



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<http://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores
del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 2 Fecha: Diciembre, 2016

ISSN: 2395-955X

Directorio:

Rafael Pantoja R.

Director

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Sección: Selección de artículos

Elena Nesterova

Alicia López B.

Sección: Experiencias Docentes

Christian Morales O.

Sitio WEB

Esnel Pérez H.

Lourdes Guerrero M.

Sección: Geogebra

ISSN: 2395-955X

SISTEMA DE PRÁCTICAS DE MODELACIÓN MATEMÁTICA DE OBJETOS EN MOVIMIENTO

Otoniel Leal Medina, Rafael Pantoja Rangel, José Francisco
Villalpando Becerra

Universidad de Guadalajara, México

olm_88@hotmail.com, rpantoja@prodigy.net.mx

Para citar este artículo:

Leal, O., Pantoja, R. y Villalpando, J. F. (2016). Sistema de prácticas de modelación matemática de objetos en movimiento. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 2, Julio – Diciembre 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: <http://www.amiutem.edu.mx/revista>, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 28 de Diciembre de 2016.

Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

SISTEMA DE PRÁCTICAS DE MODELACIÓN MATEMÁTICA DE OBJETOS EN MOVIMIENTO

Otoniel Leal Medina, Rafael Pantoja Rangel, José Francisco Villalpando Becerra

Universidad de Guadalajara, México

olm_88@hotmail.com, rpantoja@prodigy.net.mx

Palabras clave: modelación, derivada, movimiento, Tracker, GeoGebra

Resumen

En el presente trabajo se describen las actividades realizadas y resultados obtenidos en el estudio piloto efectuado en el XII Seminario Nacional de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas con Tecnología 2015 (ITCG, 2015), en el que se pusieron en juego situaciones problema sobre el movimiento de un carrito de juguete de fricción y el movimiento de una burbuja dentro de una manguera transparente que, de acuerdo a las evidencias, refleja la motivación y el interés por aprender matemáticas con estrategias didácticas alternativas. Para esto, se formaron equipos de trabajo para el desarrollo de las actividades, las cuales se llevaron a cabo con ayuda de los programas Tracker y GeoGebra.

Introducción

En el ámbito de la investigación en educación matemática es conocido que la enseñanza habitual del cálculo se basa en la transmisión de conocimientos con un énfasis muy marcado en el desarrollo de habilidades algebraicas y se desatiende el discernimiento intelectual para la comprensión de ideas, nociones y conceptos (Zúñiga, 2007; Hitt, 2003; Cuevas & Pluvinage, 2009; Sánchez-Matamoros, García & Llinares, 2008).

En Flores y Salinas (2013), se menciona que la conceptualización de la derivada comprende uno de los desafíos de la educación actual, ya que los educandos, aunque en ocasiones son capaces de derivar una función, tienen problemas para reconocer este concepto en situaciones de la vida cotidiana, lo que provoca que no logren darle sentido ni significado, por lo cual es necesario que este tema sea abordado desde situaciones relacionadas con el contexto del alumno.

Los estudiantes de cálculo comúnmente enfrentan dificultades en el manejo del significado de la noción de la derivada, como en el caso de su interpretación en las distintas áreas del conocimiento como son la geometría, la física o la economía, o para obtener la gráfica de la función dada la gráfica de la derivada correspondiente, o como razón de cambio entre dos variables en un conjunto de datos.

Respecto al manejo del significado de los contenidos matemáticos Hitt (2002 citado en Huapaya, 2012), señala que enseñar matemáticas sin contexto puede generar en el estudiante dificultades, pues no logra relacionar los conceptos matemáticos con aspectos de su vida diaria. De aquí la importancia del desarrollo de este trabajo, pues con el diseño de actividades de modelación matemática de situaciones problema se busca que el alumno, según lo menciona Arrieta (2003), construya argumentos, significados, herramientas y nociones relacionados con las matemáticas, en este caso la derivada, en la intervención con fenómenos de la naturaleza.

Además, de acuerdo a Bryan (2005, 2010), el video como herramienta tecnológica se reutiliza en la labor docente, en la que el alumno se transforma en el director de la película porque elabora el guion, elige los actores y diseña el set de grabación, lo que incide de manera directa en la identificación de las variables, de las constantes y las relaciones matemáticas implícitas o explícitas en la situación problema, en suma, desarrolla la modelación matemática *in situ*.

Por ello en este trabajo se propuso la videograbación de dos situaciones: el movimiento en línea recta de un carrito de fricción y el de una burbuja dentro de una manguera (Figura 1). Tales videos son analizados con ayuda del programa Tracker el cual funciona en un ambiente Windows, con interfaz amigable y potentes rutinas que ofertan al usuario de diferentes gráficas, tablas de datos y expresiones matemáticas de la situación problema en cuestión; elementos que el alumno en trabajo colaborativo discute y relaciona con los conocimientos matemáticos en juego.



Figura 1. Situaciones problema propuestas.

El objetivo fue investigar los efectos del empleo de la modelación matemática de situaciones de la vida cotidiana, a partir de la videograbación de cuerpos en movimiento, con el apoyo de los programas Tracker y GeoGebra, sobre el aprendizaje del objeto derivada en los alumnos; trabajo basado en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), el cual sustenta el diseño del sistema de prácticas propuesto.

Marco teórico

En Grijalva (2007), se menciona que en algunos acercamientos teóricos se equiparan los objetos matemáticos con conceptos, sin hacer distinción entre ellos ni asumir una postura ontológica que clarifique qué es cada uno. Así, en reportes de investigación en revistas especializadas, en tesis (de maestría y doctorado) y otros, es frecuente que se hable de estudios sobre el “concepto de derivada”, sin especificar qué se entiende por tal concepto.

En el estudio de la derivada, es importante contar con objetos bien definidos que se encuentran involucrados con el tema, pues resulta complicado observar un objeto matemático por sí mismo; lo que es observable son los objetos primarios que lo componen. Entre ellos se pueden distinguir los distintos tipos de lenguaje empleados, como el algebraico, gráfico, verbal y numérico; conceptos como el de razón de cambio promedio e instantáneo, velocidad, aceleración, límite; procedimientos de despejes, tabulación, graficación, evaluación; entre otros objetos.

Por ello, este trabajo se basa en la teoría del Enfoque Ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemática (EOS), en el cual se propone un proceso de análisis para la identificación de los diferentes objetos primarios que componen al objeto de estudio, como la derivada, para que emerja y se institucionalice, en este caso a partir de las diferentes actividades diseñadas en las cuales tales componentes son distinguidos.

Para Godino (2002) un objeto o entidad matemática es todo aquello que sea indicado, señalado o referenciado, cuando se hace, se comunica o se aprende matemáticas y señala como primarios los siguientes: lenguaje, acción, argumentación, concepto, propiedades y situación problema. Tales objetos intervienen en los sistemas de prácticas de los cuales emerge el objeto, en este caso, la derivada (Figura 2).

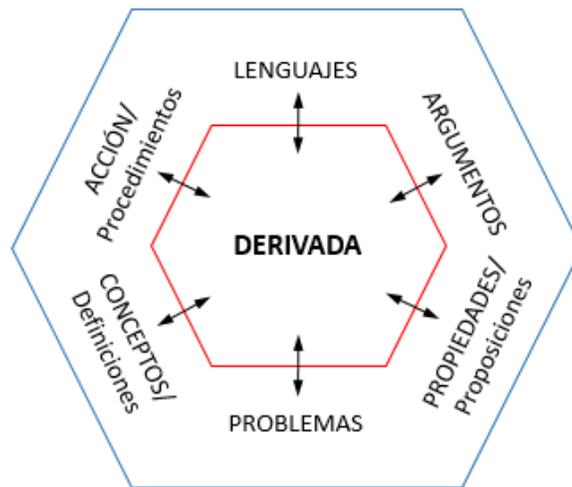


Figura 2. Objetos primarios que componen al objeto matemático derivada.

El significado de un objeto matemático se debe entender en términos de lo que se puede hacer con dicho objeto matemático. Se trata de una perspectiva “sistémica” ya que se considera que el significado de un objeto es el sistema de prácticas en las que dicho objeto es determinante para su realización (o no).

La aparición en escena del sistema de prácticas lleva a una reflexión sobre lo que se entiende por práctica y por “realización de una práctica”. Al respecto, Godino y Batanero (1998), consideran una práctica matemática como toda actuación o expresión –verbal, gráfica, etc.– que efectúa alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas.

Cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática, es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos primarios que componen al objeto matemático. A este conglomerado, necesario para la realización y evaluación de la práctica, en el EOS se le llama configuración, la cual es pensada como una red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, incluidas las relaciones que se establecen ellos.

En particular, con la identificación de elementos primarios en cada una de las actividades propuestas en este trabajo se logra hacer una distinción más clara de los objetos que intervienen y emergen en el proceso de aprendizaje de la derivada, de modo que se

abarca más allá de aprender sólo un concepto o un conjunto de algoritmos para resolver un problema en específico.

En la Figura 3 se muestra la configuración formada por los objetos primarios distinguidos en las actividades que conforman este trabajo para el aprendizaje del objeto matemático derivada, de modo que se obtiene un panorama más amplio sobre su contenido y la relación que existe entre cada uno de sus componentes.

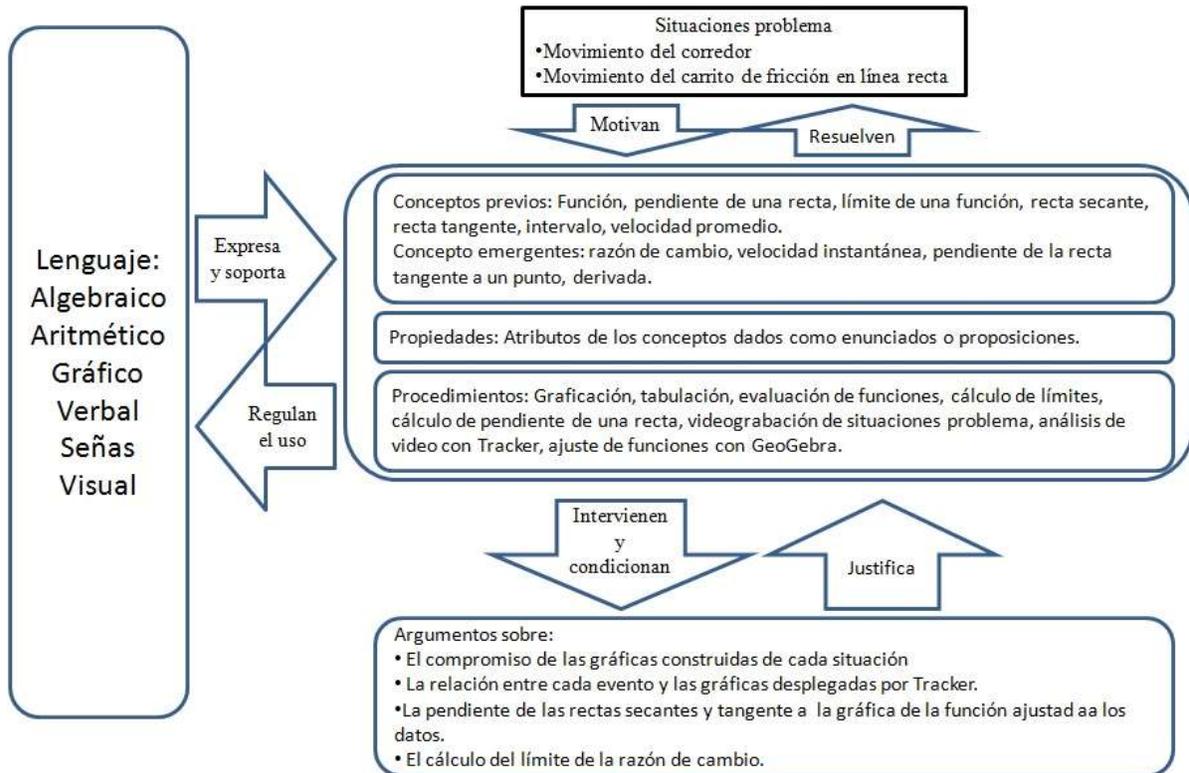


Figura 3. Configuración de objetos primarios.

Metodología

Las actividades diseñadas se aplicaron dentro del taller impartido en el XII Seminario Nacional de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas con Tecnología 2015, en las instalaciones del Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán, el cual consistió en dos sesiones de 3 horas y media cada una, en una de las aulas del laboratorio de cómputo de la institución.

Se inició con una breve presentación en Power Point sobre el empleo de situaciones problema de la vida cotidiana en el aula con énfasis en la importancia que el alumno conozca para qué sirven las matemáticas, de modo que al estudiarlas a partir de eventos conocidos, ya no resulte en algo meramente abstracto para él, sino que tenga sentido al relacionarlo con su contexto. Al respecto se presentaron algunos ejemplos en los cuales se pueden relacionar a las matemáticas con situaciones presentes en su entorno.

Luego de la introducción, se presentó un video sobre un corredor que parte del reposo y comienza a correr en línea recta, con el objetivo de que los participantes discutieran al respecto. Durante la actividad, algunas de las preguntas planteadas fueron:

“¿cómo es el movimiento del corredor?, ¿cómo sería la gráfica que describe el cambio de posición respecto al tiempo?, ¿cómo es la velocidad del corredor durante su recorrido?, ¿cómo se describiría la aceleración del corredor? “.

Seguido a esto, se presentó el software Tracker, el cual es gratuito, diseñado inicialmente para la enseñanza de la física, aunque actualmente también se utiliza para la enseñanza de las matemáticas, gracias a las representaciones gráfica, numérica y algebraica que se obtienen de este programa a partir del análisis de video de algún caso de la vida cotidiana. Se procedió a dar una demostración sobre los pasos a seguir para llevar a cabo un análisis en Tracker sobre el video del corredor previamente discutido, de modo que se obtuviera información respecto al evento en diferentes formatos (Figura 4).

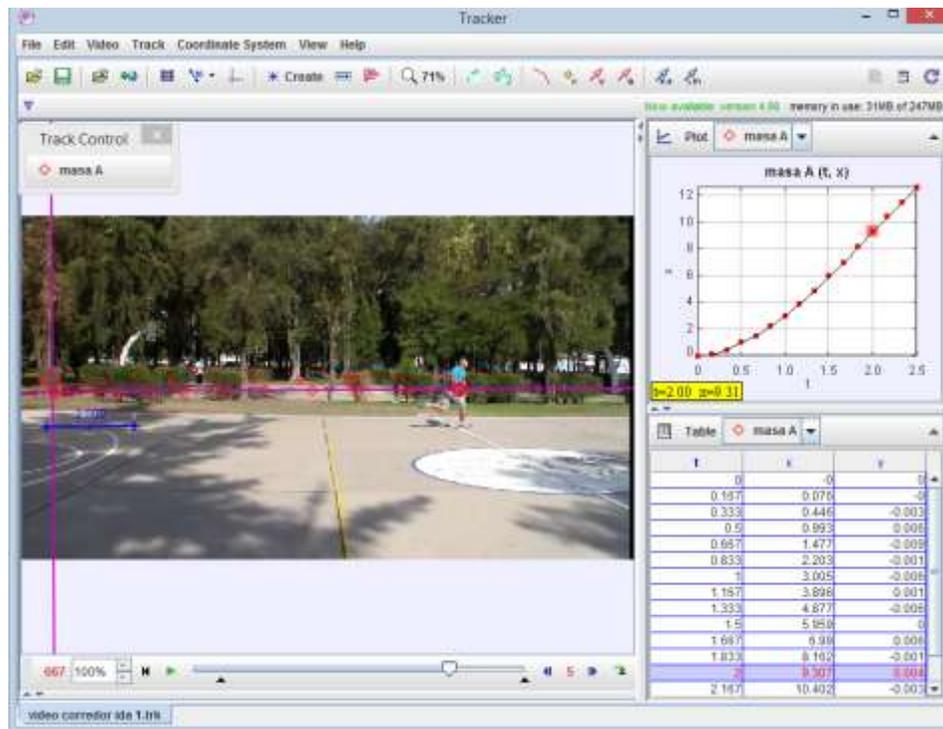


Figura 4. Ejemplo de análisis de video con Tracker.

Una vez realizado el análisis, se obtuvieron diferentes representaciones de la situación, como gráficas sobre la distancia recorrida en x respecto al tiempo t , la velocidad del corredor v_x respecto a t , así como su correspondiente tabla con datos numéricos. Una vez discutido el proceso de análisis del corredor y la información obtenida en Tracker, se continuó con la explicación sobre cómo obtener una expresión algebraica representativa de la situación.

Para esto, se presentó el software GeoGebra, el cual también es gratuito, y se explicaron los pasos a seguir para encontrar una función que se ajustara a los datos previamente obtenidos. El procedimiento consistió en copiar los datos numéricos de la tabla presentada en Tracker de la distancia recorrida en x respecto al tiempo t y pegarlos en la vista de hoja de cálculo de GeoGebra, para luego llevar a cabo el ajuste correspondiente (Figura 5). Como resultado, se tiene en este programa tres diferentes representaciones de la situación: gráfica, algebraica y numérica.

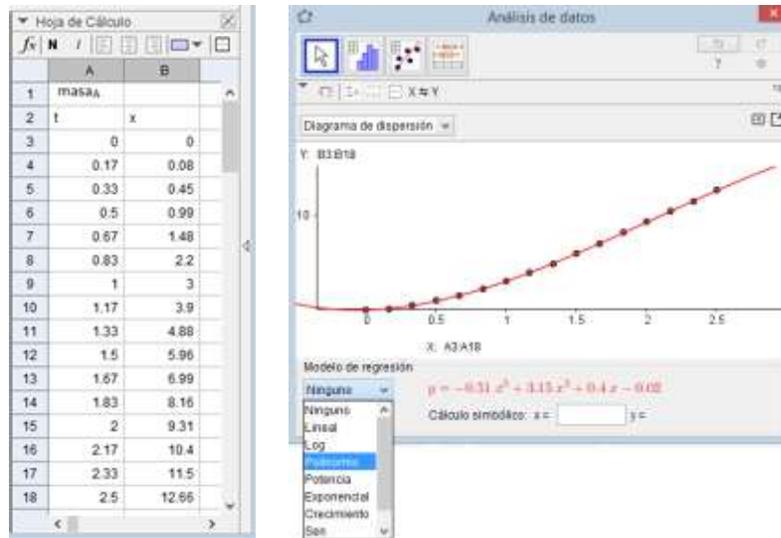


Figura 5. Ajuste de función con GeoGebra.

Después de explicar cómo funcionan ambos programas, se formaron equipos de trabajo para llevar a cabo la videograbación y análisis de dos situaciones problema, las cuales consistían en el movimiento en línea recta de un carrito de fricción y el movimiento de una burbuja dentro de una manguera con distintas trayectorias (Figura 6). A cada equipo se le brindó el material necesario para la construcción del escenario correspondiente, así como una hoja de trabajo en la cual se especificaban instrucciones y actividades al respecto.



Figura 6. Trabajo en equipo sobre situaciones problema propuestas.

En la videograbación de cada situación, se observó cómo los integrantes de cada equipo discutían aspectos sobre la posición inicial del cuerpo en movimiento, pues para el análisis lo relacionaban con el origen en el eje de coordenadas. También se cuidaban aspectos como la posición correcta de la cámara de video, de modo que el desplazamiento (en el caso del carrito) coincidiera con el eje x del plano cartesiano. Durante el desarrollo de esta actividad se observó en los participantes interés por el trabajo, ya que constantemente se vertían opiniones y conjeturas sobre la situación asignada.

Luego de la videograbación de cada una de las situaciones planteadas, los participantes procedieron a realizar el análisis en Tracker y después realizar el ajuste de datos correspondientes en GeoGebra para obtener una función representativa de cada caso y con ello proceder con los ejercicios presentados en las hojas de trabajo.

Exposición de la propuesta

El trabajo de esta propuesta consistió en la modelación matemática de situaciones de la vida cotidiana, a partir de la videograbación en equipos de trabajo de dos eventos propuestos: el movimiento en línea recta de un carrito de fricción y el movimiento de una burbuja en una manguera con distintas trayectorias.

Luego de la captura de los videos correspondientes a cada situación, en las hojas de trabajo se pide a los estudiantes que realicen una descripción escrita sobre lo observado, así como dibujar gráficas que muestren diversas características del evento, como la distancia recorrida en x respecto al tiempo t , la velocidad respecto al tiempo, la aceleración, entre otros. La finalidad de esto, es que los participantes comiencen a relacionar las situaciones con sus conocimientos matemáticos previos.

Una vez realizadas las descripciones de cada caso, se presenta en las hojas de trabajo un apartado teórico en el cual se explican diferentes conceptos matemáticos relacionados con ideas de cambio y movimiento, como la velocidad promedio e instantánea, rectas secantes y tangentes a una curva en un punto de ella, límite del cociente incremental, pendiente de una recta, entre otros, con la finalidad de que el alumno recuerde de sus conocimientos previos tales conceptos que son la base en esta propuesta para la emergencia del objeto matemático derivada y los pueda identificar durante el desarrollo de las demás actividades.

Después, los videos fueron analizados por los equipos de trabajo con ayuda de los programas Tracker y GeoGebra, de los que se obtuvieron distintas representaciones de cada caso, como tablas de datos numéricos, gráficas y expresiones algebraicas. Luego, se prosiguió con los ejercicios planteados en las hojas de trabajo, en los cuales se busca que el objeto matemático derivada se institucionalice.

Respecto al caso del carrito de fricción, los ejercicios fueron orientados a que el alumno distinga al objeto derivada como la velocidad instantánea del cuerpo en movimiento, al trabajar con intervalos de tiempo cada vez más pequeños, desde las diferentes representaciones obtenidas por los programas Tracker y GeoGebra, y tal idea se generalice de modo que logre como una razón de cambio instantánea.

En cuanto a la situación del movimiento de la burbuja en la manguera transparente en diferentes trayectorias, los ejercicios se enfocaban a que los alumnos encontraran funciones correspondientes a las velocidades en x e y de las diferentes trayectorias, a partir de la noción de velocidad como razón de cambio instantánea de la distancia recorrida en cada eje respecto al tiempo; de modo que, al encontrar su correspondiente función de velocidad total, concluyeran que en las diferentes trayectorias la velocidad de la burbuja es constante.

Conclusiones

Al finalizar con las actividades propuestas en las hojas de trabajo, los alumnos expresaron sentirse motivados al trabajar en temas de matemáticas con actividades que involucran situaciones de la vida cotidiana, con lo cual pudieron relacionar diferentes ideas como variables, gráficas y datos, de las cuales comúnmente no encuentran un significado.

De las observaciones realizadas durante la puesta en escena de la propuesta en el taller, se distinguieron además expresiones tanto verbales como mímicas sobre aspectos

matemáticos relacionados con cada situación, como el movimiento de los cuerpos en un determinado eje y las posibles formas de las gráficas correspondientes, lo cual es muestra de la relación que el alumno establece entre sus conocimientos matemáticos y el evento en cuestión.

También se observó que los participantes enfrentaron diversas dificultades durante el desarrollo de las actividades, como interpretaciones erróneas de las gráficas que se mostraban en Tracker, confusión entre las herramientas necesarias para el análisis del video, problemas en la grabación de las situaciones debido a cuestiones técnicas como posición de la cámara, falta de espacio, estabilidad en la posición de la manguera, entre otros.

La conclusión es que con la modelación matemática de situaciones de la vida cotidiana se logra el aprendizaje del objeto matemático derivada, ya que se establece una relación entre eventos conocidos con el tema en cuestión, por lo que deja de ser algo abstracto para el alumno.

Bibliografía

- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula* (tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Bryan, J. (2005). Video Analysis. Real-Word exploration for secondary mathematics. *Learning & Leading with Technology*, (32), 22-24. Recuperado de: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ697320.pdf>
- Bryan, J. (2010). Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases. Texas A&M University. Recuperado de: http://apcentral.collegeboard.com/apc/members/courses/teachers_corner/48402.html
- Cuevas, C., Pluvillage, F. (2009). Cálculo y Tecnología. *El Cálculo y su enseñanza*, (I), 45-59. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Dc2l3taQW10.pdf
- Flores, W., Salinas, M. (2013). Metodologías en la enseñanza de la derivada: Uraccan-Nueva Guinea. *Ciencia e Interculturalidad*, (12), 39-49. Recuperado de: <http://www.etnomatematica.org/publica/articulos/metodologia.pdf>
- Godino, J. (2002). Un Enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (22), 237-284. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino /funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf
- Godino, J. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, 177-195. Recuperado de: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.452.7856&rep=rep1&type=pdf>
- Grijalva, A. (2007). *El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función* (tesis doctoral). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada U. Legaria del Instituto

- Politécnico Nacional, México. Recuperado de:
http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/grijalva_2008.pdf
- Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del Cálculo. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México. Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal Recuperado de:
https://www.academia.edu/807014/Dificultades_en_el_aprendizaje_del_c%C3%A1lculo.
- Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. Recuperado de
http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_maestria/HUAPAYA_GOMEZ_ENRIQUE_MODELACION.pdf.
- Sánchez, G., García, M. & Llinares, S. (2008). La Comprensión de la Derivada como Objeto de Investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (11), 267-296. Recuperado de:
http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362008000200005&script=sci_arttext.
- Zúñiga, L. (2007). El Cálculo en Carreras de Ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (10), 145-175. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362007000100007&script=sci_arttext.