



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<http://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores
del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

Directorio:

Rafael Pantoja R.
Director

Eréndira Núñez P.
Lilia López V.

Sección: Selección de artículos

Elena Nesterova
Alicia López B.

Sección: Experiencias Docentes

Christian Morales O.
Sitio WEB

Esnel Pérez H.
Lourdes Guerrero M.
Sección: Geogebra

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES QUE INVOLUCRAN EXPRESIONES CON RADICALES

María del Rosario Gallardo Reyes, Graciela Eréndira Núñez
Palenius

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. México

chayogallardo@terra.com.mx, erepalenius@hotmail.com

Para citar este artículo:

Gallardo, M. A. y Nuñez, G. E. (2016). Actividades de aprendizaje para la solución de ecuaciones que involucran expresiones con radicales. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

ISSN: 2395-955X

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: <http://www.amiutem.edu.mx/revista>, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES QUE INVOLUCRAN EXPRESIONES CON RADICALES

María del Rosario Gallardo Reyes, Graciela Eréndira Núñez Palenius

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

chayogallardo@terra.com.mx, erepalenius@hotmail.com

Palabras clave: Aprendizaje colaborativo, TIC.

Resumen

En este trabajo se presentan resultados de una investigación en donde se utilizaron las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), para fortalecer un ambiente didáctico e influir en la construcción de conceptos algebraicos cuando se resuelven actividades de aprendizaje que despierten el interés del alumno, desarrollando habilidades de razonamiento y comprensión de éstos conceptos, motivando su estudio con mediación de la calculadora TI-Nspire CX CAS. Estas actividades se aplicaron a estudiantes del nivel superior en un ambiente de trabajo colaborativo. Como cita Artigue (2002) y Rojano (2003), el uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, y en especial de las calculadoras, han incorporado herramientas que disminuyen el trabajo operativo, permitiendo mostrar procesos, modelar problemas, así como ampliar su análisis.

Introducción

El uso de la tecnología ha generado cambios sustanciales en la forma como los estudiantes aprenden matemáticas. Cada uno de los ambientes en los que se interactúa con calculadoras (TI-Nspire CAS), proporciona condiciones para que los estudiantes identifiquen, examinen y comuniquen distintas ideas matemáticas (Cortés, Miranda y Carrillo, 2012).

En este proyecto se presentan los resultados que se obtuvieron al implementar actividades de aprendizaje con temas de Álgebra, que incorporan la calculadora TI-Nspire CX CAS y que propician el aprendizaje colaborativo, para que de esta manera los estudiantes hagan suyas las competencias matemáticas. El trabajo de investigación, se llevó a cabo con estudiantes de nuevo ingreso de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Los antecedentes a este trabajo, son investigaciones en donde se habla sobre el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza de las matemáticas, principalmente en tópicos de álgebra, tanto en México como en países como Costa Rica y EUA.

Una de las características más importantes de esta investigación, es la implementación de actividades de aprendizaje con la calculadora TI-Nspire CX CAS, el uso de esta, es porque integra sistemas de algebra computacional (CAS), reconocidos por su combinación poderosa de computación simbólica y visualización gráfica en la enseñanza de matemáticas. A la fecha se tienen pocos antecedentes de su uso en México, aunque actualmente se han elaborado algunos trabajos de investigación con el uso de esta tecnología.

Por otro lado, el estudio del álgebra es trascendental como contenido matemático en diferentes etapas del Sistema Educativo, desde la Secundaria obligatoria hasta la Universidad. Además, en los últimos veinte años han surgido propuestas para incorporar algunas cuestiones del Pensamiento Algebraico.

Las investigaciones realizadas para el estudio del Pensamiento Algebraico, se han orientado en los últimos 30 años a:

- El análisis de las características esenciales del Pensamiento Algebraico.
- Los niveles de organización.
- Los problemas que se ocasionan en la enseñanza y en el aprendizaje del álgebra.

Asimismo, diferentes trabajos como los de Kieran y Filloy (1989), Kieran (1992, 2007), muestran que la investigación en Pensamiento Algebraico trata de encontrar soluciones a preguntas como: ¿Qué pueden hacer y qué no pueden hacer los estudiantes y los profesores en los distintos ciclos o niveles del sistema educativo en Pensamiento Algebraico?

Una visión general sobre las investigaciones en Pensamiento Algebraico en la educación se puede extraer de los siguientes trabajos:

- Kieran y Filloy (1989), describen algunas de las contribuciones más significativas de la investigación sobre procesos cognitivos, implicados en el aprendizaje del álgebra escolar hasta finales de los ochenta, entre las que cabe destacar el marco aritmético de referencia. Estas aportaciones ponen de manifiesto la presencia de un cuerpo creciente de conocimientos, sobre los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra.
- Kieran (1992), presenta un documento sobre las investigaciones en álgebra, en el que realiza un análisis histórico del álgebra, una descripción del contenido del álgebra, una reflexión y discusión de las demandas psicológicas hechas sobre el aprendizaje de álgebra por el contenido matemático y una descripción breve del panorama de la perspectiva de enseñanza. En él analiza y trata de comprender mejor las dificultades, que los estudiantes tienen al aprender álgebra y los problemas de su enseñanza.
- Kieran (2007), aporta un nuevo trabajo en el que hace una revisión de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la educación, mostrando formas de construir significados para los símbolos algebraicos y para su manipulación.

Por lo anteriormente descrito, se consideró importante el trabajo con esta rama de las matemáticas para esta investigación. Asimismo, el alto nivel de abstracción que requieren algunos conceptos matemáticos, hace indispensable la utilización de recursos didácticos que apoyen el proceso de enseñanza y aprendizaje (Núñez y Cortés, 2011), como es para nuestro caso la actividad de aprendizaje, el uso de la calculadora y el trabajo colaborativo con el apoyo del profesor.

Marco teórico

La propuesta teórica para este trabajo de investigación incluye la teoría de los *Registros de Representación Semiótica* de Duval (1993, 1995, 1998), ya que el trabajo con las

actividades de aprendizaje y la calculadora hacen transitar al estudiante por diferentes registros de representación, como son: el lenguaje común, el numérico, el algebraico y el gráfico. Además de los sustentos teóricos, del uso de las TIC para el aprendizaje de las matemáticas, por utilizar la calculadora como un medio para que el estudiante logre la conceptualización de los tópicos matemáticos abordados; y del *Aprendizaje colaborativo*, ya que fue la metodología empleada para las experimentaciones realizadas, por los alcances que tiene en los aprendizajes de los estudiantes al ser utilizada.

Si se está interesado en los sistemas semióticos de representación y en la importancia de las tareas de conversión entre diferentes representaciones, se deben tener presente algunos aspectos teóricos que presentan autores como Duval (1993, 1995, 1998), Hiebert y Carpenter (1992), Janvier (1987), entre otros.

El trabajo de Hiebert y Carpenter (1992), nos explica ideas sobre la construcción de conceptos matemáticos, dentro del marco teórico de las redes formadas por representaciones internas, generadas por la manipulación de representaciones externas. Además, explican que una idea matemática, procedimiento o hecho, es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento o hecho, es entendido profundamente si este está ligado a una red existente con fuertes o numerosas conexiones.

Por otro lado, uno de los trabajos de Duval (1993) habla de las “representaciones semióticas” como un conjunto de signos, que son el medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles a otros individuos, además señala que el conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas semióticas. Por lo tanto, las representaciones mentales nunca pueden ser independientes de las representaciones semióticas. La elección de un determinado registro de representación puede ser la clave para facilitar la comprensión de un objeto matemático.

Continuando con el mismo autor, en matemáticas la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. Duval (1993) argumenta, que el desarrollo de las representaciones mentales depende de la interiorización de las representaciones semióticas, las cuales para intervenir en la actividad cognitiva, deben integrarse por dos componentes inseparables: La *Semiosis*, que es cualquier forma de actividad, conducta o proceso que involucre signos, incluyendo la creación de un significado; es un proceso que se desarrolla en la mente del intérprete, se inicia con la percepción del signo y finaliza con la presencia en su mente del objeto del signo; y la *Noesis*, que es la aprehensión conceptual de un objeto.

Además, Duval (1998) afirma que *no existe noética sin semiótica* y cita, que el uso de varios registros parece una condición necesaria para que los objetos matemáticos no sean confundidos con sus representaciones y para que puedan también ser reconocidos en cada una de ellas, así, la variabilidad de registros de representación (figuras, gráficas, escritura simbólica, lenguaje) conlleva una aprehensión conceptual de los objetos (Duval, 1995).

Por otro lado, acerca de las TIC podemos decir, que están presentes en todos los sistemas que componen los diferentes ámbitos de la sociedad. En el campo de la educación se puede afirmar que, aunque ha sido lenta la inclusión de esas tecnologías, hay

investigaciones que sustentan la importancia de su uso. Ya no se debate sobre su necesidad, sino las ventajas que ofrece su utilización (la mejor manera de sacarles provecho, al ser medios o herramientas que contribuyen a enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje), su incidencia en la cognición y procesos del pensamiento de los alumnos y la manera como impactan en la reestructuración del currículo educativo.

Indudablemente frente a este gran cambio, la educación debe hacerse eco y construir un nuevo modelo que permita a los alumnos la utilización de las TIC con la finalidad de mejorar su aprendizaje. Todo esto subraya, que la educación superior debe capacitar a cada uno de sus docentes en la aplicación de esta tecnología, crear sitios web educativos e insertar a los alumnos en el uso de este medio tan importante, es decir, que los distintos espacios curriculares tiendan a planificarse con la utilización de las TIC, como medio pedagógico esencial para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Su incidencia en la educación es tal, que constituye un valioso recurso que permite llevar un proceso educativo centrado en el aprendizaje del alumno. Sin embargo, no es necesario que el profesor haga uso de la tecnología computacional en todas las actividades, sino sólo en aquellas en las que su uso mejore el proceso de aprendizaje.

En otro orden de ideas, el aprendizaje colaborativo está basado en los siguientes principios (Orr, 1998):

1. Trabajando juntos resulta en un mejor entendimiento a comparación de haber trabajado independientemente.
2. Las interacciones habladas y escritas contribuyen a una mejor comprensión.
3. Existe la oportunidad de ser consciente a través de experiencias del aula, de las relaciones entre interacciones sociales y de una mejor comprensión.
4. Algunos elementos de dicha comprensión son idiosincrásicos e impredecibles.
5. La participación es voluntaria.

Metodología

Esta investigación, es parte de un proyecto que explora la aplicación de las actividades diseñadas por Hitt y Kieran (2009), con el uso de la calculadora TI-Nspire CX CAS como una herramienta didáctica para el aprendizaje de conceptos algebraicos, como son las ecuaciones que involucran radicales, para que los estudiantes aprendan a solucionarlas.

El trabajo colaborativo fue la metodología que se implementó en cada una de las sesiones de trabajo, porque se pretendía que el Aprendizaje Colaborativo fuera la base para el desarrollo de las capacidades de comunicación y colaboración de los estudiantes, ya que muchos de ellos al comenzar a resolver la fase de solución en equipo, tenían solo ideas intuitivas relacionadas con el problema (Núñez, Ceja, Guerrero, 2012).

Se realizaron dos experimentaciones: una piloto y otra formal. La primera, diseñada de tal forma que diera información acerca de la estructura didáctica de las actividades, las dificultades que tuvieron los estudiantes al trabajar con ellas y la metodología aplicada. La segunda, se llevó a cabo tomando en cuenta todas las observaciones realizadas de la experimentación piloto.

Como parte de la metodología se realizó una entrevista a los integrantes del equipo que realizó procedimientos interesantes para la investigación, para que fueran evidenciados de nueva cuenta y por medio de cuestionamientos explicaran cómo lo hicieron, para lo cual se elaboró un guion de preguntas.

La toma de datos para la investigación se realizó, de la evidencia escrita y de las videograbaciones hechas en las experimentaciones y la entrevista.

Experimentación

Para las experimentaciones se contó con el trabajo de 21 alumnos del primer módulo de la carrera de Ingeniería Química, con los cuales se formaron siete equipos de tres integrantes cada uno. Se reformuló parte de la redacción de las actividades de aprendizaje (Hitt y Kieran, 2009), para tenerlas acorde al contexto de los estudiantes. Las sesiones de trabajo fueron dos y tuvieron una duración de tres horas cada una de ellas. A cada equipo se le entregó una calculadora, la actividad rediseñada por el equipo de investigación y hojas en blanco, para que los participantes anotaran sus observaciones y dudas que surgieran durante el desarrollo de la actividad.

En la *primera sesión* se trabajó el manejo de la calculadora, así como de los principales comandos que se utilizarían para resolver la actividad, como: ENTER, FACTOR, EXPAND y SOLVE. En la *segunda sesión* se aplicó la actividad en donde se aborda la racionalización del denominador de una expresión.

Por otro lado, a los integrantes de los equipos se les cambió el rol de trabajo: el que manipulaba la calculadora, el que leía y respondía la actividad (papel y lápiz), y el que coordinaba el trabajo.

Se instalaron en el salón de clases, dos cámaras para videograbar: una cámara fija para observar las interacciones que se daban entre los equipos, entre los alumnos y el investigador; y otra cámara móvil que podía hacer acercamientos, para ver cómo resolvían las actividades y lo que escribían en las hojas que se les proporcionaron.

Resultados

Uno de los objetivos que tiene la actividad de aprendizaje es: Comprender la necesidad de verificar las soluciones de las ecuaciones que involucran variables bajo el signo radical. Presentaremos algunos resultados que muestran los razonamientos de los estudiantes para concretar los objetivos:

1. Los alumnos al resolver la actividad, analizan la ecuación que tienen y expresan los radicales en exponentes fraccionarios, la factorizan y así encuentran sus raíces. Ellos fueron capaces de emplear los métodos aprendidos en una actividad anterior (solución de ecuaciones lineales y cuadráticas), para resolver ecuaciones que involucraban radicales.

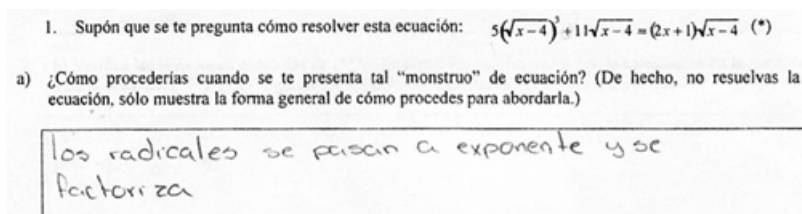


Figura 1. Evidencia del uso de la factorización

2. En la actividad se involucra una ecuación que tiene factores de la forma $(x - a)^n$, en donde los alumnos tienen que resolverla con lápiz y papel para encontrar sus raíces. Observaron que la ecuación tiene un factor $x - a$ y que podían dividir la ecuación por ese factor, al hacer esto les quedó una ecuación más sencilla para factorizar y poder encontrar las raíces. Pero cuando hacen el procedimiento anterior en la calculadora, obtienen un valor de más, dándose cuenta que cuando dividieron la ecuación por el factor $x - a$ estaban eliminando uno de los valores. En lugar de resolver la ecuación inicial de grado n , estaban trabajando con una ecuación de grado $n - 1$. Esto lo pudieron identificar, por el trabajo que habían realizado con lápiz y papel.

b) Usando papel y lápiz, observa si puedes resolver primero la siguiente ecuación, que es de algún modo, análoga al "monstruo" precedente:

$$(y-2)^3 - 10(y-2) = y(y-2) \quad (**)$$

Sugerencia: la factorización (obtención de factores comunes) puede ser útil en este caso.

Figura 2. Evidencia de la eliminación de una raíz

3. Otro razonamiento que hicieron los estudiantes cuando trabajaron con raíces pares en una ecuación, fue que haciendo el mismo procedimiento de factorización obtienen un valor negativo, pero cuando lo sustituyen en la ecuación obtienen una solución de un número imaginario.

2. a) Tomando como base las estrategias empleadas para resolver la ecuación previa (**), usa papel y lápiz para encontrar el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$5(\sqrt{u})^3 + 4\sqrt{u} = (3u-7)\sqrt{u} \quad (***)$$

Muestra todo tu trabajo en el espacio que sigue:

Figura 3. Evidencia de una raíz imaginaria

Conclusiones

1. Los estudiantes al trabajar con esta actividad, aprendieron que pueden resolver una ecuación que involucra radicales con el mismo procedimiento con el que resuelven una ecuación sin radicales.
2. También pudieron constatar que cuando existe una ecuación que contiene radicales pares, se pueden obtener raíces reales o imaginarias.

3. Otra situación que les causó extrañeza pero que al final del trabajo aprendieron, fue cuando una ecuación se divide entre uno de sus factores, se elimina una de las raíces de la misma.
4. Los razonamientos que tienen los estudiantes en la solución de la actividad parten por lo general de la visualización, lo anterior por trabajar con lápiz y papel, y posteriormente con la calculadora. Además, de que manejan diferentes registros de representación y transitan de un registro a otro; lo cual, favorece que el estudiante conceptualice los tópicos algebraicos involucrados en la actividad (Duval, 1993, 1995).
5. Los estudiantes utilizan como estrategia de solución, el consenso de las discusiones entre los integrantes del equipo y las interrogantes que se hacen acerca de cómo resolver la actividad, de tal manera que el alumno crea un razonamiento propio para dar solución a las ecuaciones.
6. Aprendieron a trabajar en forma colaborativa (Brady, 2010; Calzadilla, 2001), con el apoyo de la metodología aplicada y la estructura didáctica de las actividades. Concretaron lo anteriormente citado, cuando intercambiaban los roles de trabajo (líder, manejo de calculadora y solución de la actividad) y cuando discutían los procedimientos y resultados que obtenían al desarrollar la actividad.
7. Los estudiantes al resolver las actividades hacen uso de diferentes estrategias de solución, que los llevan a razonar e interactuar entre ellos para llegar al resultado mostrado por la calculadora, la cual es un medio para lograr el aprendizaje de los conceptos involucrados (resultado número 2).

Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International journal of computers for mathematical learning* **7**: 245–274.
- Brady, C. (2010). El aprendizaje colaborativo con tecnología. *Innovaciones Educativas*. Texas Instruments.
- Calzadilla, M. (2001). Aprendizaje colaborativo y tecnologías de la información y comunicación. *EOI-Revista Iberoamericana de Educación*, 1-10.
- Cortés, J., Miranda, R. y Carrillo, G. (2012). Uso de la Tecnología en educación matemática. Investigaciones y Propuestas 2012. *Modelación matemática con el uso de la calculadora TI-Nspire CAS, como una alternativa para el aprendizaje significativo de funciones* (241-254). Guadalajara: AMIUTEM, A.C.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive*, IREM de Strasbourg. (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN, México 1997).

- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Peter Lang, Suisse.
- Duval, R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*.6, 139-163.
- Hiebert, J., Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with understanding. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Company.
- Janvier, C. (1987). Representations and Understanding: The notion of Function as an example. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, p. 67-71.
- Hitt, F., Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with task designed from a task-technique-theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14,121-152.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), pp. 229-240.
- Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En Grows, D.A. (ED.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company. New York, pp. 390-419.
- Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. En Lester, F.K. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.707-762). Reston, Virginia: NTCM e IAP.
- Núñez, G. y Cortés, J. (2011). Uso de la Tecnología en educación matemática. Investigaciones y Propuestas 2011. *Desarrollo de Ambientes Tecnológicos Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas; Una experiencia con la Línea Recta* (51-56). Morelia: AMIUTEM, A.C.
- Núñez, G., Ceja, J. y Guerrero, L. (2012). Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología. Resolución de problemas y Aprendizaje Colaborativo. *Aprendizaje Colaborativo como medio para favorecer el razonamiento geométrico de estudiantes de bachillerato* (41-57). Cd. Guzmán: Instituto Tecnológico.
- Orr, M., (1998). *Opportunities and chances: lessons learned from a community youth services effort*. New York: Peter Lang.
- Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México [Incorporating technological learning environments into the school culture: An educational innovation project in mathematics and science in the public secondary schools of México]. *Revista Iberoamericana de Educación*, 33, 135-165.