REVISTA AMIUTEM

2025, Volúmen 13, Número 2, pp. 15-23

Sección: Artículos de Investigación

El concepto de integral con uso de software didáctico Geogebra

The concept of the integral using GeoGebra educational software

Héctor Jesús Portillo Lara
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez; México
hector.portillo@uacj.mx
orcid.org/0000-0001-6446-5235

Lucero Saénz Coronado[a]
Centro de Estudios Tecnológicos industrial y de servicios (CBTis) No. 128; México
lucero.saenz.cb128@dgeti.sems.gob.mx
orcid.org/0009-0001-6339-4882

María de los Ángeles Cruz Quiñones
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez; México
maria.cruz@uacj.mx
orcid.org/0000-0003-2107-6568

Fabiola Lom Monárrez
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez; México
fabiola.lom@uacj.mx
orcid.org/0000-0002-2062-7068

Resumen:
En los cursos de cálculo integral se prioriza el uso de fórmulas y técnicas de integración. El siguiente trabajo propone actividades dinámicas para dar otro enfoque a la integral como acumulación, utilizando el programa Geogebra. Este programa nos permite trabajar los distintos registros de representación semiótica propuestos por Duval. Con ayuda de las actividades propuestas y el Geogebra se pretende analizar: ¿cómo es la comprensión de los alumnos del concepto de integral como acumulación?, ¿cómo es la interacción de los alumnos en los registros de representación con ayuda del Geogebra? y ¿cómo los estudiantes perciben el uso del programa Geogebra en el curso de cálculo integral? Se propusieron dos problemas y una entrevista semiestructurada, siguiendo una investigación cualitativa fenomenológica. Se exploró por medio de una entrevista semiestructura la percepción de los alumnos al usar el Geogebra. Los resultados obtenidos muestran que los alumnos realizaron conversión entre los registros semióticos para resolver los problemas planteados. La percepción de los estudiantes sobre el uso del Geogebra fue que les ayudó en generar confianza, verificar y resolver los problemas planteados.

Palabras clave: Integración, Acumulación, Geogebra, Teoría de Representaciones Semióticas.

[a] Autora de correspondencia

Abstract:

In integral calculus, the use of formulas and integration techniques is very often implemented. This study presents dynamic activities to teach the integral as accumulation using GeoGebra software. This software allows to work with the different semiotic representations proposed by Duval. Implementing the proposed activities using GeoGebra, we analyzed: ¿how is the students´ understanding of the concept of integral as accumulation? Also, we focused on how is the students´ interaction with the different semiotic representations using GeoGebra? And how students perceive the use of GeoGebra during their integral calculus course? Based on the qualitative methodology, two mathematical problems were asked to solve for identifying the students' understanding and their use of GeoGebra. In addition to explore the students´ perceptions, a semi structured interview was conducted. We found that proposed activities supported the students' understanding of the concept of integral as accumulation. Using GeoGebra, students were capable of shifting among the different semiotic representations of the problems and their perceptions of the use of GeoGebra were the efficacy to verify solutions and the confidence gained by the students.

Keywords: Integration, Accumaltion, Geogebra, Semiotic Representations Theory

Cómo citar / How to cite: Portillo Lara, H., Saénz Coronado, L., Cruz Quiñones, M., y Lom Monárrez, F. (2025). El concepto de integral con uso de software didáctico GeoGebra. *Revista AMIUTEM*, *13*(2), 15–23. https://doi.org/10.65685/amiutem.v13i2.273

Introducción

En la enseñanza y aprendizaje del cálculo surgen problemas relacionados a la comprensión de conceptos importantes como son: función, límite, derivada e integral. Principalmente son abordados por los docentes desde el registro de representación semiótica algebraico (Artigue, 1995 y Hitt, 2003). Dicho registro simbólico limita la conversión entre los registros de representación gráfica y numérica, por lo tanto, la comprensión de los conceptos antes mencionados.

Mayormente los cursos de cálculo integral se resumen en la aplicación de técnicas de integración y uso de fórmulas, dejando de lado el concepto de integral como una acumulación, Cabañas y Cantoral (2007) comentan al respecto:

"El método de enseñanza tradicional, por el contrario, tiende a desarrollar habilidades en los estudiantes para el uso de fórmulas y técnicas de integración en el cálculo de áreas, olvidando el papel de las actividades de la vida cotidiana".

El concepto de la integral como acumulación, es importante para entender muchas de las aplicaciones del cálculo integral. Uno de los problemas identificados en la revisión bibliográfica es identificar lo que se quiere acumular, áreas de rectángulos y volúmenes de cilindros, entre otros. Algunas dificultades que se detectan en la idea de la integral como acumulación planteados por Thompson y Silverman (2008) son las siguientes:

a) La idea de la función como una integral de acumulación dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ involucra muchas variables que cambian (como $x, t, f(x)$) esto hace que sea difícil de entender y aplicar para los alumnos.
b) Los alumnos no encuentran relación entre F y f en el Teorema Fundamental del Cálculo (ver también Cordero, 2005).
c) Rara vez se enseña la integral de acumulación por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, con la intención de que los alumnos la entiendan, es decir se calcula la integral definida por medio del Teorema Fundamental del cálculo.
d) La idea de límite y el uso de la notación son complejos para entender la función de acumulación. Por ejemplo, en el caso del área, los alumnos comentan: como la base del rectángulo tiende a cero, es decir $\Delta x \to 0$ y el área del rectángulo es $f(x_i)\Delta x \to f(x_i)$ (ver Figura 1).

La problemática que se tiene para entender la integral como una acumulación es el problema del cambio, la relación entre F y f en el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Por ejemplo, en el concepto del límite, una pregunta que debemos plantear es: ¿Cómo se quiere entender un problema que involucra un cambio (aproximación de área y volumen) si la mayoría de sus definiciones son de forma estática? Por otro lado, para la explicación del TFC en los libros de texto, las explicaciones en el pizarrón y el planteamiento del problema de la integral es de una forma estática y poco visual para su comprensión.

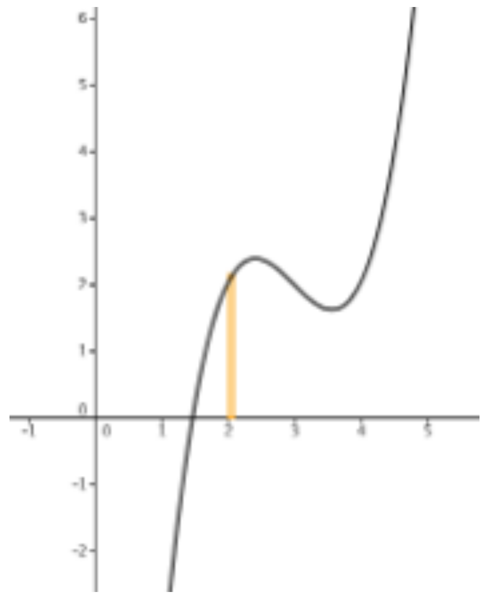

Figura 1. Área de un rectángulo

La problemática que se tiene para entender la integral como una acumulación es el problema del cambio, la relación entre F y f en el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Por ejemplo, en el concepto del límite, una pregunta que debemos plantear es: ¿Cómo se quiere entender un problema que involucra un cambio (aproximación de área y volumen) si la mayoría de sus definiciones son de forma estática? Por otro lado, para la explicación del TFC en los libros de texto, las explicaciones en el pizarrón y el planteamiento del problema de la integral es de una forma estática y poco visual para su comprensión.

Con respecto al problema del límite algunas preguntas que surgen a la hora de calcular la integral de acumulación son: ¿qué es lo que se está acumulando? ¿qué perspectiva visual y numérica tienen los alumnos conforme se hace más pequeño el incremento Δx? y ¿cómo se puede evitar la problemática del límite de forma visual, numérica y gráfica del concepto de la integral de acumulación? El uso del software Geogebra es de gran ayuda para la comprensión del concepto de integral, ya que se puede cambiar el enfoque de los cursos de cómo resolver una integral a saber que hago y por qué. El programa Geogebra permite reconocer y transitar entre los registros de representación algebraico, numérico y gráfico en una misma ventana (Hohenwarter, 2008). Por ello, se eligió Geogebra para proponer actividades que ayuden al estudiante a comprender el concepto de integral, además de ser un software de acceso libre.

El problema que se detecta en los cursos de cálculo integral es dejar de lado esta idea intuitiva de sumar áreas, volúmenes y sustituirla por métodos o técnicas de integración con sus fórmulas correspondientes, por ejemplo, para calcular el área entre $[a, b]$ la fórmula es:

$$\text{Área}=\int_a^b f(x)\,dx$$

Para calcular el volumen de un sólido de revolución en el eje x, utilizamos:

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Uno de los objetivos de la investigación es que el alumno calcule, aplique el teorema fundamental del cálculo y utilice la conversión de registros de representación semiótica con ayuda del programa Geogebra.

Las preguntas de investigación que se desean responder en este trabajo son las siguientes:

a) ¿Cómo es la comprensión del concepto de integral como acumulación por medio de situaciones de aprendizaje utilizando el programa Geogebra?
b) ¿Cómo los estudiantes interactúan en los distintos registros de representación matemática con la ayuda del Geogebra para abordar el concepto de la integral como acumulación?
c) ¿Cómo los estudiantes perciben el uso del programa Geogebra en el curso de cálculo integral?

Referente teórico

El marco teórico que se utilizó en esta investigación fue la teoría de registros de representaciones semióticas propuesto por Duval (1999). Dicha teoría es importante dentro del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, ya que nos permite acceder, comprender y trabajar los objetos matemáticos por medio de las representaciones semióticas (lenguaje natural, simbólico, gráfico y numérico). El uso de tratamientos (transformación de una representación semiótica dentro del mismo registro) y conversiones de representación semiótica (transformación de una representación de un registro a otro) es complicado para la mayoría de los estudiantes, dejando ver que, para ellos, la forma en que se presenta el contenido queda limitada por una primera representación (Duval, 1999). En el caso de la integral, si solo se trabajan fórmulas y técnicas de integración se queda limitado dicho concepto a la representación simbólica (algebraica).

Duval (1999) menciona dos conceptos importantes en el desarrollo de la teoría de Representación Semiótica:

- Semiósis. Es la actividad ligada a la producción de representaciones, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado, ésta se encuentra ligada a una representación.
- Noesis. Es la actividad ligada a la aprehensión de los objetos representados, incluyendo las actividades y procesos cognitivos desarrollados por los sujetos.

Una representación semiótica se despliega de dos maneras. Primero cumple con la función de comunicar los objetos matemáticos por medio de sistemas de signos (forma algebraica, numérica y gráfica). La segunda consiste en que una representación semiótica es un soporte para las representaciones mentales (las cuales son internas).

Una representación mental consiste en un conjunto de concepciones e imágenes que una persona forma con respecto a algo (Duval 1999). En esta teoría un registro de representación semiótica está conformado a partir de signos como símbolos, dibujos y dicha representación se hace entonces fundamental en cuanto toma forma, ya que su estructura puede ser descrita y tomada en cuenta en un sistema de representación.

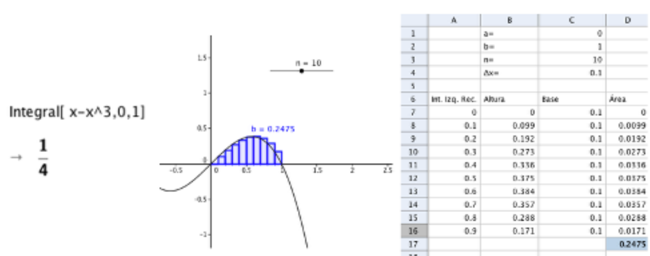

Figura 2. Representación de la integral en los registros algebraico, gráfico y numérico

Para Duval (1999) tener un aprendizaje significativo en matemáticas es reconocer y transitar de un registro de representación semiótico a otro, para enriquecer el objeto matemático desde múltiples perspectivas. Por ejemplo, al pensar en una integral definida, se tiene la forma algebraica utilizando el TFC, pero a su vez se puede pensar geométricamente en el área bajo la curva o realizar la aproximación del área de forma numérica por medio de rectángulos (ver Figura 2).

Metodología

El propósito fundamental de esta investigación es analizar la interacción del programa Geogebra con los alumnos en la resolución de problemas que involucren la integral y la conversión de los distintos registros de representación semiótica. El enfoque cualitativo fue utilizado en esta investigación. Este enfoque examina la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados. La investigación cualitativa se encarga de explorar y entender el fenómeno a estudiar. La investigación cualitativa se refiere "en su más amplio sentido a la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas y la conducta observable" (Taylor y Bogdan, 1987, p.20). Por estas características se consideró pertinente el enfoque cualitativo fenomenológico para esta investigación, el cual se centra en comprender las experiencias vividas por las personas.

La siguiente investigación se aplicó a veintidós alumnos que estaban inscritos en el mismo curso de cálculo integral en una Universidad al norte de México, todos los alumnos pertenecían a una carrera de ingeniería. Durante el curso de cálculo integral, se utilizó el programa Geogebra para verificar las integrales realizadas en la clase, así como para ilustrar los conceptos de suma por izquierda, suma por derecha (Figura 3) y aproximación de volumen de un sólido de revolución (Figura 4). En las actividades del programa Geogebra (Figura 3 y Figura 4) se utilizaron hojas de trabajo con actividades dirigidas a que los alumnos transitaran en los distintos registros de representación semiótica. Las actividades se les proporcionaron de manera electrónica e iban llenándolas en equipos y utilizando sus dispositivos electrónicos (celular, tablet o computadora).

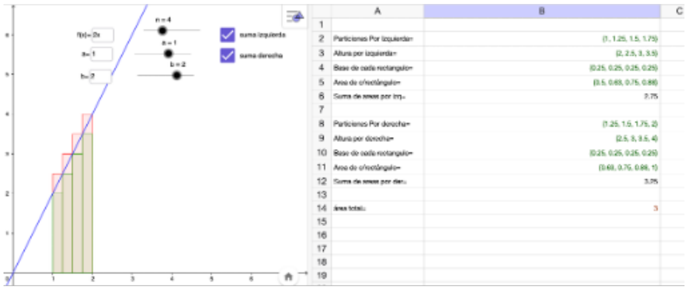

Figura 3. Archivo de Geogebra que calcula aproximación de área.

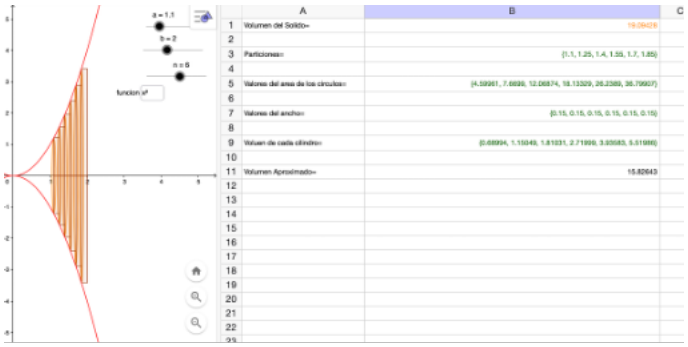

Figura 4. Archivo de Geogebra que calcula aproximación de volumen.

Posterior al uso de las actividades con las hojas de trabajo y las actividades en Geogebra, se siguieron tres fases, que consistieron en: fase 1 problema de aproximar el área por medio de rectángulos, fase 2 problema de sólido de revolución y fase 3 aplicación de entrevista semiestructurada. Los dos problemas se aplicaron al grupo para identificar si utilizaban la conversión de las representaciones semióticas y la entrevista para obtener la perspectiva del estudiante con el uso del Geogebra.

Resultados

Fase 1, el primer problema que se planteó fue el siguiente: Aproximar el área por derecha (en algunos casos se pidió la aproximación de área por izquierda) con $n = 5$ rectángulos con la misma base en el intervalo $[0,1]$ y la función $f(x) = 2x + 1$ (en algunos casos se cambió la función por $f(x) = 2x$).

Este problema fue resuelto de manera correcta por diecinueve alumnos, los alumnos realizaron la representación algebraica y la conversión con la representación numérica (se muestra un ejemplo en la Figura 5). Esta actividad fue similar al trabajo que se realizó en la actividad propuesta en la Figura 3, cabe resaltar que no hicieron uso del registro de representación gráfico.

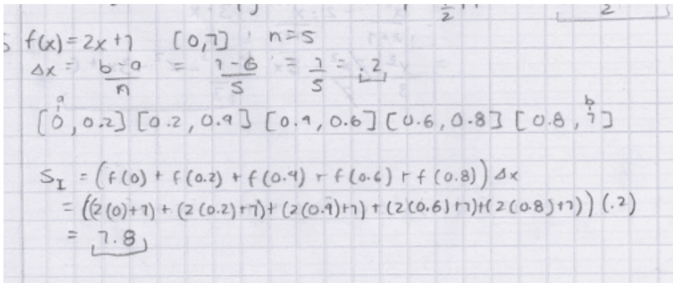

Figura 5. Respuesta de un alumno de la aproximación de área.

Por otro lado, tres alumnos (alumno A, B y C) acompañaron su respuesta de otro tipo de registro de representación semiótica. Por ejemplo, en la Figura 6, el alumno A, tabuló la función y realizó la gráfica del área que se solicitó en el registro de representación algebraico. El área la calculó por medio de la integral definida correctamente. Este mismo alumno, encontró el área total como el área de un triángulo y de un cuadrado, pero consideró la altura como tres y dicha altura es de dos unidades, por lo cual, el área que obtuvo fue de 2.5. Por otro lado, obtuvo erróneamente la aproximación del área por derecha, sin embargo, el resultado lo puso correcto, dado que utilizó el archivo que calcula aproximación de área (Figura 3).

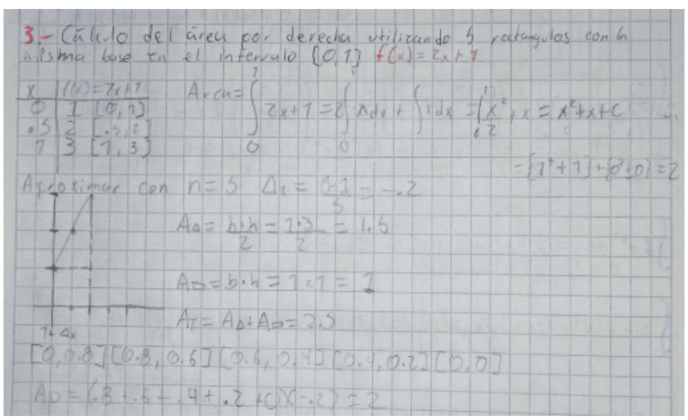

Figura 6. Alumno que acompaña su respuesta en los tres registros de representación.

En la Figura 7, se observa que el alumno B, resolvió el problema de forma gráfica acompañado del cálculo del área de cada uno de los rectángulos y obteniendo el área total con la suma de los rectángulos, haciendo uso de la conversión de los registros de representaciones gráfica y numérica.

La Figura 8 ilustra la respuesta del alumno C, cuyo trabajo fue que el área correspondía a dos ¨rectángulos¨ de área uno y cuya suma es dos. Llegó al resultado sin el uso de los rectángulos solicitados, solo por medio de fórmulas geométricas haciendo uso de un tratamiento en el registro de representación gráfico.

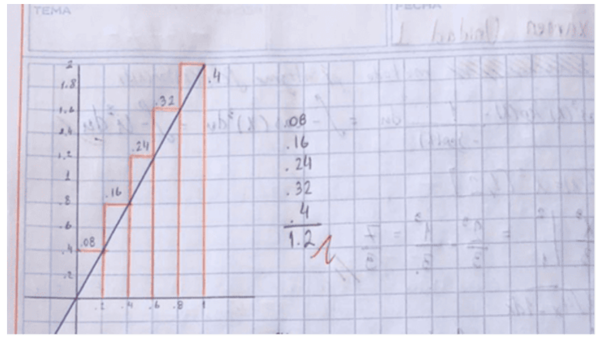

Figura 7. Alumno que resuelve el problema de forma gráfica.

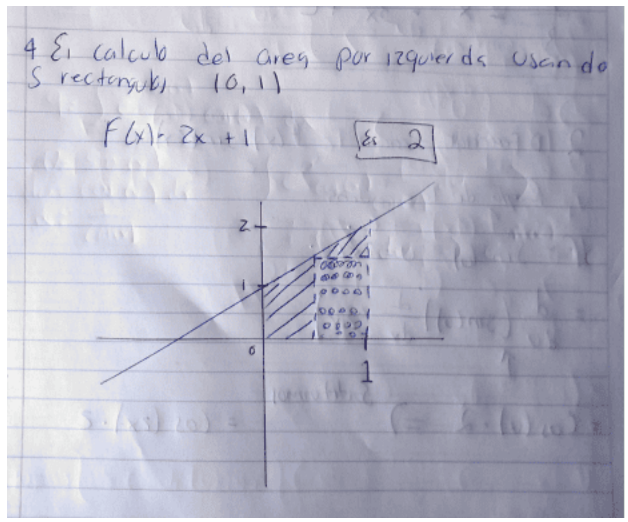

Figura 8. Alumno que resuelve el problema utilizando un tratamiento del registro de representación gráfico.

Fase 2, el segundo problema fue el siguiente: Encontrar el volumen del sólido de revolución $f(x) = x$, si se revoluciona en el eje x.

Este ejercicio arrojó que diez alumnos resolvieron de manera correcta el problema en el registro de representación algebraica, como lo ilustra la Figura 9. En los resultados de estos 10 alumnos no se vio evidencia del uso de algún otro registro de representación semiótica.

Los otros doce alumnos resolvieron su problema acompañado de una conversión entre los registros de representación algebraico, numérico y gráfico. Algunas complicaciones detectadas, fueron que no graficaron correctamente la función y no se evaluó correctamente la integral definida. La Figura 10, ilustra la respuesta del estudiante D, donde se evidencia estos obstáculos.

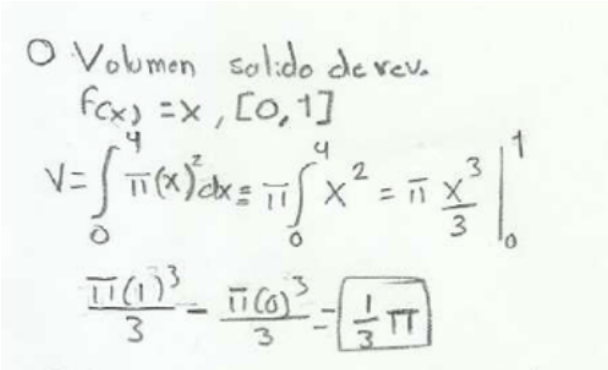

Figura 9. Alumno que resuelve el problema en registro de representación algebraica

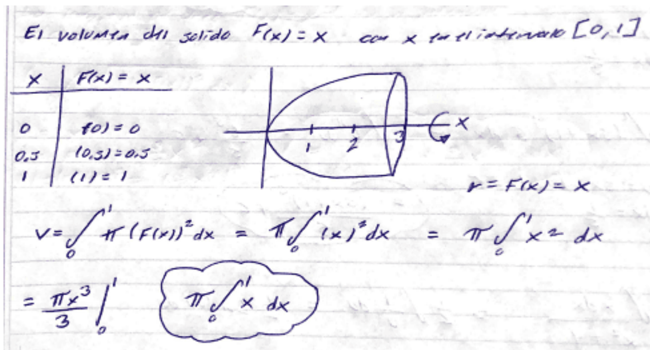

Figura 10. Alumno D que resuelve el problema, pero no evalúa la integral definida

En el caso de la Figura 11, el alumno E, realizó bien la tabulación, la gráfica y el cálculo de la integral definida coordinando bien los registros de representación semiótica, solo que el alumno revolucionó en el eje y.

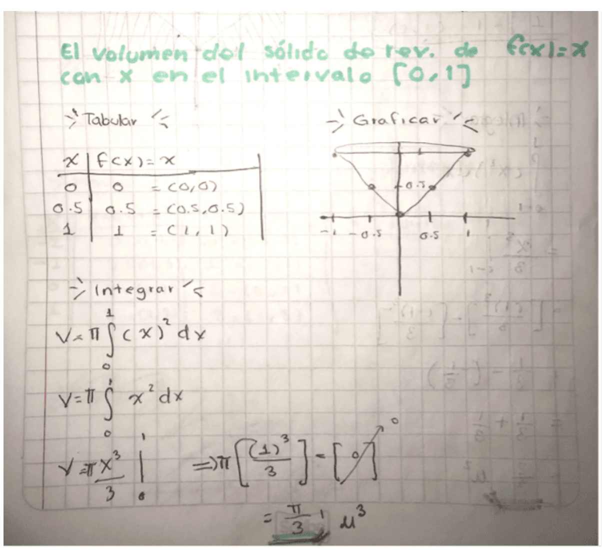

Figura 11. Alumno que resuelve el problema y revoluciona en el eje y.

En la Figura 12, se ejemplifica lo realizado por el alumno F, que contestó y coordinó de forma correcta los registros de representación semiótica.

Fase 3, se diseñó una entrevista semi-estructurada para explorar el uso del programa Geogebra en el aprendizaje de conceptos de cálculo integral desde la perspectiva del estudiante. La entrevista incluyó dos preguntas abiertas con el objetivo de explorar que beneficios o conflictos que causó el programa Geogebra en el concepto de la integral.

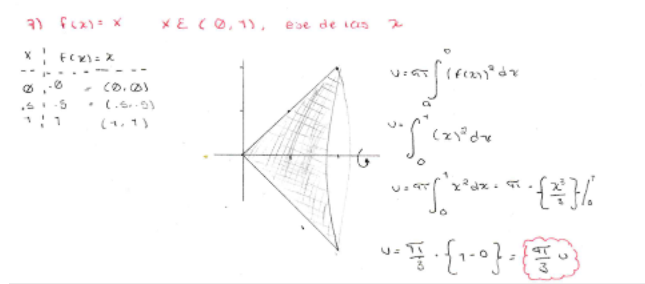

Figura 12. Alumno que resuelve el problema y coordina los registros de representación semióticas.

¿El programa (Geogebra) que se utilizó durante la clase te ayudó a comprender los temas? Explica

Tabla 1. Pregunta 1

RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS
1. Sí, me fueron muy útiles y prácticos para comprender procedimientos. Los alumnos 2, 18 y 22 comentan algo similar. 3. Si, me ayudaron al momento en el cual quería comprobar respuestas. Los alumnos 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 15 y 16 escriben algo similar. 7. Si ya que mostraba de mejor manera con gráficas para podernos realizar una idea. El alumno 19 contesta algo similar. 9. Un poco. Alumno 20 menciona que no le ayudó. 12. Si, me ayudan a reforzar algún tema. 14. Si, en el paso a paso si no entendía algo veía cual era el error. El alumno 17 comenta algo similar. 21. Sí, en algunas ocasiones que era más complejo me facilitaban a comprender más fácil.

Los resultados arrojados en la Tabla 1, muestran que a la mayoría de los alumnos les ayudó el programa Geogebra, ya sea para verificar o reforzar sus respuestas, además de brindar confianza en los resultados que se tenían. En el caso del alumno 7 y 19 comentaron que el programa Geogebra les ayudó a darse una idea mejor al observar la gráfica. Lo cual muestra un indicio del uso de las distintas representaciones semióticas por parte de los estudiantes. Las respuestas muestran una percepción positiva por parte de los alumnos en el uso de Geogebra en el curso de cálculo, destacando su rol como verificador de resultados en las integrales y su apoyo visual para la comprensión de conceptos.

La segunda pregunta que se les planteó a los estudiantes fue la siguiente: Explica como resolviste algún tema con el uso del Geogebra.

Tabla 2 Pregunta 2

RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS
1. Para integrar funciones muy largas, era más práctico utilizar el software y así determinar el resultado. El alumno 8 y 21 utilizaron Geogebra para resolver integrales.
4. Pues en si entendía los temas solo verificaba en problemas que no estaba seguro de mi resultado. Los alumnos 2, 3, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19 y 20 comentan algo similar.
5. Pues son muy útiles para todo lo que conlleva gráficas y eso es una gran ventaja para hacer hasta los rectángulos de aproximación.
6. Cuando no entendía la tarea alguna integral recurría a este programa para ver cómo se empezaba a resolver y de ahí tener una idea.
10. Aplicaba las ecuaciones.
14. En los problemas que se requieren utilizaba el Geogebra para factorizar.
18. En ocasiones las propiedades ya vienen dentro de la respuesta del programa.

La Tabla 2 ilustra que los alumnos utilizaron la instrucción integral y que esencialmente el programa Geogebra fue utilizado para comprobar o verificar si las soluciones a los problemas que involucraban las integrales estaban en los correcto. Los alumnos perciben al programa como apoyo visual para comprender conceptos y sobre todo para la verificar las integrales, lo cual les genera confianza. Sin embargo, el Geogebra fue utilizado para ahorrar tiempo a la hora de resolver las integrales e identificar su método de integración.

Conclusiones

En el curso se diseñaron actividades que apoyaron de forma dinámica la comprensión del concepto de integral como acumulación, dichas actividades permitieron a los alumnos interactuar entre los distintos registros de representación semiótica: gráfico, numérico y algebraico. La conversión entre estos registros permitió que los alumnos tuvieran una noción de la integral como acumulación, los resultados obtenidos muestran que los alumnos se apoyaron en los registros de representación semiótica para dar solución a los problemas planteados.

Dentro de los resultados se observó que el programa Geogebra les ayudó a los estudiantes a comprobar resultados de los problemas planteados, siendo esta la mayor aplicación que se le da al programa Geogebra por parte de los estudiantes. Además de estas perspectivas de los estudiantes hacia el uso del programa Geogebra como herramienta para verificar procedimientos, también percibieron la seguridad que les generó en sus soluciones. Otra conclusión es que se utilizó el programa para conceptualizar el área y volumen por sólido de revolución, relacionado con sus distintas representaciones semióticas, facilitando un vínculo entre la función, su gráfica (ya se dé área o volumen) para que el alumno tenga una mejor comprensión.

Algunos retos que se enfrentaron durante la investigación fueron: una vez que el estudiante dominaba el uso de programa, mostraba dependencia para resolver una integral sin presentar algún tipo de procedimiento o análisis de la solución. En ocasiones los alumnos no tenían descargado el programa en su equipo y lo utilizaban en modo en línea, lo cual, dificultaba el uso por la falta de conexión a internet.

Para finalizar se recomienda que el diseño de actividades esté guiado al uso de los distintos registros de representación semiótica para que el alumno confronte y explore su trabajo manual con el que arroja el programa.

Referencias

1. Artigue, M. (1995), Una perspectiva Histórica sobre la enseñanza de los principios del cálculo. Ingeniería didáctica en educación matemática, Editorial Iberoamérica, Bogotá Colombia.
2. Cabañas, G. y Cantoral, R. (2007), La integral definida: Un enfoque socioepistemológico, Matemática Educativa: Algunos aspectos de la socioepistemología y visualización en el aula, Editorial Díaz Santos, México.
3. Cordero, F. (2005), El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, México.
4. Duval, R. (1999). Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Semiósis y pensamiento humano. Cali, Colombia: Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes.
5. Hitt, F. (2003), Dificultades *en el aprendizaje del cálculo*, Décimo primer encuentro de profesores de matemáticas del nivel medio superior, Morelia México.
6. Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., Lavicza, Z. (2008), *Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematicas Software Geogebra*, ICME 11, Monterrey, México.
7. Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación* (Vol. 1). Barcelona: Paidós.
8. Thompson, P.; Silverman, J. The concept of accumulation in calculus. In: M. P. CARLSON; C.; RASMUSSEN (Ed.). Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics. Washington: Ed. Mathematical Association of America, 2008. p. 43-52.

Artículo recibido: 2 septiembre 2025
Dictaminado: 3 diciembre 2025
Aceptado: 30 diciembre 2025