como la unidad deportiva del CUCEI en el que pasan gran parte de su tiempo, les motiva, divierte y agrada pues aplican y relacionan las matemáticas con una situación tan simple como el lanzamiento de un balón y encuentran la utilidad de conceptos y algoritmos matemáticos que antes no tenían sentido ni cabida en un contexto familiar para los estudiantes.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J., Carbajal, H., Díaz, J., Galicia, A., Landa, L., Mancilla, V., Medina, R., y Miranda, E. (2007). Las prácticas de modelación de los estudiantes ante la problemática de la contaminación del río de la Sabana. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20,* 473-477. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Blomhoj, M. (2004). Modelación Matemática - A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.*)* *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics in National. Centre for Mathematics Education* (págs. 145 -159). Suecia.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 6(2), 27-40.

Cordero, F., Suárez L. (2004). Modelación en Matemática Educativa. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18(1), 639.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*. Barcelona, España. 35, 90-106.

Duval, R. (1999). *Semiósis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes Intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2004). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103-131. doi: 10.1007/s10649006-0400-z

Ezquerra, Á. (2010). Estudio del movimiento de una llave de Judo. Madrid. Recuperado el 20 junio del año 2012 del sitio http://es.scribd.com/doc/16492130/F3.

González, M., Hitt, F., y Morasse, C. (2008). The Introduction Of The Graphic Representation Of Functions Through The Concept Of Co-Variation And Spontaneous Representations . A Case Study. In Figueras, O., Cortina, J. L., Alatorre, S., Rojano, T., & Sepúlveda, A. (Eds.), (2008). Proceedings of the Joint Meetiing of PME 32 and PME-NA XXX. Vol. 3 México: Cinvestav-UMSNH pp. 3-89, 3-96.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Hermes.

Pantoja, R., Ulloa, R, Nesterova, E. (2013). La modelación Matemática en situaciones cotidianas con software AVIMECA y MATHCAD. Revista Virtual GONDOLA. ISSN 2145-4981 2010. Aceptado para su publicación.

Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K. (2008). Física Volumen 1, 5ta Edición. CECSA: México.

Tracker. https://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/ Sitio consultado el 25/03/14.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

LA HERRAMIENTA TECNOLÓGICA COMO APOYO EN UNA PROPUESTA DIDÁCTICA EN TORNO A LA CORRELACIÓN LINEAL

Gessure Abisaí Espino Flores, José Trinidad Ulloa Ibarra

Universidad Autónoma de Nayarit (México)

gessure@uan.edu.mx, jtulloa@uan.edu.mx

Para citar este artículo:

Espino, G. A., Ulloa, J, T. (2017). La herramienta tecnológica como apoyo en una propuesta didáctica en torno a la correlación lineal. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

LA HERRAMIENTA TECNOLÓGICA COMO APOYO EN UNA PROPUESTA DIDÁCTICA EN TORNO A LA CORRELACIÓN LINEAL

Gessure Abisaí Espino Flores, José Trinidad Ulloa Ibarra

Universidad Autónoma de Nayarit (México)

gessure@uan.edu.mx, jtulloa@uan.edu.mx

Resumen

El presente trabajo reporta una propuesta didáctica en torno a la correlación lineal y aquellos elementos intervinientes con apoyo del software GeoGebra, así como lo sucedido en la implementación de tal propuesta, las ideas surgidas por parte de los docentes y dicentes. Lo anterior con base a la gran influencia que las herramientas tecnológicas han demostrado en el campo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: Estadística, GeoGebra, Correlación, ACODESA

Introducción

Las tecnologías de la información y la comunicación van adquiriendo mayor influencia en nuestra sociedad y se les atribuye gran potencial para el quehacer educativo en sus diversas manifestaciones, como vendría a ser el caso de la educación matemática. Para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se aprecian algunos beneficios en el uso de las herramientas tecnológicas, debido a que permiten el almacenamiento, procesamiento y transmisión de información: calculadoras, computadoras, software, internet, etc.; pues esos procesos educativos no están exentos de dificultades entre las cuales se encuentran algunas asociadas a su naturaleza representacional y social (Hitt, 2003).

Objetivo

- Que la materialización de una propuesta didáctica permita el acercamiento de manera natural al concepto de correlación lineal bivariada.
- Diseñar una serie de applet apropiados para las actividades didácticas.

Marco teórico metodológico

Arcavi y Hadas (2000) señalan que el uso de la herramienta tecnológica apropiada debe de proporcionar cinco características que son: la visualización, la experimentación, la sorpresa, la retro alimentación y la necesidad de probar y demostrar; características que no todos los software los cumplen, esto debido a que, los propósitos con el cual fueron diseñados respondía a una necesidad; GeoGebra por su parte es un software dinámico que ha sido diseñado para la enseñanza de la Geometría y Algebra inicialmente, sin embargo las necesidades en ambientes escolares abarcan más allá que sólo esas dos ramas de la matemática, en su versión más reciente se han incluido elementos de cálculo simbólico y estadística.

Una de las características principales por el cual se optó por el uso del GeoGebra en el diseño de la actividad fue que, proporciona múltiples representaciones en tiempo real posibilitando así una visualización y reflexión sobre el comportamiento de los datos. Para Duval (1999) un componente esencial sobre el aprendizaje de las matemáticas, es la coordinación de las diferentes representaciones de una misma idea o concepto. Tal coordinación implica que el alumno sea capaz de realizar cambios de representaciones y traslaciones entre las representaciones.

Por otra parte un software no sólo puede ser elegido por sus características tecnológicas, sino por el propósito que llevó a su diseño, un ejemplo de ello es lo señalado por Ben-Zvi; citado por Hitt y Cortés (2009) el cual menciona que tales herramientas tecnológicas, que son desarrolladas para el aprendizaje de la estadística, han sido diseñadas para apoyar:

- La construcción activa del conocimiento de los estudiantes, por "hacer" y "ver" las estadísticas.
- Oportunidades para que los estudiantes reflexionen sobre los fenómenos observados.
- El desarrollo de las capacidades metacognitivas de los estudiantes, es decir, el conocimiento de su propio pensamiento, procesos, la autorregulación y el control.
- La renovación de la enseñanza y el currículo estadístico sobre la base de fuertes asociaciones entre el contenido, pedagogía y tecnología.

Bajo consideraciones como las anteriores se diseñó una propuesta didáctica compuesta de cuatro actividades organizadas siguiendo la metodología ACODESA, siglas en francés de "*Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Auto-reflexión*" (Hitt y Cortés, 2009), con adaptaciones menores, y en las cuales se incorpora el uso de la tecnología GeoGebra a través de varios applets diseñados ex profeso.

La metodología ACODESA costa de cinco fases, las cuales no son dictaminadas por el profesor respecto a lo sucedido en cada una de estas, únicamente al final de la etapa de cierre (institucionalización), las etapas promueven un desarrollo cognitivo del alumno a través de una serie de interrogantes en torno a la situación problema que se plantea en cada actividad,

1. **Trabajo individual** (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema).
2. **Trabajo en equipo sobre una misma situación**. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales).
3. **Debate** (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones funcionales).
4. **Regreso sobre la situación** (trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión).
5. **Institucionalización**. Proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales.

Exposición de la propuesta y sus resultados

Las actividades fueron exploradas con estudiantes y únicamente se presentarán las consideraciones que se tuvieron, se muestra sólo la primera de cuatro actividades diseñadas. Tal actividad aborda particularmente el concepto de regresión lineal bivariada; se hará un breve reporte sobre el análisis de las interacciones que surgieron en su implementación.

Actividad sobre "El camino y las localidades".

La actividad aborda el concepto de recta de regresión y sus conceptos implicados, debido a que consideramos necesario que el alumno aborde tal tema como preámbulo a la correlación lineal.

Sólo se mostrarán aquellas preguntas que consideramos clave para abordar la actividad sobre la correlación lineal.

Problemática:

"En un municipio existen doce localidades ubicadas como se muestra en la Figura 1 (representadas por puntos) y se planea comunicarlas a través de un camino que las una a dos carreteras federales que las delimitan (las rectas punteadas en la imagen). Si bien se ha decidido que el camino siga la dirección ***Suroeste (SO)*** *a* ***Noreste (NE)*** *por la distribución de las localidades, los diferentes comisarios plantean que el camino pase por su comunidad, pero esto no es del todo posible, pues también habría que optimizar costos y bajo estas condiciones aún no han podido llegar a un acuerdo"*

1. Tratando de ayudar a estas comunidades, ¿qué les propondrías como un camino más adecuado? (Bosquéjalo en la *Figura 1* y llámalo C1)

En la *Figura 1* se pueden observar los distintos caminos que se realizaron en forma individual por un miembro del equipo, en cada uno de los bosquejos se consideró la dirección del camino, otro de los criterios que se pueden observar desde el camino C1 hasta C3 es que se han "dividido" las doce localidades (puntos) de manera equitativa, tal acción parece ser realizada por el concepto de proporcionalidad que el estudiante tiene.

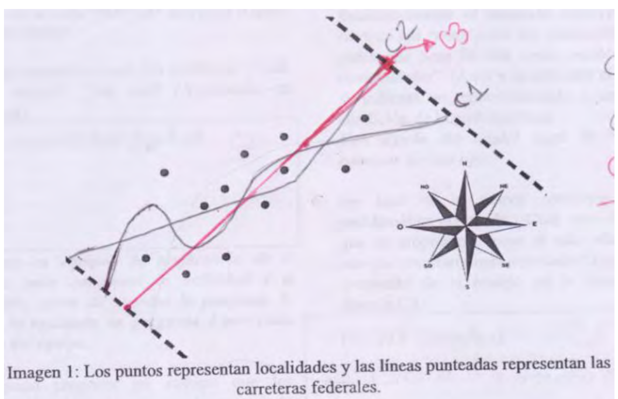


Figura 1. Las doce poblaciones y algunos camino trazados.

3. Revisando el camino bosquejado en la *Figura 1* y considerando detenidamente la problemática planteada ¿Crees que exista otro camino que sea más adecuado?, de ser así trázalo en la *Figura 1* y llámalo C2, ¿Por qué este es más adecuado que el primero?

Debido a que se dieron interacciones por parte de los alumnos con sus pares en la parte de trabajo individual, consideraron un análisis y búsqueda de un mejor camino; en la pregunta tres se consideró un nuevo camino al que llamaron C2 (*Figura 1*), tal camino ya no fue de una línea más curva, sino al contrario, este fue realizado en dos segmentos y considerando la dirección del camino y, que este pasara por la "mitad de estos", en donde quedan seis puntos en la parte superior y seis en la parte inferior.

Es notorio en este punto de la actividad que, el primer bosquejo que se realizó ha considerado distintos puntos de inflexión en la curva, sin embargo para este nuevo acercamiento se considera que un mejor camino es aquel que tiene menos puntos y, por consiguiente la longitud de este es mucho menor que el primer acercamiento, así lo comentan algunos alumnos (*Figura 2*).

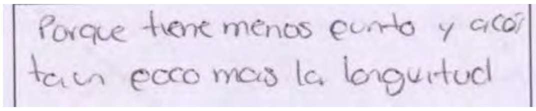


Figura 2. Comentario sobre el problema

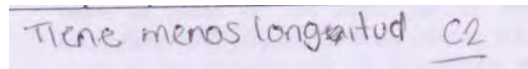


Figura 3. Comentario sobre el problema

4. Bajo las consideraciones del problema ¿Cuál resulta mejor?, ¿Por qué? (Argumenta tu respuesta).

La consideración que se tomó para determinar que C2 es un mejor camino, fue la longitud (*Figura 3*), debido al uso del applet se pudo observar las diferentes longitudes entre los caminos propuestos, concluyendo así que la longitud es parte importante para decidir qué camino es el mejor o más apropiado.

Durante la manipulación del applet SC_1.ggb (*Figura 4*) se probaron diferentes caminos, algunos con longitudes un poco mayor o menor, inclusive añadiendo diferentes cantidades de puntos para formar los segmentos que conforman al camino. La representación de C1 fue realizado mediante el total de puntos que el applet permite agregar, realizando así una representación similar a C1 el cual fue un camino curvo, en donde se observó la longitud total de este. Para la segunda representación, C2, solo fueron considerados dos segmentos y la longitud total fue anotada.

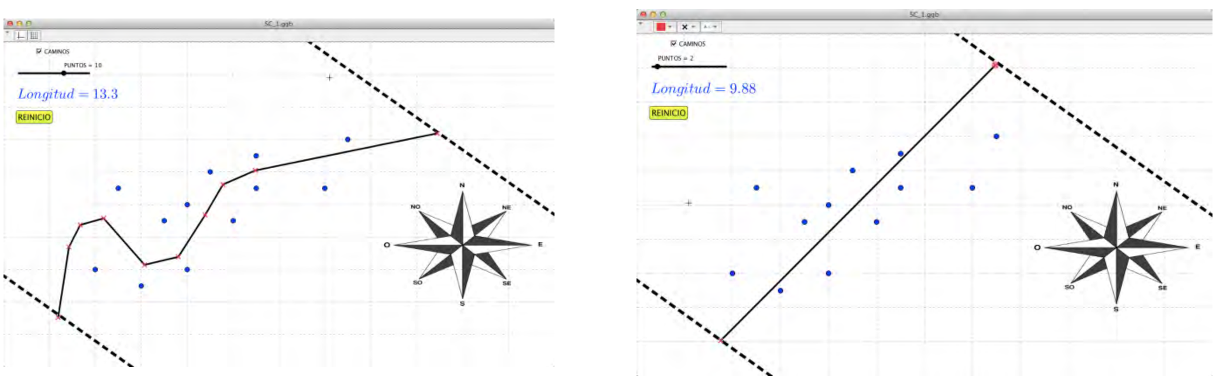


Figura 4. Pantallas del ambiente gráfico para introducir al alumno en el concepto de regresión lineal

5. En equipo proponer un camino que les parezca más adecuado a las condiciones de la situación, y bajo las restricciones del applet, llamarlo C3 y agrégalo a la *Figura 1* ¿En qué es mejor este camino a los demás propuestos?

En equipo y en base a las consideraciones que se realizaron individualmente los integrantes del equipo presentaron sus diferentes propuestas (*Figura 5*) y, mediante el uso del applet se acordó en realizar un camino recto, el cual tiene una longitud menor a las propuestas en forma individual, otro de los criterios que consideraron al interior del equipo fue la cercanía del camino C3 (*Figura 2*) a los puntos y, la distancia de estos a la recta.

Para este punto se realizaron las anotaciones de las longitudes que tenían los caminos C1, C2 y C3 realizando de esta manera una comparación entre las longitudes arrojadas por el applet. (*Figura 6*)

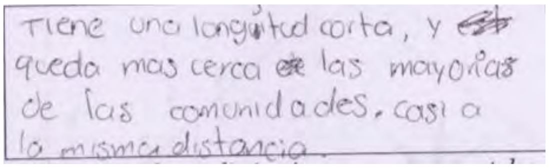


Figura 5. Evidencia textual

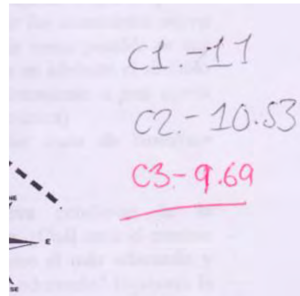


Figura 6. Evidencia descriptiva

La preocupación que presentaron los estudiantes al analizar cuál podría ser el mejor camino a considerarse, fueron los costos que estos implican en la realización de un camino, desde el tiempo de construcción hasta el tiempo que podría llevar la construcción de este. Dejando en segundo plano si el camino debería de pasar o no por las localidades, esto debido a que desde un inicio han considerado que los costos de producción son una parte importante en la realización de cualquier proyecto, y más hablando de una obra pública.

7. Si es posible expresar analíticamente el camino propuesto, ¿Cómo y de qué tipo sería? Intenta justificar la propuesta (deja asentado en la *Imagen 2* los elementos auxiliares que has necesitado).

Para esta parte de la actividad los alumnos tuvieron dudas respecto a “expresión analítica”, sin embargo, después de un análisis y evocar a los conocimientos previos sobre los cursos de matemáticas que han tenido en su formación, decidieron que la expresión que podría representar el camino es $f(x)=x$ (*Figura 7*). No fue posible que realizarán una expresión analítica con todas sus integrantes, debido a que no conocían los ejes, ni las escalas de estos; no obstante, en la discusión surgió que no era posible en ese momento considerar ejes, debido a que tenían dudas sobre donde localizar el punto de origen ($0,0$).

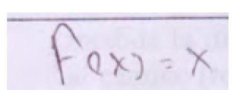


Figura 7. Definición de la función

8. ¿Cuáles son las distancias del Norte y las del Sur?, acuerda las medidas con tu equipo y anótalas en azul y rojo respectivamente en la *Tabla 1.*

Las mediciones que el equipo consensó fueron que estas deberían de ser en forma vertical, debido a que se les posibilitaba de una mejor forma la toma de medidas (*Figura 8*). Uno de los elementos que se puede observar es que los ejes requirieron de una etiqueta que los identificara, en donde se esperaría que consideraran etiquetas como Norte y Oeste, sin embargo, optaron por unas etiquetas de manera más tradicional como son x e y.

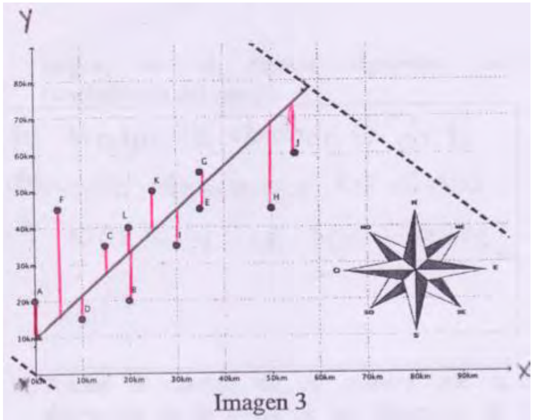


Figura 8. Recta de ajuste

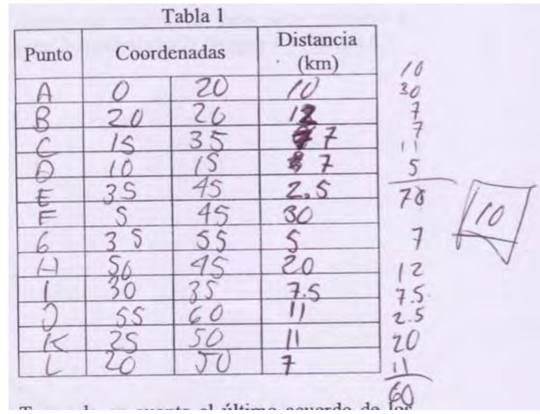


Tabla 1

Punto	Coordenadas		Distancia (km)
A	0	20	10
B	20	26	12
C	15	35	7
D	10	15	7
E	35	45	2.5
F	5	45	30
G	35	55	5
H	50	45	20
I	30	35	7.5
J	55	60	11
K	25	50	11
L	20	50	7

Figura 9. Tabla numérica

Debido a que los puntos en las gráficas estaban en múltiplos de 10 ó 5 km, se les facilitó el poder localizar las coordenadas de los puntos, sin embargo para las longitudes de los segmentos entre las localidades y el camino no fue así, es aquí en donde los integrantes del equipo realizaron mediciones aproximadas (*Figura 9*). Debido a la nueva condición en la actividad la cual consiste en que el camino a realizar, deberá de ser un camino justo; los integrantes del equipo realizaron dos sumas diferentes para corroborar las medidas que habían obtenido, una suma representando a la parte norte y la otra a la parte sur, encontraron que aún necesitaba ajustes la propuesta del equipo debido a que existía una diferencia de 10 km y lo consideraron como un margen amplio de error entre ambas sumas.

9. Tomando en cuenta el último acuerdo de los comisarios, ¿La propuesta del equipo requiere ajustes para que la diferencia mencionada sea cero?, ¿Por qué? En caso de requerir ajustes ¿Cuáles serían? (Argumenta tu respuesta).

Los ajustes que decidió el equipo efectuar después del análisis numérico que se realizó fue que, la "diagonal" (recta) deberían de hacerla "hacia abajo" (rotarla), esto se puede observar a través de los diagramas que realizaron en la respuesta (*Figura 10*). Dejan de lado un análisis gráfico, esto quiere decir que no volvieron a intentar realizar un nuevo ajuste en el applet, aun cuando tenían la posibilidad de utilizarlo solo se basaron en el análisis numérico previo para responder a la pregunta planteada, de esta forma no responden de manera escrita en esta pregunta el por qué son necesario los ajustes, sin embargo lo consideran de manera implícita al realizar las sumas comparativas.

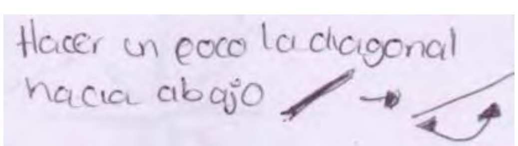
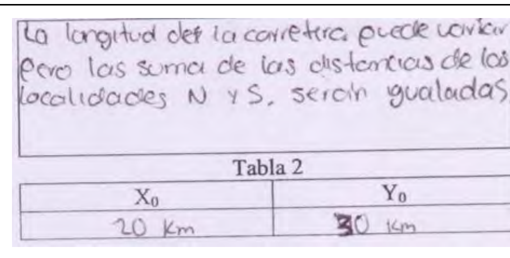


Figura 10. Sugerencia para el ajuste



La longitud de la carretera puede variar pero las suma de las distancias de los localidades N y S, serán igualadas.

Tabla 2

X_0	Y_0
20 km	30 km

Figura 11. Descripción del ajuste

13. Recurriendo de nueva cuenta al applet, activa la casilla "*Camino Alternativo*" e intenta probar tu conjetura del punto anterior. ¿A qué conclusión se puede llegar con estas nuevas exploraciones? ¿Cuál(es) es(son) la(s) propiedad(es) clave(s) para tal conclusión? ¿Existe algún punto en especial?, de ser así anótalo en la *Tabla 2*.

Tras las transformaciones que realizaron en el applet observaron que la recta (camino) podía variar su longitud, sin embargo la suma de las longitudes de los puntos (localidades) a la recta se mantenía muy próxima (*Figura 11*). Sin embargo, no optaron por realizar un camino de forma horizontal o vertical, esto debido a la condición inicial del problema, pues debería de tener una dirección Suroeste a Noreste. No obstante, se realizaron diferentes transformaciones con la dirección Suroeste – Noreste, en donde pusieron observar que existía un punto con coordenadas (20, 30) aproximadamente, es aquí donde este punto permitía que la mayoría de las rectas tuvieran una diferencia muy cercana a cero.

Después de realizar un análisis sobre el debate formado por los representantes de los equipos, en donde el profesor guío el debate y surgieron ideas como: que una diferencia entre la suma de la localidades implicaba una resta, que esto era como una balanza debido a que se quería que la suma fuera igual en ambas partes (Norte y Sur) y, que si se restaban ambas partes una de ellas debería de tener valores negativos; sin embargo se concluyó que no podía haber longitudes negativas e idearon que una multiplicación por -1 permitía a la parte Sur obtener valores negativos, sin embargo al considerarlo como una balanza era necesario multiplicar por -1 la parte superior (Norte), concluyendo así que el criterio de multiplicar por -1 no aplica en esta situación.

Otro de los criterios que surgieron durante el debate fue que elevar un número al cuadrado siempre arroja un valor positivo, a través de este criterio se consensó que elevar al cuadrado los valores negativos ayudarían a equilibrar la "balanza" de la suma de las longitudes. Y además que geométricamente esto representaba cuadrados, los cuales estaban formados por las longitudes de los segmentos construidos desde el punto a la recta.

Sin embargo, no consideraron que las rectas fueran perpendiculares a los ejes (*Figura 12*), considerando sólo aquellos arreglos en los que se empleaban direcciones Suroeste – Noreste

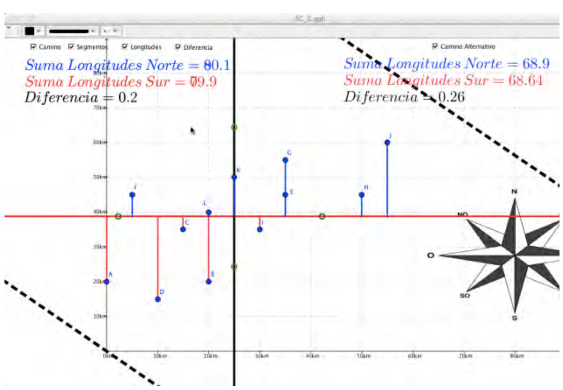


Figura 12. Puntos de dispersión

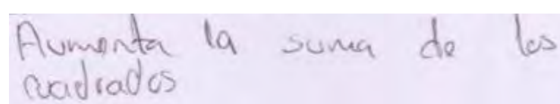


Figura 13. Conclusión del alumno

15. ¿Qué pasa con la Suma de Cuadrados cuando la recta se aleja de la masa de puntos?

A través de las transformaciones de la recta realizadas en el applet su pudo observar que la suma de cuadrados aumentaba, sin embargo, si la recta no estaba posicionada en el punto de intersección de las rectas x = $\bar{x}$ e y = $\bar{y}$ la variación en la suma de mínimos cuadrados aumentaba cuando la recta era rotada (*Figura 13*) y, disminuía cuando esta se encontraba aproximadamente en la posición de la recta de mejor ajuste.

De forma similar en etapas anteriores la manipulación del applet (*Figura 14*) fue centrada solo en una pequeña área, debido a que persistía la consideración del criterio sobre la dirección del camino.

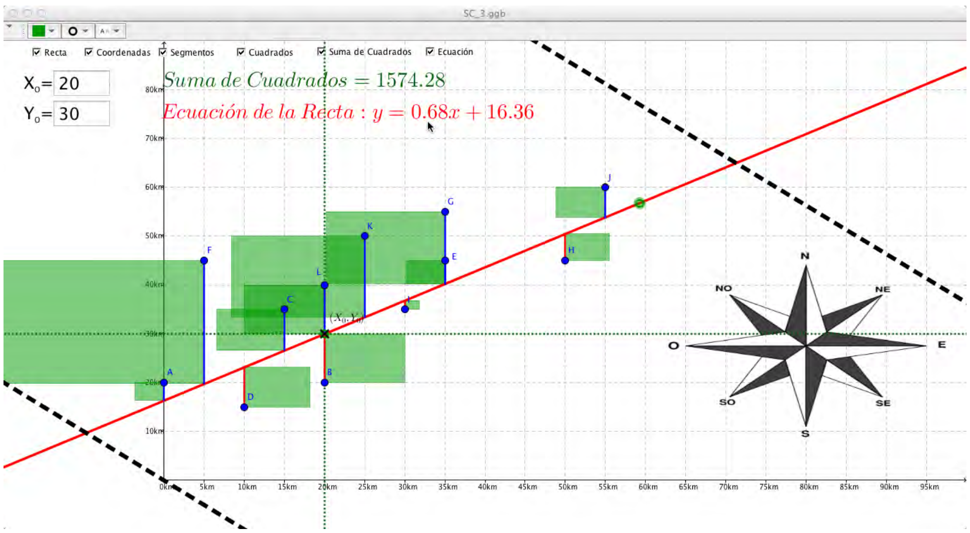


Figura 14. Curva de ajuste

Conclusiones

- Se encuentra que los alumnos tienen dificultades para determinar funciones básicas y describir una función lineal.
- Se encuentra que con la correlación negativa tienen más problemas para identificarla, a no ser que esta sea perfecta.
- Aun haciendo uso de elementos que tienen a su disposición, como sitios de internet o apuntes previos de clase, los alumnos tienen dificultades para caracterizar distancias de un punto a la recta y cómo simbolizar una función de la representación gráfica.
- La herramienta tecnológica (applets en GeoGebra) permite realizar un análisis más profundo sobre aquellos elementos a trabajar, esto debido a la interactividad que el programa proporciona
- La tecnología proporciona una visión más amplia sobre las situaciones estadísticas, debido a que la visualización de múltiples registros.

Referencias

Arcavi, A., y Hadas, N. (2000). *Computer mediated learning*: An example of an approach. *international Journal of computers for Mathematical learning*, *5*(1), 25-45.

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in* Mathematical *Thinking*. *Basic Issues for Learning*.

Hitt, F. (2003). *Una Reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en ambientes con Tecnología.* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X(2),213-223.

Hitt, F. y Cortés, J. (2009). *Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelación matemática y uso de calculadora con posibilidades* gráficas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet,* Vol. 10, n°1, pp. 1-30. Disponible en: www.cidse.itcr.ac.cr/revistamete.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

ALTERNATIVA DIDÁCTICA PARA EL TEMA DE CIRCUNFERENCIA

Ricardo Ulloa Azpeitia, Lourdes Gándara Cantú

Universidad de Guadalajara, México

ulloa_azpeitia@yahoo.com.mx,lourdesg7@hotmail.com

Para citar este artículo:

Ulloa, r., gándara, l. (2017). Alternativa didáctica para el tema de circunferencia. *Revista electrónica AMIUTEM*. Vol. V, no. 1. Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

ALTERNATIVA DIDÁCTICA PARA EL TEMA DE CIRCUNFERENCIA

Ricardo Ulloa Azpeitia, Lourdes Gándara Cantú

Universidad de Guadalajara, México

ulloa_azpeitia@yahoo.com.mx,lourdesg7@hotmail.com

Palabras clave: Objeto para Aprendizaje, Evaluación formativa, GeoGebra.

Resumen

En este trabajo se presentan los avances obtenidos en la realización del proyecto de tesis, investigación de desarrollo en la que se diseñó un Objeto Para Aprendizaje (OPA), que es un medio para apoyar el aprendizaje, esto es, que ayuda a aprender. Una vez que se contó con el material, se buscó someterlo a diversas revisiones que llevaran a la mejora del mismo. Para el proceso de mejora de la alternativa, se planearon etapas que incluyeron validación de expertos, entrevista clínica, aplicación en grupo pequeño, después en grupo grande. El proceso implicó la construcción de cinco versiones del OPA.

Introducción

Los problemas en el aprendizaje de las matemáticas son evidentes, esto es claro al observar cómo tanto a nivel local como internacional, se buscan diversas opciones que permitan superar dichas dificultades. En la búsqueda de estas alternativas, uno de los aspectos sobre los que se busca incidir es el uso del lenguaje especializado de las matemáticas, puesto que en diversos estudios regionales (Martínez, 2005; Lomelí, 2005; Figueroa, 2005; Ulloa, Nesterova y Pantoja, 2009; Torfer y Ulloa, 2009; Tavares y Ulloa, 2010), citados en Ulloa, Nesterova y Yakhno (2012), se ha observado que el dominio del lenguaje tiene una influencia preponderante en el nivel de comprensión que tienen los alumnos en cursos de matemáticas.

Diversos trabajos han buscado incidir en este problema mediante el uso de tecnología (Noriega y Rosillo, 2011; Ulloa y Ulloa, 2013; Ulloa, Nesterova y Yakhno, 2012). Además, actualmente se encuentran disponibles en internet diversos repositorios en los que se encuentra una amplia variedad de materiales para apoyar el aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo: Aproa: Aprendiendo con Repositorio de Objetos de Aprendizaje. Página: http://www.aproa.cl, ARIADNE: A European Association open to the World, for Knowledge Sharing and Reuse. Página: http://www.ariadne-eu.org, MERLOT: Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching. Página: http://www.merlot.org, entre otros.

Al considerar tanto los problemas de lenguaje como el uso de la tecnología, se diseñó y elaboró una alternativa didáctica para ayudar al aprendizaje del tema de Circunferencia a alumnos tanto de preparatoria como de licenciatura que requieran dichos conocimientos.

La alternativa didáctica diseñada es un OPA, este se define como "una entidad digital construida con directrices de diseño instruccional sistemático, que puede ser usada, reutilizada o referenciada durante el aprendizaje apoyado en la computadora con el objetivo de generar conocimientos, habilidades y actitudes en función de las necesidades del alumno" (Ulloa, Nesterova, Pantoja, 2011)

Para su creación, no es suficiente saber utilizar herramientas computacionales o contar con el conocimiento matemático, se requiere analizar diversos aspectos, como el contenido, el diseño, el lenguaje, el apoyo audiovisual, los ejercicios, etc. Al contar con diversos detalles, que pueden escapar de la vista del profesor diseñador, parece pertinente realizar un proceso que permita mejorar la calidad del OPA.

Es por ello que no se planeó experimentar la propuesta, sino evaluarla formativamente, según una adaptación realizada al modelo de Dick, Carey y Carey (2009), y rediseñar el OPA para obtener un producto de calidad, potencialmente didáctico. Durante el proceso se evaluaron cuatro versiones de la propuesta, que fueron analizadas y generaron una nueva versión.

Objetivo

Diseñar, construir, evaluar formativamente y rediseñar un OPA para obtener un producto de calidad que facilite el aprendizaje del tema de Circunferencia.

Marco teórico

Conceptualización de OPA

Los OPA's son bloques de instrucción flexibles, que pueden ser reutilizados en múltiples contextos, por lo que se pueden usar tal cual o utilizar alguna de sus secciones, además, su uso no depende del docente, puede ser utilizado de forma independiente por el alumno o con la guía de su profesor. Las principales características de los OPA's son la interoperabilidad, que pueden ser distribuibles vía internet, la durabilidad, flexibilidad, versatilidad, funcionalidad, la independencia y autonomía de los objetos respecto a los sistemas desde los que fueron creados y la generatividad, pueden existir OPA's derivados de uno, ser modificados o actualizados, lo que ofrece posibilidades de colaboración por la forma en que son construidos.

Perspectivas Teóricas

El desarrollo del estudio, se sustenta en el Enfoque Ontosemiótico de investigación en didáctica de la matemática (EOS).

El EOS se plantea desde sus inicios la integración, de marcos teóricos mediante la reflexión, la investigación y la comparación, con base en elementos de distintos enfoques elabora nuevos, más eficaces, enriqueciendo algunas nociones ya elaboradas, buscando tener una consistencia global, para investigar y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino 2012).

Metodología

Se inició con la escritura del proyecto, con la fundamentación correspondiente. Posteriormente se elaboraron el OPA y los instrumentos que, validados por colegas, sirvieron para recabar la información pertinente. El proceso se indica en las siguientes fases:

Fase 1: Diseño y elaboración del OPA

Fase 2: Evaluación por colegas. Procesamiento de la información y reestructuración del OPA

Fase 3: Evaluación clínica. Procesamiento de la información y reestructuración del OPA

Fase 4: Evaluación con grupo pequeño. Procesamiento de la información y reestructuración del OPA

Fase 5: Evaluación con grupo grande. Procesamiento de la información y reestructuración del OPA

Fase 6: Elaboración de conclusiones y escritura del reporte

Con la información obtenida y procesada, se incorporaron al OPA las modificaciones pertinentes.

Exposición de la propuesta

Se presentan algunas imágenes representativas de la propuesta

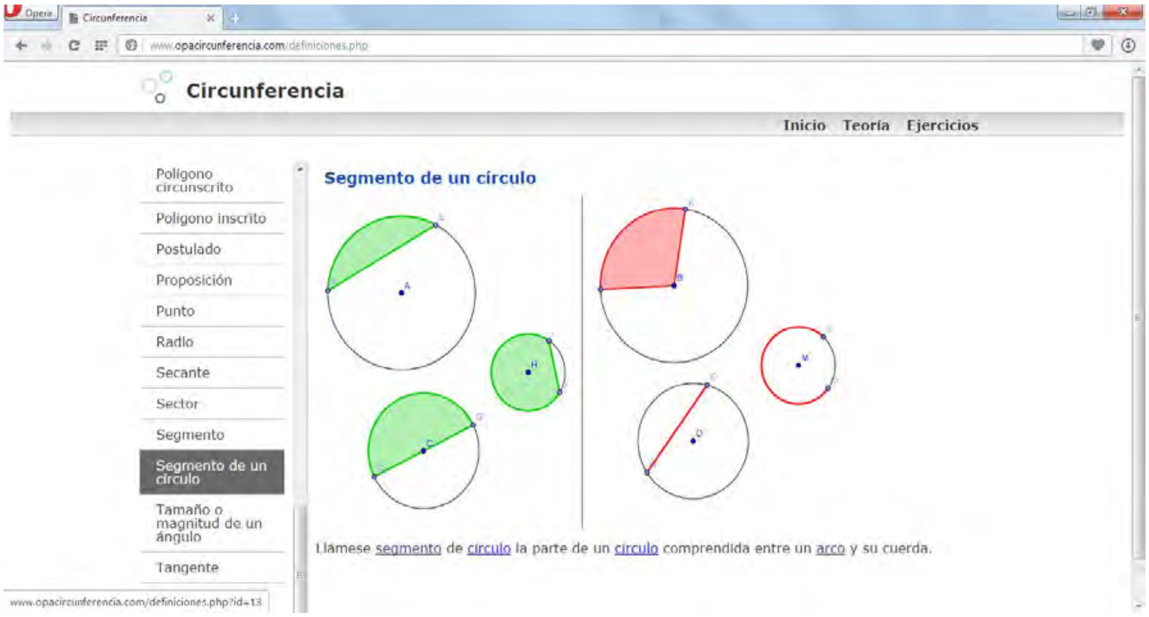


Figura 1. Sección de Definiciones, Segmento de un círculo. Fuente: http://www.opacircunferencia.com/definiciones.php?id=13

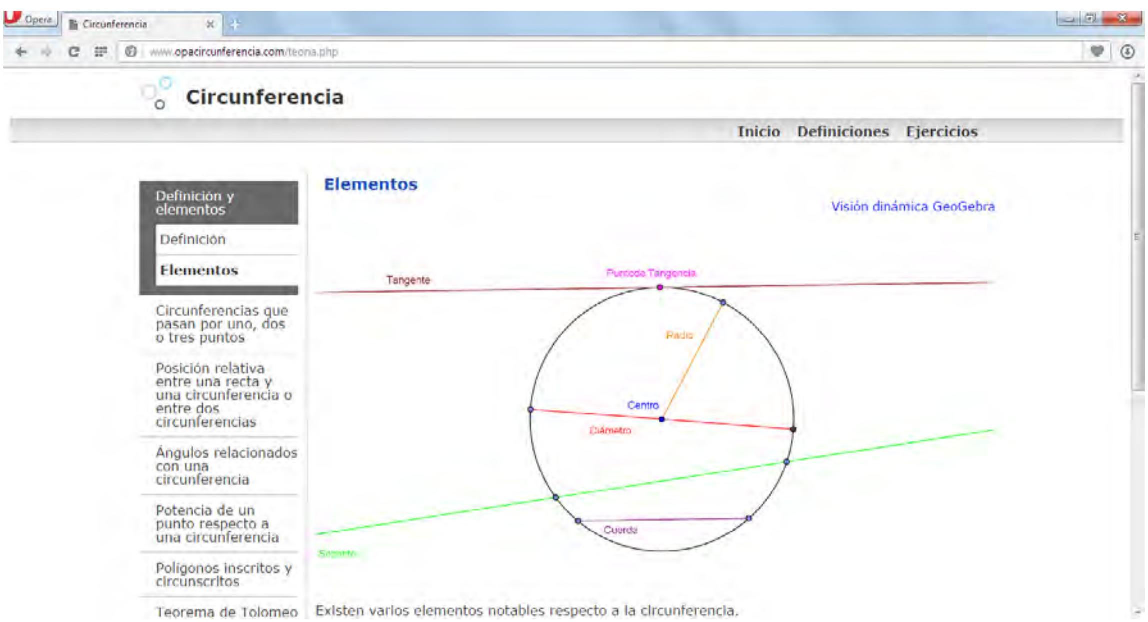


Figura 2. Sección de Teoría, Elementos de la circunferencia. Fuente: http://www.opacircunferencia.com/teoria.php?tema=1&id=5

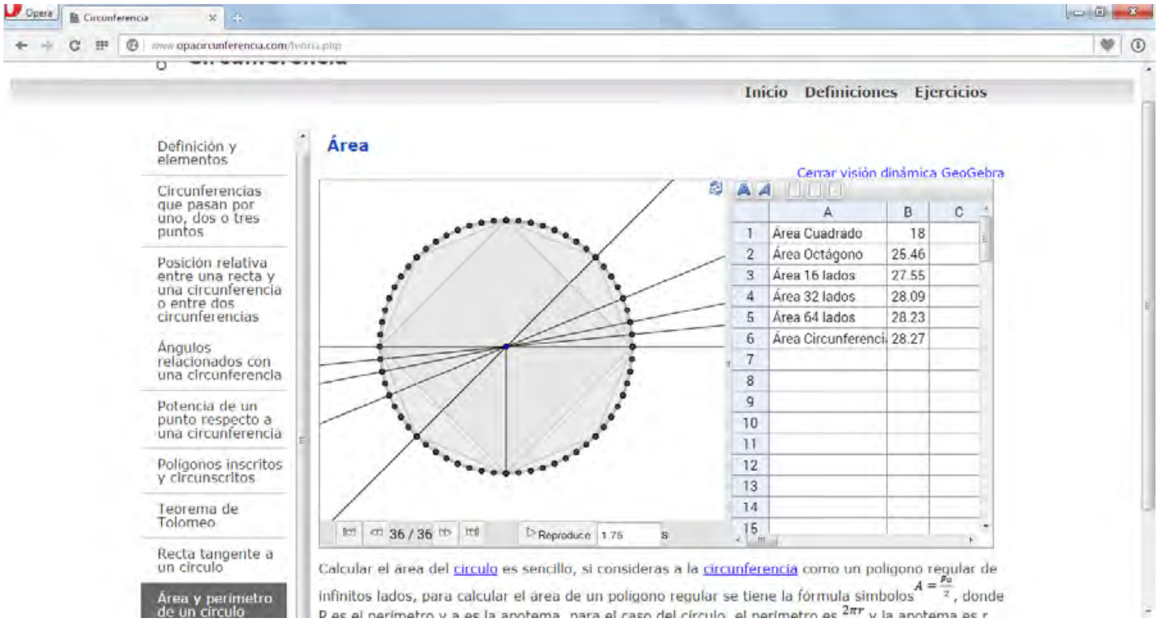


Figura 3. Sección de Teoría, Área de un círculo. Fuente: http://www.opacircunferencia.com/teoria.php?tema=9&id=15

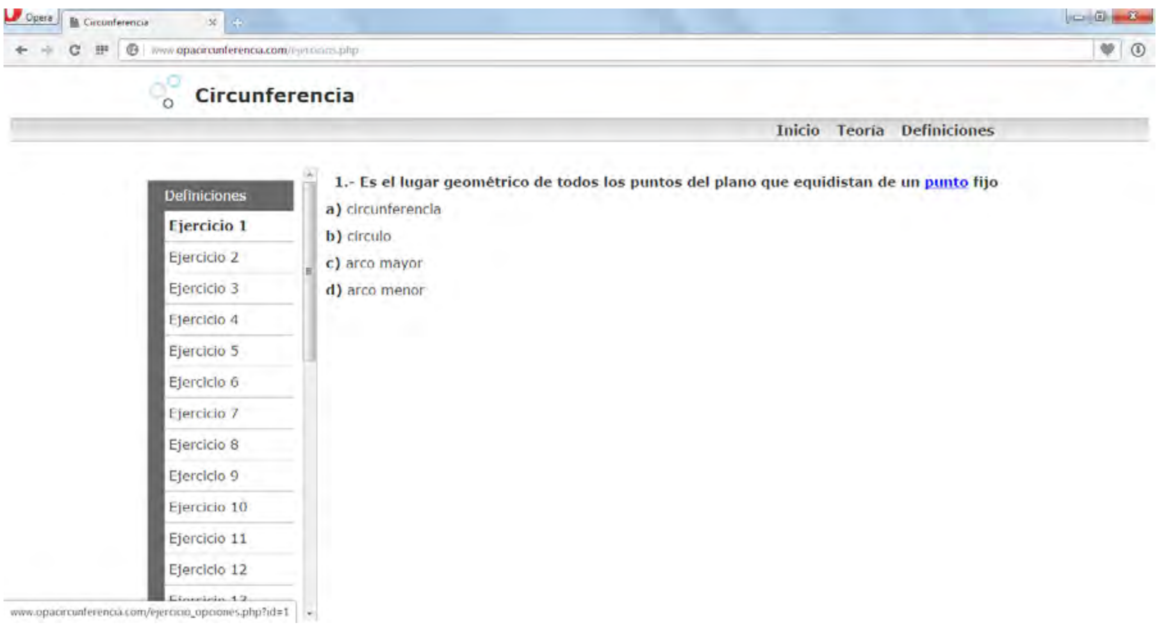


Figura 4. Sección de Ejercicios, Definiciones. Fuente: http://www.opacircunferencia.com/ejercicios.php

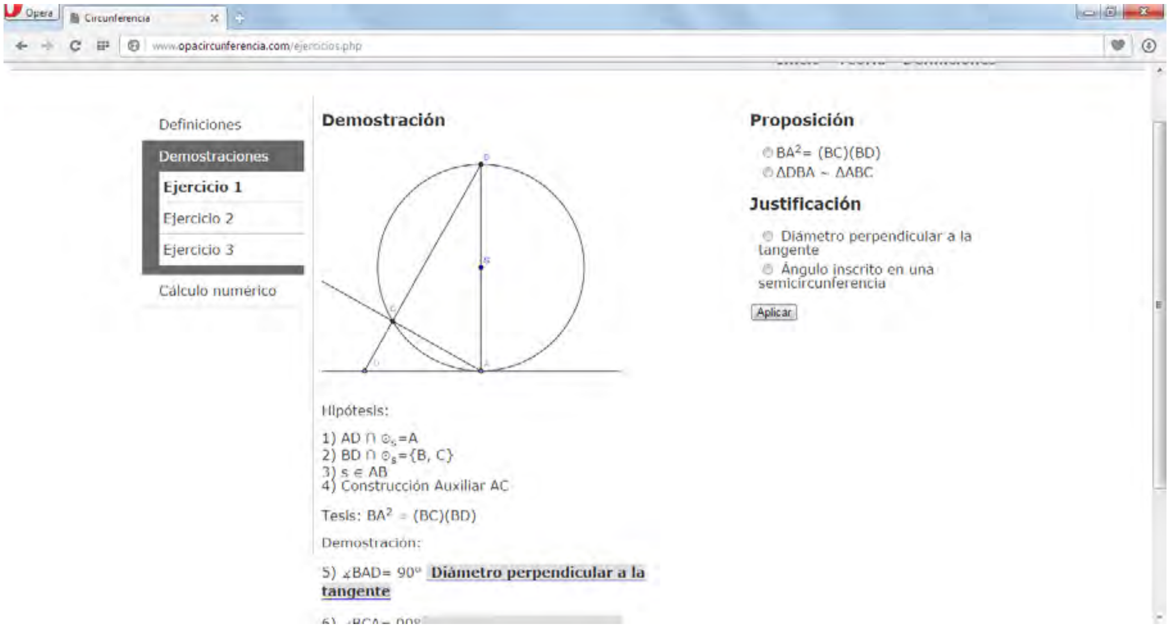


Figura 5. Sección de Ejercicios, Demostraciones. Fuente: http://www.opacircunferencia.com/ejercicios.php

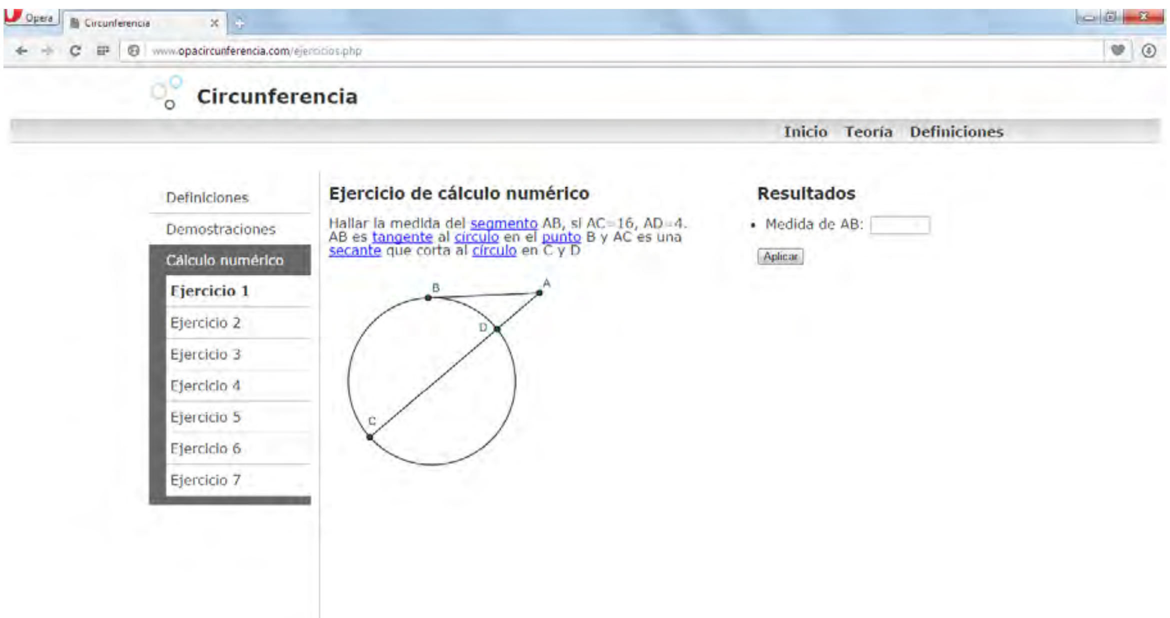


Figura 6. Sección de Ejercicios, Cálculo numérico. Fuente: http://www.opacircunferencia.com/ejercicios.php

Resultados

Se realizó la evaluación en cada etapa y se realizaron los cambios que se consideraron pertinentes, se obtuvo la quinta y final versión, aunque esta no fue sometida a ninguna prueba adicional para verificar que sea un producto de buena calidad y que motive al alumno, se considera con base en los resultados en cada etapa que la calidad del OPA fue en aumento y generó cada vez una mayor motivación.

Conclusiones

La adaptación del proceso de evaluación formativa utilizada en el desarrollo de un material didáctico ayuda a generar un material de buena calidad y que tiene mayores posibilidades de ser utilizado por los alumnos.

Referencias

Dick W., Carey, L. y Carey, J. (2009). *The systematic design of instruction* (7th ed.). Upper Saddle River, N.J.: Pearson.

Noriega, M. y Rosillo, L. (2011). Traducción del lenguaje verbal al lenguaje gráfico y simbólico con ayuda de Geogebra. En L. Guerrero (2011). *Investigaciones y propuestas 2011*. Colección Uso de tecnología en educación matemática. Morelia: AMIUTEM.

Ulloa, R., Nesterova, E. y Pantoja, R. Objetos para aprendizaje (OPA`s): un marco teórico. En L. Guerrero (2011). *Investigaciones y propuestas 2011*. Colección Uso de tecnología en educación matemática. Morelia: AMIUTEM.

Ulloa, R., Nesterova, E. y Yakhno A. (2012). Hipertextos como Alternativa en Problemas de Lectomatemáticas. En Cortés, J. y Ulloa, R. (Eds.), *Uso de tecnología en educación matemática*. Investigaciones y propuestas 2012. Guadalajara: AMIUTEM.

Ulloa, R. y Ulloa, N. (2013). *Elaboración de texto dinámico con estrategias de lengua extranjera para el aprendizaje del concepto de derivada.* En memorias del Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas 2013 “Dr. Edgar Gilberto Añorve Solano” y 10º SEMINARIO: Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas con Tecnología.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

MODELOS BIOLÓGICOS CON GEOGEBRA

[1]José Trinidad Ulloa Ibarra, [2]Jaime L. Arrieta Vera, [1]Gessure Abisaí Espino Flores, [1]María Inés Ortega Arcega

[1]Universidad Autónoma de Nayarit, [2]Universidad Autónoma de Guerrero

jtulloa@gmail.com, jaime.arrieta@gmail.com, abisai_8282@hotmail.com, maijua9@hotmail.com

Para citar este artículo:

Ulloa, J. T., Arrieta, J., Espino, G. A., Ortega, M. I. (2017). Modelos biológicos con GeoGebra. *Revista electrónica AMIUTEM*. Vol. V, no. 1. Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

MODELOS BIOLÓGICOS CON GEOGEBRA

[1]José Trinidad Ulloa Ibarra, [2]Jaime L. Arrieta Vera, [1]Gessure Abisaí Espino Flores, [1]María Inés Ortega Arcega

[1]Universidad Autónoma de Nayarit, [2]Universidad Autónoma de Guerrero

jtulloa@gmail.com, jaime.arrieta@gmail.com, abisai_8282@hotmail.com, maijua9@hotmail.com

Palabras clave: Modelos, Crecimiento, GeoGebra, Biología.

Resumen

En este trabajo derivado del trabajo "Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de la pesca, un estudio socioepistemológico" se describen las ventajas del uso de software para la modelación de fenómenos biológicos en ambientes académicos en los que los estudiantes no cuentan con los fundamentos teórico – matemáticos para poder realizar la citada actividad que es fundamental en su desempeño posterior como profesionistas.

Introducción

El proyecto está inserto en la línea de investigación que versa sobre las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento (Arrieta 2003, Cordero 2001, 2002) y es parte del trabajo de investigación "*Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de profesionales de la pesca, un estudio socioepistemológico*", y se viene realizando en sus diferentes etapas en la Universidad Autónoma de Nayarit en el área biológico – agropecuaria y pesquera. En esta línea de investigación sostenemos que toda sociedad necesita que el conocimiento que se adquiere en la escuela sea funcional, es decir, que se integre y se resignifique permanentemente en la vida (fuera de la escuela) para transformarla. El anclaje en el dominio matemático que se observa en las explicaciones y propuestas didácticas, que obliga a explicar la matemática desde la matemática misma, no toma en cuenta los otros dominios científicos ni, sobre todo, las prácticas de referencia que permitieron el surgimiento del conocimiento matemático (Cantoral y Farfán, 2003). Es necesario integrar en las prácticas del estudio de las matemáticas de las escuelas aquellas circunstancias que propiciaron (en términos epistemológicos) su aparición, para que su integración en la vida de los estudiantes sea funcional (Cordero, 2004). La tesis central consiste en que los actores al ejercer prácticas sociales construyen el conocimiento como herramientas.

A partir de 2003 la Universidad Autónoma de Nayarit inició la reforma académica, la cual a más de diez años se considera inacabada y está en cambio frecuentes en los que sigue permaneciendo el enfoque centrado en el estudiante la las competencias. En nuestro país, el tema de las competencias es relativamente reciente. En otras latitudes, el término tiene antecedentes de varias décadas, principalmente en países como Inglaterra, Estados Unidos, Alemania y Australia. El concepto de competencia otorga un significado de unidad e implica que los elementos del conocimiento tienen sentido sólo en función del conjunto. En efecto, aunque se pueden fragmentar sus componentes, éstos por separado no constituyen la competencia: ser competente implica el dominio de la totalidad de elementos y no sólo de alguna(s) de las partes.

El modelo educativo por competencias profesionales integradas para la educación superior es una opción que busca generar procesos formativos de mayor calidad, pero sin perder de vista las necesidades de la sociedad, de la profesión, del desarrollo disciplinar y del trabajo académico. Asumir esta responsabilidad implica que la institución educativa promueva de manera congruente acciones en los ámbitos pedagógico y didáctico que se traduzcan en reales modificaciones de las prácticas docentes.

Las prácticas sociales; tienen hoy en día un papel muy importante en el aprendizaje de un determinado contenido, ya que también generan un conocimiento matemático mediante la interacción profesor-estudiante con ciertos fenómenos. Cabe señalar que en el presente la socioepistemología ha incidido cada vez más en los currículos, lo cual refleja que las prácticas sociales para un cierto sector educativo son tomadas más en cuenta para la enseñanza de un contenido (Cantoral, Ferrari 2004). Esto debe ser tomado como base en el área biológico – agropecuaria - pesquera de la Universidad Autónoma de Nayarit. Las acciones o prácticas de campo desarrolladas en dicha área; tales como los análisis morfométricos de diferentes especies, nos puede llevar a la obtención de modelos matemáticos, los cuales de cierta forma ayudarían tanto al profesor como a los estudiantes a entender, interpretar, representar y realizar predicciones sobre el fenómeno que se este analizando. Los biólogos y los profesionales de la pesca utilizan una metodología muy específica de describir los procesos ó fenómenos, los cuales son considerados por ellos como única herramienta para obtener una predicción de los mismos. De esta forma y con la necesidad de crear en el estudiante un pensamiento más crítico que le permita analizar lo que ocurre en la práctica de su quehacer, se requiere tomar como base las prácticas sociales para poder desarrollar las competencias que estos profesionistas requieren.

En nuestro trabajo de investigación, la hipótesis central de trabajo se sostenemos es que "*Para lograr que los egresados del área biológico agropecuaria de la UAN se inserten en un mercado laboral globalizado y tengan éxito en el mismo, deben poseer las competencias profesionales necesarias, entre las que destacan los conocimiento matemáticos asociados a las prácticas sociales de la comunidad de profesionistas del área*". Motivo por el que la socioepistemología se erige como una perspectiva teórica, que ayudará a explicar los sistemas sociales, entendidos como sistemas complejos, donde los humanos aprenden al ejercer prácticas (Arrieta, 2003).

La unidad de aprendizaje de Modelación Matemática se encuentra en el segundo ciclo o semestre de las carreras que conforman el área (Ingeniería Agronómica, Licenciatura en Biología, Ingeniería Pesquera y Licenciatura en Medicina Veterinaria y Zootecnia); los únicos antecedentes sobre matemáticas en el nivel licenciatura los encontramos en una sola unidad de aprendizaje que es Lenguaje y Pensamiento Matemático, por lo que el diseño del programa de Modelación Matemática tiene en consideración la ausencia de un curso de Ecuaciones Diferenciales que permita abordar todos los fenómenos biológicos propios del áreas. Esto ha originado la búsqueda de alternativas que permitan solventar lo anterior, una de las soluciones es el uso de tecnología.

Por otro lado, incorporar tecnologías en los procesos de enseñanza, requiere tiempo, organización y preparación. No se trata de elegir cualquier tecnología; es importante discutir y analizar qué tipo de herramientas son las más apropiadas y las que mejor se adaptan al tipo de enseñanza del docente.

Es importante partir de la premisa de que la tecnología, por si misma, no garantiza la formación de mejores estudiantes, es decir, ésta no es un fin, sino un medio que ayuda a optimizar el proceso de enseñanza y de aprendizaje. El uso de forma concienzuda de la tecnología en cualquier proceso educativo no puede conducir a otra cosa más, que al enriquecimiento y construcción del conocimiento, siempre y cuando este proceso esté acompañado por el docente y subordinado a una concepción pedagógica.

Como menciona Ferrer, 2008, "La tecnología no debe convertirse en el centro de atención hacia donde se enfoque el estudiante, sino el medio a través del cual ocurre el intercambio de información y conocimiento durante el proceso instruccional". Si bien, incluir tecnologías en los procesos de enseñanza y de aprendizaje trae consigo muchas ventajas y desafíos; sacar el mayor provecho a éstas, requiere crear ambientes propicios que motiven y generen conocimiento, para lo cual se deben diseñar actividades que estén enmarcadas en su buen uso y que reflejen los alcances de su aplicación en el alumnado.

Esta tendencia que se produce en la investigación de las ciencias se debe reproducir en la enseñanza de las mismas. Pueden señalarse algunas razones para incluir el uso de las computadoras en la enseñanza de las matemáticas:

1) La computadora extiende el dominio de las ciencias experimentales: es decir permite experimentar en un universo hipotético;
2) Se puede aplicar a estudiar propiedades de sistemas matemáticos abstractos: la experimentación en matemáticas llevada a cabo mediante el uso de computadora puede sugerir, muchas veces, resultados que serán demostrados mediante técnicas convencionales.
3) Los procesos matemáticos susceptibles de describirse mediante un programa no se circunscriben a las operaciones y funciones matemáticas tradicionales.

A lo largo de este periodo hemos utilizado varios softwares, analizando de cada uno de ellos sus ventajas y desventajas, por lo que en los últimos ciclos nos decidimos por el uso de GeoGebra, las ventajas del manejo del GeoGebra son que no han de conocerse lenguajes de programación (específicos de simulación o de propósitos generales), que su inclusión no requiere de mucho tiempo, que resulta adecuado para cubrir el 100% de los temas propuestos en la unidad de aprendizaje, que es un software de distribución libre, es decir no se requiere de la compra de la licencia.

Marco teórico

La perspectiva teórica que guía el anteproyecto la constituye lo que se ha denominado **socioepistemología**. Esta perspectiva implica que los estudios aborden al sistema educativo como un todo complejo, donde diferentes dimensiones intervienen relacionadas sistémicamente. Esas dimensiones son a saber la epistemológica, que tiene que ver con la naturaleza social del conocimiento, su formación histórico cultural y la producción y reproducción social del mismo; la cognitiva, con relación a las interacciones que da lugar el proceso de aprendizaje, las interacciones entre los actores y las interacciones con el mundo; las formas de intervención en los procesos escolares, la didáctica; que adquieren sus particularidades en contextos sociales concretos (Cantoral, 1999; Cordero, 2001, 2002; Cantoral y Farfán, 2002; Arrieta, 2003).

La problemática que pretendemos abordar está relacionada con las prácticas del uso de las matemáticas en contextos escolares. De esta forma, la problemática planteada es acorde a lo planteado por Cantoral (1997) cuando menciona que localizamos una incesante relación entre le pensamiento físico y el pensamiento matemático, lo cual nos brinda la oportunidad de contar con elementos ausentes en la matemática escolar contemporánea, aunque presentes y protagónicos en otros períodos. En nuestro acercamiento, el estudio de esta relación, desde una perspectiva socioepistemológica, sistémica, se convierte en parte central en el proyecto investigación. Es decir ***la problemática que es atendida en esta investigación es la tensión entre las esferas de las prácticas del uso de las matemáticas y las prácticas escolares*** (Arrieta 2003).

EL término de práctica social adquiere en investigaciones como (Rooth y Bowen, 2002; Cordero, 2001, 2002; Arrieta, 2003) diferentes connotaciones, por esto es conveniente precisar que se entiende por “práctica social” en nuestra investigación. La profundización acerca de lo que entendemos por “práctica social” pretendemos sea una contribución a nivel teórico.

Metodología

La metodología de investigación utilizada fue la Ingeniería Didáctica. Este término surge, en el seno de la escuela francesa, en analogía al quehacer en ingeniería, ya que se apoya en resultados científicos, involucra la toma de decisiones y el control sobre las diversas componentes inherentes al proceso. Así, la ingeniería didáctica se constituye como una metodología de investigación que se aplica a los productos de enseñanza basados o derivados de ella y como una metodología de producción para guiar las experimentaciones en clase. Su sustento teórico proviene de la teoría de la transposición didáctica y de la teoría de las situaciones didácticas.

En esencia esta metodología contempla cuatro fases a las que Lezama y Farfán (2001) denominan fase de planeación, fase de diseño, fase experimental y fase de validación, respectivamente.

1) Fase de Planeación:
El contenido de la Modelación Matemática está distribuido en cuatro unidades:

1. Funciones y métodos gráficos
2. Introducción a los modelos matemáticos en sistemas biológicos
3. Modelos de crecimiento
4. Modelos matriciales

Como se citó en la introducción el software nos permite abordar tres de las cuatro unidades.

2) Fase de Diseño:
Con base en los resultados que obtuvieron los alumnos en el curso de Lenguaje y Pensamiento Matemático cuya unidad 4 es la Introducción a la Modelación, se dio inicio a la siguiente fase en la que se diseñaron las secuencias y actividades para las cuatro unidades mencionadas.

En cada una de las actividades se propone en primer lugar que el alumno trabaje sin el uso del GeoGebra, para que posteriormente al hacer uso de ellos pueda verificar sus resultados. También se trabajó con actividades en las que se inicia con el software para a que a partir de la actividad el alumno pueda sacar conclusiones e ir construyendo su conocimiento, esto sobre todo en el manejo de los parámetros, tanto con la visualización de funciones como con los modelos matemáticos.

3) Fase de Experimental:
Por las características propias de la propuesta está se implementó solamente en algunos de los programas académicos, los que fueron determinados por contar con una sala de cómputo y por las cargas académicas y de adscripción de quienes estamos llevando a cabo la investigación.

Una vez definidos los objetivos del curso, se establecen las lecturas, actividades, formas de interacción, producciones de los alumnos, estrategias de seguimiento y formas de evaluación.

En el caso particular del curso en que desarrollamos esta experiencia, el objetivo fue: “Provocar que el alumno entre en actividades de visualización, entendiéndola como un proceso de construcción del conocimiento matemático que precisa del uso de objetos matemáticos (sus representaciones, vínculos y tránsito entre ellas), la codificación y decodificación de información visual y no visual, la anticipación de formas gráficas y analíticas, así como de los argumentos y explicaciones mediante el lenguaje, la palabra escrita, los gestos y los movimientos en situación de interacción con los actores de escenarios de aprendizaje específicos”.

Un punto importante es la interacción. Si bien la comunicación entre los actores de la experiencia analizada estaba abierta a realizarse vía correo electrónico, vía telefónica o incluso presencial, para aquellos que tuvieran oportunidad, se consideró registrar, exclusivamente, la comunicación que se dio en los foros de discusión, ya que permite la lectura de varias intervenciones y puntos de vista, pero sobre todo porque este espacio es el más apropiado para indagar en el pensamiento e ideas de los estudiantes (Castañeda, Sánchez y Molina, 2006).

4) Fase de Validación:
En esta fase confrontamos los resultados obtenidos en la fase experimental con los elementos teóricos de nuestro análisis a priori, en la fase de diseño. Esta confrontación nos permitió arribar a las conclusiones que presentamos a continuación.

Conclusiones

Movilizó esta investigación la preocupación planteada al inicio de nuestro trabajo sobre las dificultades observadas al desarrollar los contenidos de matemática en nuestras clases y al analizar los resultados poco satisfactorios que observamos en el primer año de universidad y durante el desarrollo de esta unidad de aprensizaj. Los elementos teóricos obtenidos en la fase de validación de esta investigación son importantes para pensar en un rediseño de estas secuencias, esta vez orientadas a alumnos de Lenguaje y Pensamiento Matemático en el área. En este rediseño deberemos tener en cuenta la formación diferente de los actores a los que se orienta la propuesta, es posible que esto permita trabajar de manera diferente otras nociones como, por ejemplo, razón de cambio y tasa de variación, aporte elementos que favorezcan la noción de función como una forma de identificar los efectos de un cambio y no solamente como una asignación entre objetos, y promueva el uso de la visualización matemática como una estrategia para la formación adecuada de los conceptos.

Entendemos que las restricciones y variables de control identificadas para esta investigación cambiarían: tantos los actores, como la familiaridad con el uso de la tecnología educativa, el escenario y el contexto serían diferentes.

Una fase importante de la modelación en la educación es la experimentación (Borba y Villareal, 2005), en este escenario las simulaciones juegan un papel importante para que esta fase sea vivida por el alumno. Reafirmamos lo expresado anteriormente en referencia a la utilización de software como GeoGebra, que proporcionan ambientes de *simulación* e *interactividad* para la *actividad controlada.*

Al comparar los resultados que se obtuvieron en el diagnóstico con los de la puesta en escena, se encontró que: el uso del micromundo contribuyó para que los estudiantes pudiesen observar y analizar más de una representación gráfica en un mismo plano, lo que les permitió que identificaran el comportamiento de los parámetros y además a que pusieran en juego diferentes argumentos, contribuyendo a darle significado a las expresiones analíticas objeto de estudio.

Referencias

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. México.

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking. New York: Springer.

Cantoral, R. (1999). Pensamiento y lenguaje variacional en la enseñanza contemporánea. En R. Farfán (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 12 (I), pp. 41–48.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2002). *Sur la sensibilité a la contradiction en mathématiques; l'origine de l'analyse complexe*. Recherches en Didactique des mathématiques. Vol. 23, Núm. 2.

Cantoral, R.; Farfán, R. (2003) Matemática Educativa: Una visión de su evolución.. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 6, 1, 27-40.

Cantoral, R., Ferrari, M. (2004). "*Uno studio socioepistemologico sulla predizione, en La Matematica e la sua Didattica*", en *Bologna, Pitagora Editrice*.- 2(33 - 70)

Castañeda, A., Sánchez, M. y Molina, G. (2006). Estudio del pensamiento del profesor en un curso de formación docente a distancia. En *Memorias del 22 Simposio Internacional de Computación en la Educación. SOMECE 2006*. México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime* Vol. 4. Núm. 2, pp. 103-128.

Cordero, F. (2002). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y de significados. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2004). La modelación y la enseñanza de las matemáticas. Artículo Innovación Educativa 21 IPN (Aceptado para su publicación).

Lezama, J., Farfán, R. (2001) Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 4, Num. 2, (pp. 161 - 193). Thompson

Roth, W. y Bowen, M. (2001). Professionals read graphs: a semiotic analysis. *Journal for Researches in Mathematics Education*, Vol. 32. Núm. 2, pp. 159-194.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS CON TECNOLOGIA TI NSPIRE PARA EL CURSO DE MATEMATICAS II EN EL C.U.C.E.A. DE LA UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

Víctor Hugo Gualajara Estrada, Ana Torres Mata, Ricardo Solórzano Gutiérrez

Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas (CUCEA), Universidad de Guadalajara, México.

victor_gualajara@yahoo.com.mx, anatorrescuceaudg@gmail.com, ricardo_sg75@hotmail.com.

Para citar este artículo:

Gualajara, V. H., Torres, A., Solórzano, R. (2017). Actividades complementarias con tecnologías TI NSPIRE para el curso de matemáticas II en el C.U.C.E.A. de la Universidad de Guadalajara. *Revista. Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS CON TECNOLOGIA TI NSPIRE PARA EL CURSO DE MATEMATICAS II EN EL C.U.C.E.A. DE LA UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

Víctor Hugo Gualajara Estrada, Ana Torres Mata, Ricardo Solórzano Gutiérrez

Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas (CUCEA), Universidad de Guadalajara, México.

victor_gualajara@yahoo.com.mx, *anatorrescuceaudg@gmail.com*, *ricardo_sg75@hotmail.com.*

Resumen

La Universidad de Guadalajara en los últimos años se he preocupado de actualizar sus carreras para seguir teniendo programas educativos modernos y de calidad, y a la par, ofrecer a la comunidad Jalisciense programas de licenciatura acreditados por organismos evaluadores como CACECA, CONAET Y CONACE. El CUCEA de la U. de G., se ha dado a la tarea de reformar su planes de estudios e incluir dos líneas de trabajo en cada una de sus carreras, a través del Departamento de Métodos Cuantitativos, y en específico, con la Academia de Matemáticas Generales, preparando algunas actividades con la calculadora *TI NSPIRE CX CAS* para los cursos de Matemáticas I y II. En este espacio se presentarán las actividades que se han desarrollado con apoyo de la Empresa Texas Instruments para la materia Matemáticas II.

Palabras Claves: Cálculo, Aplicaciones económicas, Calculadora TI NSPIRE CX CAS

Introducción

Hoy en día, en donde la demanda por la educación superior es cada vez más creciente y que la aparición de programas e Instituciones de educación superior es cada vez mayor, resulta importante disponer de parámetros que permitan distinguir cuando el programa educativo ofertado es de calidad. Además, es importante conocer sí la infraestructura de una Institución, o el perfil de su personal docente han sido evaluados o certificados por algún organismo independiente del sector educativo, para tener cierta certidumbre en aspectos de su calidad educativa.

En este escenario la Universidad de Guadalajara como la máxima casa de estudio de Jalisco, en los últimos años se ha dado a la tarea de actualizar y certificar sus carreras, para seguir teniendo programas educativos modernos y de calidad y a la vez, poder ofrecer a la comunidad Jalisciense programas de licenciatura los cuales deben estar comprendidos en un estándar, exigidos por organismos evaluadores como CACECA, CONAET Y CONACE, en el que se pretende tener la acreditación o re-acreditación de cada una de las carreras que se ofrecen en este Centro Universitario, y que se ofertan dedicadas al área económico-administrativa.

Con este objetivo la U. de G. se ha dado a la tarea de reforzar algunas líneas de trabajo como: un segundo idioma, el empleo de la tecnología educativa en cada una de sus materias; por lo que con ello se tiene una forma diferente de ver la enseñanza tradicional de las matemáticas, para incluir algunos recursos educativos, principalmente tecnológicos que son hoy en día para la juventud, instrumentos que utilizan con suma familiaridad, como por ejemplo el uso de la computadora, los teléfonos celulares, los *iPad*, la calculadoras graficadoras, entre otros.

A través del Departamento de Métodos Cuantitativos, en la Academia de Matemáticas Generales, se han preparado algunas actividades por parte de un grupo de profesores para que a través del uso de la calculadora graficadora *TI NSPIRE CX CAS*, se generen actividades didácticas complementarias para los cursos de Matemáticas I y II. En este trabajo, se presentaran los recursos que se han desarrollado en la materia de Matemáticas II, en la cual se contemplan temas como cálculo en dos variables y sus aplicaciones en la optimización de funciones de costos, ingresos y utilidad, además de incorporar algunos temas de integración como el cálculo del área bajo la curva, el área entre curvas y sus aplicaciones en el entorno de la economía como: Excedente del productor y del consumidor.

En este trabajo se detallará la construcción de las actividades, en donde se explicará brevemente su aplicación, mostrando y discutiendo los resultados, ventajas y desventajas de este nuevo empeño que ha emprendido el CUCEA para la Enseñanza de Matemáticas para Administración y Economía con el uso de Tecnología.

Objetivo

Diseñar e implementar actividades complementarias de enseñanza orientadas al alumno de manera que se permitan vincular la teoría y práctica que se ofrece en el curso, incorporando el uso de tecnología educativa.

Marco Teórico

La comprensión de los conceptos básicos del Cálculo, suele ser tarea difícil para los estudiantes en sus primeras aproximaciones a estas asignaturas (Cabañas y Cantoral, 2007). Es particularmente notable que los estudiantes tengan dificultades con la conceptualización de los procesos de integración, principalmente por el desequilibrio que se puede percibir entre la parte conceptual y la parte algorítmica (Cabañas y Cantoral, 2007)**.**

Uno de los aspectos más sobresalientes de la implementación de los recursos tecnológicos, es ofrecer al estudiante ambientes de trabajo que estimulan la reflexión, esto los convierte en un activo responsable de su propio aprendizaje, es decir, al proveer un espacio común entre el maestro y el estudiante, la retroalimentación de información reducirá el miedo del estudiante a expresar algo erróneo y por lo tanto, se aventurará más a explorar. Sin embargo, autorres como Pomerantz (1997), señalan que existen algunos tabús acerca del uso de la calculadora, entre otros, el que los estudiantes pierden habilidades al usarlas porque las calculadoras hacen todo el trabajo por él, volviéndolo dependiente y solo aprende a apretar teclas. Al respecto, hemos observado que estos tabús únicamente sirven para hacer más lento, la inevitable implementación de la tecnología en los salones de clase y pone a los estudiantes en desventaja. En un mundo que está siendo cubierto por la tecnología, es necesario que estos tabús sean redimensionados, ya que las calculadoras pueden ser apropiadamente incorporadas como una herramienta para fomentar el aprendizaje.

Metodología

Los temas considerados especialmente importantes para reforzarse mediante el uso de la tecnología, son el cálculo de área bajo la curva y el de área entre curvas, así como aplicaciones en el cálculo de costos, ingresos y utilidades totales, excedentes de los consumidores y de los productores.

Actualmente con la adquisición de un laboratorio del equipo *TI Nspire* y su *TI Navigator*, se ha logrado desarrollar una serie de actividades complementarias al curso de Matemáticas II, las cuales están diseñadas para que el maestro del curso lleve a sus alumnos de dos a tres veces al laboratorio de Cómputo, y realice estas actividades específicas.

Para mostrar lo anterior, se dio seguimiento a 4 grupos de la asignatura de Matemáticas II con 40 alumnos en promedio, que asistieron de manera regular al curso. Se trabajaron cuatro actividades diseñadas para usarse con calculadoras graficadoras *TI-Nspire Cx-Cas* así como el sistema de red inalámbrico *TI-Nspire* para cubrir los contenidos temáticos. Al inicio de cada sesión, los estudiantes se conectan en red para recibir los archivos con las actividades diseñadas previamente, en las que se introducen conceptos matemáticos para que los estudiantes los estudien, manipulen y realicen deducciones a partir de ellos.

Exposición de la propuesta

En reuniones de la Academia de Matemáticas Generales, se acordó formar una comisión pare elaborar Actividades para la materia de materia de Matemáticas II, en el que los alumnos deberán realizar prácticas como complemento a sus actividades regulares del curso, y estas serían para reforzar algunos temas donde las bondades que ofrece la calculadora graficadora permitirán explotar en el aprendizaje.

Se acordó además, que estas actividades irán acompañadas de pequeñas guías para el profesor, las cuales lo llevaran paso a paso para completar la actividad en cada práctica. Los temas que se acordaron fueron los siguientes:

a) Funciones de dos variables

b) Concepto formal de Integral

c) Área bajo la curva

d) Área entre curvas

Experimentación

Las actividades que se plantean se componen de varios ejercicios con diferentes características (Haeussler y Wood, 2008; Harshbarger y Reynolds, 2005) y además de algunos dinámicas en línea en páginas de la propia empresa de Texas Instruments, que permiten trabajar los temas desde diferentes perspectivas y que plantean varios niveles de dificultad.

Actividad 1: Funciones de dos variables

El objetivo de esta actividad es que el alumno visualice la gráfica de una función de varias variables en un plano tridimensional (Figura 1 y 2), discuta en clase a que se refiere una curva de nivel (Figura 3) y genere su propia definición (Figura 4), para aplicar este concepto a un problema de economía. Esto se logrará mediante un archivo que el profesor enviará vía el TI Navigator y se establecerá una actividad interactiva entre el alumno y el profesor, al estar manipulando el archivo y contestando algunos pequeños cuestionamientos.

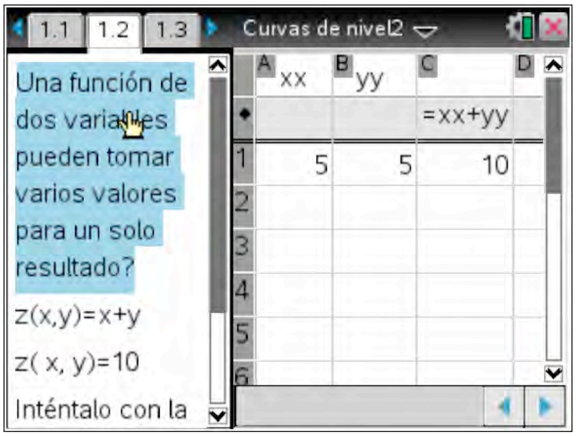


Figura 1. Evaluación de f(x,y)

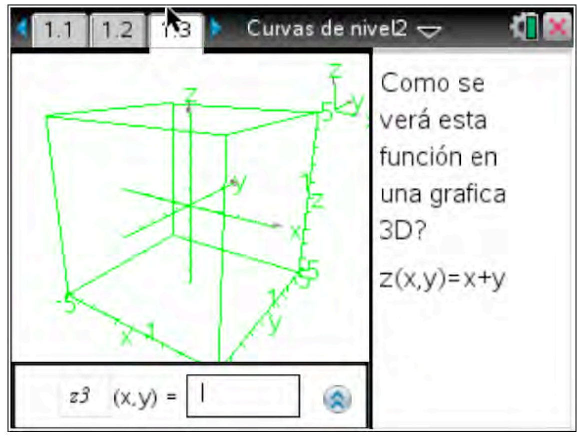


Figura 2. Espacio en tres dimensiones

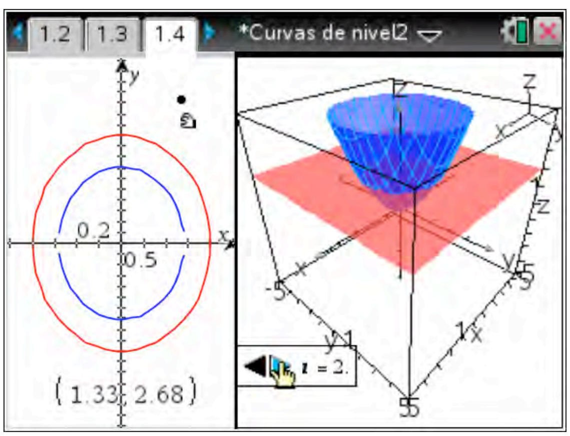


Figura 3. Curvas de Nivel

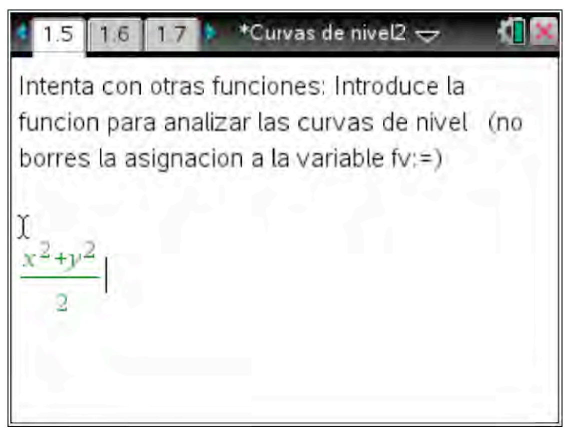
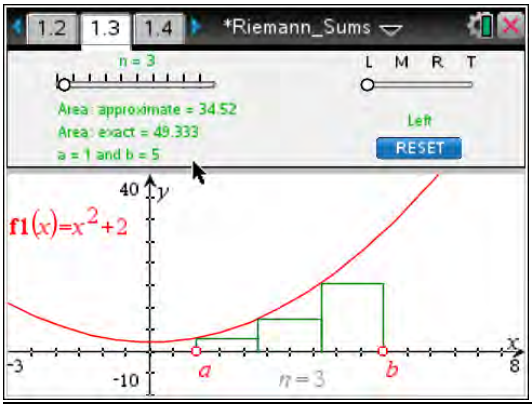


Figura 4. Superficie de nivel

Actividad 2: Concepto de integral

El objetivo de esta actividad es que a partir de la idea del cálculo de áreas de figuras irregulares, determinar el área bajo la curva mediante el mismo principio, que el alumno sea capaz de construir la definición formal de Integral. Esto se logrará con el inicio de una lluvia de ideas y posteriormente el envió de un archivo que el alumno manipulará (Figura 5, 6 y 7) y entre todos formar la definición de integral deduciendo que está constituido de una sumatoria y un límite.



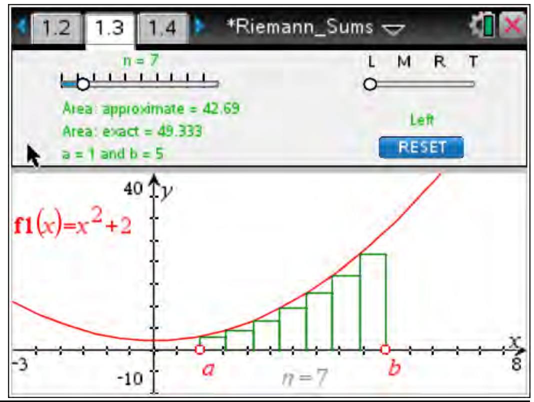


Figura 5. Sumas de inferiores para n = 3 *Figura 6*. Sumas de inferiores para n = 7

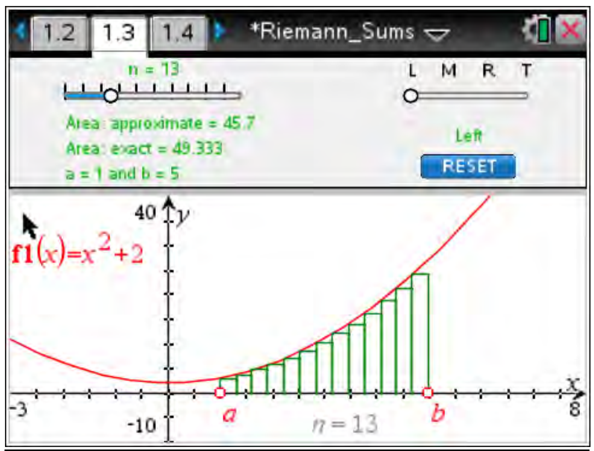
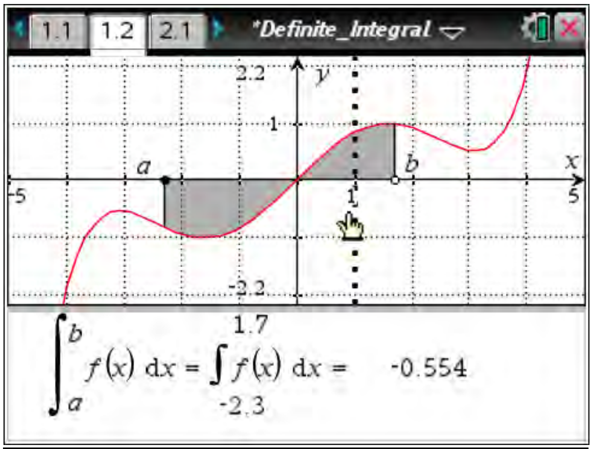


Figura 6. Sumas inferiores para n = 13

Actividad 3: Área bajo la curva

Se iniciará con una representación gráfica de la integral definida y área bajo la curva, en la que se hace especial énfasis en la visualización de las regiones, a fin de que los alumnos comprendan la diferencia entre el concepto de integral definida y el de área bajo la curva. Se le pide en cada gráfica que manipulen los parámetros a y b (Figura 8, 9 y 10), y que al mismo tiempo observen el resultado de la integral definida y la diferencia entre el área sombreada.



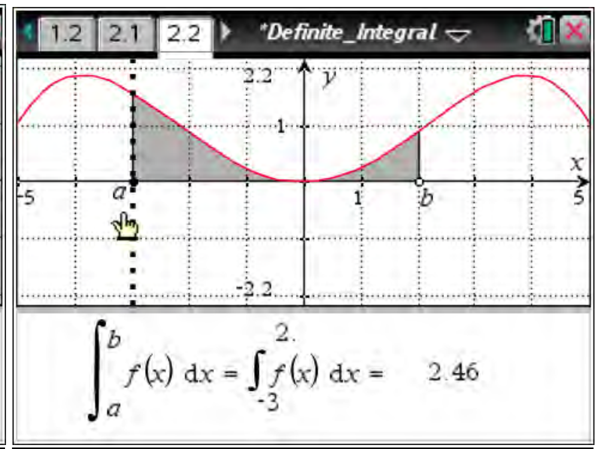


Figura 7. Área bajo la curva: caso 1 *Figura 8.* Área bajo la curva: caso 2

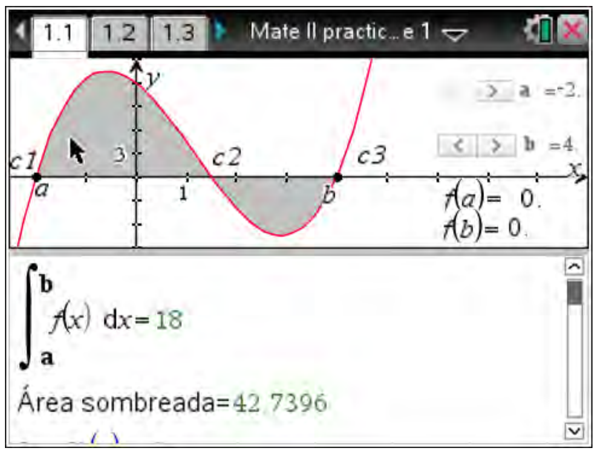


Figura 9. Área bajo la curva e integral

Actividad 4: Área entre curvas

El objetivo de esta actividad, es que el alumno domine los procedimientos para obtener el área entre curvas y visualice en una gráfica el papel importante de cada uno de los elementos que intervienen en este cálculo. Previo a realizar varios ejercicios del libro de texto, se irá al laboratorio a trabajar en una actividad que contendrá varias plantillas (Figura 11, 12 y 13) donde el alumno usando las bondades gráficas y analíticas de la calculadora graficadora comprobará los resultados vistos en clase (Figura 14 y 15) y los discutirá con su equipo de trabajo.

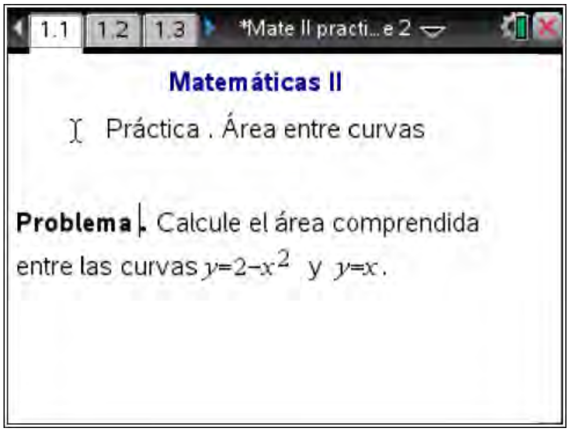


Figura 10. Ejercicio de área entre curvas

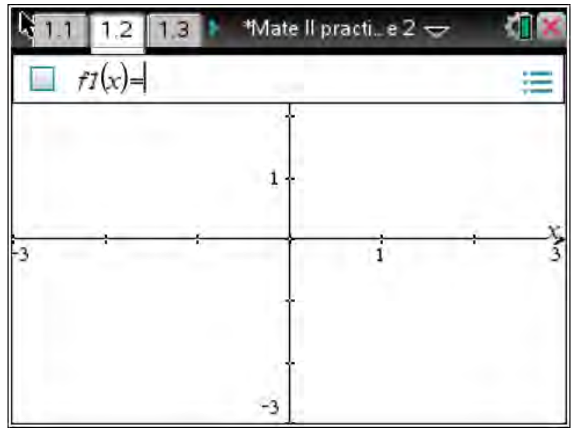


Figura 11. Espacio para graficar las curvas

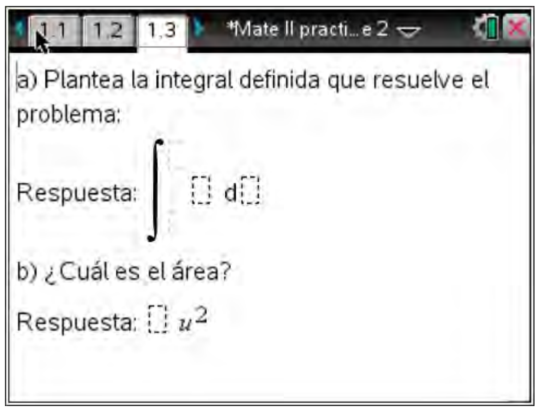


Figura 12. Plantilla para evaluar la integral

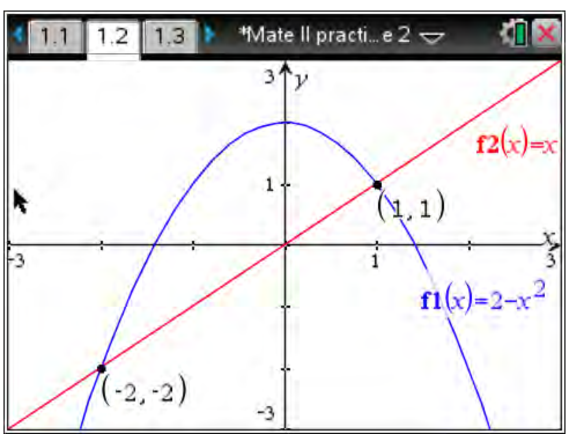


Figura 13. Graficas de las curvas e intersecciones

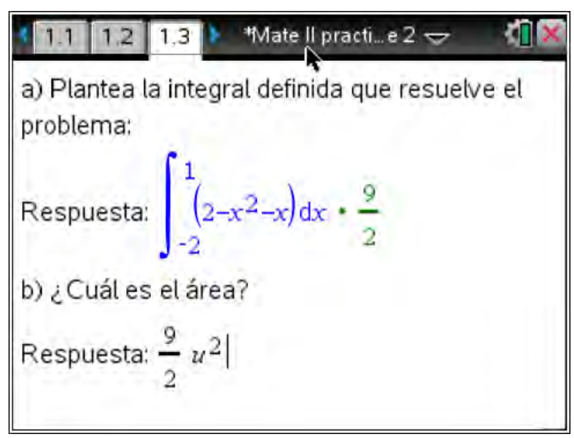


Figura 14. Área entre curvas

Resultados

Es importante señalar dentro de la presentación de resultados y consecuencias de la implementación de este tipo de estrategias de aprendizaje, existen pormenores relacionados con una población de 35 profesores que imparten la misma materia, y en algunos casos existen profesores con más de un grupo. Se pudo concluir que, por un lado el tener 7 profesores de edad avanzada dificulta que se implementen estas herramientas tecnológicas como estrategia de mejora a su metodología de enseñanza y por otro, la presencia de otro grupo de 10 profesores reacios a utilizar estos recursos y preferir la enseñanza tradicional de clase sin la aportación de la tecnología.

Otros aspectos importantes dentro de los resultados generados están el seguimiento de 4 grupos de la materia de Matemáticas II, de los cuales en dos se trabajó con la enseñanza tradicional de lápiz, papel, y utilizar el pintarrón para la didáctica de clase, en donde se seleccionó una pequeña muestra para desarrollar una actividad con la calculadora graficadora. Mientras que los otros dos grupos, donde además de la enseñanza tradicional de clase se les abrió un espacio para trabajar fuertemente en las cuatro actividades que se han descrito.

El empleo de tecnología educativa en los grupos que se trabajó con ella desde el inicio del curso incremento la motivación en los alumnos y resultó que se perdiera un poco el miedo por la materia y se aumentara la participación en el desarrollo del curso.

Dos aspectos que destacaron el Profesor Ricardo y la Maestra Ana, quienes trabajaron con los grupos de apoyo tecnológico completo, el poder hacer sus cierres y retroalimentaciones en cada clase de manera eficiente con el uso del equipo y además de que poder hacer frecuentemente evaluaciones breves y así tener para ellos evaluaciones continuas.

La necesidad de entender métodos y notaciones perfectamente antes del uso del equipo, implicó un apoyo al docente en la asimilación de los temas y fortaleció el entendimiento de ciertas notaciones tan simples como los signos de agrupación.

El impacto en las evaluaciones fue medido con dos indicadores: uno con su promedio final del curso de los alumnos y dos con sus calificaciones en el examen departamental de cada uno de los grupos que se estuvo monitoreando. Se buscó el comparativo de grupos en igualdad de circunstancias desde que les impartiera clase el mismo profesor. Grupos sin apoyo tecnológico Grupo 1 (Ana 1), Grupo 2 (Ricardo 1), y los grupos con apoyo tecnológico Grupo 3 (Ana 2) y Grupo 4 (Ricardo 2).

Los detalles importantes fueron los siguientes: El comparativo entre Grupo 1 y Grupo 3, el ámbito cuantitativo no ofreció cambios los promedios fueron muy similares, lo importante aquí que se observó por parte del profesor, como ya se había mencionado, es mayor la participación dentro de las bondades que da la tecnología, y que el propio alumno obtenía por sí mismo conclusiones o anticipaba resultados.

Los aspectos a destacar en el comparativo entre el grupo 2 y 4 fue una mejora significativa en los promedios de los alumnos al empelar apoyo tecnológico por lo menos de 5 puntos en un promedio de grupo, esto en calificaciones del 0 al 100. Y destaco aquí no solo la pérdida del miedo a la materia, sino el atrevimiento del alumnado con apoyo de la tecnología a poder cuestionar al maestro y a la propia materia.

Conclusiones

La calculadora graficadora modelo TI Nspire, además de tener la capacidad de realizar varias operaciones complejas, tiene la ventaja de poder incorporar esta propiedad de actuar en red con los alumnos y además realizar pequeñas evaluaciones de forma instantánea. Esto en temas que requiere explotar el poder grafico de la calculadora da una bondad enorme al aprendizaje.

En este breve espacio se intenta exponer las estrategia que se llevan a cabo mediante algunas actividades que ya han sido implementadas, las cuales consisten en el uso de herramientas tecnológicas para una mejor comprensión y visualización de los temas a tratar, en donde el uso de la tecnología Nspire ofrece al estudiante ambientes de trabajo que estimulan la reflexión y lo convierten en un actor responsable de su propio aprendizaje.

Hemos visto que en algún grupo se logra construir un mundo común entre el maestro y el alumno. Donde se construyen significados a partir de la lluvia de ideas o resolución de problemas y en algunos casos se consigue eliminar la carga de los algoritmos rutinarios y darle más tiempo a centrar la atención en la conceptualización y solución de problemas.

Referencias

Cabañas, M. G. y Cantoral, R. (2007). Una aproximación socioepistemológica al estudio de la integral definida. En Dolores, C., Martínez, G., Farfán, R. M., Carrillo, C., López, I. y Navarro, C. (Eds.), Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula (pp. 9-32). España: Ediciones Díaz de Santos. Recuperado de

http://cimate.uagro.mx/cantoral/Archivos%20PDF/CCF.pdf (Consultado el 20 de julio de 2013).

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), pp. 171-194.

Duval R., (1998) Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. Traducción en Antología de Educación Matemática (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa.

González-Martín, Hitt, F. y Morasse, C. (2008) The Introduction Of The Graphic Representation Of Functions Through The Concept Of Co-Variation And Spontaneous Representations. A Case Study. In Figueras, O., Cortina, J. L., A la torre, S., Rojano, T., y Sepulveda, A. (Eds.), (2008). Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX. Vol. 3 Mexico: Cinvestav-UMSNH pp. 3-89, 3-96.

Haeussler, E., Paul, R. y Wood, R. (2008). Matemáticas para administración y economía.

México: Pearson Education.

Harshbarger, R. J. y Reynolds, J. J. (2005). Matemáticas aplicadas a la administración,

economía y ciencias sociales. México: McGraw Hill.

Leng, N. W., Chuen, T. W., y Nancy, N. M. L. (2009). Teaching and learning calculus with the TI-Nspire: A design experiment. *Retrieved October*, *10*, 2010.

Pomerantz, H. (1997). The role of calculators in Math Education. Recuperado de

http://education.ti.com/sites/US/downloads/pdf/therole.pdf

Texas Instruments (S.F.) *Calculus: Definite Integrals and Applications Activities* (URL: http:// education.ti.com/en/timathnspired/us/calculus/definite-integrals-and-applications) (07-May-14).

TI-Nspire (2007) *Activity 12: Calculus 7: Introducing the Integral Calculus with CAS: Integration by Substitution* (URL: http://compasstech.com.au/TNSINTRO/TI-NspireCD/mystuff/showcase .html#act12) (07-May-14).