



# REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<http://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores  
del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV      Número 2      Fecha: Diciembre, 2016

ISSN: 2395-955X

## Directorio:

Rafael Pantoja R.

Director

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA EL CONCEPTO DE  
LÍMITE CON EL USO DE LA CALCULADORA TI-NSPIRE  
CX CAS

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Sección: Selección de artículos

G. Eréndira Núñez Palenius, María del Rosario Gallardo Reyes,  
Paulina Calderón Vargas

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México

*erepalenius@hotmail.com, chayogallardo@terra.com.mx,  
paulina\_cv@outlook.com*

Elena Nesterova

Alicia López B.

Sección: Experiencias Docentes

Para citar este artículo:

Christian Morales O.

Sitio WEB

Esnel Pérez H.

Lourdes Guerrero M.

Sección: Geogebra

Núñez, G. E. y Gallardo, M del R. (2016). Actividades de  
aprendizaje para el concepto de límite con el uso de la calculadora  
TI-NSPIRE CX CAS. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV,  
No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de  
Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.  
ISSN: 2395-955X. México.

ISSN: 2395-955X

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 2, Julio – Diciembre 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: <http://www.amiutem.edu.mx/revista>, [revista@amiutem.edu.mx](mailto:revista@amiutem.edu.mx). Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 28 de Diciembre de 2016.

Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA EL CONCEPTO DE LÍMITE CON EL USO DE LA CALCULADORA TI-NSPIRE CX CAS

G. Eréndira Núñez Palenius, María del Rosario Gallardo Reyes, Paulina Calderón Vargas

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México

*erepalenius@hotmail.com, chayogallardo@terra.com.mx, paulina\_cv@outlook.com*

**Palabras clave:** Registro de representación semiótica, aprendizaje cooperativo, límite, CAS.

### Resumen

Este trabajo es parte de un proyecto de Investigación, en el cual están involucrados un grupo de profesores y estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana. Se presentan los resultados obtenidos en una experimentación en donde se aplicaron Actividades de aprendizaje diseñadas con un enfoque novedoso sobre el estudio del concepto de Límite, apoyado con la calculadora simbólica TI-Nspire CX CAS. La metodología se implementó con trabajo cooperativo y con discusión grupal, con alumnos de primer año de la carrera antes mencionada, teniendo como evidencias: videograbaciones, actividades resueltas y hojas de trabajo.

### Introducción

Las matemáticas sin contexto son abstractas y por ende requieren de una completa atención y dedicación para poder apropiarse de sus conceptos, por este motivo la enseñanza de las matemáticas parte del uso de material concreto, permitiendo que el mismo estudiante experimente el concepto desde la estimulación de sus sentidos, logrando llegar a interiorizar los conceptos que se quieren enseñar, a partir de la manipulación de los objetos en su entorno.

El uso de la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, permite crear instrumentos atractivos con alto grado de interactividad, que facilitan la exploración, el descubrimiento y la investigación de conceptos y relaciones. Es por ello que se considera altamente apropiada la integración de sistemas de álgebra computacional (CAS), reconocidos por su combinación poderosa de computación simbólica y visualización gráfica en la enseñanza de las matemáticas, ya que desde su introducción CAS se ha visto como una herramienta altamente valiosa para hacer matemáticas y potencialmente viable para la enseñanza y aprendizaje de las mismas.

Estudios implementados en clases de matemáticas en el nivel medio superior y superior (Heid, 1988; Atkins, Creegan y Soan, 1995; Pierce, 1999; Lagrange 2000), han apoyado el argumento de que la manipulación simbólica dentro del CAS, puede evitar los errores de manipulación de los alumnos, así como permitirles generar resultados exactos y aproximados de manera rápida. De acuerdo a Kutlzer (1994), la habilidad de construir bases conceptuales en CAS, permite que los alumnos puedan manejar problemas más complicados que la mayoría de alumnos que trabajan de maneras tradicionales (lápiz y papel). Además, tener las facilidades de manipulación simbólica, capacidades numéricas y representaciones gráficas, puede promover el hábito de utilizar las tres representaciones para aumentar su conocimiento (Pierce, 1999).

Un antecedente de este proyecto de investigación es el de Heid (1988), que demostró que el CAS puede facilitar el desarrollo de conceptos matemáticos.

En los últimos años se ha demostrado que el uso de nuevas tecnologías (computadoras, calculadoras, sensores, etc.) abre perspectivas fundamentales para la enseñanza de las matemáticas y otras ciencias (Sutherland, Rojano, Mochón, 1996; Rojano, 2003). Por lo citado anteriormente se optó por trabajar las actividades de Aprendizaje con la calculadora TI-Nspire CX CAS, ya que la integración de sistemas de álgebra computacional (CAS) es reconocida por su combinación poderosa de computación simbólica y visualización gráfica en la enseñanza de matemáticas. Asimismo, Heid (1988) demostró que el uso de CAS puede facilitar el desarrollo de conceptos matemáticos además de provocar una re-secuencia de conceptos y habilidades en cursos de matemáticas.

### **Objetivos**

El Objetivo que se propone en este trabajo es lograr que por medio de la aplicación de actividades de Aprendizaje con una estructura didáctica, los estudiantes aprendan de manera significativa el concepto de Límite e identifiquen su representación teórica y gráfica, apoyados de la calculadora TI- NSPIRE CX CAS.

Además, conocer los resultados de investigación cuando se trabajan actividades de Aprendizaje que involucran el concepto de Límite, diseñadas bajo el esquema de *Tarea–Técnica–Tecnología* (TTT) dentro de un ambiente CAS (Ibarra, 2015), con apoyo de una metodología de trabajo cooperativo.

### **Marco Teórico**

En un marco más amplio del pensamiento con el uso de herramientas tecnológicas, se da la semiótica de Duval (1993), que cita “los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción o a una experiencia intuitiva inmediata y es necesario entonces poder proporcionar representaciones”. También afirma (Duval, 2004), que para lograr la conceptualización, o lo que podríamos considerar “aprendizaje”, el estudiante debe recurrir a varios registros de representación semiótica, ya sean gráficos, símbolos, íconos, tablas, expresiones en lenguaje natural, etc.

Por otro lado, se aplicó la metodología de trabajo cooperativo en atención a sus características particulares, ya que puede ser caracterizado por actividades en donde se establecen objetivos del grupo, cada individuo es responsable por su trabajo, todos los miembros tienen la misma oportunidad para tener éxito, hay competencia entre los equipos, cada miembro tiene una tarea a realizar y la instrucción se adapta a la necesidad del individuo (Brody, 1995). Además, la importancia del aprendizaje cooperativo es una de las suposiciones propuestas por teóricos constructivistas (Loyens *et al.*, 2007).

El aprendizaje cooperativo es el corazón del aprendizaje basado en problemas, se relaciona con el aprendizaje colaborativo en que hace hincapié en el "aprendizaje natural" que se produce como un efecto de la comunidad en la que los estudiantes trabajan juntos en grupos no estructurados y crean su propia situación de aprendizaje (Johnson, 1998).

Como ya se ha mencionado, se considera que la tecnología juega un papel fundamental en la configuración del proceso de aprendizaje individual, y por supuesto, en la manera en que se genera el conocimiento colectivo. Para que se dé un intercambio de ideas, deben existir experiencias previas compartidas, estrategias para obtener información,

maneras de argumentar las ideas y propuestas, formas de evaluar las aportaciones de los demás, repetir y reformular lo que dicen los otros.

### Metodología

En este apartado, se hizo una extensa búsqueda de información bibliográfica, basada en la literatura utilizada en el diseño original de las actividades (Ibarra, 2015), el cual involucra los temas de Cálculo Diferencial de acuerdo al programa del primer módulo de la carrera de Ingeniería Química. Además se consultaron artículos de investigadores como Duval (2004), que aborda la Teoría de las Representaciones Semióticas, Hitt (2009) que menciona temas sobre uso de tecnología, Kieran, C., y Saldanha, L. (2008) que trabajaron con actividades algebraicas con la misma estructura didáctica, Panitz (1997) que propone una definición para los aprendizajes cooperativo y colaborativo, Vygotsky (1986) quien propone que los procesos mentales superiores pueden ser considerados como funciones de actividades mediadas y sugiere tres clases principales de mediadores: herramientas físicas, herramientas psicológicas y otros humanos, Ibarra (2015) que propone el diseño original de las actividades, Artigue (2002) que nos enfoca al concepto de instrumento y nos menciona el esquema T-T-T (Tarea-Técnica-Tecnología) y finalmente, Heid (1998) quien demostró que CAS puede facilitar el desarrollo de conceptos matemáticos.

Con base en la aplicación de las actividades que realizó Ibarra (2015), se diseñó un plan de trabajo que permitiera planificar de manera general las experimentaciones que se llevarían a cabo para esta investigación; para considerar el número de estudiantes que participarían, la formación de los equipos con integrantes de diferentes niveles académicos, de qué manera se distribuirían los equipos en el salón de clases, el tiempo necesario para resolver cada actividad, el lugar en dónde se colocaría la cámara fija, el desplazamiento de la cámara móvil, el papel que tomaría cada estudiante de acuerdo al rol establecido en el diseño de las actividades de aprendizaje, el empleo de plumas de diferentes colores para no borrar razonamientos erróneos, el diseño de una actividad para el uso y manejo de la calculadora TI-Nspire CX CAS en donde se explicaran los principales comandos a utilizar, y por último, la intervención del investigador en puntos específicos durante el desarrollo de la experimentación.

Como parte de la metodología se encuentra analizar los datos obtenidos de las evidencias recabadas, como son: los videos, las actividades de aprendizaje y las hojas en donde los estudiantes escribieron razonamientos extras. Al finalizar la última sesión de cada experimentación se clasificó la información obtenida y se analizó.

La estrategia de trabajo se llevó a cabo en un ambiente de cooperación y discusión de resultados, con alumnos de primer año de la licenciatura de Ingeniería Química que formaron equipos de tres integrantes, los roles que adoptaron fueron el de *líder*, *manejo de calculadora* y *manejo de la actividad*; intercambiando los roles en cada sesión. Se desarrollaron cuatro actividades de aprendizaje, estructuradas por una sección de lápiz y papel, otra en donde utilizaron el sistema CAS de la calculadora y una última parte de simbolización (Ibarra, 2015).

Las actividades contemplan una secuencia conceptual con los temas de Diferencias (Actividad 1), Pendientes (Actividad 2), Pendientes como función (Actividad 3) y Límites (Actividad 4). Las interacciones y discusiones entre ellos y los investigadores, fueron grabadas con tres cámaras de video para ser analizadas posteriormente.

## **Exposición de la propuesta**

Este trabajo presenta los resultados obtenidos de una investigación, donde se evidencia cómo los estudiantes aprenden el concepto de límite, al trabajar con actividades de aprendizaje con el apoyo de la calculadora simbólica TI-Nspire CX CAS.

La investigación inicia con una etapa exploratoria, denominada experimentación piloto seguida de una experimentación formal. En ambas experimentaciones se aplicó una actividad diseñada para el uso de la calculadora que requiere la interacción entre el alumno y las herramientas dentro de CAS, siguiendo con actividades que facilitan el desarrollo conceptual del Límite mediante el apoyo de la calculadora simbólica Ti-Nspire CX CAS.

A partir del trabajo realizado por los alumnos durante la exploración, se continúa con la observación y el análisis de las actividades de aprendizaje, para pasar a la conceptualización y posteriormente a la generalización del Límite.

Se trabajó en grupos formados por tres personas para desarrollar las actividades lo que ocasionó algunas dificultades entre los estudiantes que fueron transformadas en retos, para dar pauta a la posibilidad de que construyeran sus conocimientos en un ambiente de intercambio de ideas, puntos de vista y convencimiento, brindando así la oportunidad de que se genere un aprendizaje significativo.

## **Experimentación**

La parte experimental de esta investigación se realizó en dos etapas: la primera fue una Experimentación Piloto y la segunda una Experimentación Formal. La primera se realizó con el fin de:

1. Observar la estructura didáctica de las actividades.
2. Revisar los conceptos involucrados en las actividades que se les dificultaron a los estudiantes al contestarlas.
3. Observar razonamientos erróneos de los alumnos, para que el profesor intervenga en la experimentación formal y que por medio de cuestionamientos el estudiante pueda rectificar su razonamiento.

De acuerdo con lo observado en las evidencias de la experimentación piloto, se hicieron las modificaciones pertinentes para aplicar la experimentación formal.

### ***Experimentación Piloto***

En la experimentación se trabajó con 27 alumnos del primer año, de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, los que se organizaron en nueve equipos de tres integrantes. Dentro del trabajo en equipo, cada integrante tuvo un rol específico que cambiaba de una actividad a otra: un estudiante trabajaba con la calculadora, otro como coordinador dentro del trabajo en equipo y el tercero haciendo las anotaciones en la actividad de aprendizaje. Se entregó por equipo la actividad respectiva, una calculadora TI-Nspire CX CAS, hojas en blanco para anotaciones extras y tres plumas de diferentes colores (negro, azul y rojo) con la finalidad de que los alumnos no borrarán ninguna respuesta en caso de considerarla errónea y constituya evidencia acerca del razonamiento inicial que utilizaban para llegar a la respuesta final.

Las interacciones y discusiones entre los equipos y el investigador fueron grabadas con tres cámaras de video: dos cámaras móviles para tener un mayor acercamiento al trabajo de cada equipo y una cámara fija que permaneció en un lugar estratégico del aula de tal manera que enfocara a todo el grupo para tener la evidencia de la interacción del grupo en general. Cuando se terminó la Experimentación Piloto, se inició la revisión y análisis de todas las evidencias obtenidas en el desarrollo de la solución de las actividades de aprendizaje.

Antes de aplicar las actividades de aprendizaje diseñadas, se dio una breve introducción sobre los principales comandos de la calculadora simbólica TI-Nspire CX CAS. Se hizo hincapié en las múltiples funciones de algunos botones, por ejemplo, el mismo botón que enciende la calculadora (HOME) la puede apagar al presionar CTRL (botón azul) y después HOME. Las funciones secundarias se presentan en azul, por lo tanto es necesario presionar el botón CTRL primero y después el botón correspondiente para obtener el comando deseado. En la calculadora se trabaja con páginas o pestañas.

Esta experimentación se llevó a cabo en cinco sesiones de dos horas cada una, cuya descripción se expone a continuación.

En la **primera sesión** se trabajó con una actividad que tiene por objetivo que el estudiante maneje la calculadora TI-Nspire CX CAS con sus principales comandos que son: *Enter*, *Factor*, *Expand* y *Solve*. Dicha actividad se aplicó para que los alumnos practicara con la calculadora antes de realizar las actividades de aprendizaje. Al terminar esta actividad se inició con el trabajo de la Actividad 1 de *Diferencias*, en donde se les indicó el cambio de rol por equipo y se les proporcionó el siguiente material: la actividad de aprendizaje, plumas de colores, hojas en blanco y una calculadora simbólica TI-Nspire CX CAS.

La **segunda sesión** de trabajo fue la aplicación de la Actividad 2 de *Pendientes*, momento en que se les indicó el cambio de rol por equipo y se les proporcionó el mismo material que en la primera sesión, únicamente cambiando la actividad correspondiente. En esta sesión hubo mayor interacción entre el investigador y los alumnos debido al contenido de la actividad.

En la **tercera sesión** se aplicó la Actividad 3 de *Pendientes como función*, cambiando el rol de trabajo de los estudiantes como lo establece el diseño de las actividades, se entregó la actividad correspondiente, lapiceros de colores, hojas en blanco y una calculadora simbólica TI-Nspire CX CAS. De acuerdo a la metodología, se plantearon puntos específicos en donde intervendría el investigador.

En la **cuarta y quinta sesión** se trabajó con la Actividad 4 de *Límites* debido a que su contenido se consideraba el más extenso. Se procedió de la misma manera que en las actividades anteriores, cuidando que los alumnos respetaran el rol correspondiente en las dos sesiones. Al finalizar estas sesiones se les pidió a los estudiantes dar una opinión general del contenido y estructura de las cuatro actividades, así como de las dificultades y beneficios didácticos de la aplicación de las mismas.

### ***Experimentación Formal***

Esta experimentación se llevó a cabo tomando en cuenta todas las observaciones realizadas de la experimentación piloto y se trabajó de la misma manera, cinco sesiones de

dos horas cada una y con 21 alumnos de primer año de la Facultad de Ingeniería Química organizados en siete equipos de tres personas cada uno. El rol de los estudiantes se cambió en cada una de las sesiones, un estudiante trabajaba con la calculadora, otro como coordinador del trabajo en equipo y el tercero haciendo las anotaciones en la actividad de aprendizaje.

Se instalaron tres cámaras de video, dos móviles para tener un mayor acercamiento al trabajo de los equipos y poder seguir de cerca sus razonamientos, así como una fija que se colocó de manera estratégica para videograbar a todo el grupo. Esta disposición de las cámaras se utilizó en todas la sesiones de trabajo.

Al inicio de la **primera sesión** se entregó por equipo: un folder que contenía las actividades para el Uso y manejo de la calculadora TI-Nspire CX CAS, la Actividad 1 de *Diferencias* y además, hojas en blanco para hacer cualquier anotación extra; la calculadora TI-Nspire CX CAS; tres plumas de diferentes colores (rojo, azul y negro) con la finalidad de que los alumnos no borrarán ninguna respuesta que consideraran errónea, para tener evidencias acerca del razonamiento inicial que utilizaban para llegar a la respuesta final. Esta estrategia se aplicó en todas las sesiones de trabajo.

En la **segunda sesión**, se trabajó con la Actividad 2 de *Pendientes*, siguiendo la misma estrategia que en la primera sesión y respetando el cambio de rol antes mencionado.

En la **tercera sesión**, se aplicó la Actividad 3 cuyo título es *Pendientes como función*.

En las dos últimas sesiones de trabajo se aplicó la actividad 4 de *Límites*, debido a la extensión de la misma. Además, se les solicitó a los estudiantes que por equipo expresaran su opinión acerca del contenido y estructura de las actividades. Finalmente, se les agradeció a los alumnos por su valiosa participación y apoyo para la realización de la presente investigación.

En cada sesión de trabajo se elaboró una bitácora de acontecimientos para que en el análisis de resultados sirviera de apoyo al revisar las evidencias generadas.

## Resultados

Los resultados que se muestran a continuación se extrajeron de las evidencias recabadas en el desarrollo de la experimentación formal y fueron seleccionados debido a que presentan razonamientos importantes para el logro de los objetivos planteados.

Uno de los objetivos de la actividad de Límites, plantea que el estudiante relacione la velocidad promedio con la velocidad instantánea; para hacerlo, primero debe encontrar la relación de la velocidad promedio con la ecuación de la pendiente en un problema del lanzamiento de una piedra, lo cual se presenta a continuación:

d) Relacione la velocidad promedio con la ecuación de la pendiente. ¿Qué observa?

Handwritten text: la pendiente se puede tomar como la velocidad promedio

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Handwritten text: la variable x = tiempo

Handwritten text: la variable y = distancia

Figura 1. Evidencia de relación de velocidad promedio y Pendiente.

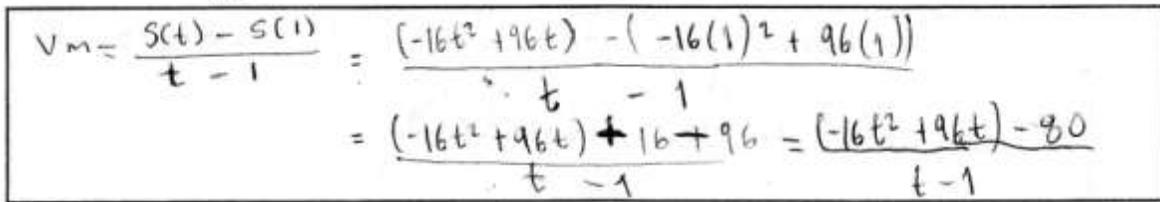
Al obtener la evidencia anterior, los estudiantes comienzan a realizar el análisis a través de un diálogo, el cual se presenta a continuación:

Integrante 1: (Lee la indicación del inciso d, Parte I) Relacione la velocidad promedio con la ecuación de la pendiente. ¿Qué observa?

Integrante 2: Es la misma, nada más que la variable “y” representa la distancia y la “x” representa el tiempo. Pero es la misma ecuación.

Después de responder esta parte, los alumnos leen el texto acerca de la posición de la piedra obteniendo así la siguiente evidencia:

h) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a  $t_0 = 1$ , se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo  $[1, t]$ . Escriba la ecuación de la velocidad promedio.



$$V_m = \frac{S(t) - S(1)}{t - 1} = \frac{(-16t^2 + 96t) - (-16(1)^2 + 96(1))}{t - 1}$$

$$= \frac{(-16t^2 + 96t) + 16 - 96}{t - 1} = \frac{(-16t^2 + 96t) - 80}{t - 1}$$

Figura 2. Evidencia de la velocidad promedio

Para que los alumnos respondieran la evidencia anterior, llevaron a cabo el siguiente diálogo:

Integrante 1: (Lee el inciso h de la Parte I) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a  $t_0 = 1$ , se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo  $[1, t]$ . Escriba la ecuación de la velocidad promedio.

Integrante 2: La velocidad instantánea en ese punto ( $t_0 = 1$ ) es igual a  $V_m \frac{s(t) - s(1)}{t - 1}$ .

Investigador: A ver muchachos ¿cómo se vería esa ecuación (señalando ecuación de  $V_m$ ) si utilizas la expresión del desplazamiento en términos de  $t$  y  $t_0$ ?

Integrante 1: ¿El desplazamiento es la que nos está dando acá? (Señala la ecuación de la actividad para la posición de la piedra  $S(t) = -16t^2 + 96t$ ).

Investigador: Efectivamente, ahora ¿cómo se vería la velocidad promedio utilizando la expresión del desplazamiento cuando  $t_0 = 1$ ?

Integrante 1: Entonces sería poner toda la expresión.

Investigador: ¿Cómo quedaría la ecuación si utilizas toda la expresión como tú dices?

Integrante 1: (Escribe la ecuación expresada en la figura 15).

En la siguiente evidencia se establece la relación entre la velocidad promedio y la velocidad instantánea. Dando respuesta al inciso i) cumple con el segundo objetivo, ya que es necesario expresar el límite para un caso en particular, es decir, la velocidad instantánea de la piedra en un tiempo específico.

i) Sustituya la velocidad promedio en del inciso h de la expresión de la velocidad instantánea. En donde  $t_0 = 1$ .

$$V_{\text{instantánea}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-16(t)^2 + 96(t) - 80}{t - 1}$$

Figura 3. Evidencia de la relación entre velocidad promedio y velocidad instantánea, así como concepto de límite matemático

### Observaciones

Las evidencias obtenidas anteriormente nos muestran que los alumnos entienden la ecuación de la pendiente, ya que logran relacionarla con la ecuación de la velocidad promedio. Además, entienden la aplicación de la ecuación de la velocidad promedio pero no les queda claro que la expresión que deben utilizar es la ecuación de la posición de la piedra para los tiempos  $(t_0, t)$  cuando  $t_0 = 1$ , por lo cual es necesaria la intervención del investigador para que por medio de cuestionamientos los estudiantes razonen sobre la ecuación que estaban empleando y sobre si cumplía con lo que se les indicaba en el inciso. En su intervención, el investigador les sugiere utilizar la ecuación del desplazamiento tal cual como está planteada en la actividad, para que ellos observen la importancia de hacer el desarrollo de la ecuación de la velocidad promedio en términos de la posición de la piedra y así relacionarla con la ecuación de la velocidad instantánea.

De acuerdo con lo anterior, se puede concluir que los alumnos hacen un razonamiento correcto acerca de la relación que hay entre la velocidad promedio y la velocidad instantánea. Contestando correctamente los incisos antes mencionados se cumplen los dos primeros objetivos de la actividad.

En el tercer objetivo que se plantea en la actividad es necesario que el alumno deduzca y comprenda el significado del concepto de Límite a través de un análisis gráfico y otro analítico. Para lo anterior, debe utilizar las herramientas de la calculadora y las gráficas generadas en ella. Obteniéndose la siguiente evidencia:

c) Compruebe utilizando el comando de trazado. (Dentro de la gráfica, presione **Menú, 5: Trazado, 1: Trazado de gráfico** y elija el número y presione **Enter**). ¿Qué sucede?

Aparece una X ya que con este valor de indeterminado

Figura 4. Evidencia de análisis de la herramienta de CAS.

h) Represente gráficamente los casos i, ii, y iii.

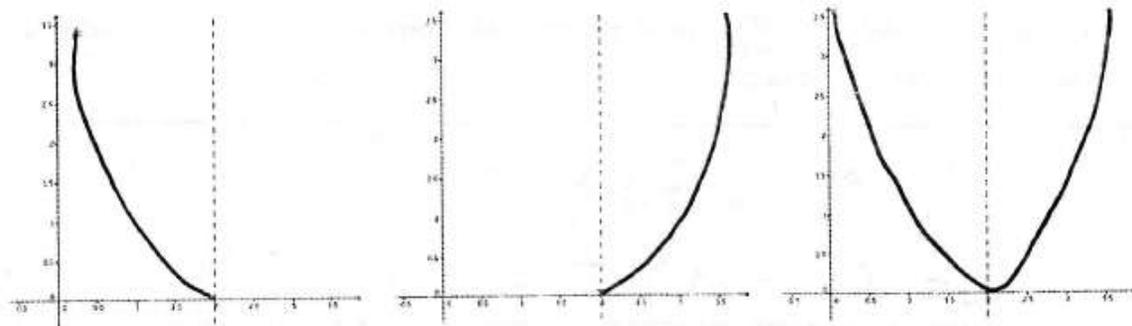


Figura 5. Evidencia de análisis gráfico de Límite continuo.

j) Represente gráficamente: i)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$ , ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ , iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ .

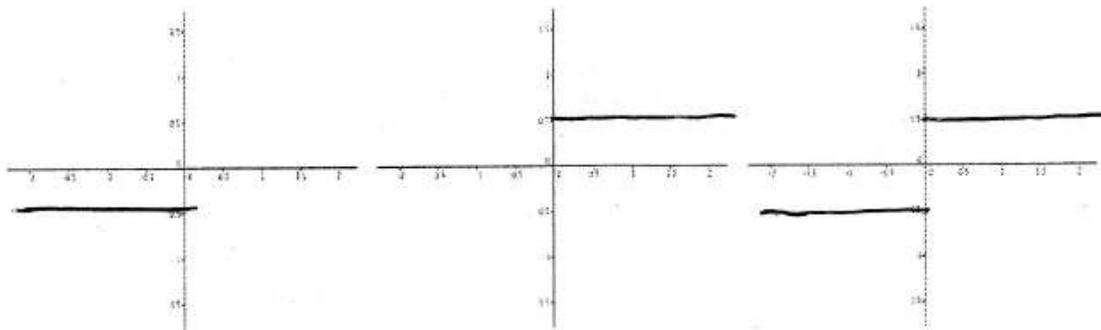


Figura 6. Evidencia del análisis gráfico del Límite Discontinuo.

En la evidencia mostrada, los alumnos hacen el análisis gráfico y analítico del concepto de Límite continuo y discontinuo; para que a través de ellos puedan llegar al concepto de límite por la derecha y por la izquierda, lo cual se muestra en la evidencia siguiente:

n) ¿Qué relación existe entre el límite, límite de la derecha y límite de la izquierda?

Que para que ambos puedan ser un límite debe tender al mismo número por la izquierda y por la derecha.

Figura 7. Evidencia de la conceptualización de límite.

Para responder lo que se muestra en la evidencia anterior, los alumnos hacen el siguiente análisis:

Integrante 2: (Lee la pregunta del inciso n). ¿Qué relación existe entre el límite, límite de la derecha y límite de la izquierda?

Integrante 1: Que cuando es límite llegan a un mismo punto.

Integrante 2: O sea a un punto específico.

Integrante 1: Y el límite derecho sería como en este caso ¿no? (Señalando la gráfica del inciso j, para los valores del límite por la derecha).

Investigador: Observen las gráficas de los incisos h) y j) y díganme ¿qué comportamiento hay en cada una de ellas?

Integrante 1: Que en este (señala gráficas del inciso h) se llega a un mismo punto por los dos lados y aquí (señala gráficas del inciso j) se llega a un valor paralelo en diferentes direcciones.

Investigador: Observen detalladamente sus gráficas ¿qué pasa en las gráficas del inciso h?

Integrante 1: No llegan a converger como tal pero sí tienden a un mismo valor.

Investigador: Ahora, en la gráfica del inciso j) ¿qué pasa?

Integrante 1: No llegan al mismo valor.

Investigador: Entonces ¿cuál es la relación entre el límite por la derecha y el límite por la izquierda?

Integrante 1: Que el límite como tal tiene que llegar a un mismo valor tanto por la izquierda como por la derecha para que pueda existir y si no llega, no va a ser un límite, o sea no existe.

Analizando las evidencias generadas (gráficas, tablas y las respuestas de los estudiantes), es evidente que comprenden el significado de la existencia de un límite y es necesario que los valores por la izquierda así como los de la derecha deben tender a un mismo valor; pero no saben cómo expresarlo analíticamente, por lo que es necesaria la intervención del investigador para que por medio de cuestionamientos puedan deducir la relación entre las tendencias de los límites.

De acuerdo con lo anterior, los alumnos llegan a conceptualizar el límite por medio de dos tipos de análisis, uno analítico y otro gráfico; de manera que lo van desarrollando gradualmente con ayuda de la calculadora TI-Nspire CX CAS para alcanzar el tercer objetivo de la actividad.

## Conclusiones

De acuerdo a lo establecido en la literatura, observamos que innumerables estudios han demostrado que las técnicas de enseñanza pasivas no son adecuadas para un aprendizaje significativo. En este trabajo, la interacción que se lleva a cabo a través de discusiones individuales y grupales al desarrollar las actividades hace posible que se genere una enseñanza activa.

Las actividades de aprendizaje fueron aplicadas con el objetivo de que los estudiantes construyeran su conocimiento al relacionar conceptos e ideas implícitos en las mismas y al manejar diferentes registros de representación y transitar entre ellos.

Por otro lado, los alumnos utilizan como estrategia de solución las discusiones que se generan derivadas de las interrogantes que se plantean durante el desarrollo de la actividad, dichas discusiones permiten que vayan creando un razonamiento propio.

El uso de la calculadora TI-Nspire CX CAS es parte fundamental de este proyecto ya que, en conjunto con las actividades de aprendizaje con estructura didáctica, los

estudiantes lograron entender el concepto de límite. Además, se fortaleció el trabajo en equipo por medio del aprendizaje colaborativo y cooperativo.

Por otra parte, debemos ser conscientes de que la preparación que los estudiantes poseen es insuficiente en este tipo de tareas y que la habilidad para interactuar entre diferentes registros de representación no surge como una acción espontánea del sujeto, se requiere de aprendizaje. El aprendizaje se logra enfrentando a los alumnos a situaciones problemáticas que necesiten de traslados entre las distintas representaciones semióticas (Duval, 2006), que requieren la noción matemática que es objeto del aprendizaje.

Este trabajo de investigación nos permite ver que es necesario seguir investigando acerca de nuevas teorías y trabajar arduamente en el aula para ponerlas en práctica, analizando y tratando de mejorar no sólo una labor docente en pos del buen desempeño de los estudiantes, sino también cuidar que el alumno pueda construir conceptos matemáticos.

### Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection About Instrumentation and The Dialectics Between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.
- Atkins, N., Creegan, A. y Soan, P. (1995). You can lead students to DERIVE, but can you make them think? *International DERIVE Journal*, 2(1), 63-82.
- Brody, C. (1995). ¿Collaborative or cooperative learning? Complimentary practices of instructional reform. *The Journal of Staff, Program, & Organization Development*, 12(3), 133-142.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas superiores en el Desarrollo cognitivo*. Cali: Universidad del Valle. 121 p.
- Duval, R. (2006). *A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics*. Educational Studies in Mathematics. 103-131. Springer.
- Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 3-25.
- Hitt, F. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with task designed from a task-technique-theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*.
- Kieran, C., y Saldanha, L. (2008). Designing tasks for the codevelopment of conceptual and technical knowledge in CAS activity: An example from factoring. En G. W. Blume y M. K. Heid (eds.), *Research on technology and the teaching and learning of*

- mathematics: Vol. 2 cases, and perspectives (pp. 393-414). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Kutzler, B. (1994). DERIVE – the future of teaching mathematics. *International DERIVE Journal*, 1(1), 37-48.
- Ibarra, G. (2015). *Conceptualización del cálculo diferencial a través de actividades con la calculadora TI-Nspire CX CAS*. (Tesis de Licenciatura). UMSNH. Morelia, Mich.
- Lagrange, J. B. (2000). L'Intégration d'Instruments Informatiques dans l'Enseignement: une Approche par les Techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43(1), 1-30.
- Loyens, S. M. M. (2007). Students' conceptions of constructivist learning. Tesis Doctoral. Rotterdam, the Netherlands: Optima Grafische Communicatie.
- Loyens, S. M. M., Rikers, R. M. J. P., y Schmidt, H. G. (2007). Students' conceptions of distinct constructivist assumptions. *European Journal of Psychology of Education*, 12, 179-199.
- Panitz, T. (1997). Collaborative versus Cooperative Learning: Comparing the Two Definitions Helps Understand the Nature on Interactive Learning. *Cooperative Learning and College Teaching*, 8(2).
- Pierce, R. (1999). Using CAS as a scaffolding for calculus: Some observations. En W. Spunde, P. Cretchley y R. Hubbard (eds.), *The Challenge of Diversity: Proceedings of the Delta-99 Symposium on Undergraduate Mathematics* (pp. 172-176). Brisbane: Delta 99 Committee.
- Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación* (33), 135-168.
- Sutherland, R., Rojano, T., Mochón, S. (1996). Mathematical Modelling in the Sciences through the eyes of Marina and Adam. *En proceedings of PME-20*, 4, 291-297.
- Vygostky, L. S. (1986). *Trouth and language*. Cambridge, MA: MIT-Press.