REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.

Volumen IV Número 1 Fecha: Junio 2016

ISSN: 2395-955X

ISSN: 2395-955X

PROPUESTA DE CLASE PARA LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRAL DEFINIDA CON EL USO DE TECNOLOGÍA MEDIANTE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO TPACK

Jesús Muñoz, Eduardo Briceño, Judith Hernández
Universidad Autónoma de Zacatecas, México
jjmunozher@yahoo.com.mx, ecbs74@gmail.com, judith700@hotmail.com

Para citar este artículo:

Muñoz, J., Briceño, E. y Hernández, J. (2016). Propuesta de clase para la enseñanza de la integral definida con el uso de tecnología mediante la implementación del modelo TPACK. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año 4, No. 1, Enero - Junio 2016, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Calle Gordiano Guzmán #6, Benito Juárez, C.P.49096, Ciudad Guzmán Jalisco, Teléfono: 3411175206. Correo electrónico: http://www.amiutem.edu.mx/revista, revista@amiutem.edu.mx. Editor responsable: M.C. Christian Morales Ontiveros. Reserva derechos exclusivos al No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

PROPUESTA DE CLASE PARA LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRAL DEFINIDA CON EL USO DE TECNOLOGÍA MEDIANTE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO TPACK

Jesús Muñoz, Eduardo Briceño, Judith Hernández

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

jjmunozher@yahoo.com.mx, ecbs74@gmail.com, judith700@hotmail.com

Palabras Clave: TPACK, práctica docente, integración tecnológica.

Resumen

Las tecnologías digitales en educación matemática, traen consigo que el docente cambie sus estrategias de enseñanza, lo cual requiere que sepa potenciar su uso en su dimensión didáctica. Lo anterior se encuentra en un estado conflictivo, ya que el profesor cuenta con escasa referencia profesional de esta práctica, es decir, cómo usar la tecnología para enseñar y no solo eso, sino cómo modificar el contenido matemático. En ese sentido, se reporta un avance de investigación del uso de tecnología mediante una propuesta para la clase de la integral definida, que articula sistemáticamente el conocimiento matemático, didáctico y tecnológico mediante el modelo teórico TPACK (Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido). Complementado a este modelo se encuentra THA (Trayectorias Hipóteticas de Apredizaje) como una guía o plan de trabajo metodológico que complementen la propuesta de clase.

Introducción

El Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM, 2000), declaró que las tecnologías deberían utilizarse amplia y responsablemente para facilitar a los estudiantes, la visualización de los conceptos matemáticos. En ese sentido, es una herramienta didáctica que ayuda a la construcción de significado de los objetos estudiados (Miranda y Sacristán, 2012). Esto requiere que el profesor sepa potenciar su uso como herramienta didáctica, considerando el trabajar colaborativamente en cursos de actualización profesional (Vitabar, 2011).

Haciomeroglu, Bu y Haciomeroglu (2010), mencionan que la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas con tecnología ha recibido mayor atención en los últimos años. Al respecto señalan, que a pesar de la creciente importancia que se tiene de su implementación, los resultados reportan que los profesores hacen un uso limitado de ésta en el aula. Por lo tanto, las nuevas tendencias de investigación que se describen a continuación, se enmarcan hacia la importancia de mejorar la práctica docente con el uso de tecnología para su clase de matemáticas. Por lo tanto, se describe una propuesta, como resultado, de clase sobre la integral definida que articula el conocimiento didáctico, matemático y tecnológico (TPACK) complementado con una guía metodológica (THA), que permite planificar la aplicación de esta articulación de conocimientos.

La Práctica docente con el uso de tecnología, algunos aportes

Las investigaciones referente a cómo mejorar la práctica docente, están dando un giro importante en las investigaciones en matemática educativa, ya que se orientan, en su mayoría, al diseño de actividades apropiadas proponiendo estrategias efectivas para su enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el uso de tecnología. Por ejemplo retomando a Haciomeroglu, Bu y Haciomeroglu (2010), reportan el estudio realizado a 68 profesores en formación en la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria. Para lograrlo incluyeron conocimientos y dinámicas, que desde la perspectiva de los autores, potenciaron positivamente la perspectiva de los futuros profesores sobre el uso de tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Las dinámicas consistieron en la reflexión y discusión conjunta de la instrucción tomando en cuenta, conocimientos matemáticos y didácticos, es decir, no se limitaron o centraron solo en un uso manipulativo del GeoGebra, sino que propiciaron la reflexión de su propia práctica hacia articulación de conocimientos didácticos y matemáticos. Sin embargo, algunos de ellos expresaron su renuencia de usarlo en su práctica docente, ya que se limita en un uso rutinario del software para verificar resultados y medir objetos, siendo estas actividades realizables a papel y lápiz.

González (2014) realizó un estudio con estudiantes en formación docente de matemática y física. El estudio muestra una experiencia del uso del software de geometría dinámica, considerando un enfoque profesional, es decir, con intención de que logren adquirir conocimientos sobre el uso de tecnología para considerar *modos de actuación* útiles en su desempeño como profesores. La primera componente es el enfoque profesional donde los docentes en formación, adquieran dominio del software con contenidos matemáticos adaptados con dicha tecnología. Por lo tanto, se les impartió un curso para aprender a utilizar el software, considerando las principales dificultades encontradas por los estudiantes, y mostrando de esa manera su utilidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El curso fue diseñado por los siguientes pasos:

1. Realizar un diagnóstico sobre los contenidos matemáticos precedentes.
2. Incluir como nuevo contenido en la disciplina, un curso elemental de uso de software de geometría dinámica, con el objetivo de preparar a profesores en formación en la utilización de las herramientas y diferentes comandos del software.
3. Determinar los contenidos que serían tratados con el uso del software
4. Preparar las tareas docentes a desarrollar en alumnos y profesores en el aula, como para el trabajo independiente en casa.
5. Orientar un trabajo sobre la elaboración de una tarea docente con el software de un contenido no abordado en clase, incluida una discusión de la tarea en el aula. Esta acción tiene el fin de comprobar la interiorización de los modos de actuación profesional en lo que concierne a la etapa de planificación del trabajo.
6. Realizar una entrevista grupal, para conocer las opiniones finales de los estudiantes acerca de las formas de trabajo utilizadas.

De nueva cuenta se pueden identificar en los pasos anteriores, la inclusión de conocimientos de corte tecnológico, didáctico y matemático, aunque en este caso la articulación de los mismos no es tan evidente. Un elemento rescatable en el desarrollo de esta investigación fue la necesidad de modificar algunas tareas docentes, que incluían actividades de construcción, por otras donde el foco fue la realización de conjeturas. De esta manera, se logra un cambio en las concepciones de las tareas docentes y en nuestra opinión, en los alcances de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

Vitabar (2011) reporta un estudio con 90 profesores en servicio, que participaron en cursos de actualización profesional a distancia, para aprender sobre el uso del software de GeoGebra para sus clases de matemáticas. El objetivo fue conocer las necesidades de profesores de matemáticas en servicio, que esperan mejorar su práctica al participar en programas de actualización profesional. La investigación se centró en lo rescatable del uso de tecnología en el aula, y a partir de ello, ofrecer algunas recomendaciones que intentan mejorar este tipo de propuestas formativas. Para dar evidencia, se solicitó a los profesores el diseño de una propuesta didáctica aprovechando las potencialidades de la tecnología. Al analizar las propuestas, se detectaron tipificaciones que caracterizan la práctica el profesor con el uso de tecnología para su clase de matemática:

- *Los resistentes*: Docentes con poca formación en el uso de tecnología, por lo regular comparan las nuevas metodologías con las tradicionales, analizando la relación del esfuerzo consumido y los logros alcanzados. Expresan cierta resistencia sobre incorporar la tecnología en el aula y son críticos a la hora de evaluar su conveniencia. A estos profesores les preocupa mucho el poco dominio de los comandos de la tecnología y de su funcionalidad y por ello, le quitan atención a los aspectos didácticos.
- *Los novatos*: Profesores con poca experiencia, regularmente jóvenes y sin aversión al uso de tecnología. Creen en la necesidad de incorporar la tecnología en el aula basándose en la motivación que esto genera en los estudiantes, pero en el análisis de sus propuestas, la didáctica se relaciona al uso de tecnología por el simple hecho de utilizarla, lo cual resulta inconveniente ya que se centran solo en el entorno tecnológico, que empaña el interés didáctico de la actividad.
- *Los tecnócratas*: Estos profesores están muy familiarizados con el uso de la tecnología. Tienen la creencia de que la tecnología puede simplificar el trabajo en el aula. Aprenden fácilmente nuevos programas computacionales y se sienten seguros al momento de usar tecnología en el aula. Una característica bastante común en estos profesores, es que el uso en sí mismo del software, se sobrepone al aprendizaje de la matemática y la propuesta se transforma en una clase de informática.
- *Los experientes*: Profesores que poseen un buen nivel de reflexión didáctica de su práctica. Son capaces de entender la bondad de cierta metodología en función de la calidad del aprendizaje de sus alumnos. Estos profesores consideran a la tecnología como un medio, y no como un fin, es decir, suelen preparar tareas donde la tecnología no es el centro, ni tampoco un obstáculo por lo tanto potencian la dimensión didáctica de la actividad.

De esta manera el autor hace tres recomendaciones:

1. Menciona que los cursos de actualización debe promover el trabajo colaborativo en conjunto con el investigador, ya que puede generar un ambiente de trabajo que luego trascenderá en el curso y promoverá una concepción de cómo encarar una formación permanente.
2. Señala que los cursos deben centrarse en aspectos didácticos y no en aspectos solo tecnológicos, ya que esto ayuda a que profesores inseguros de usar la tecnología, se sientan confiados cuando vean que la calidad de su trabajo, no radica en solo conocimiento tecnológico sino de carácter didáctico.

3. Por último, se recomienda que los cursos se extiendan por algún tiempo con el fin de que el profesor, se sienta acompañado en su trabajo cotidiano y no solo de preparar una actividad como evaluación de un curso puntual.

Por otra parte De Villiers (2006) señala que se debe tener cuidado con el uso de software de geometría dinámica, ya que la mayoría de las investigaciones realizadas sobre el uso de la tecnología solo hablan de sus potencialidades educativas, sin abordar los posibles inconvenientes que suceden como práctica de su uso en las aulas de clase. Algunas de ellas se mencionan a continuación:

1. *El inconveniente del no cambio*. Es descrito por el empleo que hacen los profesores al introducir el software de geometría dinámica al salón de clases, solamente como una extensión de lo que se hace a papel y lápiz. "De esta manera se requiere aprender a utilizar las tecnologías donde la actividad matemática se transforme en hacer cosas que previamente no podrían haber sido posible hacerlas a papel y lápiz" (Sutherland 2005, p. 4; citado en De Villiers, 2006). De lo contrario, se puede caer en la categoría de profesores resistentes mencionados anteriormente.
2. *El inconveniente de primero dominar el software.* Consiste en que muchos de los profesores asumen que los estudiantes deben primero dominar ampliamente el software, para que pueda ser utilizado efectivamente en el salón de clases para la enseñanza. Esta creencia está muy lejos de la realidad, ya que los estudiantes no necesitan conocer a profundidad el software para poder llevar a cabo exploraciones y conjeturas. Él considera que esto se puede lograr, simplemente con exponer al estudiante con las habilidades específicas necesarias para el aprendizaje particular de un concepto. Este inconveniente puede relacionarse con la categoría de los tecnócratas, en dónde el alcance de la tecnología se ve limitada a solo un uso tecnológico y no didáctico.
3. *El inconveniente del aprendizaje sin dolor*. Este consiste con la creencia de que, tan solo pedir a los alumnos que trabajen un problema utilizando geometría dinámica, automáticamente el aprendizaje se dará de manera fácil. A menos que el estudiante sea cuidadosamente guiado para observar y examinar lo que acontece en la pantalla, muy poco aprendizaje podría estar ocurriendo. En nuestra opinión, este último inconveniente puede estar ligado a la categoría de las prácticas docentes de los novatos.

De Villiers (2006) ejemplifica a una estudiante en formación docente de matemáticas, donde se le solicitó una reflexión después de cada actividad. En una de sus reflexiones, ella elogió en sobremanera el uso del software de geometría dinámica, ya que ayudó a comprender mejor los teoremas y demostraciones, sin embargo al momento de evaluarla, se notó que la estudiante había aprendido muy poco.

El investigador argumenta que una posible causa se debe a la impresión, o tal vez confundida con la potencialidad del programa, desconectándose de la parte conceptual del contenido matemático. Esto desde la teoría de la Genesis instrumental se llama el proceso de instrumentalización, considerando que no basta solo el buen manejo de la tecnología, sino que existe una parte epistémica que debe emerger de este proceso (instrumentación) y que se integra al conocimiento para comprender un contenido matemático (Artigue, 2002).

A manera de reflexión los trabajos descritos, brindan un panorama sobre los avances de la práctica docente con el uso de las tecnologías para la clase de matemáticas. En contraparte, aunque los planes de estudio promueven el uso de las tecnologías, no se puede negar el estado problemático del cómo usarlas para la enseñanza sin caer en la tipificación de informático, como menciona Vitabar (2011).

Estos trabajos describen de cierta manera, sobre inquietudes de implementar la tecnología en la práctica docente. Algunas de estas inquietudes se orientan a las siguientes preguntas*: cómo llevar un contenido matemático*, *qué didáctica se debe desarrollar y qué de la tecnología usar al momento de implementarla en la clase de matemáticas*. Tales preguntas nos llevan a problematizar la necesidad de articular estos conocimientos y planear su forma de intervención en el aula.

La dificultad de la enseñanza de la Integral Definida

Siendo el contenido matemático de la integral definida que se propone en esta investigación, conviene reportar algunas dificultades que justifican el diseño de una propuesta de enseñanza con el uso de tecnología. Ramírez, Muñoz e Ibarra (2011), con el objetivo de indagar si los estudiantes logran una aprehensión conceptual de la integral definida en la resolución de problemas, documentaron el tipo de aprendizaje logrado por 176 estudiantes de Ingeniería en relación con la integral definida. Hicieron uso de un examen diagnóstico que implicó la identificación y tránsito de la integral en diferentes registros de representación (geométrico, algebraico y numérico) en la resolución de problemas. Concluyeron que la mayoría de los estudiantes adquieren un aprendizaje memorístico y algorítmico, sin lograr construir el significado de la integral definida.

Kouropatov & Dreyfus (2014) trabajaron con estudiantes de bachillerato sobre el aprendizaje del concepto de integral definida, basándose en la idea de acumulación. Se mostró evidencia del potencial del enfoque que llevó a los estudiantes a tener un punto de vista sobre el concepto y que los prepara para el teorema fundamental del Cálculo. En este trabajo se implementó un cuestionario con algunas preguntas conceptuales referentes a la integración, por ejemplo, calcular el área del rectángulo que se muestra en la figura 1. Esto con el fin de conseguir información sobre el pensamiento de los estudiantes en situaciones matemáticas elementales basada sobre la idea de acumulación.

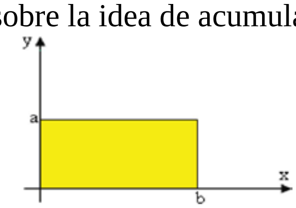

Figura 1. Área tomada de Kouropatov & Dreyfus (2014, p. 2).

Se identificó que cuando se les pide escribir la integral para calcular el área del rectángulo dado, sólo el 42% respondieron correctamente, el 15% no respondieron y el 12% configuraron bien la integral $\int_0^b a\,dx$, pero cometieron errores de cálculo tales como: $\int_0^b a\,dx = \left.\frac{a^2}{2}\right|_0^b = \frac{b^2}{2} - 0 = \frac{b^2}{2}$, sin haberse percatado de que el resultado era diferente al cálculo del área haciendo uso de la fórmula "*axb*". Aproximadamente el 31% de los estudiantes propusieron respuestas integrales como:

$$\int_0^b a\,dx\,,\ \int_a^b f(x)dx\,,\ \int_a^b f(a)dx\,,\ \int_0^b (\mathrm{a}-\mathrm{b})dx \ \text{ y } \int F(a)-F(b)+c\,.$$

Por otra parte, Llorens y Santonja (1997) mencionan algunas concepciones erróneas que tienen los estudiantes sobre el concepto de integral definida:

a) Se argumenta que los estudiantes identifican la integral con la primitiva. En este sentido, cuando calculan una integral, para ellos no interviene ningún proceso de convergencia ni tampoco un aspecto geométrico, por lo que queda en un proceso puramente algebraico de métodos de integración, sin ser aplicados al cálculo de área o ignoran por completo que se trata de las sumas de Riemann.

b) En segundo lugar, los alumnos identifican la integral definida con la regla de Barrow, incluso cuando ésta no puede aplicarse.

c) Finalmente se menciona que los estudiantes no relacionan el concepto de área con la integral.

Esto lleva a que alumno prefiera el contexto algebraico-formal que al visual-geométrico, debido a que no ha podido realizar la integración de ambos contextos. Así, se propone invertir el orden de enseñanza que usualmente declaran los libros de texto: cálculo de primitivas, métodos de integración, la integral definida y métodos de integración. Esta nueva organización de los contenidos de la matemática escolar sugieren como primer aspecto para el Cálculo integral, utilizar la construcción de Cauchy-Riemann con el apoyo de tecnología, diseñando prácticas que permitan al estudiante visualizar el concepto de área.

Por otra parte, Turégano (1998) señala que las dificultades que presentan los estudiantes en la compresión del concepto de integral definida, se deben a que se basa en conceptos más elementales como por ejemplo límite e infinito, que por sí solos presentan obstáculos epistemológicos (Ward, 2011). Esto lleva a los estudiantes a asimilar al mismo tiempo los fenómenos asociados a la aparición del infinito y de límite. Por lo que el autor menciona la importancia de conocer el desarrollo histórico del concepto para comprender su génesis, para proponer otra forma de organizar su enseñanza.

Por último, Cantor (2013) considera que la enseñanza de la integral se enfoca más a los cálculos de primitivas y métodos de integración, siendo el objetivo adiestrar en habilidades para propieciar trucos y destrezas en el estudiante, opacando el concepto de integral definida como área bajo la curva. Se puede constatar, que en muchos textos se omite una revisión del concepto de área (Hurtado 2016), como un "concepto intuitivo" que permite interpretar de ese modo las integrales y que cada vez es más necesario por el potencial que tiene el uso de tecnología en este aspecto. Así, Cantor (2013) desarrolla una secuencia del concepto de integral definida como área bajo una curva, desde una perspectiva gráfica y numérica, partiendo de la idea de aproximación y análisis de su variabilidad.

Estos aspectos nos permiten considerar, que la enseñanza de la integral definida ha privilegiado los métodos algorítmicos, donde lo predominante es el contexto algebraico-formal. Lo anterior ha ocasionado entre otras cosas, una pérdida de los significados que se pueden propiciar en el acercamiento visual-geométrico, siendo este contexto donde el uso de la tecnología puede ser un medio idóneo para desarrollarse. Aunque existen diversas posturas de enseñanza, por ejemplo, unas se orientan a la aplicación de las primitivas para calcular áreas mediante la regla de Barrow, otras definen la integral con el uso del lenguaje algebraico para después ver su interpretación geométrica, o bien cuando se introduce la integral definida como el cálculo del área bajo la curva, Existe poca reflexión sobre la práctica docente cuando se propone aspectos visuales de la enseñanza de la integral definida con el uso de tecnología. Esto es algo que consideramos importante reportar en este trabajo, tratando de responder una pregunta que detonó la investigación ¿cómo implementar la tecnología en las aulas de clase respecto a un contenido matemático?

Problemática de investigación

La investigación acerca del uso de tecnología para la enseñanza, ha recibido atención en varios campos de la matemática educativa en las dos últimas décadas (Kaput, 1992; citado en Haciomeroglu *et al,* 2010). Su uso en las escuelas ha ido creciendo en los últimos años, dada la dependencia que se tiene en la vida diaria, sin embargo, la incorporación a los sistemas educativos ha sido lenta (Miranda y Sacristán, 2012). Esto da como resultado la escasa utilización y variabilidad por parte de los profesores, independientemente del nivel de enseñanza en el que se desarrollan (Hernández y Quintero, 2009).

El uso de las tecnologías digitales para la enseñanza de las matemáticas ha sido reconocida, pero no “explotada a plenitud por lo profesores por falta de capacitación con esas tecnologías” (Valero, Barba y Del Castillo; 2011, p. 188). Por ejemplo se reporta que para los maestros, la incorporación de la tecnología en el aula es compleja (Chai, Ng, Li, Hong y Koh, 2013). Una posible causa, es que muchos profesores no cuentan con el conocimiento del contenido didáctico tecnológico, que respalden el aprendizaje de las matemáticas utilizando nuevas tecnologías (Niess et al, 2009; citado en Haciomeroglu et al, 2010). Es decir, no basta ser experto en el uso de las tecnologías, sino en las formas o métodos empleados hacia la enseñanza (Haciomeroglu *et al*, 2010). En ese sentido, se requiere de investigación que permita reflexionar la sistematización de tres dimensiones del conocimiento, necesarios para la clase de matemáticas. Estos son: el conocimiento matemático ¿qué enseñar de la integral definida y por qué?; el conocimiento didáctico ¿cómo enseñarlo? y el conocimiento tecnológico ¿cómo integrar la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de un contenido matemático específico? Por lo tanto, es importante que el profesor desarrolle competencias y reflexione sobre su práctica al incorporar estos tres conocimientos a su clase.

Las referencias descritas anteriormente, nos remiten a la caracterización de nuestra problemática de investigación en la formación docente con el uso de tecnología. Una dificultad que limita esta actividad, es la falta del conocimiento tecnológico por parte de los profesores (Haciomeroglu, *et al*, 2010). En particular, la renuencia se hace fuerte dado que no tienen marcos de referencia de cómo articular cierto conocimiento matemático, tecnológico y didáctico. El resultado es, que generalmente, los profesores utilizan el software de geometría dinámica como una extensión de la geometría que se hace a papel y lápiz, sin embargo la falta del conocimiento tecnológico no es la única dificultad.

Los profesores que cuentan con el conocimiento tecnológico, pueden hacer un uso de esta herramienta como un fin en sí mismo y no como un medio, como es el caso de los profesores tecnócratas, que no saben articular su conocimiento tecnológico con el matemático (Vitabar, 2011). El problema consiste en cómo se deben articular estos tres conocimientos para llevarlos al aula de clase. Por último, Rojano (2006) señala que una de las categorías del uso de las tecnologías digitales en la educación, corresponde a que se conciben como agentes del cambio tanto de los modos de apropiación de conocimiento, como de las prácticas en el aula y de los contenidos curriculares mismos.

Lo anterior nos permite reflexionar que la complejidad radica a una desarticulación de estos tres conocimientos. Con lo descrito, nos hacemos la siguiente pregunta ¿Qué reflexión se obtiene hacia la formación docente en el uso de tecnología, al articular el conocimiento didáctico matemático sobre el tema de la integral definida con el uso de GeoGebra? De tal forma que se planteó como objetivo realizar una propuesta de articulación del conocimiento didáctico y matemático con el software de geometría dinámica GeoGebra para el tema de la integral definida. Es decir, reportamos como resultado una propuesta de articulación del conocimiento didáctico al tema de la integral definida con el uso de GeoGebra bajo el modelo TPACK y que a continuación describimos.

Marco Teórico

El Modelo didáctico de integración tecnológica, el TPACK fue desarrollado por Mishra y Koehler (2006). El TPACK aborda la problemática de integrar la tecnología en el aula para la enseñanza de la ciencia. Este modelo describe los tipos de conocimiento que el profesor necesita para la efectiva enseñanza de un contenido específico por medio de tecnología. El TPACK es una extensión del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) de Shulman (1986), citado en Koehler y Mishra, 2009). Este marco explica cómo la comprensión que tienen los profesores de las tecnologías educativas y el PCK, interactúan entre ellas para producir enseñanza efectiva con tecnología.

Este modelo está compuesto por tres núcleos principales que están relacionados con el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido (CK), conocimiento pedagógico (PK) y conocimiento tecnológico (TK). Para este modelo las intersecciones entre estos cuerpos de conocimiento son igual de importantes. Estas intersecciones están representadas como PCK (conocimiento pedagógico del contenido), TCK (conocimiento tecnológico del contenido), TPK (conocimiento tecnológico pedagógico), y el TPACK (conocimiento tecnológico pedagógico del contenido). Todas estas intersecciones son presentadas en la figura 2.

Definiciones de los conocimientos considerados por el TPACK

A continuación se presentan las concepciones presentadas en Koehler y Mishra (2009) de los conocimientos propuestos en el modelo TPACK:

Conocimiento del Contenido (CK). Es el que tiene el maestro acerca de la materia a ser enseñada y aprendida; teniendo una importancia crítica para estos. Este tipo de conocimiento incluye conceptos, teorías, ideas, marcos de trabajo organizativos, conocimientos de evidencias y pruebas; así como prácticas establecidas y enfoques hacia el desarrollo de este conocimiento. La naturaleza y el tipo de conocimientos difieren en gran medida entre disciplinas. Por lo que los maestros deben entender los conocimientos fundamentales de la disciplina que ellos enseñan.

Conocimiento pedagógico (PK). Es el que tienen los profesores acerca de los procesos, prácticas o métodos de enseñanza y aprendizaje. Estos abarcan la totalidad de los propósitos educativos, valores y metas. Este tipo de conocimiento se refiere a como los estudiantes aprenden, técnicas de manejo del salón de clases, destrezas, planeación de clases y evaluaciones. Incluye técnicas o métodos utilizados en el salón de clases y estrategias para la evaluación de la comprensión de los estudiantes. Un profesor que tiene un profundo conocimiento pedagógico, comprende cómo los estudiantes construyen el conocimiento y adquieren habilidades, y cómo ellos desarrollan hábitos mentales y disposiciones positivas hacia el aprendizaje.

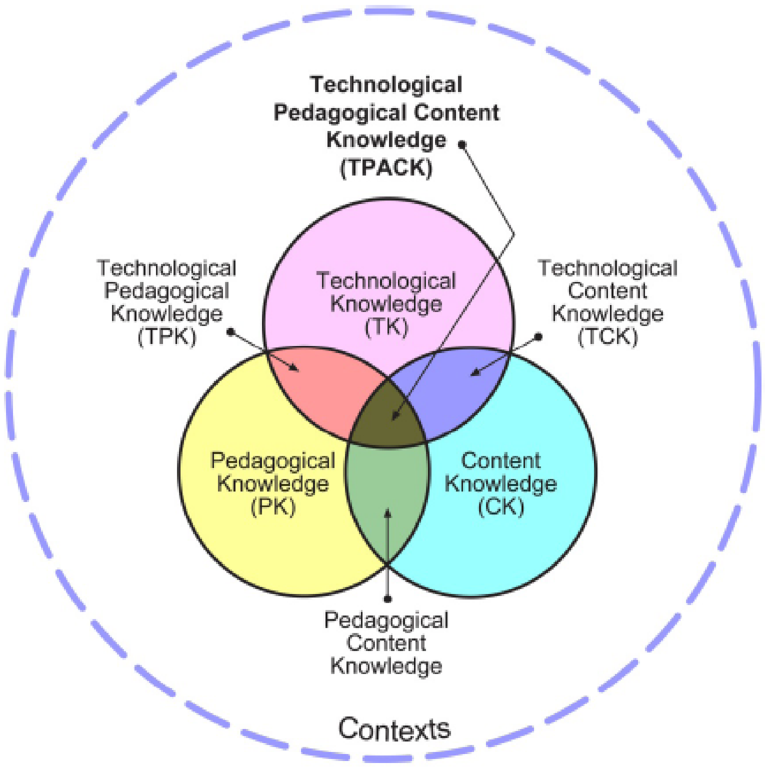

Figura 2. Marco del Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (Koehler y Mishra, 2009; p. 63).

Conocimiento Tecnológico (TK). La definición es similar a la dada por *Fluency of Information Technology* (FITness) propuesta por *Committee of Information Technology Literacy* del *National Research Council* (Koehler y Mishra, 2009). El *FITness* requiere que las personas comprendan la información tecnológica lo suficiente, para aplicarla productivamente en el trabajo y en la vida diaria, reconocer cuando la información tecnológica puede ayudar o entorpecer la realización de una tarea, y adaptar continuamente los cambios en la información tecnológica. Adquirir el conocimiento tecnológico de esta manera, le permite a una persona realizar una variedad de tareas diferentes utilizando información tecnológica, y desarrollar diferentes maneras de realizar cierta tarea.

Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK). Este es similar y consistente con la idea de Shulman (1986, citado en Koehler y Mishra, 2009) del conocimiento pedagógico que es aplicable a la enseñanza de un contenido en específico (PCK). Central a la conceptualización de Shulman del PCK, está la noción de la transformación de la materia para la enseñanza. De acuerdo con Shulman (1986), esta transformación ocurre cuando el profesor interpreta la materia, encuentra múltiples maneras de representarla, y la adapta e hila los materiales instructivos para concepciones alternativas y al conocimiento previo del estudiante. De esta manera, tener conocimiento de las interpretaciones erróneas y las maneras de afrontarlas, la importancia de forjar conexiones entre las ideas basadas en el contenido, el conocimiento previo del estudiante, estrategias alternativas de enseñanza, y la flexibilidad que viene de explorar maneras alternativas de ver el mismo problema o idea son todas esenciales para la enseñanza efectiva.

Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK). Es la comprensión de cómo la tecnología y el contenido se influencían y limitan una a otra. Los profesores necesitan dominar más que la materia que se imparte; ellos deben tener un profundo entendimiento de cómo la materia se puede modificar por la aplicación del uso específico de una tecnología. Los profesores deben comprender qué tecnologías específicas, son las más adecuadas para abordar el aprendizaje de la materia dentro de sus dominios y de cómo el contenido dictamina o tal vez cambia la tecnología, o viceversa.

Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK). Es el entendimiento de cómo la enseñanza y aprendizaje puede cambiar cuando tecnologías específicas son utilizadas de forma concreta. Esto incluye conocer los alcances y limitantes de una serie de herramientas tecnológicas al relacionarse a los diseños y estrategias pedagógicas disciplinares apropiados. Para construir el TPK es necesario tener una comprensión más profunda de los alcances y limitaciones de las tecnologías y los contextos disciplinarios dentro de los cuales funcionan.

Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK). Es una forma emergente de conocimiento que va más allá de las tres componentes: contenido, pedagogía y tecnología; es una comprensión que emerge de las interacciones entre estas componentes. El TPACK es la base para una enseñanza efectiva con tecnología. Este requiere: una comprensión de cómo los conceptos se pueden representar utilizando tecnología; técnicas pedagógicas que utilizan tecnología de maneras constructivas; conocimiento de qué es lo que hace fácil o difícil aprender ciertos conceptos y cómo la tecnología puede redireccionar algunos de los problemas que enfrentan los estudiantes; saber sobre el conocimiento previo de los estudiantes y teorías epistemológicas; además de cómo las tecnologías pueden ser utilizadas para construir a partir del conocimiento existente, nuevas epistemologías o reforzar las existentes.

Por último, el círculo punteado que aparece en el diagrama etiquetado como contexto, enfatiza la comprensión de que los diferentes conocimientos no existen en el vacío, sino, que están instanciados en contextos específicos de la enseñanza y aprendizaje. Cada situación presentada a los profesores es una combinación única de los tres núcleos que componen el TPACK. En consecuencia, no hay una solución tecnológica que sea única que aplique para cada maestro, para cada curso, o para cada visión de aprendizaje. Más bien, las soluciones recaen en las habilidades de los profesores, para recorrer flexiblemente, los espacios definidos por los tres elementos del modelo y las interacciones complejas entre éstos, en contextos específicos.

Es así como, con estos referentes teóricos se intenta reflexionar un TPACK de la integral definida, articulando los tres conocimientos especializados ya mencionados. En ese sentido, se proponen el este modelo de articulación de conocimientos para la enseñanza de la integral definida que corresponde a una adecuación de su secuencia didáctica (autor, 2014).

Propuesta Didáctica

Modelo del TPACK de la integral definida

A continuación describimos la articulación de las intersecciones de los conocimientos matemático, didáctico y tecnológico, propuesta para el tema de integral definida en el contexto de una clase a nivel medio superior. La actividad es adaptada de Cantor (2013) y diseñada en Geogebra. El lector puede descargar de https://www.geogebra.org/m/Pu4bSAQn , tanto la hoja de trabajo como el archivo Geogebra.

Conocimiento pedagógico de la integral definida. En esta dimensión se tomó la siguiente definición de integral definida considerando la propuesta curricular del programa de estudios del nivel medio superior en México (DGB, 2011) y como recomendación reportada en Llorens y Santonja (1997):

> Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Hacemos que $x_0\,(= a), x_{1,} x_2, \dots, x_n (= b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elegimos $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ como los puntos muestra en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el *i-ésimo* subintervalo $[x_{i-1},\ x_i]$. Entonces la integral definida de f, desde a hasta b, es
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

(Steward, 1999)

Además, su elección se justifica diciendo que la definición tiene una ventaja didáctica, pues se puede vincular con la visualización de cálculo de áreas en distintos contextos como describe (Cantor, 2013), es decir, la aproximación por sumas por exceso y por defecto en representaciones geométricas, numéricas y algebraicas.

Conocimiento tecnológico de la integral definida. En esta componente, el profesor identificó qué rutinas del GeoGebra podrían ser utilizadas para abordar el concepto de integral mediante la visualización de áreas; como resultado, él propone las siguientes construcciones en Geogebra. La finalidad de las mismas, es que los estudiantes, exploren y argumenten la noción de área con la suma de rectángulos por exceso y por defecto, en relación con la integral definida. Enseguida se describen las construcciones propuestas y utilizadas por el profesor en su experiencia de clase:

1. Actividad 1. En esta primera actividad se definen los valores a_1, b_1. Enseguida se definen los puntos a = (a_1, 0) y b = (b_1, 0) y se utiliza el comando Segmento[a, b] siendo a el límite inferior y b el límite superior del segmento [a, b]. Para poder estar cambiando los valores de a y b se les vincula una casilla de entrada. Se define el valor n (número de subintervalos) y también se le asigna una casilla de entrada para poder variar este valor. Para graficar los puntos de la partición se utiliza el comando lista1 = Secuencia[(i, 0), i, a1, b_1, (b_1 - a_1) / n]. Para obtener las coordenadas de los puntos de la partición se utiliza

el comando lista2 = Secuencia[Texto[(x(Elemento[lista1, i]), y (Elemento[lista1, i])), Elemento[lista1, i]], i, 2, n]. Por último se define el valor lsi = (b_1 - a_1) / n para obtener la longitud de los subintervalos.

2. Actividad 2. En esta actividad iniciamos definiendo la función f(x) = 0. A esta función se le vincula la casilla de entrada que nombramos Función para poder trabajar con diferentes funciones utilizando el mismo subintervalo y partición que se definió en la Actividad 1. Definimos lista3 = Secuencia[(Elemento[x(lista1), i], f(Elemento[x(lista1), i])), i, 1, n + 1] para generar los puntos de la partición al ser evaluados por la función que se definió anteriormente. Para hacer que las coordenadas de los puntos aparezcan en el ordenador, se utiliza el comando lista4 = Secuencia[Texto[(x(Elemento[lista3, i]), y(Elemento[lista3, i])), Elemento[lista3, i]], i, 1, n + 1]. Se crea el deslizador rectángulosuperiores y se define lista5 = Secuencia[Polígono[Elemento[lista3, i + 1], Elemento[lista1, i + 1], Elemento[lista1, i], (x(Elemento[lista1, i]), y(Elemento[lista3, i + 1]))], i, 1, rectángulosuperiores] para que el ordenador dibuje los rectángulos superiores de la partición. De igual manera se crea el deslizador rectángulosinferiores y se define lista6 = Secuencia[Polígono[Elemento[lista3, i], (x(Elemento[lista1, i + 1]), y(Elemento[lista3, i])), Elemento[lista1, i + 1], Elemento[lista1, i]], i, 1, rectángulosinferiores] para que el ordenador dibuje los rectángulos inferiores de la partición. En esta actividad también se utilizan casillas de control para activar o desactivar comandos.
3. Actividad 3. En esta actividad se definen los valores Sumainferior = Suma[lista6] y Sumasuperior = Suma[lista5].

Intencionalidad didáctica de las construcciones realizadas en GeoGebra para la enseñanza de la integral definida

Sobre la Primera construcción con GeoGebra. Las tareas de la Actividad 1 son propuestas para que los estudiantes relacionen el valor de “n” con el número y longitud de los subintervalos. De esta manera se pretende introducir la noción de partición.

Sobre la segunda construcción con GeoGebra. Las tareas planteadas en la Actividad 2 tienen como objetivo realizar una aproximación del área bajo el segmento parabólico, $y = \frac{x^2}{4}$ en el intervalo [1, 6] utilizando sumas superiores. Los estudiantes tendrán que completar una tabla utilizando las sumas superiores con la intención de que ellos relacionen las alturas de los rectángulos con los puntos de la partición. En la última parte de esta actividad se les pide que realicen el llenado de la tabla, pero ahora con una partición de seis subintervalos, con la intención que relacionen que a más particiones que tenga el subintervalo se obtiene una mejor aproximación del área.

Sobre la Tercera construcción con GeoGebra. Las tareas propuestas en la Actividad 3 tienen como objetivo, que los estudiantes identifiquen que conforme el número de intervalos aumenta, la diferencia entre las sumas superiores e inferiores disminuye. De esta manera se introduce de forma intuitiva a la integral definida como la aproximación del área bajo la curva y su relación con la idea de límite. Después de que los estudiantes hayan terminado el último ejercicio de la Actividad 3, se espera tendrán los elementos para formalizar la definición de integral definida, desde el enfoque de Riemann propuesto en el plan de estudios del nivel medio superior.

Hasta el momento se han presentado los conocimientos que fueron identificados y construidos por el profesor mediante el modelo TPACK; sin embargo, esto no permite soslayar la organización de esta articulación para su implementación en clase. Esto se resolvió mediante la herramienta metodológica de planeación, ejecución y evaluación de la clase denominada "las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA)". Esta herramienta se presenta a continuación.

Metodología

La planeación de la aplicación de la enseñanza de la integral definida

Como ya se dijo anteriormente, aunque existe en el TPACK una parte didáctica que ayuda a la intencionalidad de lo que se quiere aprender, ésta no proporciona una guía o plan de trabajo que complementen la reflexión docente. Para ello se consideró el término Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) de Simón (1995). La THA ofrece una descripción de aspectos clave para la planeación de clases de matemáticas. Una THA se basa en los objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes; en las tareas matemáticas que se utilizarán para promover estos objetivos y en las hipótesis que tiene el profesor acerca de los procesos de aprendizaje de los estudiantes en torno al contenido matemático a enseñar (Figura 3).

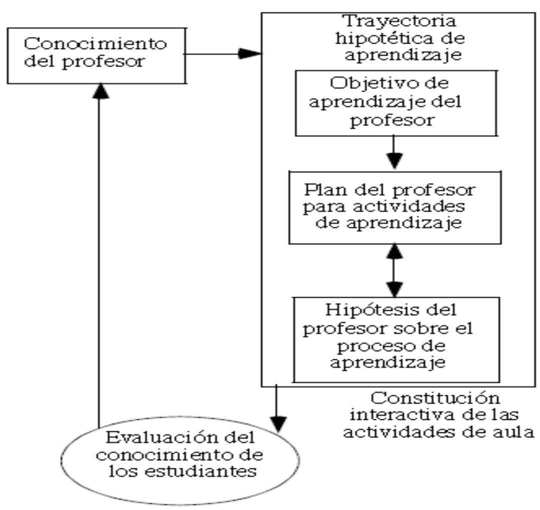

Figura 3. Ciclo de la enseñanza de las matemáticas de abreviado (Simón, 1995 p. 136).

Este diagrama se describe de la siguiente manera. El objetivo de aprendizaje que tiene el profesor indica la dirección de la trayectoria hipotética de aprendizaje. En ese sentido se traza un camino por el que puede transitar el aprendizaje; esta hipótesis es contrastada posteriormente con lo obtenido después de la clase. Para ello se parte del supuesto que el aprendizaje individual de los escolares recorre caminos idiosincráticos, pero frecuentemente similares. Esta hipótesis, incluye algunos supuestos como que el aprendizaje de un individuo presenta ciertas regularidades, que la comunidad de la clase condiciona la actividad matemática de maneras frecuentemente predecibles y que muchos de los escolares en la misma clase pueden beneficiarse de la misma tarea matemática (Steffe, Von Glasersfeld, Richards y Cobb, 1983, p.118). De esta manera, una THA le proporciona al profesor, criterios para seleccionar un diseño instruccional particular, por lo tanto, el profesor toma sus decisiones del diseño basado en su mejor conjetura acerca de cómo puede suceder el aprendizaje.

En este caso, Simón (1995), señala que la creación y la continua modificación de la THA, es la pieza central del modelo de reflexionar sobre la clase de matemáticas. El autor señala que la interacción colectiva entre el profesor y los estudiantes o cara a cara profesor y estudiante, constituye una experiencia diferente a la que el profesor había anticipado. Esta interacción mediada por las actividades del salón de clases, conlleva a una modificación en las ideas y conocimiento del profesor, para darle sentido a lo que acontece y aconteció en el salón de clases. El diagrama de la Figura 3, indica que la evaluación del conocimiento de los estudiantes puede contraer adaptaciones en el conocimiento del profesor que, sucesivamente, llevan a una nueva THA o su modificación.

Así se plantea como objetivo de aprendizaje del profesor, una de las competencias establecidas por la dirección general de bachillerato:

> *Calcula e interpreta áreas bajo la curva mediante las Sumas de Riemann en la resolución de problemas en un entorno teórico* (DGB, 2011, p. 19).

En ese sentido, la propuesta intenta desarrollar en los estudiantes, la competencia que estipula el programa mediante la aproximación de la definición de integral definida mediante las sumas de Riemann, y pretende que los estudiantes puedan apropiarse de la noción del concepto de integral definida, introduciendo la aproximación de áreas bajo una curva mediante una actividad estructurada con GeoGebra. Entonces, el plan de clases consistió en que el profesor guía al estudiante mediante esta actividad estructurada para que ellos, en pares, respondan la hoja de trabajo que se le proporcionó, posterior se socializan sus respuestas, propiciando el debate entre ellos y su reflexión. La hipótesis es que este debate de las actividades estructuradas con GeoGebra, permita al estudiante construir la noción de integral definida como área bajo la curva, dando sentido a su expresión simbólica antes de verla como cálculo de primitivas y técnicas de integración.

Conclusiones

Con lo anterior, el avance de investigación que se presenta, reporta una propuesta de articulación de conocimientos TPACK para la enseñanza de la integral definida con el uso de GeoGebra. El objetivo es validar dicha articulación TPACK mediante un plan de trabajo en clase (THA) ya mencionada. La indagación del análisis posterior a esta aplicación de conocimientos matemáticos, la tecnológicos y la didácticos, marcará directrices en un rediseño de las actividades que propiciará un nuevo TPACK y THA y de cual consideramos un proceso de formación docente con el uso de las TIC a aulas de clase, en este caso el uso de GeoGebra.

De esta manera, este trabajo brinda un marco de referencia del cómo se puede utilizar el modelo TPACK, en el desarrollo profesional de profesores de matemáticas. Además, consideramos que los resultados pueden brindar estrategias y limitaciones a considerar, en la enseñanza de la integral definida con el uso de GeoGebra rescatando, la riqueza y ventajas que presente en el aprendizaje de los estudiantes. De tal manera que este reporte de investigación, da pauta a que profesores apliquen estas actividades y tener una evidencia propia de su práctica docente en el uso de GeoGebra. Esto es posible debido a que no requiere de un conocimiento tecnológico de GeoGebra, ya que la actividad está estructurada, sino su conocimiento didáctico será importante en el uso de esa propuesta.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The Genesis of a Reflection about instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

Chai, C., Li, W., Hong, H. y Koh, J. (2013). Validating and modeling technological pedagogical content knowledge framework among Asian preservice teachers. *Australasian Journal of Educational Technology. 29*(1), 41-53.

Cantor, G. (2013). *Elementos para la enseñanza de la integral definida como área bajo la curva*. (Tesis inédita de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

De Villiers, M. (2006). Some pitfalls of dynamic geometry software. *Learning and Teaching Mathematics,* (4), 46-52.

DGB (2011). Programa de estudios de Cálculo Integral.

González, J. (2014). Formación inicial de profesores en geometría con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Educación,* (65), 161-172.

Haciomeroglu, E., Bu, L., y Haciomeroglu, G. (2010). Integrating technology into mathematics education teacher courses. En *Proceedings of the First North American GeoGebra Conference 2010.* (pp. 27-32). NY: Ithaca College

Hernández, A. y Quintero, A. (2009). La integración de las TIC en el currículo: necesidades formativas e interés del profesorado. *REIFOP, 12*(2), 103–119.

Koehler, M. y Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9*(1), 60-70.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2014). Learning the concept integral by constructing knowledge about accumulation. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 46* (4), pp. 533-548. doi: 10.1007/s11858-014-0571-5

Llorens, J., y Santonja, F. (1997). Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas*, *5*(12), 61-76

Miranda, M. y Sacristán, A. (2012). Digital technologies in mexicán high-schools. En Van Zoest, L. R., Lo, J. J., y Kratky, J. L. (Eds.), En *Proceedings of the 34th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 1097-1102) Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author. http://www.nctm.org.

Niess, M., Ronau, R., Shafer, K., Driskell, S., Harper S., Johnston, C., Browning, C., Özgün-Koca, S. y Kersaint, G. (2009). Mathematics teacher TPACK standards and development model. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9*(1), 4-24.

Ramírez, P. S., Muñoz, K., e Ibarra, K. (2011). Aprendizaje de la integral definida en estudiantes de ingeniería. *ReCalc. 3,* p. 32-42. Recuperado de: http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Narri-Ramirez-Patricia-del-Socorro.pdf

Rojano, M. T. (2006). Los principios básicos de los modelos EFIT y EMAT. En Rojano Ceballos, M. T. (Ed.), *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula*. pp. 15-23. México: Secretaría de Educación Pública

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research, 15*(2), 4-14.

Simón, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Stewart, J. (2006). *Cálculo, conceptos y contextos, 3a. ed*. México: Thomson

Turégano, P. (1998). Del área a la integral: Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias, 16*(2), 233-249.

Valero, M., Barba, M. y Del Castillo, A. (2011). El laboratorio digital de matemáticas del CBTIS 164: Innovación educativa a través de la autogestión. En Cortés, J. C., y Guerrero, M. L. (Eds.), *Colección: Uso de tecnología en educación matemática. Investigaciones y propuestas 2011.* (pp. 187-193). México: Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática.

Vitabar, F. (2011). Cursos de GeoGebra para profesores en Uruguay: valoraciones, padecimientos y reclamos. *XIII CIAEM-IACME,* Recife, Brasil.

Ward, S. (2011). *El proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite en el bachillerato.* (Tesis inédita de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Culiacán Rosales, M.