



# REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<http://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores  
del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV      Número 2      Fecha: Diciembre, 2016

ISSN: 2395-955X

Directorio:

Rafael Pantoja R.  
Director

Eréndira Núñez P.  
Lilia López V.

Sección: Selección de artículos

Elena Nesterova  
Alicia López B.

Sección: Experiencias Docentes

Christian Morales O.  
Sitio WEB

Esnel Pérez H.  
Lourdes Guerrero M.

Sección: Geogebra

## EL CONCEPTO DE DIFERENCIAL. UNA APROXIMACIÓN INTUITIVA MEDIANTE SITUACIONES DIDÁCTICAS

Mónica del Rocío Torres Ibarra, Elvira Borjón Robles, Francisco  
Javier Adame Tiscareño

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

mtorres@matematicas.reduaz.mx,  
eborjon@matematicas.reduaz.mx, franciscoadame@hotmail.com

Para citar este artículo:

Mónica del Rocío Torres, M. R., Borjón, E. y Adame, F. J. (2016).  
El concepto de diferencial. Una aproximación intuitiva mediante  
situaciones didácticas. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV,  
No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de  
Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.  
ISSN: 2395-955X. México.

ISSN: 2395-955X

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 2, Julio – Diciembre 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: <http://www.amiutem.edu.mx/revista>, [revista@amiutem.edu.mx](mailto:revista@amiutem.edu.mx). Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 28 de Diciembre de 2016.

Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

## EL CONCEPTO DE DIFERENCIAL. UNA APROXIMACIÓN INTUITIVA MEDIANTE SITUACIONES DIDÁCTICAS

Mónica del Rocío Torres Ibarra, Elvira Borjón Robles, Francisco Javier Adame Tiscareño

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

mtorres@matematicas.reduaz.mx, eborjon@matematicas.reduaz.mx,  
franciscoadame@hotmail.com

**Palabras clave:** Diferencial, situación didáctica, variable, tangente, cambio.

### Resumen

Se describen los resultados de la investigación realizada y aplicada en el área de ingeniería, como una propuesta para la enseñanza del concepto de diferencial empleando tecnología, con el objetivo de que los estudiantes que utilizan las matemáticas como herramienta, puedan comprender el concepto de diferencial y aplicarlo en situaciones problemáticas que así lo requieran, por ejemplo en cálculo de volúmenes, velocidades y errores. Se hace uso de la Teoría de Situaciones Didácticas, como sustento teórico de esta investigación, así como del software Wolfram Mathematica como soporte visual para el docente.

### Introducción

La enseñanza del cálculo, en áreas como la ingeniería, presenta dificultades que se ponen de manifiesto una vez que se trata de abordar conceptos como el de diferencial, donde a su vez, intervienen diversos conceptos (el de función, límite, cantidades constantes y variables, etc). La mayoría de los fenómenos que se estudian en esta área se trabajan en variables continuas; por esta razón resulta imperioso realizar el análisis variacional mediante la construcción de las diferenciales, que permitan llegar a la determinación de una función con la cual se podrá evaluar o diagnosticar el comportamiento del fenómeno en cuestión.

Este trabajo tiene por objetivo realizar una propuesta didáctica, que contribuya a analizar las dificultades que los estudiantes de ingeniería tienen para lograr la comprensión del concepto de diferencial y sus aplicaciones de una manera intuitiva, presentando una alternativa, en la que el docente haga uso de herramientas computacionales a su alcance, y presente algunas animaciones con las que los alumnos puedan visualizar de manera clara cada uno de los términos que intervienen en el objeto, apropiándose de esta manera del concepto de diferencial.

### Marco teórico

El concepto de diferencial aparece por primera vez, en uno de los primeros libros de cálculo, titulado “*Analyse de infiniment petits pour l’intelligence des lignes courbes*”, (L’Hôpital, 1696), donde describe lo que él llamó diferencia como “la parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente”.

En la actualidad, el concepto de diferencial se establece como:

Supóngase que  $y = f(x)$  es diferenciable en  $x$ , y que  $dx$  es la diferencial de la variable independiente  $x$ , denota un incremento arbitrario de  $x$ . La diferencial  $dy$  correspondiente de la variable independiente  $y$  se define como  $dy = f'(x) dx$  (Purcell y

Vaberg, 1978); geoméricamente el diferencial se representa como se muestra en la figura 1.

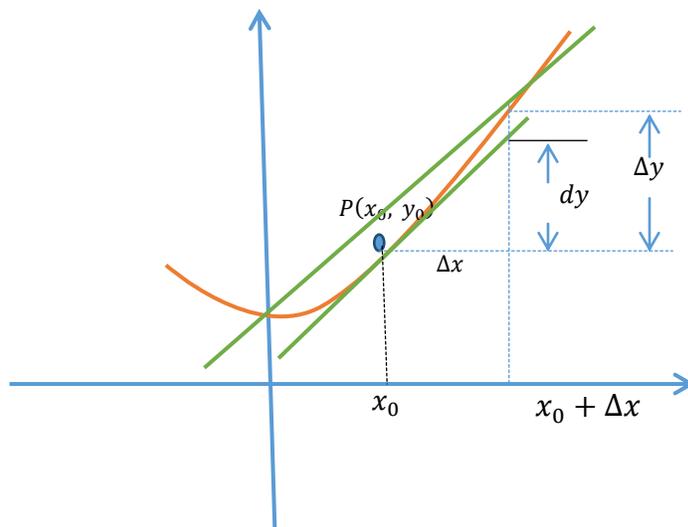


Figura 1. Representación Geométrica de la diferencial de  $y = f(x)$ .

Para hacer un análisis de este objeto matemático, tomamos como referente teórico la Teoría de Situaciones Didácticas, (Brousseau, 1986), cuya premisa radica en que el alumno aprende observando al mundo y formulando hipótesis a partir de sus conocimientos previos, es decir, adaptándose a un medio, creado por el propio docente, que es productor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, que se manifiestan en respuestas nuevas que constituyen una prueba del aprendizaje obtenido.

Se define una situación didáctica como:

*Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución" (Brousseau, 1986, p. 35).*

Para Brousseau, "... didáctica no consiste en ofrecer un modelo para la enseñanza sino en producir un campo de cuestiones que permita poner a prueba cualquier situación de enseñanza, y corregir y mejorar las que se han producido, formular interrogantes sobre lo que sucede" (Brousseau, 1998, 2007), menciona además que es necesario que el proceso didáctico tome en cuenta cuatro diferentes tipos de situaciones: *La situación de acción*, que consiste en elegir directamente los estados del medio, donde cada participante toma la responsabilidad de seguir el contrato didáctico (reglas del juego) estipulado; *La situación de formulación*, en ésta sale a flote la capacidad del estudiante para retomar sus conocimientos previos y construir estrategias basadas en éstos que le permitan presentar una solución al problema planteado; *La situación de validación*, donde el estudiante construye estrategias para comunicar y defender ante sus colegas, con argumentos bien fundamentados aquellas estrategias planteadas; y *La situación de institucionalización*,

donde el docente se encarga de describir lo sucedido y vincularlo con el conocimiento en cuestión.

Consideramos que este esquema es ideal para presentar situaciones de clase, en las que el alumno comprenda lo que el maestro plantea, tomando como base el medio diseñado previamente por el propio maestro, en el que se ven reflejados los análisis que el docente ha realizado sobre el tema, de forma que su objetivo es que se produzcan aquellos saberes para los cuales la situación es planteada.

### Metodología

Las actividades planteadas se realizaron siguiendo la estructura de la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, la cual se divide en cuatro fases, a saber:

- **Análisis preliminar**, dentro de éste se realizan tres diferentes análisis, los cuales se describen a continuación:
  - **Análisis Epistemológico**, en éste se destacan las aportaciones de Leibniz y Cauchy, donde el primero introduce la diferencial  $dx$  y las reglas básicas del cálculo diferencial  $d(x + y) = dx + dy$  y  $d(xy) = x dy + y dx$ , y el segundo desarrolla la generalidad la teoría de funciones continuas y formula los conceptos y procesos fundamentales del cálculo para ese tipo de funciones en los términos en que actualmente se presentan (Flores, Valencia, Dávila, y García, 2008).
  - **Análisis Cognitivo**, rescatamos que en la enseñanza del cálculo en los niveles medio superior y superior, no se hace énfasis en la naturaleza compleja del tipo de cantidades (infinitamente pequeñas), que se manejan (Sierpinska, 1995), que conllevan a que un número considerable de alumnos no logre reconocer como diferencial la cantidad o función que opera en las integrales y en las ecuaciones diferenciales.
  - **Análisis Didáctico**, donde se hace énfasis en que “si se representa por  $dx$  un incremento arbitrario elegido de la variable independiente  $x$  para un punto  $P(x, y)$  en la curva  $y = f(x)$ , entonces en la derivada  $\frac{dy}{dx} = f'(x) = tg \tau$ ,  $dy$  representa el incremento correspondiente de la ordenada de la tangente en  $P$  (Granville, 2001)
- **Concepción y análisis a priori**. En base a los resultados del análisis preliminar, se estructura una secuencia conformada por tres actividades:
  - **Actividad 1**. Determinación de saberes previos, mediante la respuesta a un cuestionario en el que se indaga acerca de diferentes conceptos que se involucran en la diferencial.
  - **Actividad 2**. Planteamiento de un problema práctico de la ingeniería, con la finalidad de que el alumno distinga entre los términos “infinitamente pequeño” (no medible y usado en el cálculo) y “finito” (medible y usado en aritmética) a través de su aplicación en una animación desarrollada mediante el software *Wolfram Mathematica*, en la que los elementos de la diferencial (véase figura 1), son presentados en el contexto del problema; de forma que los estudiantes

visualicen la gráfica y los valores correspondientes, guiados por una serie de preguntas que los llevarán a entender la razón de cambio que se origina al manipular la gráfica, todo esto con el objetivo de que vayan observando la variación que se presentaría en la máquina del problema, lo que intuitivamente los llevará al concepto; posteriormente el maestro hará una institucionalización de los términos que se estuvieron observando.

- **Actividad 3.** El profesor manipula la animación al mismo tiempo que explica la relación entre variabilidad en el error planteado en el problema (longitud vs peso), tiene el objetivo de que los alumnos puedan relacionar el tratamiento formal de los términos variable, constante, finito, infinitamente pequeño, etc., con aquellos elementos que se presentan en el problema planteado, de tal forma que una vez que tienen la noción de su comportamiento, el maestro tenga elementos para encausar su conocimiento y llevarlo a la conceptualización del mismo.

### Experimentación

La puesta en marcha se desarrolló con un grupo de 12 alumnos del 6° semestre de la carrera de Ingeniería en Mecatrónica de la Universidad Politécnica de Zacatecas; el desarrollo de las actividades se realizó de la siguiente manera:

**Actividad 1.** Respuesta, de manera individual, al cuestionario de diagnóstico (fase de acción), consistente en una serie de preguntas basadas en “qué entiendes por...”, para hacer notar que los alumnos cuentan o no con los conocimientos previos necesarios para la siguiente actividad; esta fase tuvo la participación de todos los integrantes del grupo. Un ejemplo lo observamos en la figura 2.

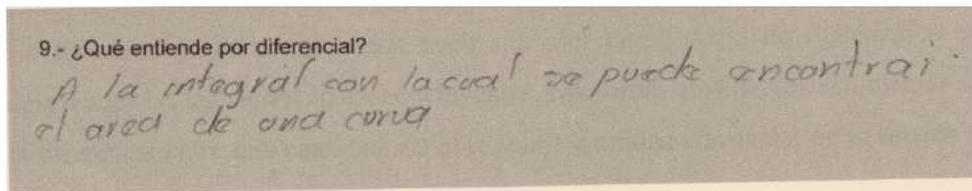


Figura 2. Ejemplo de respuesta de la fase de acción.

**Actividad 2.** Conformación de cuatro equipos de tres integrantes cada uno, para la solución conjunta del problema práctico guiado por un instrumento (fases de formulación y validación). En esta se les plantea un problema del error propagado por el peso por el error en la longitud que comete una máquina en la fabricación de una pieza cuya longitud debe ser de 50 mm, sabiendo que dicha máquina comete errores no mayores a 0.32 mm, utilizando como herramienta la gráfica animada diseñada para que los equipos la manipulen y a la par vayan contestando el cuestionario; después de entender el problema y manipular la herramienta, cada integrante del equipo emitió sus comentarios al respecto, en la mayoría de los casos, se logró que los integrantes debatieran acerca de sus posibles respuestas, logrando consensar la respuesta que posteriormente emitiría el equipo.

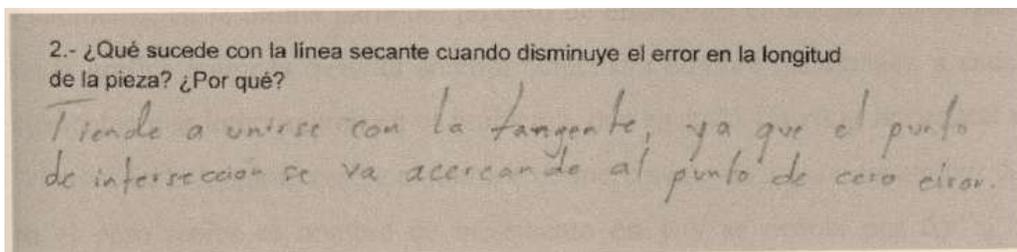


Figura 3. Ejemplo de respuesta de las fases de validación y formulación.

**Actividad 3.** Institucionalización. El profesor proyecta la gráfica para que todos los alumnos accedan a ella, conforme la manipula va explicando paso a paso en el problema (véase la figura 4), al mismo tiempo que va relacionando los procesos y las variables conforme los datos están cambiando, contextualizando así, los objetos matemáticos que intervienen en el proceso de la comprensión de la diferencial.

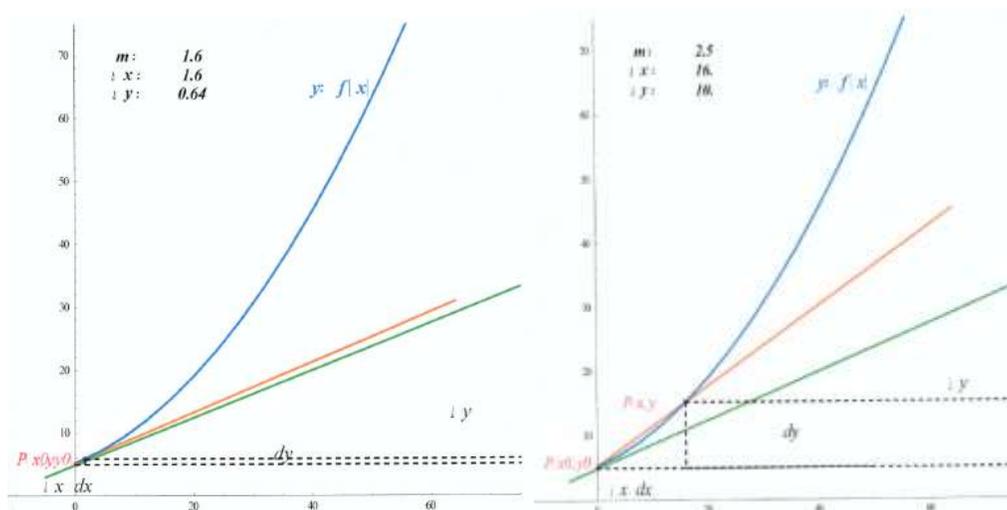


Figura 4. Manipulación del programa con diferentes valores del error.

### Análisis y Resultados

Como se explicó anteriormente, el objetivo de la actividad 1 era diagnosticar el conocimiento del concepto de diferencial y los saberes requeridos para la solución de un problema relacionado con este tema.

Las respuestas de los estudiantes se clasificaron en tres niveles: fuera de contexto, aproximada y comprensiva, en la figura 5 se presenta un ejemplo de la categorización que se realizó.

No.	Pregunta	Tipos de respuestas
1	¿Qué entiendes por cantidad finita?	<p>a) <u>Respuestas fuera de contexto.</u> "...es una cantidad muy fina..."(4 alumnos)</p> <p>b) <u>Respuesta aproximada.</u> "... una cantidad que tiene un límite y se puede contar..."(2 alumnos)</p> <p>c) <u>Respuesta comprensiva.</u> "...Que tiene fin, es una cantidad contable de la que podemos saber cuál es su cifra..."(6 alumnos)</p>
2	¿Qué diferencia hay entre cantidad variable y cantidad constante?	<p>a) <u>Respuestas fuera de contexto.</u> "...cantidad variable es que al sacar un resultado de un problema puede variar ...y una cantidad constante puede que no es el resultado..."(1 alumnos)</p> <p>b) <u>Respuesta aproximada.</u> "...cantidad variable puede ser diferente... y cantidad constante es una cantidad fija..."(1 alumno)</p> <p>c) <u>Respuesta comprensiva.</u> "...La cantidad variable cambia y la constante no..."(10 alumnos)</p>
3	¿Qué entiende por sistema de coordenadas cartesianas en el plano?	<p>a) <u>Respuestas fuera de contexto.</u> "...se entiende por las coordenadas ó los ejes ,, y ..."(2 alumnos)</p> <p>b) <u>Respuesta aproximada.</u> "...los datos que nos proporcionan la ubicación de algún punto en este plano..."(7 alumnos)</p> <p>c) <u>Respuesta comprensiva.</u> "...un sistema es aquel que explica un método de entradas...ya sea en ecuaciones...para poderlo ver de manera gráfica..."(3 alumnos)</p>

Figura 5. Ejemplo de la clasificación de respuestas realizada en la actividad 1.

En términos generales, con las respuestas obtenidas en la actividad 1, podemos decir que los alumnos tienen nociones muy claras de los términos: variable, constante y pendiente de una recta, mientras que se destacan dificultades en los términos de recta secante, límite y derivada.

En relación a la actividad 2, en el análisis de los resultados observamos que, la motivación que se logra en los alumnos cuando se introducen herramientas tecnológicas en el aula favorece mucho la participación de éstos en las actividades (ver figura 6).

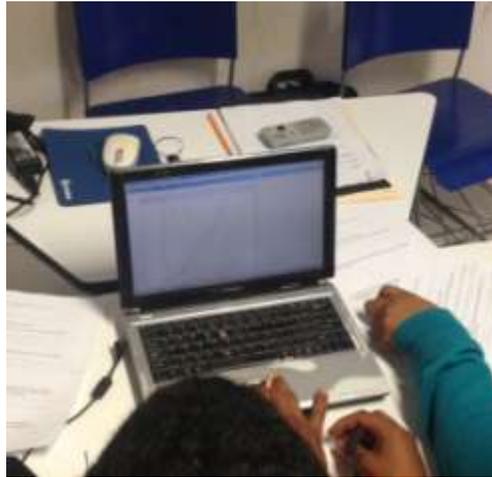


Figura 5. Alumnos manipulando la herramienta.

Cabe destacar que en la experimentación realizada, hubo equipos en los que se detecta claramente el uso adecuado de los términos involucrados, donde reconocen que los errores pueden ser finitos o infinitamente pequeños, y que se requieren técnicas de medición propias del cálculo para poder detectarlos, tal como se muestra en la figura 7.

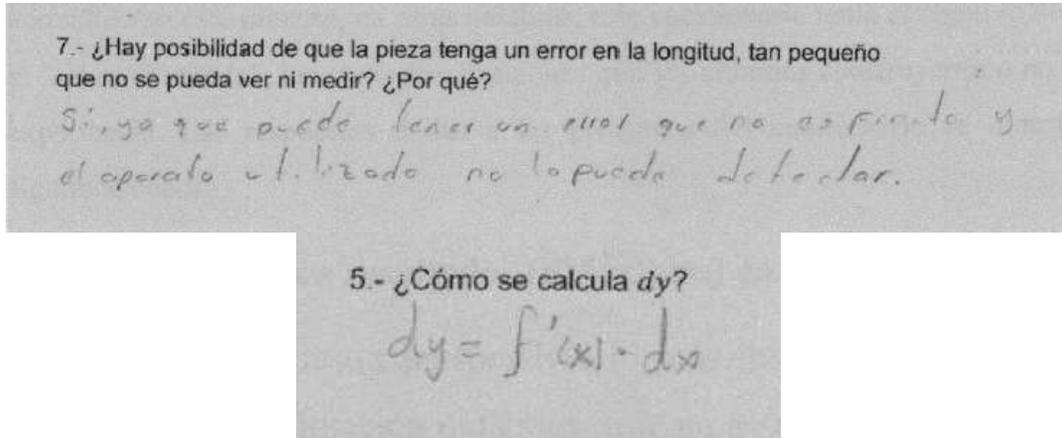


Figura 6. Ejemplo de respuestas donde se detecta el uso de términos y su contextualización.

Finalmente, en la tercera actividad, que se refiere a la institucionalización, podemos decir que lo más relevante es la manera en la que el docente va conceptualizando cada uno de los términos de la diferencial, aplicándolos simultáneamente al problema planteado, en la que por consiguiente, se da un reconocimiento formal del concepto por parte de los estudiantes.

La última fase contemplada por la ingeniería didáctica, se refiere a la realización de un análisis a posteriori, que consiste en una confrontación de los resultados esperados contra los obtenidos, la siguiente tabla concentra algunos de los resultados más relevantes de este análisis.

Tabla 1. Ejemplo del análisis realizado.

Fase	Análisis a priori	Análisis a posteriori
Acción	Que los alumnos entiendan y se apropien del problema, buscando estrategias para llegar a una solución	En todas las actividades hubo una excelente participación y respuesta en esta fase
Formulación	Que escriban respuestas razonadas de acuerdo a sus conocimientos	En la mayoría de los casos se logró, solo en preguntas como la 3 y la 8 se dio el caso que uno de los equipos emitiera una respuesta fuera de contexto.
Validación	Confrontación de ideas de forma que se emitan argumentos convincentes que los lleve a consensar una respuesta por equipo.	Se logró parcialmente, pues en algunos equipos se presentaron respuestas diferentes entre los integrantes del mismo.
Institucionalización	Que logran esbozar un acercamiento a la	La mayoría logró comprender el proceso por el cual se

	definición formal de diferencial	calcula la diferencial, además de que se logró evidenciar cómo cada uno de los elementos que intervienen en el concepto son aplicados a problemas prácticos.
--	----------------------------------	--

### Conclusiones

Con base en la construcción de esta actividad, los resultados obtenidos y el análisis realizado, podemos concluir, en primer lugar, que el uso de la Teoría de Situaciones Didácticas es pertinente en el diseño de situaciones en las que los alumnos sean partícipes de su propio conocimiento, y a la vez permite al docente, conocer la evolución que ha tenido el concepto, los errores típicos que se comenten por parte de los alumnos y la propuesta de abordaje de los libros, esto brinda un panorama completo de los factores que se deben considerar al momento de diseñar una situación.

Los estudiantes lograron comprender la propagación del error, la aproximación de la línea secante a la línea tangente y la zona en qué se da el error infinitamente pequeño y porqué. También la mayoría de los estudiantes fueron capaces de reconocer la definición formal de diferencial, reconociendo cada una de las partes que lo componen tanto analíticamente como geoméricamente, consideramos que fue de mucha importancia la construcción del programa para la visualización del diferencial.

### Referencias bibliográficas

- Brousseau, G. (1986) *Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. Recherches en didactique des Mathématiques*, (Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Traducción de Dilma Fregona y Facundo Ortega). UNC, Córdoba, 7 (2), 33- 115.
- Brousseau, G. (1998) *Los diferentes roles del maestro*. En C. Parra, C. y I. Saiz, I. comps.), *Didáctica de matemáticas – Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.
- Brousseau, G. (2007) *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Ed. Zorzal.
- Flores, R., Valencia, M., Dávila, G. y García, M., (2008). *Fundamentos del cálculo*, México, Editorial Garabatos.
- Granville, W. (2001). *Cálculo Diferencial e integral*. México, D.F.: Ed. Limusa, S.A. de C.V.
- L'Hospital. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. México, D. F.
- Purcell, E., Vargeg, D., Rigdon, S. (1998). *Cálculo*. Novena Edición. México: Ed. Pearson Educación.
- Sierpinska, A. (1998) Mathematics: ¿"in conext", "pure", or "whith applications"? *Fort he Learning of Mathematics*, Vol. 15, Num. 1, pp. 2-15.