**Enseñanza del Cálculo Vectorial a través del Software Libre Geogebra**

Teaching of the Vector calculus through the Software free Geogebra

Juan R. Ruiz Guerra, Hugo Rodríguez Martínez, Monserrat Del Carmen De León Cedillo, Carlos I. Espino Màrquez

[intrepit\_10@hotmail.com](mailto:intrepit_10@hotmail.com), [hugoroma2001@yahoo.com](mailto:hugoroma2001@yahoo.com), [ing.monsedeleon@yahoo.com.mx](mailto:ing.monsedeleon@yahoo.com.mx), [eime\_282000@hotmail.com](mailto:eime_282000@hotmail.com)

Tecnológico Nacional de México. Instituto Tecnológico de Aguascalientes. Departamento de Ciencias Básicas.

**Resumen**

La presente investigación desarrolla una propuesta didáctica a través de la construcción de ambientes de aprendizaje, que generen en los alumnos las competencias matemáticas que les permitan identificar, interpretar, argumentar y obtener con ello aprendizajes significativos de los conocimientos teóricos que se tratan en Cálculo Vectorial a través del uso de software libre Geogebra; así de manera detallada, los profesores podrán dar seguimiento al proceso de construcción de los conocimientos de sus alumnos.

**Palabras clave:** ambientes de aprendizaje, aprendizajes significativos, software libre, Geogebra.

**Key words:**environments of learning, meaningful learning, free software, Geogebra.

**Abstract**

This research aims to develop a didactic proposition through the construction of learning environments, which generate in students mathematical skills that enable them to identify, interpret, argue, and get this significant learning of theoretical knowledge discussed in Vector calculus through the use of free software Geogebra; so in detail, teachers can follow the process of construction of knowledge in their students.

**Introducción**

La enseñanza de las matemáticas, así como su aprendizaje, no ha sido tarea fácil a través de los años, lo cual se debe al carácter abstracto que se le confiere a la misma, o bien a la forma en la cual el estudiante recibe su enseñanza, basada muchas veces en enfoques tradicionales.

En esta nueva sociedad basada en el conocimiento, en la que se reconoce que la calidad, rapidez, seguridad y acceso a la información juegan un papel trascendental, la incorporación de las computadoras en los diferentes ámbitos del quehacer humano es inevitable y su evolución pareciera no detenerse, incluyendo la educación en todos los niveles.

La introducción de la computación en el proceso del docente permite contribuir al perfeccionamiento y optimización del sistema educativo y dar respuesta a las necesidades de la sociedad en este campo.

Estas herramientas se pueden usar para hacerle llegar al estudiante formas, métodos y prácticas que permitan mejorar el entorno de aprendizaje y por tanto contribuir a la adquisición de habilidades necesarias para él.

Los contenidos que se manejan e incluyen en Cálculo Vectorial, giran en torno a las gráficas en dos y tres dimensiones por lo que la interpretación, asimilación y comprensión de los conceptos estudiados están asociados con procesos de visualización de las superficies, eliminando toda confusión entre el objeto y su representación asegurando el entendimiento matemático por parte del estudiante.

Nuestro deber como docentes es renovar las estrategias de enseñanza utilizando las computadoras y diferentes softwares que se encuentran disponibles para hacer de las prácticas acciones llamativas e interesantes para los jóvenes de hoy.

**Referente teórico**

Muchos problemas requieren manipular modelos, donde las TICs generan y permiten la visualización y utilización de diagramas dinámicos, donde los estudiantes a través de estas herramientas aprenden, toman decisiones a partir de su intuición y posteriormente verifican estas conjeturas (Baugh y Raymond, 2006).

Kutzler (2003), el creador del programa Derive, expresó acerca del uso de la tecnología en la educación matemática lo siguiente, para lo cual citó lo mencionado por William Shakespeare: “Nada es bueno o malo por sí mismo, únicamente se piensa que es así”. Al considerar lo anteriormente mencionado se puede indicar lo siguiente: “Las calculadoras y los computadores no son ni buenas ni malas herramientas para la enseñanza, solamente se utilizan para hacer esto”.

Infante, Quintero y Logreira (2010), consideran que “estas experiencias matemáticas pueden ser fructíferas siempre que se tenga en cuenta la complejidad del conocimiento matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas, teniendo en cuenta las dificultades y las necesidades de los estudiantes, aprovechen la tecnología para crear espacios en los que se pueda construir un conocimiento matemático más amplio y potente”.

Con relación a estas herramientas, Balacheff y Kaput (1996) han señalado “los objetos virtuales que aparecen sobre la pantalla se pueden manipular de forma tal que se genera una sensación de existencia casi material, dando la posibilidad de introducir cambios y comprobar el efecto de los mismos”.

La vista es nuestra fuente más importante de información sobre el mundo. La mayor parte del cerebro está involucrada en la visión: el control visual del movimiento, así como la percepción de las palabras impresas, forma y color de los objetos. Arcavi (2003) define la visualización como “la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o en software, con el fin de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas antes desconocidas y avanzar en la comprensión”.

Se considera que “los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran” (Duval, 2006), ya que no hay otras formas de acceder a los objetos matemáticos que no sea produciendo alguna representación caracterizada de esta manera.

Para Tamayo (2006) “las representaciones semióticas hacen referencia a todas aquellas construcciones de sistemas de expresión y representaciones que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc. Cumplen funciones de comunicación, expresión, objetivación y tratamiento”.

Para mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos u objetos matemáticos del saber se emplean representaciones que permiten la asimilación de estructuras complejas, lo que implica, desde una perspectiva cognitiva, que para la total comprensión de las nociones matemáticas es preciso emplear y coordinar más de un sistema de representación (Macías, 2014).

Vicente Carrión, establece: "Obsérvese que no se habla de visualizar un diagrama sino de visualizar un concepto o problema. Esto último significa formar una imagen mental del diagrama; una buena observación de un problema significa entenderlo específicamente”. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas" (Carrión, 1999).

Cuando el estudiante adquiere un concepto a través de registros visuales y es capaz de manejarlos, a través de un razonamiento matemático, se dice que se ha dado la comprensión de imágenes de un determinado tema.

Lo anterior pone de manifiesto la importancia que representa incluir los conceptos lógicos, aritméticos, geométricos o algebraicos en formas ilustrativas a través del software y con ello mejorar la asimilación de conjeturas complejas.

Por tanto, el objetivo de la investigación, fue determinar el efecto que tiene el uso didáctico del Software matemático Geogebra, en el rendimiento académico de los estudiantes de Ingeniería.

Se establecen las siguientes hipótesis:

H1: Los estudiantes pertenecientes al grupo experimental tratados a través de procesos de enseñanza innovadora con software matemático evidencian mejores resultados académicos en Cálculo Vectorial, en comparación con los que tienen un proceso de enseñanza tradicional.

Ho: Los alumnos del grupo experimental tratados a través de procesos de enseñanza innovadora con software matemático no evidencian mejores resultados académicos en Cálculo Vectorial, en comparación con los que tienen un proceso de enseñanza tradicional.

**Metodología**

El experimento se llevó a cabo en el Instituto Tecnológico de Aguascalientes, en alumnos inscritos de cuarto semestre en la materia de Cálculo Vectorial. Inicialmente, se totalizó una muestra de 61 estudiantes, distribuidos en dos grupos, un grupo de Ingeniería Industrial (40 alumnos), considerados como el grupo experimental (GE) y un grupo de Ingeniería Química y Bioquímica (21 alumnos), considerados como el grupo control (GC). El investigador no intervino en la selección ni en la composición de la muestra. El Jefe del Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Aguascalientes asignó al investigador los grupos. Antes de que se formaran los grupos, ninguno de los 61 estudiantes tuvo conocimiento de que se iba a realizar un estudio de esta naturaleza en Cálculo Vectorial. Por ello, al inicio del semestre, a los estudiantes, se les informó sobre el experimento y su finalidad, y todos aceptaron por escrito formar parte del estudio. Se les aplicó un cuestionario exploratorio, con la finalidad de determinar sus experiencias en el uso de tecnología digital, y se demostró que ninguno había usado el software Geogebra, en sus cursos previos a Cálculo Vectorial.

El investigador fue el profesor del curso, junto con los responsables del diseño del experimento que se realizó en este estudio.

La investigación es cuantitativa y su diseño cuasi-experimental.

**Resultados**

Se observa que de los 61 alumnos que conforman los dos grupos, el 34.426% son mujeres y el 65.574% son hombres. Por otro lado, en su consulta en referencia a su autoevaluación con respecto a Cálculo Diferencial, el 4.918% se considera excelente, 14.754% muy bien, 22.951% bueno, el 42.623% regular y el 14.754% malo respecto a sus conocimientos previos en esta asignatura. Al revisar Cálculo Integral en la autoevaluación se encontró que el 4.918% se considera excelente, el 13.115% muy bien, el 11.475% bueno, el 45.902% regular y el 24.590% malo. De manera global el 4.918% se considera en una situación de excelente, el 13.934% en muy bien, el 17.213% en bueno, el 44.262% en regular y el 19.672% en malo con respecto a sus conocimientos previos.

En la segunda sesión de inicio de clases, se aplica un examen diagnóstico, que permitió reflejar los conocimientos previos en Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, con los que cuentan los estudiantes, el cual se integró con:

1. 6 preguntas informativas: nombre, edad, número de control, carrera a la que pertenece, semestre, opción en la que se ha llevado la asignatura (primera, segunda, tercera o especial).
2. 8 preguntas teóricas: una a dominio, una a rango, una a función, dos a límites, una a continuidad, una a derivación, una a integración.
3. 20 preguntas prácticas: tres de cálculo de límites, siete referidas a derivadas de funciones reales y diez a integrales de funciones reales.

Esta evaluación se aplicó en un mismo día en horarios diferentes, según su horario de asignación de la materia.

**Tabla 1.** Análisis estadístico de las calificaciones obtenidas en el examen diagnóstico.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | GC | GE |
| Número de alumnos | 21 | 40 |
| μ | 73.7214 | 70.0926 |
| Mediana | 74.0741 | 70.3704 |
| Modas | 77.7778 | 70.3704 ,74.0741 |
| Menor valor | 62.9630 | 55.5556 |
| Mayor valor | 81.4815 | 85.1852 |
| Rango | 18.5185 | 29.6296 |
| σ2 | 19.4719 | 42.7896 |
| σ | 4.4127 | 6.5413 |
| Desviación media | 3.6113 | 4.9768 |

El 90.48% del GC acredito el examen, al igual que el 62.5% del GE. El test incluyo 27 preguntas.

Una vez que se analizan los resultados, se determina los temas que requieren de reforzamiento; se llevó a cabo 4 sesiones de repaso de Cálculo Diferencial (una para cálculo de límites y 3 para derivada con fórmula) y 6 clases de Cálculo Integral (una con fórmula y 5 para los métodos de integración).

**Tabla 2.** Análisis estadístico de las calificaciones obtenidas después del examen diagnóstico.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | GC | GE |
| Número de alumnos | 21 | 40 |
| μ | 79.1887 | 77.9629 |
| Mediana | 81.4815 | 77.7778 |
| Modas | 85.1852 | 77.7778 |
| Menor valor | 62.9630 | 59.2593 |
| Mayor valor | 92.5926 | 92.5926 |
| Rango | 29.6296 | 33.3333 |
| σ2 | 65.9430 | 54.8352 |
| σ | 8.1205 | 7.4051 |
| Desviación media | 6.8531 | 5.6111 |

El 95.24% del GC acredito el examen, al igual que el 95% del GE. Del test, comprendió el 62.96% de Calculo diferencial y el 37.04% correspondió a Cálculo Integral.

Como se observa, se obtuvieron mejoras sustanciales en los promedios de calificaciones de los alumnos con respecto al examen diagnóstico, como consecuencia de una mejora en su aprovechamiento individual.

**Tabla 3.** Prueba de Levene para el análisis de resultados después del curso de homogenización.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Prueba de Levene para la igualdad de varianzas | |
|  | F  observado | significancia |
| Se han asumido varianzas iguales | 2.145 | 0.149 |

=0.05

Para las varianzas de los dos grupos, concluimos con una F de 2.145 y una significancia de p=0.149 (p>), mediante el test de Levene que las varianzas se pueden suponer iguales, es decir, los grupos son homogéneos.

Se procede al desarrollo del curso aplicando el software Geogebra.

El software se emplea tanto como para la enseñanza de los temas, el cual ofrece una perspectiva en dos y en tres dimensiones sin necesidad de recurrir al diseño en el pizarrón. El alumno debe obtener los resultados con el paquete matemático e incluir la comprobación manual. El estudiante podrá manipular la imagen obtenida, obteniendo diferentes perspectivas.

A continuación, se incluyen ejemplos de reportes por parte del estudiante.

1.- Vectores y puntos en R2:

1. Dibuja, haciendo uso de Geogebra, los siguientes puntos: A =(4,2), B=(-1,3), C=(-3,-5), D=(1,-5). Ver figura 1.
2. Dibuja los siguientes vectores:  =(4,2), =(-1,3), =(-3,-5), =(1,-5) Ver figura 1.

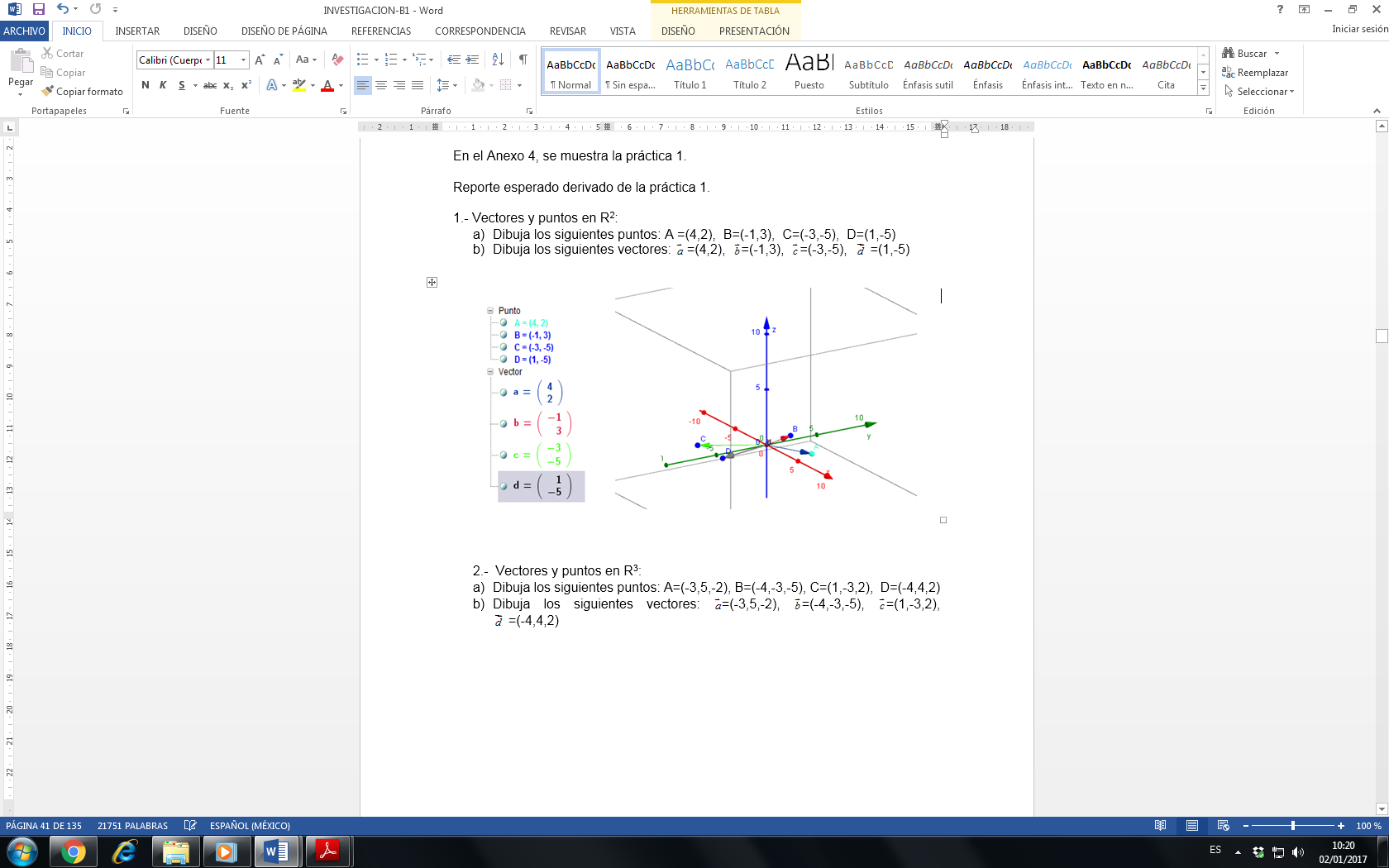


Figura 1. Percepción de la ubicación de puntos y vectores en dos dimensiones.

2.- Vectores y puntos en R3:

1. Dibuja los siguientes puntos: A=(-3,5,-2), B=(-4,-3,-5), C=(1,-3,2), D=(-4,4,2). Ver figura 2.
2. Dibuja los siguientes vectores: =(-3,5,-2), =(-4,-3,-5), =(1,-3,2), =(-4,4,2). Ver figura 2.

Figura 2. Percepción de la ubicación de puntos y vectores en tres dimensiones.

3: Dados  y , determina: , , , 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  |  | |

Figura 3. De donde e= , f= , c=, d= que son los resultados obtenidos a través de Geogebra.

Comprobación por parte del estudiante:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

5.- Determina los ángulos directores del vector =(3,4,6)

|  |
| --- |
|  |

Figura 4. En Geogebra, se generan primeramente los vectores unitarios sobre los ejes.

Comprobación por parte del estudiante:



6.- Dados los vectores:  y ,  determina:

1. Su producto escalar .
2. Ángulo que forman y 
3. Su producto vectorial .
4. El producto mixto 

|  |
| --- |
|  |

**Figura 5**. Pantalla generada por Geogebra al ingresar en “vista” de la barra de herramientas e introducir la acción directamente.

Comprobación por parte del estudiante:



8.- Determina la longitud de arco de la curva en el intervalo dado si X=e-t Cos(t); y=e-t Sen(t), considerando 

Graficando con Geogebra 5.0, se obtiene la imagen mostrada en la figura 6, así como los cálculos respectivos para determinar la longitud de la curva en el intervalo dado

|  |
| --- |
|  |

**Figura 6**. Se introducen las funciones, enseguida se parametriza y posteriormente se calcula la longitud deseada. Obteniéndose un resultado de d=1.12 con Geogebra.

Comprobación por parte del estudiante:



El resultado de s=1.12 obtenido con los cálculos por parte del estudiante es igual al de d=1.12 con Geogebra 5.0.

**Resultados**

Una vez aplicados los instrumentos de evaluación en cada una de las unidades, después de ser utilizado el software; los resultados obtenidos indican que el 90.48% de los estudiantes del GC y el 100% del GE acreditaron. A continuación, se muestran en la tabla 5 los datos estadísticos de los promedios finales reportados en las actas correspondientes que se encuentran en el departamento de Control Escolar.

Tabla 4**.** Datos estadísticos de los resultados obtenidos.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | GC | GE |
| Num alumnos | 21 | 40 |
| μ | 80.3095 | 90.5563 |
| σ2 | 119.2256 | 31.2734 |
| σ | 10.9190 | 5.5923 |

Definimos como:

μ0 = Media del GC.

μ1= Media del GE.

Planteamiento de hipótesis:

H0: μ0 = μ1 y no hay diferencia significativa en los grupos.

H1: μ0 ≠ μ1 y existe diferencia significativa entre los grupos.

Con un ensayo bilateral con nivel de significancia de  y con 57 grados de libertad, t=-4.436 y p=0.0001<, se acepta la hipótesis alterna, es decir, los grupos son significativamente diferentes. El intervalo de confianza para la diferencia de medias es de (-14.173,-5.356), al cual 0 no pertenece, nos indica que las medias son diferentes y podemos considerar que el incremento de las calificaciones de los estudiantes al utilizar software educativo GeoGebra, es probablemente significativo, ya que < en 10.2468. El riesgo de rechazar la hipótesis nula Ho cuando es verdadera es inferior al 0,01%. Ver Tabla 5.

Tabla 5. Prueba t.

|  |  |
| --- | --- |
| Prueba t para la igualdad de medias | |
| t | -4.436 |
| Grados de libertad (gl) | 57 |
| Significancia (bilateral) | <0.0001 |
| Diferencia de medias | -10.2468 |
| 95% intervalo de confianza para la diferencia | -14.173 |
| -5.356 |



**Conclusiones**

Se demostró que los estudiantes pertenecientes al grupo experimental tratados a través de procesos de enseñanza innovadora con software matemático evidencian mejores resultados académicos en Cálculo Vectorial, en comparación con los que tienen un proceso de enseñanza tradicional (para el GE con μ=90.5563 y para el GC con μ=80.3095). Así como, el empleo de software, permitió una mejor conceptualización y fundamentación de los procesos matemáticos, con lo cual los estudiantes lograron una mayor motivación hacia el estudio.

Los resultados obtenidos demostraron que la computadora es un eficaz instrumento en el proceso de enseñanza del Cálculo Vectorial, ya que a los estudiantes se les da una atención diferenciada, se obtienen mejoras en su actividad cognoscitiva al no ser solamente espectadores; les permite hacer comprobaciones, generar variaciones en los cálculos, velocidad de trabajo, versatilidad y flexibilidad, favorece la retroalimentación y perfeccionamiento de los productos.

**Referencias Bibliográficas**

* Baugh y A. Raymond, Making Math Success Happen: The Best of Learning &Leading with Technology on Mathematics*,* EE.UU: The International Society for Technology in Education (ISTE) EE.UU., 2003.
* B. Kutzler, 2003. [En línea]. Available: http://www.mat.uson.mx/calculadora/KUTZLERJRJR.htm. [Último acceso: 21 Octubre 2015].
* P. Infante, H. Quintero y C. Logreira, Integración de la Tecnología en la Educación Matemática, Revista Electrónica de Estudios telemàticos, vol. 9, nº 1, p. 5, 2010.
* B. Balacheff y J. Kaput, Computer-Based Learning Environment in Mathematics., En Bishop, A. J. et al, International Handbook of Mathematical Education, 1996, pp. pp. 469-501
* Arcavi, The Role of Visual Representation in the Learning of Mathematics, C. M. 1. a. i. H. F. a. S. (. o. t. 2. A. M. o. P. Plenary lecture at the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference (PME-NA), Ed., 2003, p. 217.
* R. Duval,
* http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME\_2006\_9\_1\_05.pdf, 2006. [En línea]. [Último acceso: 10 Octubre 2015].
* O. E. Tamayo Alzate, «Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas,» *Revista Educación y Pedagogía,* vol. XVIII, nº 45, pp. pp. 37-49, Mayo-Agosto 2006.
* J. Macías Sáchez, «Los registros semióticos en matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje,» *Revista de Investigación Educativa Conect@2,* pp. 27-57, 2014.
* V. Carrión Miranda, «Algebra de Funciones mediante el proceso de vosualización,» *Revista Iberoameciana de Educación,* 1999.
* L. Carlos Rojas (Fundación Universitaria Luis Amigó, Medellín, Antioquia, Colombia), P. Vicente Esteban (Fundación Universitaria Luis Amigó, Medellín, Antioquia, Colombia); “Geogebra y Applets Aplicados a la Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo”. Simposio Ibero-Americano de Aplicaciones y Tecnologías de Información y Comunicaciones (ATIC 2012), en el Contexto de The 2nd International Conference on Information and Communication Technologies and Applications. Noviembre 2012, Orlando, Florida, EE.UU.
* J. Pérez Rivera, “Empleo del software educativo y su eficiencia en el rendimiento académico del cálculo integral en la Universidad Peruana Unión, filial Tarapoto”, Apuntes Universitarios. Revista de Investigación ISSN: 2225-7136 apuntesuniversitarios@upeu.edu.pe Universidad Peruana Unión Perú. file:///C:/Users/TECNOLOGICO%20NACIONAL/Downloads/Dialnet-EmpleoDelSoftwareEducativo YSuEficienciaEnElRendimi-4757945%20(1).pdf.
* C. Regina Moncada Andino, D. O. Vásquez, E. López Durán y otros; “Laboratorio de Cálculo Vectorial usando Geogebra (experiencia de aula)”. Instituto Tecnológico de Zacatepec (ITNM), México. https://www.researchgate.net/publication/287986461\_LABORATORIO\_DE\_CALCULO\_VECTORIAL\_USANDO\_GEOGEBRA