REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores

del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Diciembre, 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

NEGACIÓN DEL V POSTULADO DE EUCLIDES Y GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS UTILIZANDO SOFTWARE LIBRE

José Francisco Villapando Becerra, Elena NEsterova, Francisco Javier González Piña

CUCEI, Universidad de Guadalajara, México

jose.villalpando@red.cucei.udg.mx, *elena.nesterova@cucei.udg.mx*, *fjavierpina@hotmail.com*

Para citar este artículo:

Villalpando, J. F., Nesterova, E. y González, F. J. (2016). Negación del V postulado de euclides y geometrías no euclidianas utilizando software libre. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 2, Julio – Diciembre 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 28 de Diciembre de 2016.

NEGACIÓN DEL V POSTULADO DE EUCLIDES Y GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS UTILIZANDO SOFTWARE LIBRE

José Francisco Villalpando Becerra, Elena Nesterova, Francisco Javier González Piña

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara. México

jose.villalpando@red.cucei.udg.mx, elena.nesterova@cucei.udg.mx, fjavierpina@hotmail.com

Palabras clave: Geometrías no Euclidianas, V postulado de Euclides, software libre.

Resumen

Los intentos efectuados a los largo de casi 23 siglos para demostrar el V postulado de Euclides, desembocaron en la creación, en el siglo XIX, de nuevas geometrías a las que se les conoce genéricamente con el nombre de geometrías no euclidianas. El presente trabajo tiene como objetivo mostrar alternativas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría no euclidiana, por medio de software libre, el cual permita simular construcciones geométricas con regla y compás, esto con la finalidad de verificar la naturaleza de diversos teoremas que son válidos en la geometría euclidiana y comprobar si también los son para la geometría no euclidiana.

Introducción

Ninguno de los intentos realizados durante 23 siglos para tratar de demostrar el V postulado de Euclides, lograron dicho objetivo puesto que, ya sea abierta o encubiertamente, siempre había en estas “pruebas” una *suposición escondida* que resultaba equivalente al postulado mismo.

¿Quiere decir esto, qué los geómetras no fueron suficientemente hábiles para encontrar una demostración? No, no quiere decir esto, lo que en verdad acontece es que tal demostración *no existe* porque el postulado de las paralelas es *independiente* de los restantes postulados de la geometría ecuclideana. Es imposible, pues, que se pueda demostrar a partir de los restantes postulados, el postulado de las paralelas.

La razón, inconscientemente tal vez, por la cual los geómetras trataron durante 23 siglos, de demostrar el V Postulado, era la *evidencia física* que se tenía sobre la naturaleza euclidiana del espacio. No tenían pues razones para dudar de la consistencia, igual a ausencia de contradicciones, de la geometría que les daba el modelo del espacio natural.

El filósofo alemán Kant (1724 – 1804) sostenía que la estructura euclidiana del espacio era una noción ***a priori***, es decir, no era posible concebir una geometría distinta para el espacio, pues éste, con su estructura euclidiana es ***inherente*** a la mente y no es el resultado de la experiencia exterior. Era necesario pues, ante esta ideología dominante, mucho coraje intelectual para reconocer que la geometría del espacio físico es una ciencia experimental y que la geometría euclidiana es un *modelo*, es una sistematización del conocimiento que el hombre va adquiriendo en su interacción con el espacio natural (Villalpando, 2009).

Bromberg y Moreno (1987) afirman que esta creencia, en los axiomas de la geometría euclidiana, del V Postulado en especial, como verdades inalterables, inherentes a la mente humana había de modificarse pues, como lo muestra la historia, ni viejos hábitos de pensamiento ni la autoridad filosófica podía reprimir la convicción de que la inalterable serie de fracasos de la búsqueda de una demostración del V Postulado no se debía a la falta de ingenio sino más bien al hecho de que tal postulado es realmente *independiente* de los otros.

Análogamente, el fracaso en la obtención de una solución por radicales para la ecuación del quinto grado llevó primero a la convicción y luego a la verificación de que tal solución era imposible.

Los matemáticos János Bolyai (1802−1860) y Nicolai Lobachevski (1793−1856), construyeron una geometría en la cual no se verifica el postulado de la paralelas. Ambos desarrollaron su trabajo bajo la convicción de que:

1) El postulado no era demostrable.
2) Añadiendo a la geometría neutra (primeros 28 teoremas del libro I de los Elementos de Euclides) una negación del V postulado, puede desarrollarse una geometría consistente.

De acuerdo a Kagán (1998), Lobachevski no logró pasar de la convicción a la verificación de la consistencia de su geometría no euclidiana. Su punto de vista, lo llevó a meditar sobre las relaciones entre el sistema euclidiano axiomático y el espacio natural: aunque la geometría euclidiana era un modelo que reflejaba con bastante precisión las propiedades del espacio natural, no por ello puede descartarse que una investigación más profunda revele los límites de validez del modelo. En tal caso, la geometría que se usa para modelar el espacio habría que cambiarla y sustituirla por otra más precisa, de acuerdo a los nuevos datos experimentales.

Los descubrimientos de la física durante el siglo XX, han evidenciado que las geometrías no euclidianas pueden ofrecer una representación más conveniente de ciertas estructuras y teorías físicas. La teoría de la relatividad ha demostrado cuán profundas y acertadas eran estas concepciones de Lobachevski.

Un poco más tarde, varios investigadores advirtieron que la cinemática relativista, estaba íntimamente ligada con la geometría hiperbólica de Lovachevsky y Bolyai. La geometría no euclidiana destruyó la concepción kantiana del espacio y demostró no sólo la distinción necesaria entre concepto y experiencia sino también sus interrelaciones.

Como las preguntas que pueden plantease y los resultados que se pueden obtener en las geometrías no euclidianas, son muy distintos de aquellos que pueden plantearse y obtenerse en la geometría euclidiana, es importante utilizar algún software con el cual se puedan simular diversas situaciones, como la exploración de patrones geométricos o la verificación de teoremas.

Existe software especializado, tanto comercial como libre, que puede ser utilizado para la enseñanza y aprendizaje de la geometría no euclidiana, sin embargo, el primero tiene un costo muy elevado, por lo cual resulta muy difícil adquirirlo y tiene además restricciones para copiarse o modificarse. En cambio el segundo ofrece las ventajas de que puede:

- Ejecutarse en cualquier sitio, con cualquier propósito y para siempre.

- Estudiarse y adaptarse a nuestras necesidades.
- Redistribuirse, de modo que se nos permita colaborar con vecinos y amigos.
- Mejorarse y publicar las mejoras.

Por lo que una de las principales ventajas de usar software libre en la docencia, en particular en la enseñanza de las matemáticas, es que se pueden distribuir copias del programa legalmente a los alumnos. Esto facilita a los estudiantes el uso del programa en sus casas. La licencia del programa nos autoriza a hacerlo (Villalpando, 2011).

Otra ventaja es que permite acceder al conocimiento que hay detrás del software. Utilizando software libre, tanto alumnos como docentes pueden, por ejemplo, consultar el algoritmo que utiliza el programa para realizar determinado cálculo, incluso pueden tomar el código fuente en sus manos y mejorarlo, o adaptarlo para hacer algo diferente (Villalpando, García y Rodríguez, 2013).

Estas y otras ventajas emanadas de las libertades mencionadas, pueden ser aprovechadas al máximo en la enseñanza y aprendizaje de la geometría no euclidiana, tal como se verá más adelante.

Los postulados de Euclides

Los *Elementos* de Euclides conforman una obra monumental, pues Euclides enunció unos pocos postulados y fue capaz de deducir, gradualmente, partiendo de estos postulados, 465 teoremas que constituían todo el conocimiento geométrico de su tiempo.

Los *Elementos* de Euclides, no están consagrados exclusivamente a lo que en la actualidad llamamos geometría, sino que contienen ideas sobre la teoría de números y el álgebra elemental tratada geométricamente.

En conjunto, los *Elementos* contienen 23 definiciones, 5 postulados, 5 axiomas o nociones comunes, y las 465 proposiciones o teoremas ya mencionados.

A partir de esas 23 definiciones iniciales Euclides enuncia cinco postulados para la geometría plana. Los primeros cuatro postulados de Euclides son bastante obvios:

Postulado I. Dados dos puntos, se puede trazar una única recta que pase por ellos (Figura 1).

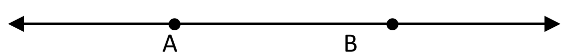


Figura 1. Representación gráfica del Postulado I.

Postulado II. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta (Figura 2).

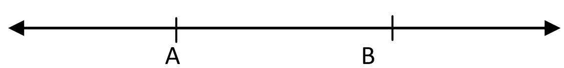


Figura 2. Representación gráfica del Postulado II.

Postulado III. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera (Figura 3).

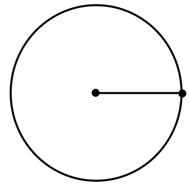


Figura 3. Representación gráfica del Postulado III.

Postulado IV. Todos los ángulos rectos son iguales (Figura 4).

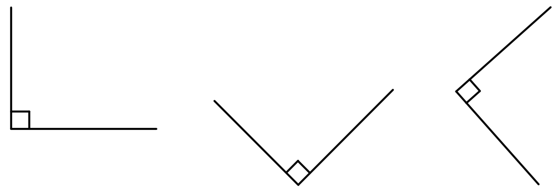


Figura 4. Representación gráfica del Postulado IV.

Para referirse a que dos segmentos tienen igual longitud o que dos ángulos tienen igual medida angular, Euclides dice que son "iguales". Entonces se les puede llamar "congruentes" o "iguales" indistintamente.

Estos postulados satisfacen el ideal griego de que aquello que se postula debe ser "evidente por sí mismo". Sin embargo, en el V postulado esto cambia de repente:

Postulado V. "Cuando una recta transversal interseca a dos rectas dadas, si los ángulos interiores de un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos (2AR), entonces al prolongarse las dos rectas, ellas se intersecan del lado de estos ángulos". Esto se muestra gráficamente en la Figura 5.

Si $\angle a + \angle b <$ 2AR entonces las rectas l_1 y l_2 se intersecarán del lado de los ángulos *a* y *b*.

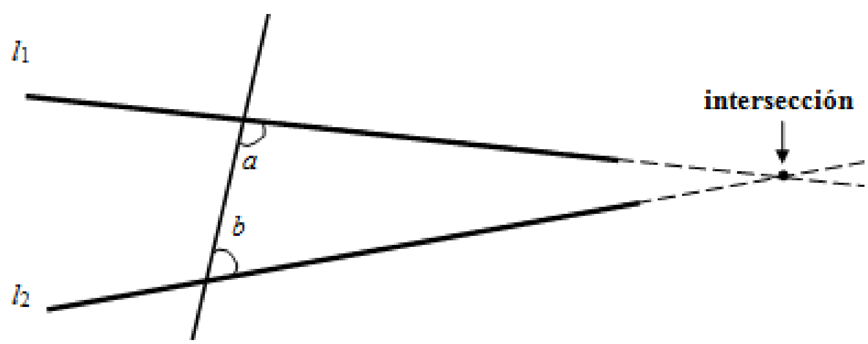


Figura 5. Como $\angle a + \angle b <$ 2AR, l_1 y l_2 se intersecarán a la derecha.

Se esperaría que el V Postulado nos dijera *explícitamente* algo sobre el comportamiento de las paralelas. Pero no, ¿por qué enunció Euclides como V Postulado una proposición tan larga, que tiene forma de implicación y no resulta tan evidente como las anteriores?

El V postulado es distinto puesto que no podemos verificar experimentalmente si dos rectas consideradas en toda su extensión se cortan ya que sólo podemos trazar segmentos de recta. En ello radica, precisamente, la importancia del V postulado: nos permite verificar el paralelismo indirectamente, justo en la posición del plano en que estemos trabajando.

Geometrías que se generan a partir del V postulado

Se puede decir que existen tres tipos de geometrías que surgen a partir del V postulado.

Si se le acepta se tiene que dada una línea y un punto que no esté en la línea, existe una única línea a través del punto que es paralela a la línea dada, estamos frente a la geometría euclidiana y frente al plano euclidiano que es un plano de curvatura cero (Figura 6), en el cual la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 2AR.

Figura 6. Plano de curvatura cero: plano euclidiano.

Ramírez y Siena (2003) muestran que existe una formulación lógicamente equivalente al V postulado, conocida como Postulado de Playfair: “dada una recta *l* y un punto *P* que no esté sobre la recta *l*, existe *una única* recta *m* que pasa por *P* y que es paralela a *l*”, como se muestra en la figura 7. La misma es la que se enseña más comúnmente en las clases de geometría euclidiana.

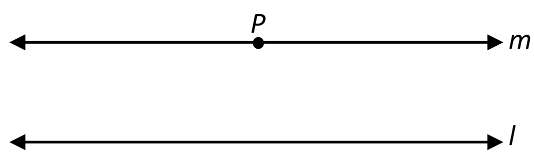


Figura 7. Postulado de Playfair.

Villalpando (2009) afirma que esta nueva versión parece “obvia”, porque estamos acostumbrados a pensar en términos euclidianos. Sin embargo, haciendo énfasis en que los postulados son abstracciones de nuestra experiencia, esto permite apreciar las diferencias entre el V Postulado y los anteriores.

Si se le niega quedan dos opciones:

1) Dada una línea y un punto que no esté en la línea, existen infinitas líneas a través del punto que son paralelas a la línea dada (Figura 8 *i*). Estamos frente a la geometría no euclidiana llamada *hiperbólic*a y frente al plano hiperbólico, el cual es un plano de curvatura constante negativa, como es el caso de la seudoesfera (Figura 8 *ii*), en el cual la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que 2AR.

i) *ii*)

Figura 8. *i*) Infinidad de paralelas. *ii*) Plano de curvatura negativa: la seudoesfera.

En una seudoesfera a medida que el triángulo crece, resulta menor la suma de sus ángulos. El triángulo más pequeño de la seudoesfera es casi un triángulo plano y la suma de sus ángulos se aproxima a la de 2AR (Figura 9).

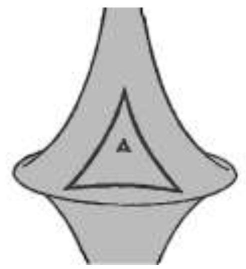
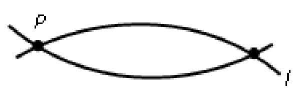
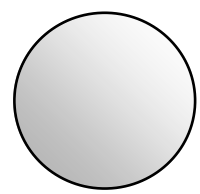


Figura 9. Triángulos en una superficie de curvatura negativa.

2) Dada una línea y un punto que no esté en la línea, no existen líneas a través del punto que sean paralelas a la línea dada (Figura 10 *i*). Estamos frente a la geometría no euclidiana llamada *elíptica* donde sus rectas son curvas cerradas llamadas geodésicas y frente al plano elíptico el cual es de curvatura constante positiva, como es el caso de la esfera (Figura 10 *ii*), y en el cual la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que 2AR.





i) *ii*)

Figura 10. *i*) No existen paralelas. *ii*) Plano de curvatura positiva: la esfera

En la figura 11, el triángulo A es pequeño comparado con la esfera, por lo tanto, casi es un triángulo plano y la suma de sus ángulos es aproximadamente igual a 2AR. Pero a medida que crece y llega a convertirse en el triángulo B, cuyos lados pertenecen a tres círculos máximos perpendiculares entre sí, vemos que la suma de sus ángulos llega a ser 90º + 90º + 90º = 270º. En el triángulo C, mayor aún que el anterior, los ángulos, que todos son obtusos, dan una suma mayor que 270º.

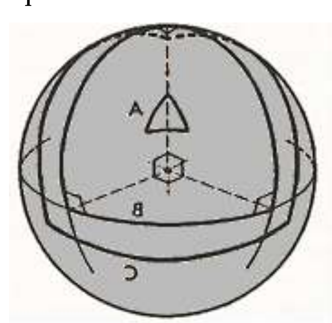


Figura 11. Triángulos en una superficie de curvatura positiva.

Las geometrías no euclidianas *hiperbólica* y *elíptica* se denominan geometrías no euclidianas clásicas. Luego del desarrollo de estas geometrías, se han creado otras geometrías no euclidianas. Toda geometría cuya base postulacional contradiga algún postulado de la geometría euclidiana también puede llamarse geometría no euclidiana.

En este sentido Riemann originó toda una clase de geometrías no euclidianas, que han recibido un estudio detallado en la actualidad, y se conocen, como geometrías *riemannianas*.

Marco Teórico

Alemán de Sánchez (2002) resalta la importancia del uso de las nuevas tecnologías en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, señalando que, para que tanto docentes como estudiantes puedan utilizar la computadora como pizarrón electrónico, se requiere de un diseño de software especial. Su objetivo principal es escribir, dibujar y calcular con el fin de mostrar e ilustrar conceptos. Se pueden mostrar procedimientos en detalle o evitar cálculos tediosos.

La misma autora, señala la importancia de la simulación en el proceso del aprendizaje de las matemáticas en la educación superior, destacando que la simulación de fenómenos naturales con el uso de la computadora, la convierten en un elemento importante en educación. Debido a que el software de este tipo apoya el aprendizaje por descubrimiento, en matemática son utilizados con gran frecuencia para propiciar el establecimiento de reglas y la demostración de proposiciones y teoremas.

Macías (2007) hace hincapié en que una de las cualidades que posee este tipo de software, es el alto grado de motivación que logra el alumno en el aprendizaje a través del ensayo y error (orientado por el profesor), que le permite descubrir cosas que posteriormente confirma que son correctas y fueron descubiertas por brillantes matemáticos quizás algunos siglos atrás. Con la ayuda de la computadora y la orientación del profesor, el alumno descubre cosas que fijará en su estructura cognitiva de manera más natural, que si le son proporcionadas en clases sólo para que las entienda y las recuerde para luego aplicarlas, tal como lo señala, esta herramienta permite al estudiante ir construyendo un puente entre las ideas intuitivas y los conceptos formales.

Arratia, Jáñez, Martín y Pérez (2002) muestran la relación entre la matemática y las nuevas tecnologías: los grandes avances en la informática y la comunicación de los últimos años hacen prever una revolución que está sólo en sus inicios. Las nuevas tecnologías se utilizan para comunicarse, como herramienta de trabajo y también como instrumento de ocio. Aparecen en todas las parcelas de la vida actual, desde la investigación científica hasta el mundo de la empresa, pasando por la enseñanza. En esta última, se puede considerar que el uso de estos avances favorece el desarrollo de capacidades intelectuales y la adquisición de destrezas por parte del alumno, mediante una nueva forma de organizar, distribuir, representar y codificar la realidad.

Finalmente la NCTM (1989) propone como objetivo al enseñar la geometría, desarrollar la comprensión de un sistema axiomático mediante la investigación y la comparación de geometrías no euclidianas con la euclidiana.

Programas computacionales para geometría no euclidiana

Diversos programas y applets interativos pueden usarse para explorar geometrías no euclidianas: Geometric Supposer, Geometry SketchPad, Cabri Geometry, Cinderella en su versión 2.0, non-Euclidean y NonEuclid son algunos de ellos, los primeros tres son comerciales y los últimos caen en la categoría de software libre.

Estos tienen capacidad para graficar, dibujar y medir figuras geométricas euclidianas y no euclidianas. Estas potencialidades permiten que los estudiantes exploren patrones geométricos y teoremas (De Faria, 2004).

En particular *NonEuclid* es un software libre potente, de tipo applet, especializado en la geometría no euclidiana, el cual crea un entorno de simulación interactivo para el aprendizaje y la exploración de la geometría no euclidiana hiperbólica, el cual será utilizado para determinar la naturaleza de algunos teoremas de dicha geometría y compararlos con los de la geometría euclidiana.

Propuesta Didáctica

Con *NonEuclid* se pueden realizar interactivamente construcciones con regla y compás para los modelos de geometría hiperbólica del disco y del semi plano superior de Poincaré, utilizando para ello el modelo bidimensional de Poincaré de la geometría hiperbólica (Figura 12). El círculo frontera que aparece en la pantalla, en el modelo del disco, contiene el espacio hiperbólico bidimensional infinito del modelo.

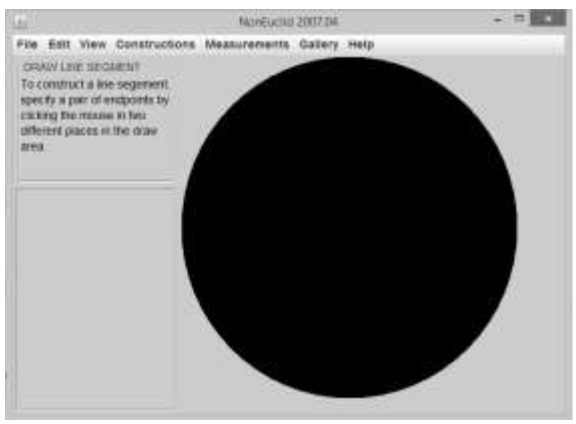


Figura 12. Modelo del disco en *NonEuclid*.

Metodología

Para aprovechar la potencialidad de *NonEuclid*, se elaboraron una serie de actividades que consisten en un conjunto de afirmaciones que, en su mayoría son teoremas en la geometría euclidiana, de las cuales se puede simular su construcción con regla y compás y determinar cuáles son también teoremas en geometría hiperbólica.

Las actividades diseñadas son aproximadamente 50 y abarcan diversos temas de geometría euclidiana tales como ángulos; triángulos equiláteros, isósceles y rectos; triángulos congruentes, rectángulos y cuadrados, paralelogramos, rombos, polígonos, círculos, entre otros. El objetivo de dichas actividades es el de determinar cuáles de estos teoremas son válidos en la geometría hiperbólica.

Actividades Diseñadas

Algunos ejemplos sencillos de las mismas son los siguientes teoremas euclidianos:

1) Teorema de Pitágoras, en cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.
2) Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.
3) En un triángulo equilátero cada uno de sus ángulos mide 60°.
4) Las tres alturas de un triángulo se interceptan en un punto.
5) Construir un polígono regular de 12 lados.
6) Una teselación es una cubierta de un plano geométrico infinito sin huecos o traslapes con figuras congruentes de un tipo o de algunos tipos. ¿Se puede crear una teselación en el plano hiperbólico? Aunque este no es teorema, se puede simular con *NonEuclid*.

La figura 13 muestra que el Teorema de Pitágoras no es válido en dicha geometría; en cambio en la figura 14 se tiene que, efectivamente, los ángulos de la bases del triángulo isósceles son congruentes, por lo tanto es válido.

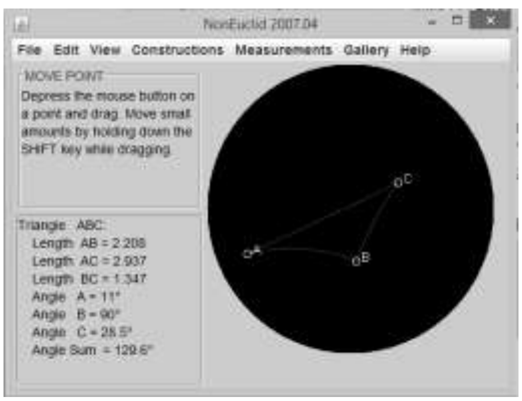


Figura 13. Triángulo rectángulo.

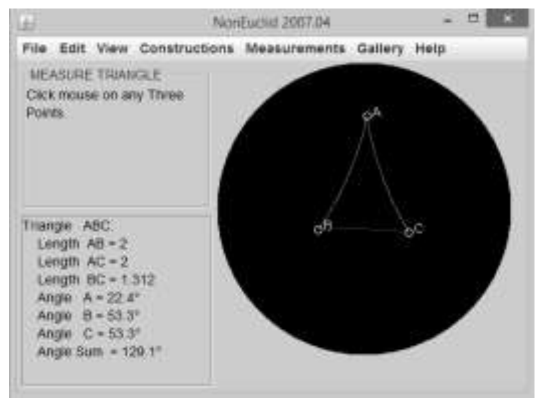


Figura 14. Triángulo isósceles.

En la Figura 15 se observa un triángulo equilátero, pero sus ángulos no miden 60°, por lo que no es válido en la geometría hiperbólica. En la figura 16 se muestra que las alturas de un triángulo se interceptan en un punto, por lo que es válido.

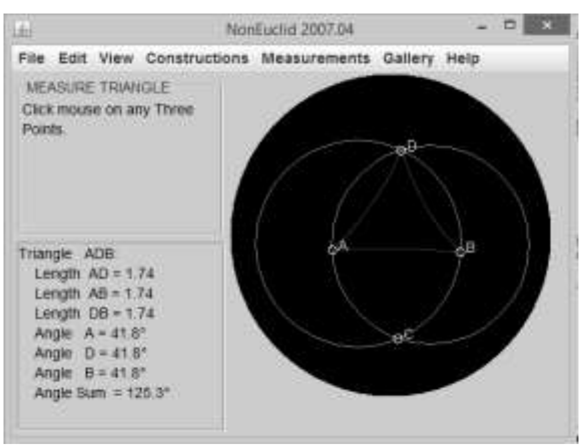


Figura 15. Triángulo equilátero.

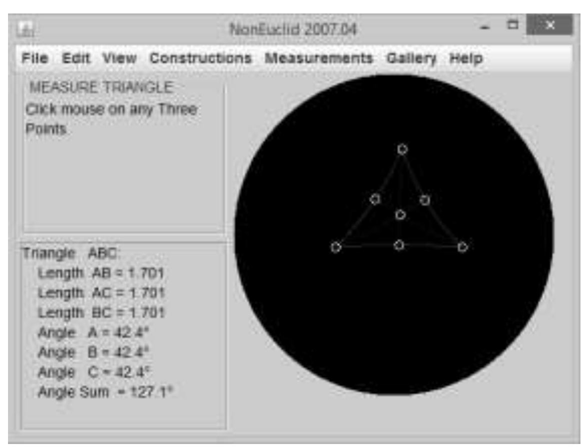


Figura 16. Alturas de un triángulo.

Finalmente, en las figuras 17 y 18 si es posible construir un polígono de 12 lados y una teselación, por lo tanto ambos son válidos.

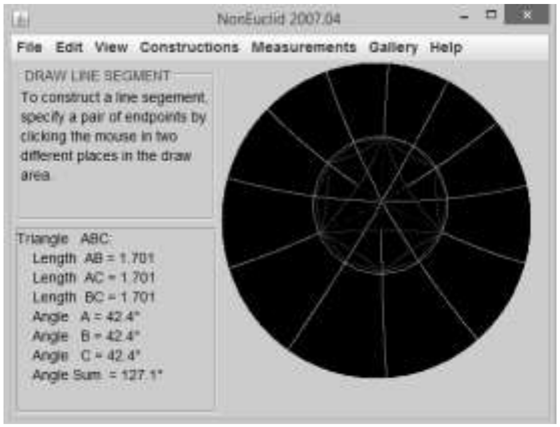


Figura 17. Construcción del dodecágono.

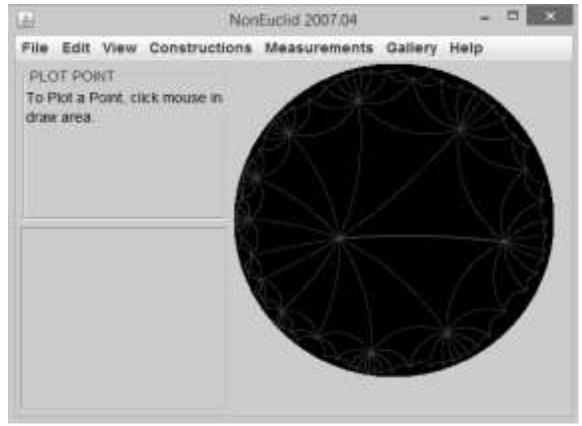


Figura 18. Teselación no euclidiana.

Como se observa, en la geometría hiperbólica algunos teoremas euclidianos son válidos y otros no. ¿A qué se deberá esto?, basta recordar que en la geometría hiperbólica se está trabajando con la negación del V postulado de Euclides y un plano de curvatura constante negativa, por lo que si en la demostración de algún teorema euclidiano se involucra de alguna manera dicho postulado (o una versión lógicamente equivalente del mismo) entonces no va a ser válido en la geometría hiperbólica.

Conclusiones

La utilización de software libre en la geometría no euclidiana resultó ser no solo una excelente estrategia didáctico-pedagógica sino también económica, pues el ahorro derivado de su utilización posibilitó que los estudiantes tuvieran las herramientas de software que necesitan, además de no haber problemas con costos por renovaciones de licencias.

El modelo del disco de Poincaré utilizado en el applet NonEuclid, proporciona una *interpretación* de la geometría hiperbólica dentro de la geometría euclidiana, es decir, la geometría no euclidiana admite una *interpretación* dentro de la geometría euclidiana. Por lo tanto al ser consistente la geometría euclidiana, la geometría no euclidiana también lo es.

La relación entre la geometría euclidiana y las no euclidianas es que son lógicamente no contradictorias, y por eso están destinadas al fracaso todas las tentativas de demostrar desde un punto de vista lógico que sólo la primera es la única verdadera.

La simulación de construcciones geométricas con regla y compás en *NonEuclid* ayuda a entender el carácter extraño y no intuitivo de la geometría no euclidiana, además de percibir la diferencia entre definiciones y teoremas usados en geometría.

Descripciones no euclidianas del mundo físico, utilizadas por ejemplo en la teoría de la relatividad y en las investigaciones sobre fenómenos ópticos y sobre la propagación de ondas, se revelaron bastante adecuadas. Las geometrías no euclidianas colaboraron así mismo en la interpretación de modelos representativos de conceptos abstractos utilizados hoy en día en física y otras áreas de la ciencia.

Finalmente, el estudio de las geometrías no euclidianas comprueba que la geometría no es algo acabado, sino que es un campo de investigación actual y fructífero.

Referencias bibliográficas

Alemán de Sánchez, Á. (2002). *La enseñanza de la matemática asistida por computador*. Recuperado en diciembre de 2013 de http://www.utp.ac.pa/articulos/ensenarmatematicas.html

Arratia, O., Jáñez, L., Martín, M. A., y Pérez, M. T. (2002): *Matemáticas y nuevas tecnologías: educación e investigación con manipulación simbólica*. Universidad de Valladolid, España: Depto. de Matemática Aplicada a la Ingeniería. E.T.S. Ingenieros Industriales..

Bromberg, S. y Moreno, S. (1987). *Fundamentos de la geometría, de Euclides a Hilbert*. México: CINVESTAV.

De Faria, C. E. (2004). *Geometrías no euclidianas con tecnología digital*. XVIII Simposio Costarricense sobre Matemáticas, Ciencias y Sociedad (pp 1-15), Costa Rica.

Kagán, V. F. (1998). *La geometría no euclidiana de N. I. Lobachevski* (1ª ed.), México: Limusa.

Macías, F. A. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. USA: NTCM.

Ramírez, G. A. y Sierna, L. G. (2003). *Invitación a las geometrías no euclidianas* (1ª. ed.), México: Facultad de Ciencias de la UNAM.

Villalpando, B. F. (2009). *Notas para el curso de geometría no euclidiana*. Notas no publicadas, Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Jalisco, México.

Villalpando, B. J. (2011). Software libre para la enseñanza de las Matemáticas: en búsqueda de alternativas. *8° Seminario Nacional: Enseñanza de las Matemáticas con las Tecnologías de la Información y la Comunicación*. Ciudad Guzmán, Jalisco, México.

Villalpando, B. J., García, S. A. y Rodríguez, J. A. (2013). *Manual para la materia de Cómputo para Ciencias*. Manual no publicado. Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Jalisco, México.