REVISTA AMIUTEM

2025, Volúmen 13, Número 2, pp. 46-54

Sección: Entre Docentes

Cómo modelar una cónica con cinco puntos: Una experiencia de aula

How to model a conic using five points: A classroom experience

Noelia Londoño Millán[a]
Universidad Autónoma de Coahuila; México
noelialondono@uadec.edu.mx
orcid.org/0009-0007-1026-9774

Mariem Mederos Madrazo
Universidad Autónoma de Coahuila; México
m.mederos@uadec.edu.mx
orcid.org/0009-0009-9656-6319

Alibeit Kakes Cruz
Universidad Autónoma de Coahuila; México
alibeitkakes@uadec.edu.mx

Resumen:
En este artículo se describe una experiencia didáctica implementada con seis estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, en la asignatura de Geometría Analítica de una universidad del norte de México. Con la intención de otorgar mayor significado a los contenidos relacionados con las secciones cónicas, se diseñó e implementó un proyecto cuyo propósito fue analizar cómo el uso combinado de tres métodos impacta en la comprensión de las cónicas. La propuesta se desarrolló bajo un enfoque de investigación-acción. Como parte de su labor formativa, los participantes debían modelar objetos con forma cónica empleando tres procedimientos distintos: el uso de herramientas del software GeoGebra, la aplicación del método del cuadrilátero y la utilización de técnicas propias del álgebra lineal. Entre los hallazgos más relevantes se identificó una transformación notable del modelo de clase tradicional, ya que el docente adoptó un papel centrado en la guía y la asesoría. De igual manera, se percibió un incremento en la motivación de los estudiantes y en su disposición para realizar las actividades propuestas. La interacción entre profesor y alumnos también se vio fortalecida, lo que favoreció una retroalimentación continua y más efectiva. En conjunto, estos elementos promovieron que los estudiantes reflexionaran sobre su propio aprendizaje y desarrollaran una mayor conciencia de sus necesidades académicas.

Palabras clave: Experiencia didáctica, Secciones cónicas, Gauss-Jordan, GeoGebra

[a] Autora de correspondencia

Abstract:
This paper presents a didactic experience involving six second-semester students enrolled in the Bachelor's Degree in Applied Mathematics program in the Analytical Geometry course at a university in northern Mexico. Aiming to give greater meaning to the topic of conic sections, the students were assigned a project that required them to develop a mathematical model representing a conic. The experience was framed within an action research methodological approach. As part of the assignment, studenwwts modeled objects with conic shapes using three different processes: one using GeoGebra software tools, another using the quadrilateral method, and a third based on linear algebra techniques. The main outcomes revealed a significant departure from the traditional classroom model: the instructor adopted a more supportive and advisory role, students showed increased interest in completing the tasks, and communication between teacher and students improved, enabling more continuous and effective feedback. Collectively, these actions encouraged students to reflect on their own learning processes and become more aware of their academic needs.

Keywords: Teaching experience, conic sections, Gauss–Jordan, GeoGebra

Cómo citar / How to cite: Londoño Millán, N., Mederos Madrazo, M., y Kakes Cruz, A. (2025). Cómo modelar una cónica con cinco puntos: Una experiencia de aula. *Revista AMIUTEM*, *13*(2), 46–54. https://doi.org/10.65685/amiutem.v13i2.272

Introducción

En la enseñanza tradicional de las secciones cónicas es común que se discutan los lugares geométricos desde los aspectos algebraico y geométrico, se estudien algunos teoremas, se resuelvan una gran variedad de ejercicios del libro de texto elegido como guía y allí concluye todo, con la esperanza de que haya un aprendizaje significativo y de que los alumnos queden capacitados para resolver problemas.

Estamos convencidos que el abordaje de las secciones cónicas desde una perspectiva interdisciplinaria y contextualizada permite a los estudiantes no solo adquirir conocimientos técnicos, sino también desarrollar una actitud más crítica y reflexiva frente a su aprendizaje, al identificar cómo los conceptos abstractos se traducen en soluciones prácticas. Por tanto, promover el estudio de las cónicas con un enfoque que combine lo teórico con lo aplicado puede ser una estrategia eficaz para mejorar tanto la motivación estudiantil como la comprensión profunda de los contenidos matemáticos.

A continuación, se presentan aspectos relacionados con la historia de las cónicas; algunos antecedentes que se revisaron para mostrar la pertinencia del estudio y una revisión de literatura acerca de la investigación-acción que se constituyó en el enfoque metodológico usado para la propuesta, consideramos que esta metodología resultó relevante porque provee varios recursos que ayudan a transformar la enseñanza de las secciones cónicas, en particular la reflexión continua sobre la práctica educativa.

Antecedentes y aspectos teóricos

El estudio de las secciones cónicas comenzó con los matemáticos griegos. Menaechmus (c. 380-320 a.C.) fue uno de los primeros en investigar las cónicas, él estudió las secciones cónicas como parte de sus intentos de resolver el problema de la duplicación del cubo. Años más tarde Apollonius de Perga (c. 262 - c. 190 a.C.): Conocido como el "Gran Geómetra", escribió un texto titulado *Cónicas*, que se considera como una de las obras más importantes en la historia de las matemáticas. En su trabajo Apolonio estudió las cónicas en detalle, incluyendo las elipses, parábolas e hipérbolas, también introdujo terminología y conceptos fundamentales que aún se utilizan hoy día.

Varios estudios han mostrado que la enseñanza de las secciones cónicas no solo forma una parte fundamental del currículo de matemáticas, sino que también son importantes para profundizar tanto en aspectos de la matemática pura como en su aplicabilidad en contextos reales (Chavarriaga y Torres, 2017; Costa, 2015; García, 2024; Torres y García, 2023). En el ámbito de la matemática pura y particularmente en una carrera de Matemáticas Aplicadas el estudio de las cónicas permite fortalecer conocimientos algebraicos y geométricos, lo que fortalece la base teórica del estudiante para el desarrollo de competencias más avanzadas en álgebra lineal, geometría analítica y cálculo multivariable.

Por otro lado, a las cónicas se le atribuye un alto valor didáctico si se abordan en contextos de aplicación, pues permiten conectar las matemáticas con otras disciplinas, por ejemplo, en arquitectura, se utilizan en el diseño de estructuras eficientes y estéticamente armónicas; en ingeniería, las trayectorias parabólicas son útiles para analizar movimientos de proyectiles y la hipérbola interviene en sistemas de localización satelital. Por lo que consideramos que al incluirlas en el aula ayudan a la comprensión de las cónicas y promueven una visión integrada del conocimiento.

La componente tecnológica juega un papel fundamental, Ulson (2024), reportó los efectos de usar GeoGebra para ilustrar las secciones cónicas en estudiantes de grado 11. Los resultados mostraron una correlación positiva, aunque débil, entre la percepción estudiantil y su desempeño, aunque si hubo una mejora significativa en el rendimiento tras utilizar el Software. Estos hallazgos sugieren incorporar GeoGebra en la enseñanza y sugieren explorar otras aplicaciones de gráficos para investigaciones posteriores.

Lo que se plantea en líneas anteriores permiten entrever un interés amplio y diverso en las distintas formas de abordar la enseñanza de las secciones cónicas. Por lo que consideramos que la propuesta que presentaremos como una experiencia didáctica no se encuentra aislada ni ajena a los enfoques promovidos por la comunidad de la educación matemática actual. Por el contrario, se inscribe en una línea que privilegia un enfoque centrado en el estudiante, donde se fomenta una pedagogía basada en la exploración y el descubrimiento. Y como valor agregado incorporamos el uso de herramientas digitales como mediadores del aprendizaje, entendidas no como un fin en sí mismas, sino como un recurso que refuerza la construcción del conocimiento.

Acerca de la investigación-acción

La investigación-acción es un enfoque metodológico que ha sido importante en el ámbito educativo, social y comunitario, porque involucra la participación, la reflexión y es transformador. Consideramos que esta orientación metodológica ofrece un ciclo sistemático apropiada de planificación, intervención y observación que ayuda al docente a evaluar y ajustar estrategias para la enseñanza de las cónicas, especialmente cuando se incluyen métodos combinados como el que se propone. Dos de los referentes teóricos más destacados de la investigación – acción son Stephen Kemmis y Robin McTaggart (1988), y el investigador español Latorre (2003), cuyas contribuciones permiten comprender su riqueza y profundidad.

Kemmis y McTaggart consideran la investigación-acción como un proceso crítico y colaborativo que transforma la práctica educativa y social. Proponen una organización en una espiral de ciclos (planificación, acción, observación y reflexión) que se repiten y ajustan continuamente, rompiendo con la lógica lineal de la investigación tradicional y promoviendo un conocimiento situado. Además, los autores destacan el carácter participativo: debe realizarse con quienes viven la problemática, no solo sobre ellos. Así, la investigación-acción no solo busca mejorar la práctica, sino también fortalecer a los sujetos y favorecer la comprensión y transformación de las estructuras que los afectan.

La investigación-acción se presenta como una herramienta importante para comprender y transformar la experiencia en el aula (Latorre, 2003), ya que conecta dimensiones prácticas, reflexivas y éticas, con el objetivo de mejorar la acción mediante una reflexión sistemática realizada por los propios implicados (docente y estudiantes), favoreciendo un conocimiento contextualizado y construido desde la realidad concreta. Este autor coincide con Kemmis y McTaggart en que la investigación-acción debe ser democrática y participativa, de modo que los sujetos investiguen su propia práctica y desarrollen una comprensión crítica que favorezca su transformación y la de su entorno.

Ambos enfoques, aunque con matices propios, coinciden en los elementos centrales que definen la investigación-acción: la participación de los sujetos, la reflexión crítica, la mejora de la práctica, el carácter cíclico del proceso, y la búsqueda de transformación social. Así, la investigación-acción se constituye no solo como una metodología de indagación, sino como un proceso de empoderamiento y cambio profundamente vinculado con la práctica cotidiana de los actores.

Estudios recientes (Guevara et al., 2020; Vigil, 2021) reconocen la importancia de la investigación-acción como una metodología que ofrece elementos fundamentales para su implementación en el aula. En esta misma línea, Giraldo (2025) la reconoce como adecuada porque implica a los participantes como co-investigadores dentro de un proceso continuo y repetitivo. Además, lo considera como un enfoque orientado principalmente a transformar las prácticas reales del entorno donde se desarrolla, más que a analizarlas desde la teoría, promoviendo así un aprendizaje que surge de la propia acción.

Para este estudio, este enfoque metodológico resultó especialmente útil, ya que permitió atender dos necesidades fundamentales. Por un lado, facilitó la transformación de la dinámica tradicional de clase, en la que el profesor expone y el alumno se limita a escuchar. Por otro lado, posibilitó que los estudiantes, mediante su propia experiencia y participación, exploraran diversas formas cónicas a partir de objetos externos a los libros, susceptibles de ser modelados matemáticamente.

Proceso metodológico

En la presenta experiencia de aula que se reporta participaron 6 estudiantes universitarios de primer año, que se encontraban cursando la asignatura Geometría Analítica, como requisito debieron haber aprobado la asignatura de Geometría Euclidiana en la cual habían recibido un curso sobre uso de las herramientas de GeoGebra. En sus estudios de preparatoria algunos alumnos habían desarrollado los temas de cónicas, desde una perspectiva muy básica.

Características de la propuesta.

Con el enfoque de investigación acción se procedió a desarrollar la propuesta tomando en cuenta la planificación, acción, observación y reflexión. A continuación, se describen los elementos que fueron considerados en cada etapa (Ver Figura 1).

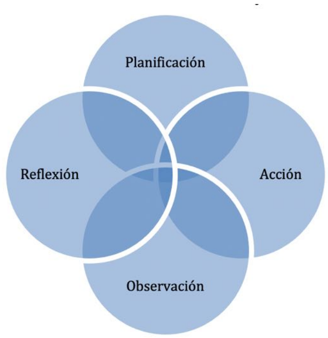

Figura 1. Enfoque metodológico investigación – acción (Kemmis y McTaggart)

Etapa de planificación. En esta etapa, se identificó como problemática central la dificultad que presentaban los estudiantes de primer año de LMA para identificar, comprender y diferenciar las secciones cónicas (parábola, elipse, hipérbola y circunferencia), especialmente en cuanto a su construcción geométrica, propiedades, representación gráfica y algebraica. Por lo que se optó por incorporar GeoGebra como recurso didáctico para diseñar actividades interactivas que permitieran visualizar y manipular las cónicas de forma dinámica. Con el propósito de favorecer la comprensión conceptual de las cónicas y estimular el aprendizaje activo mediante el uso de TIC.

Así mismo se abordaron las ecuaciones de las cónicas en su forma cartesiana, estas se obtuvieron desde su definición como lugar geométrico. Diferenciando cada uno de los elementos geométricos implicados como recta directriz, focos, y distancias. Aunque el proceso de deducción implica el uso de métodos algebraicos, durante su desarrollo se rescató siempre el enfoque geométrico analítico.

Etapa de acción. Esta etapa estuvo conformada por varias actividades, la primera es el estudio previo de las cónicas a través de su definición, sus ecuaciones y la solución de ejercicios; esta parte también incluyó el estudio de las cónicas rotadas, se desarrolló de forma mixta (actividades con lápiz y papel y GeoGebra). Posteriormente los alumnos debían desarrollar tres tareas que se describen más adelante.

Se implementó una secuencia didáctica de varias sesiones en un aula de cómputo equipada con computadoras, internet y el software GeoGebra. Los estudiantes exploraron construcciones dinámicas de cónicas a partir de su definición y sus elementos clave como focos, rectas puntos y distancias, (por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un foco y una directriz en el caso de la parábola).

Se fomentó la formulación de conjeturas, el análisis de ecuaciones y la comparación entre representaciones algebraicas y gráficas. Estas prácticas, en consonancia con lo planteado por Duval (1999), permiten articular distintos registros de representación y favorecen de manera significativa la comprensión y apropiación de los conceptos matemáticos. El docente actuó como mediador de la actividad, promoviendo el trabajo colaborativo, la participación y la reflexión.

Una vez se estudiaron las definiciones, los elementos, las ecuaciones (canónicas, ordinarias y generales) de los 4 lugares geométricos de las cónicas. Se asignaron las tres actividades o tareas siguientes: tarea 1. Consistió en hallar una sección cónica en una imagen que ellos debían buscar, en una construcción, un dibujo o cualquier objeto real. Los alumnos exploraron puentes, un conejo, un estadio, un dibujo de un barco, etc. como se muestra en la figura 2. Los alumnos usaron las herramientas de GeoGebra para explorar el lugar geométrico que se construye además de la cónica por cinco puntos.

Esta parte se consideró fundamental porque el alumno no resolvió ejercicios planteados en el libro de texto, sino que se enfrentó a una situación diferente: una actividad en la que él mismo definió el ejercicio y reflexionó libremente sobre qué cónica desea para su modelo, qué objeto geométrico utilizará y cuáles serán sus características.

Para el desarrollo de esta actividad, los estudiantes debían saber cómo insertar imágenes en el entorno digital de GeoGebra y utilizar la herramienta de ″cónica por cinco puntos″. Esta fase les permitió explorar distintas configuraciones para ubicar los puntos, con el objetivo de lograr el mejor ajuste posible al objeto modelado. Se hizo especial énfasis en que, dado que las cónicas son curvas de extensión infinita, era necesario truncarlas adecuadamente para que el modelo resultara más representativo y realista. Por ejemplo, la estructura de un puente puede ser modelada eficazmente mediante una parábola finita.

Tarea 2. Esta tarea consistió en usar el método del cuadrilátero para encontrar la cónica por cinco puntos dadas sus coordenadas. Por lo que era necesario elegir 4 puntos sobre la curva para construir el cuadrilítero (estos cuatro puntos deben corresponder a los mismos utilizados en la tarea 1) y una vez obtenidas las ecuaciones de las cuatro rectas de los lados del cuadrilátero se debían realizar las operaciones apropiadas para construir la ecuación de la forma: $C_1 + kC_2 = 0$, que se convierte el cónica buscada, cuando se reemplace el quinto punto y se obtenga el valor de k. En la figura 2, parte izquierda se observa como Mariana construyó el cuadrilátero sobre la misma imagen usando GeoGebra.

La intencionalidad de esta acción fue que los alumnos reflexionaran sobre el modelo obtenido y establecieran una comparación entre el modelo generado por GeoGebra (utilizando los cinco puntos) y el segundo modelo construido mediante el cuadrilátero. Una pregunta que puede surgir de manera natural es si ya se tiene un modelo, ¿para qué elaborar otro? Lo importante en esta actividad es que los estudiantes no se conviertan en usuarios pasivos de la tecnología; es necesario que realicen también el trabajo manual, identifiquen posibles errores y, si los modelos no coinciden, revisen el procedimiento cuantas veces sea necesario y expliquen las diferencias entre los resultados.

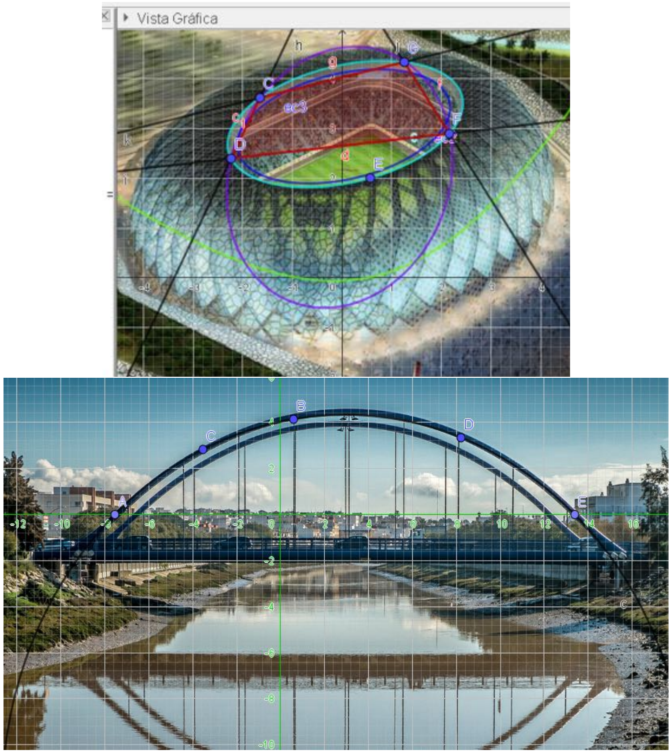

Figura 2. Estadio y puente, imágenes de los trabajos de Mariana y Aurelio

La tarea 3 consistió en hallar la ecuación del lugar geométrico usando los mismos puntos, usados en las dos tareas anteriores, por el método de Gauss-Jordan solucionando un sistema conformado por cinco ecuaciones lineales con seis variables con la forma $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Para desarrollar esta parte los alumnos tuvieron que consultar y explorar al menos dos formas de reducir variables, por ejemplo, hacer que uno de los puntos tuviera coordenadas (0,0), sin pérdida de generalidad; o también era posible dividir por A toda la expresión para que el primer coeficiente se hiciera uno.

La realización de esta tarea llevó a los alumnos a investigar por iniciativa propia las distintas formas de reducir variables mediante el método de Gauss-Jordan. Para ello recurrieron a videos y solicitaron asesoría, lo que implicó una transformación en el rol del docente: fueron los estudiantes quienes formularon preguntas y mostraron un interés activo. En consecuencia, el método de enseñanza se modificó y los alumnos lograron desarrollar una habilidad que antes no poseían.

Etapa de Observación. Durante la implementación se realizaron registros de clase y se recopilaron los manuscritos de los alumnos que evidencian el proceso llevado a cabo, utilizando la plataforma Microsoft Teams, figura 3. Se observó un mayor compromiso con las tareas, una mejor disposición para analizar propiedades y un cambio positivo en la actitud hacia el aprendizaje de la geometría. A lo largo del proceso, las clases evolucionaron hacia un formato de asesoría, en el que los estudiantes formulaban numerosas preguntas y contaban con la posibilidad de corregir sus errores cuando era necesario, con el fin de avanzar en sus proyectos. Mostraron interés genuino por los temas e iniciativa para profundizar en ellos.

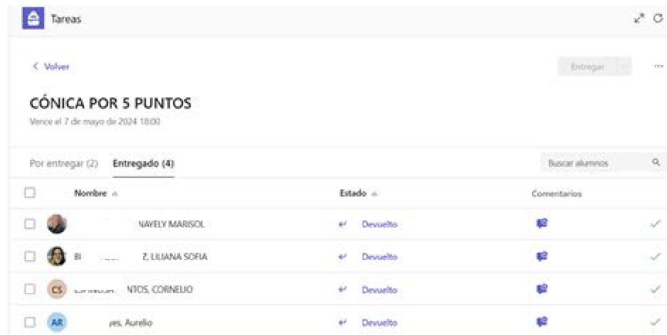

Figura 3. Uso de plataforma Microsoft Teams para recabar tareas.

Etapa de Reflexión. Esta etapa resultó ser especialmente significativa, ya que brindó a los estudiantes la oportunidad de presentar sus proyectos sin omitir detalles del proceso. Durante sus exposiciones, analizaron cada momento vivido, compartiendo sus experiencias individuales, las cuales resultaron enriquecedoras tanto para ellos mismos como para sus compañeros. En sus intervenciones, debían relatar su recorrido, incluyendo aquellos momentos en los que cometieron errores, lo que permitió una reflexión profunda y un valioso aprendizaje colectivo.

En particular, el uso del método de Gauss-Jordan representó un desafío, debido a la extensión y complejidad del procedimiento. En varios casos, los alumnos cometieron equivocaciones que los llevaron a repetir el proceso desde el inicio, se evidenciaron algunas confusiones al aplicar la eliminación gaussiana, especialmente al omitir operaciones en la última columna de la matriz.

Conclusiones

En este apartado más que conclusiones haremos un conjunto de reflexiones respecto a la actividad y lo que se logró con ella. La experiencia de aula que se presentó permitió explorar una forma innovadora y alternativa de organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, centrada fundamentalmente en el estudiante siendo protagonista activo de su propio conocimiento, como lo sugiere Giraldo (2025). La dinámica de la clase fomentó un ambiente en el que se incentivó a los estudiantes a formular preguntas, reflexionar críticamente sobre sus procedimientos e incluso a dudar de sus propios hallazgos, este aspecto resultó fundamental desde el enfoque la metodología de investigación-acción.

El cuestionamiento constante no solo fue valorado, sino que se promovió como parte esencial del aprendizaje. El propósito fue fortalecer la comprensión conceptual mediante un diálogo continuo entre el docente y los estudiantes, en el que la comunicación se convirtió en una herramienta clave para conseguir, construir y reafirmar saberes matemáticos que el alumno debía poner en uso de manera consciente.

Los tres métodos utilizados para modelar una cónica: los cinco puntos en GeoGebra, el método del cuadrilátero y el método de Gauss-Jordan no formaban parte de los conocimientos previos de los estudiantes. Sin embargo, a lo largo del desarrollo de las tareas y las asesorías lograron apropiarse de ellos de forma autónoma, apoyándose en la búsqueda de información en diversas fuentes y en la formulación de preguntas que les permitieron comprender los conceptos que estaban trabajando.

En el desarrollo de la propuesta didáctica se permitió el uso de herramientas digitales como mediadores del aprendizaje, destacando especialmente el empleo de GeoGebra. Este software resultó ser un recurso esencial para la visualización y comprensión de conceptos matemáticos complejos, como el modelado de cónicas. GeoGebra no solo facilitó la representación gráfica interactiva, sino que también promovió la exploración autónoma, ya los estudiantes pudieron manipular puntos, observar relaciones geométricas y validar sus conjeturas en tiempo real.

De esta manera, la tecnología se integró de forma significativa al aula, no como un elemento accesorio, sino como un medio activo para construir conocimiento, fomentar la experimentación y fortalecer el pensamiento matemático.

Es importante destacar que, a lo largo de la propuesta didáctica se promovió de manera intencionada el uso de diversas representaciones de las cónicas como objetos de estudio. Esta estrategia no solo enriqueció el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que también contribuyó significativamente a la formalización y comprensión profunda de los conceptos involucrados. Al presentar las cónicas desde múltiples representaciones: gráficas, algebraicas y numéricas, se ofreció a los estudiantes la posibilidad de establecer conexiones y comparación entre distintas formas de representación matemática, lo cual favoreció el desarrollo del pensamiento abstracto y la flexibilidad cognitiva.

Si bien existen numerosas metodologías aplicables al aula de matemáticas, la incorporación del enfoque de investigación-acción desde la perspectiva de Kemmis y McTaggart resultó especialmente satisfactoria y pertinente. Este enfoque aportó elementos que se integraron de manera coherente a la propuesta, dinamizando la enseñanza y reconociendo la planificación, la acción, la observación y la reflexión, en ese orden, como componentes esenciales del proceso.

Sabido es que la implementación de una propuesta didáctica como la diseñada exige una mayor dedicación por parte del docente tanto en el diseño de las actividades como en la revisión constante y en la evaluación continua (antes, durante y al finalizar el proceso), los beneficios pedagógicos que se obtienen de este proceso justifican ampliamente el esfuerzo. Este modelo, basado en una retroalimentación permanente y significativa, contribuyó a que el estudiante tomara mayor conciencia de sus propias necesidades académicas y de su proceso de aprendizaje.

Consideramos que la propuesta didáctica realizada contribuyó para que el estudiante enfrente retos del ámbito profesional, (al menos algunos de ellos) promoviendo en él una actitud abierta a la crítica constructiva, al análisis de sus propios errores y a la búsqueda activa de estrategias para superar las dificultades. En este sentido, no solo se fortalecen sus competencias académicas, sino también habilidades clave como la autonomía, la resiliencia y el pensamiento crítico.

Así como se observó un avance significativo por parte de los alumnos en el estudio de las secciones cónicas, también fue importante identificar áreas de oportunidad que puedan ser útiles para los docentes interesados en replicar esta experiencia didáctica. Por ejemplo, en el caso de las cónicas de extensión abierta, como la parábola, un estudiante no consideró adecuadamente los límites del dominio. Esto provocó que el modelo inicial fuera general y no se ajustara con precisión a la imagen que habían propuesto. Ante esta situación, fue necesario reforzar conceptos clave como el dominio y la extensión de las cónicas, con el fin de lograr una representación más fiel y rigurosa.

La parte analítica representó mayores desafíos a los estudiantes, pero tuvieron la oportunidad de equivocarse y corregir en varias ocasiones, hasta que su modelo se aproximó lo más posible en las tres formas exploradas. Estos errores les permitieron darse cuenta de la importancia de realizar los cálculos con cuidado, ya que se trató de procesos extensos y complejos.

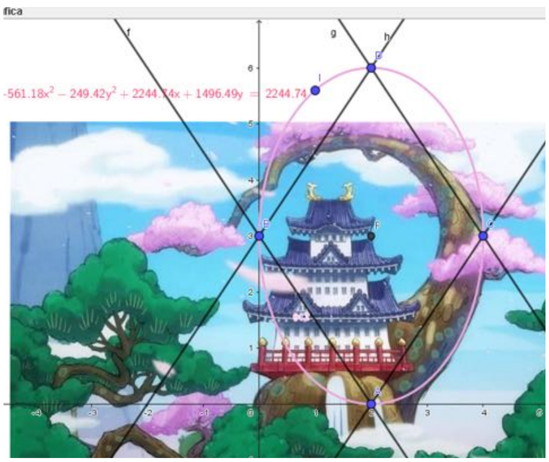

Figura 4. Imagen de Leslie. La cónica es externa a la imagen.

Con el objetivo de ajustar la cónica, una estudiante modificó el modelo sin percatarse de que se alejaban del dibujo original, lo que evidenciaba una diferencia significativa entre el modelo matemático y el objeto modelado. Este caso se observó de manera particular en la tarea de Leslie, quien trabajó con la imagen mostrada en la figura 4. Posteriormente, ella logró identificar el error, corregirlo y modificar su modelo, obteniendo así una representación más precisa.

Como recomendación a los maestros que quisieran implementar esta propuesta didáctica se sugiere que para la comprobación y dadas las múltiples revisiones que requiere hacerse pueden usar la calculadora virtual de OnlineMschool, ver figura 5. La elección de esta herramienta se debió a que ayuda a solucionar el sistema de ecuaciones lineales de 5x5, pero el valor agregado es que permite visualizar el proceso y los cálculos, para comparar lo que realizaban los alumnos con lápiz y papel. Esta herramienta no se puso a disposición de los alumnos porque la idea de las tareas dos y tres era la construcción del modelo usando lápiz y papel exclusivamente.

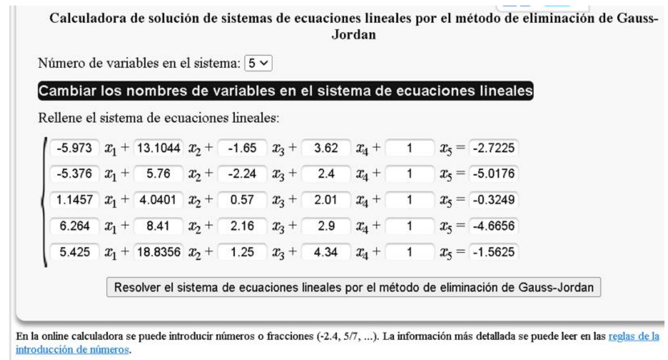

Figura 5. Calculadora virtual: onlineMschool.com

Referencias

1. Calculadora virtual: onlineMschool.com
2. Chavarriaga, O. y Torres, J. (2017). *Estudio de las secciones cónicas a través de la geometría dinámica*. Tesis doctoral no publicada, Universidad Pontificia Bolivariana. Repositorio Institucional UPB. repository.upb.edu.co
3. Costa, C. (2015). *As cônicas na geometria do táxi* [Artículo académico]. *Ciência e Natura*, 37(3), 179–191.
4. Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Traducción (2006) de la Universidad del Valle, Cali
5. García, G. (2024). *"Ingeniería didáctica" como metodología de enseñanza de cónicas en el desarrollo de capacidades geométricas para resolver problemas contextualizados de estudiantes de arquitectura*. Tesis doctoral no publicada, Universidad Femenina del Sagrado Corazón.
6. GeoGebra en www.geogebra.org
7. Giraldo, M. (2025). Innovación en un instituto de educación secundaria a través de entornos virtuales y tecnologías conversacionales: una investigación-acción para fomentar la autonomía del alumnado y la personalización de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. España.
8. Guevara, G., Verdesoto, A. y Castro, N. (2020). Metodologías de investigación educativa (descriptivas, experimentales, participativas y de investigación-acción). *Recimundo*, *4*(3), 163-173.
9. Latorre, A. (2003). *La investigación-acción: Conocer y cambiar la práctica educativa*. Graó.
10. Miller, M. E., & Johnson, C. L. (2021). *The impact of technology integration on the teaching and learning of conic sections. Journal of Technology in Mathematics Education, 8*(1), 45-60. https://doi.org/10.1080/24725854.2021.1881543

11. Salas, M. Hille, C. Etgen, G. (2003). Calculus. Barcelona: Reverté.
12. Torres, R. A., & García, A. M. (2023). *Teaching conic sections through inquiry-based learning: Insights from a classroom study*. *Educational Studies in Mathematics, 112*(3), 345-361. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10234-7
13. Ulson, K. (2024). *Using Graphing Application in Illustrating the Conic Sections: Its Effect on Student's Performance*. *International Journal of Humanities and Education Development (IJHED)*, *6*(3), 1–7. https://doi.org/10.22161/jhed.6.3.1
14. Vigil, J. (2021). Estudio de investigación-acción sobre la aplicación del modelo Flipped Classroom en las asignaturas de Matemáticas II y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II de 2º de Bachillerato. *Pulso: revista de educación*, (44), 109-128.

Artículo recibido: 15 septiembre 2025
Dictaminado: 23 diciembre 2025
Aceptado: 30 diciembre 2025