

## EXPERIMENTACIÓN DEL MOVIMIENTO PARA EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN POLINOMIAL EN UN CURSO DE CÁLCULO A TRAVÉS DE LA MODELACIÓN Y LA TECNOLOGÍA

Lorenza Illanes  
[lillanes@itesm.mx](mailto:lillanes@itesm.mx)

Ruth Rodríguez  
[ruthrdz@itesm.mx](mailto:ruthrdz@itesm.mx)

Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, México

**Palabras claves:** Modelación, Cálculo, Graficación, Análisis Paramétrico, Integración.

### **Resumen**

El presente trabajo está centrado en un curso de Cálculo Diferencial de una variable (CD); La experiencia se realiza durante un período de dos sesiones de hora y media durante el semestre Ago-Dic 2013 en una universidad del norte de México. El objetivo del estudio es conocer las estrategias y dificultades de los alumnos de ingeniería al trabajar las etapas del proceso de modelación, y al establecer la representación de fenómenos reales mediante la graficación de su función polinomial. Se muestra además cómo los alumnos enriquecen su aprendizaje al modelar situaciones nuevas para ellos. Esta investigación revela la importancia de modelar para que los alumnos conozcan el problema, y que a través del uso de tecnología en grupos de trabajo puedan evidenciar la manera en qué el movimiento influye, tanto del punto de vista gráfico como de la situación a modelar.

### **Introducción**

En el presente artículo se pretende describir una investigación que tuvo como objetivo estudiar la modelación de un fenómeno de movimiento, en donde al establecer varios tipos de movimientos se estableció el orden y tipo de polinomio que los modela. Fue llevada a cabo por estudiantes de ingeniería del primer semestre de una institución de educación privada del norte de México. Nos interesa estudiar, desde un punto de vista específico, la manera en que la modelación puede ser visualizada por parte de los alumnos, desde una perspectiva muy particular de modelación matemática, en el ámbito educativo. En un primer momento, mostraremos brevemente la perspectiva teórica sobre modelación matemática; en un segundo momento describiremos la metodología del trabajo, donde se discute la modelación que da lugar al diseño de esta actividad; y la descripción del entorno físico, donde se llevará a cabo la implementación de la actividad; y posteriormente en este escrito se describe a detalle el instrumento utilizado en la implementación en aula, resaltando fuertemente sus características a la luz de un punto de vista teórico sobre modelación matemática y sobre la importancia del trabajo colaborativo y del uso de tecnología como parte esencial en la actividad. Esto dio lugar a nuestra propuesta de investigación de la cual presentaremos su experimentación y resultados. Al final se expresa una conclusión de lo investigado así como la bibliografía que dio apoyo a esta investigación.

### **Marco teórico**

Los antecedentes básicos que respaldan la visión sobre la modelación matemática para el ámbito escolar están fundamentados en los trabajos de Blum y Niss (1991) y Niss, Blum y Galbraith (2007) quienes postulan en un primer momento la modelación como la relación

entre las matemáticas y la “realidad”. Por otro lado, autores como Henry (2001) dividen aún más esta primera acepción sobre modelación mostrando más etapas y sobre todo enfatizando la importancia de las transiciones entre las etapas. Además a diferencia de los estudio anglosajones que denominaban “*real model*” (modelo real en español), Henry (2001) acuña el término “modelo pseudo-concreto” para referirse básicamente a esa etapa intermedia entre la realidad o situación real y el modelo matemático (figura 1). Finalmente y posterior a un estudio más detallado de otros autores que proponen el visualizar la modelación matemática escolar desde otro punto de vista, se decide continuar en este estudio adoptando la descripción de este proceso en términos de etapas, las cuales se muestran en la figura 1 (ver más detalle en Rodríguez, 2007 y 2010c):

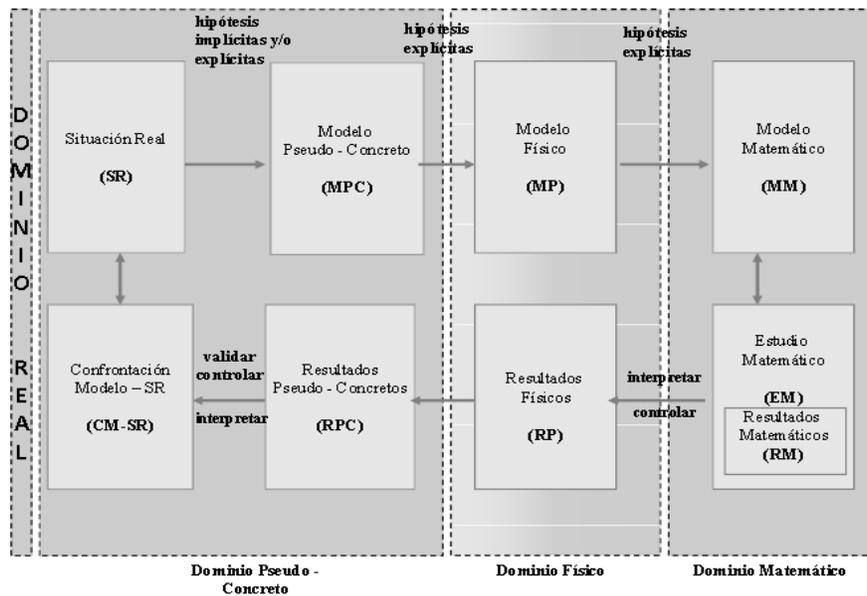


Figura 1. Proceso de Modelación (Rodríguez, 2007, 2010c).

En estudios más recientes, se ha formulado un enfoque teórico (Rodríguez, 2010a) para la implementación de la modelación matemática en el aula, en el cual se incorpora entre otros el papel de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas (Beichner, 2007; Ferreira, 2009; Zavala, Alarcón, Domínguez y Rodríguez, 2010), la importancia del aprendizaje colaborativo (Beichner, 2007; Collazos y Mendoza, 2006) y el desarrollo de competencias de modelación (Maab, 2006) de acuerdo a niveles específicos (Henning y Keune, 2007).

Hoy en día, se reconoce que un factor muy importante para esta evolución de la enseñanza de las matemáticas, es la utilización de herramientas tecnológicas en la resolución de problemas y en la comprensión de las ideas matemáticas, ya que “las computadoras y las calculadoras cambian lo que los estudiantes pueden hacer con las representaciones convencionales y expanden el conjunto de representaciones con las que se pueden trabajar” (National Council of Teachers in Mathematics, 2000, pp. 68-69). Algunas de las áreas de influencia de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en relación con la enseñanza de las matemáticas son: han permitido el acercamiento algorítmico a la formulación y solución de problemas, promueven la modelación y simulación de procesos y fenómenos, permiten la rapidez en el procesamiento y el almacenamiento de gran cantidad de datos (información), son utilizados como un medio eficaz para la distribución

de materiales educativos propiciando el surgimiento de nuevos e innovadores ambientes pedagógicos, facilitan la graficación y animación, así como el tratamiento simbólico de datos. En general, las TIC ofrecen la oportunidad de crear ambientes de aprendizaje enriquecidos para que los estudiantes perciban a las matemáticas como una ciencia experimental aplicable a cualquier situación de la vida real (Organista, 2010).

Las matemáticas, ante todo, son una actividad humana involucrada en la resolución de problemas físicos, biológicos, sociales o bien internos a la propia matemática, que como respuesta o solución a estos problemas surgen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos. La descripción matemática de un sistema o fenómeno de la vida real (físico, biológico, químico, económico, etc.) se llama modelo matemático. Nosotros nos interesamos en estudiar objetos matemáticos (ecuaciones, funciones, etc.) que permiten estudiar determinadas situaciones. En este trabajo se presenta un estudio que se llevó a cabo en el curso de Cálculo I para el tema de movimiento a través de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas así como el tema de graficación de estas funciones y su relación con aspectos del movimiento como son la velocidad y la posición. El estudio se lleva a cabo en tres Grupos a nivel profesional y en los cuales además de lo anterior se promueve el aprendizaje colaborativo (Woods y Chen, 2010), la autonomía del estudiante (Schunk, 1996; Omrod, 2005; Pape y Smit, 2002; Dresel y Marion Huagwitz, 2008) y como parte del proceso de la modelación es importante que el estudiante aplique lo aprendido en una temática de la vida real.

### **Metodología**

El proceso de investigación está formado por varias partes: primeramente el tipo de estudio visualizado y la constitución de la muestra, como segunda parte el diseño e implementación de la actividad: justificación de las características de la actividad, una tercera parte los espacios físicos de la experimentación y la cuarta y última parte la experimentación y el análisis de resultados. Aquí se expondrá ampliamente la muestra y los espacios físicos, ya que los otros elementos son partes explícitas del formato exigido para este reporte.

- a) La muestra está formada por 3 grupos de estudiantes de Cálculo I que están entre primero y segundo semestre de profesional, y su configuración se describe en el cuadro siguiente:

Tabla 1. *Distribución de los estudiantes del estudio de acuerdo al Grupo.*

<b>Muestra (Semestre Ago-Dic 2013)</b>		
<b>Grupo A</b>	<b>Grupo B</b>	<b>Grupo C</b>
35	35	20
Estudiantes	Estudiantes	Estudiantes

- b) El presente estudio se lleva a cabo en un instituto de educación privada del norte de México. El objetivo del diseño e implementación de esta actividad es estudiar el tipo de dificultades, de los alumnos, al momento de modelar las situaciones problema, que requieren el uso de ecuaciones lineales y cuadráticas que se representan gráficamente, y cuya solución depende de la buena representación gráfica de la posición y la velocidad. Nos interesa observar además, el papel que juega el uso de la calculadora para la solución del fenómeno a modelar, y finalmente el establecimiento de las operaciones que dan solución a la situación problema. Es importante aclarar que la actividad además se implementará en un sólo tipo de salón tradicional en donde se usa la calculadora TI-

Nspire-CAS y un sensor de movimiento para no tener variantes en la investigación respecto a la tecnología usada en la solución.

### ***Exposición de la propuesta***

El objetivo primordial de esta propuesta era desarrollar una actividad que diera solución a un problema de movimiento caracterizado por la velocidad y la posición siguiendo los pasos de modelación (Rodríguez, 2010a) en tres diferentes grupos de alumnos con la misma tecnología. Por lo cual la intención era doble por un lado diseñar la actividad conforme a la modelación y por el otro dado comprobar las bondades en el aprendizaje cuando se enseña con modelación en diferentes ambientes.

### ***Experimentación***

La actividad en las aulas de los grupos A, B y C, se diseñó siguiendo los pasos que se describen a continuación:

**Paso 0.** Organización de equipos de trabajo. Como ésta es una actividad dentro de un semestre que dura la impartición del curso, en el cual se utiliza aprendizaje colaborativo (Collazos y Mendoza, 2006), se pidió a los alumnos que se sentaran con su equipo de trabajo formado por dos alumnos que contaban con una calculadora y un sensor, este último se compartía con otro equipo.

**Paso 1.** Una vez formados los equipos se le dio a cada equipo una calculadora y cada 2 equipos un sensor con una actividad que constaba de dos partes:

**Paso 1a.** Instrucciones de cómo almacenar en la calculadora dentro de un archivo la representación gráfica de la posición y la velocidad de los movimientos.

**Paso 1b.** Una hoja con 20 cuadrantes donde el estudiante va a graficar los 10 movimientos, especificando dos componentes del movimiento una en la gráfica de la posición y otra en la gráfica de la velocidad que son captados por el sensor al tiempo que uno de los estudiantes del equipo se mueve de acuerdo a diez instrucciones diferentes. Para la solución de este problema se distinguen cinco partes que siguen la modelación matemática (Rodríguez, 2007 y 2010c) de acuerdo al diagrama de la figura 3:

- i) Obtención de los datos de velocidad para cada uno de los diez movimientos.
- ii) Obtención de los datos de posición para cada uno de los diez movimientos.
- iii) Representación gráfica de los datos de velocidad para responder a las preguntas 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, y 19.
- iv) Representación gráfica de los datos de posición para responder a las preguntas 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 y 20.
- v) Representación gráfica de los datos de velocidad para representar la gráfica de la posición.

**Paso 2.** Se evaluaron las once partes de la solución del problema mencionadas en el **Paso 1** de las actividades de los equipos dentro de los tres grupos A, B y C y un problema donde se obtuvo una evolución total del problema. Los movimientos analizados se pueden ver en la Tabla 2.

**Paso 3.** Se hace un análisis cualitativo en donde se analiza la calidad de las respuestas de acuerdo a las etapas del proceso de modelación descrito en Rodríguez (2007 y 2010a) para poder ajustar el modelo por un lado y por el otro ver las áreas específicas de aprendizaje que hay que fortalecer. Para el análisis cuantitativo se hizo un análisis estadístico de las respuestas parciales (11 partes antes mencionadas) y la calificación global del problema por grupo así mismo se establecerán los intervalos de confianza para los parámetros estimados: media y varianza. Para comparar estadísticamente los diferentes Grupos se utilizaron la prueba t-Student para la media y la prueba F-Fisher para la varianza y así tener una medida cuantitativa que confirme nuestro análisis

Tabla 2. *Movimientos cuya velocidad y posición fueron analizadas en los grupos A, B y C.*

No. de Movimiento	Descripción Movimiento	Análisis de la posición	Análisis de la velocidad
M1.	Movimiento con velocidad constante que vaya desde el sensor hacia adelante.	Sí	Sí
M2.	Movimiento con velocidad constante que vaya desde lejos del sensor hasta el sensor.	Sí	Sí
M3.	Movimiento con velocidad cada vez más rápida que vaya desde el sensor hacia adelante.	Sí	Sí
M4.	Movimiento con velocidad cada vez más rápida que vaya desde lejos del sensor hasta adelante.	Sí	Sí
M5.	Movimiento con velocidad cada vez más lenta que vaya desde el sensor hacia adelante.	Sí	Sí
M6.	Movimiento con velocidad cada vez más lenta que vaya desde lejos del sensor hacia el sensor.	Sí	Sí
M7.	Movimiento con velocidad cada vez más lenta que vaya desde el sensor hacia adelante hasta que se pare y de ahí regresa hacia el sensor cada vez más rápido.	Sí	Sí
M8.	Movimiento con velocidad cada vez más rápida que vaya desde el sensor hacia adelante y con velocidad cada vez más lento que vaya desde el sensor hacia adelante.	Sí	Sí
M9.	Movimiento con velocidad cada vez más lenta que vaya desde el sensor hacia adelante y hasta que se pare y regrese con velocidad cada vez más lento que vaya hacia el sensor.	Sí	Sí
M10.	Movimiento con velocidad cada vez más rápida que vaya desde el sensor hacia adelante y hasta que se pare y regrese con velocidad cada vez más rápida que vaya hacia el sensor.	Sí	Sí
M11.	Problema donde se le da la gráfica de la velocidad y traza la gráfica de la posición.	Sí	Dado.

cualitativo. Este mismo análisis permite apreciar, entre otras cuestiones, las bondades de cada uno de los salones en donde se experimentó este aprendizaje, las dificultades de los



Figura 3. Aplicación del Proceso de Modelación (Rodríguez, 2007, 2010) al problema bajo estudio.

alumnos frente a la actividad de modelar y la apropiación del uso de tecnología para fortalecer aspectos claves de la modelación en los estudiantes. Para establecer estadísticamente las diferencias de medias y varianzas globales entre la evaluación de los movimientos y la prueba al interior de los grupos se hicieron las primeras pruebas de hipótesis (ver tabla 3) y para evaluar la diferencia de medias y varianzas entre los grupos se hicieron otras pruebas de hipótesis (ver tabla 3).

Tabla 3. Pruebas de Hipótesis

1. Prueba de hipótesis de las medias globales de los movimientos versus la prueba posterior a la actividad para los Grupos A, B y C.
2. Prueba de hipótesis de las varianzas globales de los movimientos versus la prueba posterior a la actividad para los Grupos A, B y C.
3. Prueba de hipótesis de medias de los diferentes tipos de movimientos, la evaluación global de estos movimientos y la prueba confirmatoria.
4. Prueba de hipótesis de varianzas de los diferentes tipos de movimientos, la evaluación global de estos movimientos y la prueba confirmatoria

### Resultados

La calificación global que obtuvieron los estudiantes respecto a la solución del problema en cada uno de los Grupos se presenta en la siguiente gráfica:

En el grupo A 18 alumnos obtuvieron 100, en el B sólo 6 alumnos obtuvieron 100 y en el grupo C fueron solamente 3 los alumnos que obtuvieron el 6 pero dado que los grupos tienen diferente número de alumnos va a ser importante obtener las medias y las varianzas para dar validez a los resultados. Es importante enfatizar que en esa investigación nos interesa ver cuáles de los movimientos son representados gráficamente (ver Tabla 2) de mejor manera.

Pará dar validez estadística, sé obtuvo por grupo la media, la varianza y los intervalos de confianza, para ambos parámetros (ver Tabla 4) se encuentran, las medias por cada uno de los movimientos, su velocidad y posición del problema, y la prueba posterior así como las varianzas del grupo A, podemos observar que pese que es el mejor grupo su varianza es grande sin embargo se encuentra dentro de los intervalos de confianza aceptados. La media global de la evaluación de los movimientos es la mayor e los 3 grupos, sin embargo en la media global de la prueba es el mejor grupo. Su varianza global es la menor tanto para los movimientos como para la prueba.

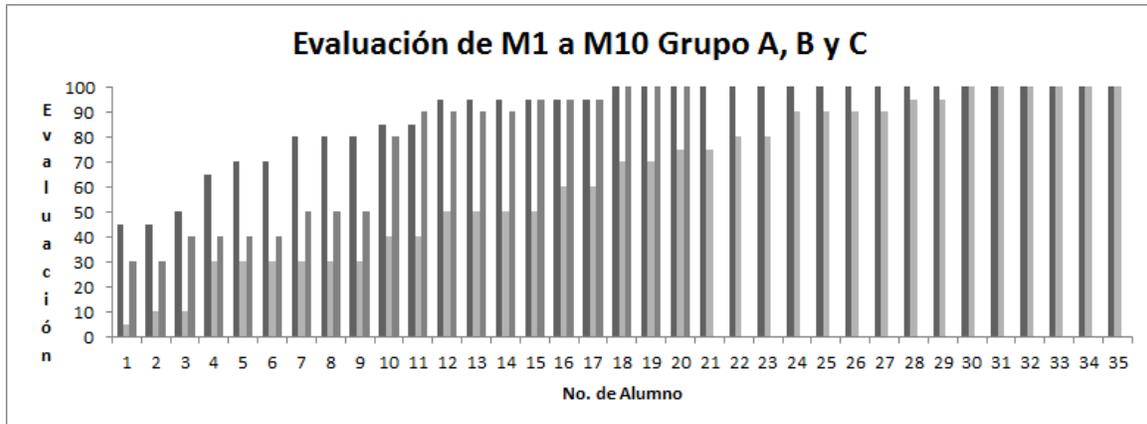


Figura 4. Evaluación de los grupos A, B y C.

Tabla 4. Evaluación de medias, varianza e intervalos e confianza del problema. Grupo A

	M1		M2		M3		M4		M5		M6		M7		M8		M9		M10		PROMEDIO	Promedio
	V1	P1	V2	P2	V3	P3	V4	P4	V5	P5	V6	P6	V7	P7	V8	P8	V9	P9	V10	P10	Movimiento	Prueba
LI	0.8620	0.7352	0.9134	0.9134	0.7748	0.7352	0.8137	0.7748	0.6188	0.6251	0.8328	0.6972	0.7634	0.8620	0.8448	0.7748	0.8167	0.8167	0.8030	0.7634	83.5417	58.3872
Media	0.9429	0.8571	0.9714	0.9714	0.8857	0.8571	0.9143	0.8857	0.7714	0.7714	0.9143	0.8286	0.8857	0.9429	0.9429	0.8857	0.9143	0.9143	0.9143	0.8857	89.2857	65.2571
LS	1.0238	0.9791	1.0295	1.0295	0.9966	0.9791	1.0149	0.9966	0.9241	0.9178	0.9958	0.9599	1.0081	1.0238	1.0409	0.9966	1.0119	1.0119	1.0256	1.0081	95.0298	72.1271
Desv. Standard	0.2355	0.3550	0.1690	0.1690	0.3228	0.3550	0.2928	0.3228	0.4444	0.4260	0.2373	0.3824	0.3562	0.2355	0.2855	0.3228	0.2840	0.2840	0.3241	0.3562	16.7219	19.9997
LI	0.0363	0.0825	0.0187	0.0187	0.0682	0.0825	0.0561	0.0682	0.1292	0.1188	0.0368	0.0957	0.0830	0.0363	0.0533	0.0682	0.0528	0.0687	0.0830	0.0687	182.9493	261.7008
Varianza	0.0555	0.1261	0.0286	0.0286	0.1042	0.1261	0.0857	0.1042	0.1975	0.1815	0.0563	0.1462	0.1269	0.0555	0.0815	0.1042	0.0807	0.0807	0.1050	0.1269	279.6218	399.9866
LS	0.0952	0.2164	0.0490	0.0490	0.1789	0.2164	0.1471	0.1789	0.3390	0.3116	0.0967	0.2510	0.2178	0.0952	0.1399	0.1789	0.1385	0.1385	0.1803	0.2178	480.0133	686.6375

Los siguientes datos (ver Tabla 5) expresan las medias, varianzas e intervalos de confianza para por cada uno de los movimientos, su velocidad y posición del problema, y la prueba posterior del grupo B. Aquí la calificación global la media de los movimientos es la menor y la varianza es mayor, lo que indica menor estabilidad en cuanto a grupo. La varianza global de la prueba es mayor que el grupo A pero menor que el grupo C.

Tabla 5. Evaluación de medias, varianza e intervalos e confianza del problema. Grupo B

	M1		M2		M3		M4		M5		M6		M7		M8		M9		M10		PROMEDIO	Promedio
	V1	P1	V2	P2	V3	P3	V4	P4	V5	P5	V6	P6	V7	P7	V8	P8	V9	P9	V10	P10	Movimiento	Prueba
LI	0.9134	1.0000	0.8167	0.8167	0.8167	0.8167	0.5905	0.5239	0.5239	0.5239	0.3990	0.3990	0.3401	0.2835	0.1283	0.2293	0.1774	0.1774	0.1774	0.1774	52.5594	59.4161
Media	0.9714	1.0000	0.9143	0.9143	0.9143	0.9143	0.7429	0.6857	0.6857	0.6857	0.5714	0.5714	0.5143	0.4571	0.2857	0.4000	0.3429	0.3429	0.3429	0.3429	63.0000	66.8571
LS	1.0295	1.0000	1.0119	1.0119	1.0119	1.0119	0.8952	0.8475	0.8475	0.8475	0.7439	0.7439	0.6885	0.6308	0.4432	0.5707	0.5083	0.5083	0.5083	0.5083	73.4406	74.2981
Desv. Standard	0.1690	0.0000	0.2840	0.2840	0.2840	0.2840	0.4434	0.4710	0.4710	0.5021	0.5021	0.5071	0.5054	0.4583	0.4971	0.4816	0.4816	0.4816	0.4816	0.4816	30.3945	21.6620
LI	0.0187	0.0000	0.0528	0.0528	0.0528	0.0528	0.1287	0.1451	0.1451	0.1451	0.1649	0.1649	0.1682	0.1671	0.1375	0.1616	0.1517	0.1517	0.1517	0.1517	604.4337	307.0139
Varianza	0.0286	0.0000	0.0807	0.0807	0.0807	0.0807	0.1966	0.2218	0.2218	0.2218	0.2521	0.2521	0.2571	0.2555	0.2101	0.2471	0.2319	0.2319	0.2319	0.2319	923.8235	469.2437
LS	0.0490	0.0000	0.1385	0.1385	0.1385	0.1385	0.3376	0.3808	0.3808	0.3808	0.4328	0.4328	0.4414	0.4385	0.3606	0.4241	0.3981	0.3981	0.3981	0.3981	1585.8831	805.5279

En esta tercera estimación del grupo C tiene la mayor media global de movimientos que el grupo B pero menor a la del grupo A. En cuanto a la media global de la prueba es la mayor de los tres grupos. La varianza global de los movimientos es mayor que el grupo A pero menor con respecto al grupo B. La varianza global de la prueba es la mayor de los 3 grupos.

Tabla 6. *Evaluación de medias, varianza e intervalos e confianza del problema. Grupo C*

	M1		M2		M3		M4		M5		M6		M7		M8		M9		M10		PROMEDIO	Promedio
	V1	P1	V2	P2	V3	P3	V4	P4	V5	P5	V6	P6	V7	P7	V8	P8	V9	P9	V10	P10	Movimiento	Prueba
Li	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.7559	0.6079	0.4210	0.4800	0.3111	0.3111	0.3111	0.3111	0.1210	0.1210	0.2599	0.2599	0.2599	0.2599	56.9224	63.0800
Media	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9000	0.8000	0.6500	0.7000	0.5500	0.5500	0.5500	0.5500	0.3500	0.3500	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	69.7500	76.0000
LS	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0441	0.9921	0.8790	0.9200	0.7889	0.7889	0.7889	0.7889	0.5790	0.5790	0.7401	0.7401	0.7401	0.7401	82.5776	88.9200
Desv. Standard	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3078	0.4104	0.4894	0.4702	0.5104	0.5104	0.5104	0.5104	0.4894	0.4894	0.5130	0.5130	0.5130	0.5130	27.4089	27.6063
Li	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0548	0.0974	0.1385	0.1278	0.1507	0.1507	0.1507	0.1507	0.1385	0.1385	0.1522	0.1522	0.1522	0.1522	434.4825	440.7606
Varianza	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0947	0.1684	0.2395	0.2211	0.2605	0.2605	0.2605	0.2605	0.2395	0.2395	0.2632	0.2632	0.2632	0.2632	751.2500	762.1053
LS	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2021	0.3593	0.5109	0.4716	0.5558	0.5558	0.5558	0.5558	0.5109	0.5109	0.5614	0.5614	0.5614	0.5614	1602.6127	1625.7698

Para confirmar estadísticamente estas diferencias es necesario hacer una prueba de hipótesis entre los grupos de diferencia de medias y de varianzas, también va a ser importante hacer una diferencia de medias y varianzas entre la evaluación global de los movimientos y la evaluación de la prueba para ver estadísticamente si los grupos mejoraron. Esta última prueba demuestra (ver tabla 7) que hay igualdad de medias en el grupo B y C esto significa que estadísticamente no hubo ningún cambio en la evaluación cuantitativa de las actividades y de la prueba que se aplicó posteriormente. Sin embargo en el grupo A si hubo diferencia de medias y hubo una mejora en la prueba en comparación con la actividad de movimientos, y como no hubo diferencia en la varianza esto es una prueba robusta de que si hubo diferencias significativas de las medias. En el grupo C tampoco hubo diferencia en las varianzas, en cambio en el grupo B fue mayor la varianza en las actividades de movimientos que en la prueba, lo cual es bueno para el estudio pues en general en educación primero se estabiliza la varianza en un grupo y después se establece el crecimiento.

Tabla 7. *Prueba de hipótesis de las medias y varianzas globales de los movimientos versus la prueba posterior a la actividad para los grupos A, B y C.*

Prueba de Hipótesis de medias entre la media global de movimientos versus la media de la prueba.					
MA/PA		MB/PB		MC/PC	
t	5.452964	t	-0.6113835	t	-0.71849636
t	5.452964	t	0.61138349	t	0.718496355
t tablas	1.9955	t tablas	1.9955	t tablas	2.0244
Se Acepta	Ha*	Se Acepta	Ho	Se Acepta	Ho
Prueba de Hipótesis de varianzas entre la varianza global de movimientos versus la Varianza de la prueba.					
VMA/VPA		VMB/VPB		VMC/VPC	
F	1.430455	F	1.96875	F	1.014449602
F Tablas	1.78228	F Tablas	1.78228	F Tablas	2.168
Se Acepta	Ho	Se Acepta	Ha*	Se Acepta	Ho

Las pruebas de hipótesis del grupo A con el grupo B se refleja en la tabla 8: en cuanto a la diferencia de medias se da en la posición del movimiento 1, en la posición del movimiento 4, en la velocidad y la posición del movimiento 6, 7, 8, 9 y 10. Parece ser que el ir y venir desde y para el sensor causaba problemas con los estudiantes en su actividad, logrando una evaluación mejor el grupo A que el grupo B en estos movimientos como lo demuestran las pruebas de hipótesis. En cuanto a la varianza hubo diferencia significativa en todos los movimientos excepto en la posición del movimiento 1, el movimiento 3, 5, la posición del movimiento 6 y el promedio de la prueba. En cuanto a la varianza tuvo más el grupo B que el grupo A, lo que fortalece que el grupo A obtuvo mejor evaluación que el grupo B consistentemente.

Las pruebas de hipótesis del grupo A con el grupo C se refleja en la tabla 9:

En cuanto a la diferencia de medias se da en la velocidad y la posición del movimiento 6, 7, 8, 9 y 10. Parece ser que el ir y venir desde y para el sensor causaba problemas con los estudiantes en su actividad, logrando una evaluación mejor el grupo A que el grupo B en estos movimientos como lo demuestran las pruebas de hipótesis. En cuanto a la varianza hubo diferencia significativa en todos los movimientos excepto en los movimientos del 1 al

5. En cuanto a la varianza tuvo más el grupo C que el grupo A, lo que fortalece que el grupo A obtuvo mejor evaluación que el grupo C consistentemente.

Tabla 8. Prueba de hipótesis de medias y varianza de los diferentes tipos de movimientos, la evaluación global de estos movimientos y la prueba confirmatoria.

	M1		M2		M3		M4		M5		M6		M7		M8		M9		M10		ROMEDIO	Promedio
	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	movimiento	Prueba
t	-0.5831	-2.3805	1.0228	1.0228	-0.3931	-0.7435	1.9086	2.0722	0.7831	0.7984	3.6525	2.4104	3.5459	5.1533	7.1995	4.8484	6.0464	6.0464	5.8237	5.3614	4.4827	-0.3211
t	0.5831	2.3805	1.0228	1.0228	0.3931	0.7435	1.9086	2.0722	0.7831	0.7984	3.6525	2.4104	3.5459	5.1533	7.1995	4.8484	6.0464	6.0464	5.8237	5.3614	4.4827	0.3211
t tablas	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244	2.0244
Se Acepta	Ho	Ha*	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ha*	Ho	Ho	Ha*	Ho										
F	1.9412	0.0000	2.8235	2.8235	1.2917	1.5625	2.2941	2.1290	1.1234	1.2222	4.4776	1.7241	2.0265	4.6061	2.5773	2.3710	2.8750	2.8750	2.2080	1.8278	3.3038	1.1731
F Tablas	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823	1.7823
	Ha*	Ho	Ha*	Ha*	Ho	Ho	Ha*	Ha*	Ho	Ho	Ha*	Ho	Ha*	Ho								

Tabla 9. Prueba de hipótesis de medias y varianza de los diferentes tipos de movimientos, la evaluación global de estos movimientos y la prueba confirmatoria.

	M1		M2		M3		M4		M5		M6		M7		M8		M9		M10		ROMEDIO	Promedio	
	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	movimiento	Prueba	
t	-1.4355	-2.3805	-1.0000	-1.0000	-2.0945	-2.3805	0.1685	0.8028	0.9149	0.5605	3.0112	2.1238	2.6016	3.2501	4.9573	4.3813	3.3316	3.3316	3.2591	2.9773	2.8945	-1.5264	
t	1.4355	2.3805	1.0000	1.0000	2.0945	2.3805	0.1685	0.8028	0.9149	0.5605	3.0112	2.1238	2.6016	3.2501	4.9573	4.3813	3.3316	3.3316	3.2591	2.9773	2.8945	1.5264	
t tablas	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	
Se Acepta	Ho	Ha*	Ho	Ho	Ha*	Ha*	Ho	Ho	Ho	Ho	Ha*	Ho											
MAX	0.0555	0.1261	0.0286	0.0286	0.1042	0.1261	0.0947	0.1684	0.2395	0.2211	0.2605	0.2605	0.2605	0.2605	0.2395	0.2395	0.2632	0.2632	0.2632	0.2632	751.2500	762.1053	
MIN	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0857	0.1042	0.1975	0.1815	0.0563	0.1462	0.1269	0.0555	0.0815	0.1042	0.0807	0.0807	0.1050	0.1269	279.6218	399.9866	
F	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.1053	1.6163	1.2127	1.2178	4.6273	1.7818	2.0532	4.6974	2.9379	2.2982	3.2621	3.2621	2.5053	2.0739	2.6867	1.9053
F Tablas	2.053	2.053	2.053	2.053	2.053	2.053	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	
	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ha*	Ha*											

Las pruebas de hipótesis del grupo B con el grupo C que se refleja en la tabla 10 no muestra ninguna diferencia significativa entre estos dos grupos tanto en la media como en la varianza excepto en la velocidad del movimiento 4 en donde si hubo más varianza en el grupo C que en el grupo B, lo cual dejaría en entre dicho si las medias son estadísticamente diferentes, sin embargo podemos concluir que en promedio el grupo B es similar al grupo C.

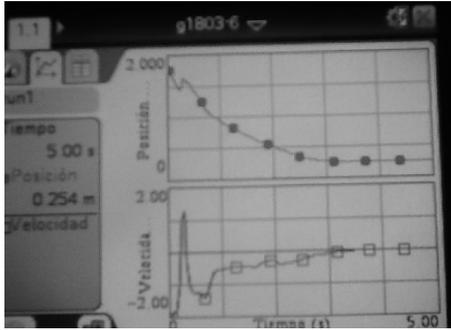
Tabla 10. Prueba de hipótesis de medias y varianza de los diferentes tipos de movimientos, la evaluación global de estos movimientos y la prueba confirmatoria.

	M1		M2		M3		M4		M5		M6		M7		M8		M9		M10		PROMEDIO	Promedio
	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	v	x	movimiento	Prueba
t	-1.0000	0.0000	-1.7854	-1.7854	-1.7854	-1.7854	-1.5443	-0.9407	0.2639	-0.1083	0.1507	0.1507	-0.2502	-0.6513	-0.4795	0.3624	-1.1172	-1.1172	-1.1172	-1.1172	0.8440	-1.2739
t	1.0000	0.0000	1.7854	1.7854	1.7854	1.7854	1.5443	0.9407	0.2639	0.1083	0.1507	0.1507	0.2502	0.6513	0.4795	0.3624	1.1172	1.1172	1.1172	1.1172	0.8440	1.2739
t tablas	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057	2.0057
Se Acepta	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho
MAX	0.0286	0.0000	0.0807	0.0807	0.0807	0.0807	0.1966	0.2218	0.2395	0.2218	0.2605	0.2605	0.2605	0.2395	0.2471	0.2632	0.2632	0.2632	0.2632	0.2632	923.8235	762.1053
MIN	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0947	0.1684	0.2218	0.2211	0.2521	0.2521	0.2571	0.2555	0.2101	0.2395	0.2319	0.2319	0.2319	0.2319	751.2500	469.2497
F	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.0756	1.3172	1.0794	1.0096	1.0334	1.0334	1.0132	1.0198	1.1399	1.0317	1.1346	1.1346	1.1346	1.1346	1.2297	1.6241
F Tablas	2.0530	2.0530	2.0530	2.0530	2.0530	2.0530	2.0530	1.6516	2.0530	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	2.0530	1.6516	1.6516	1.6516	1.6516	2.0530	1.6516
	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ha*	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho

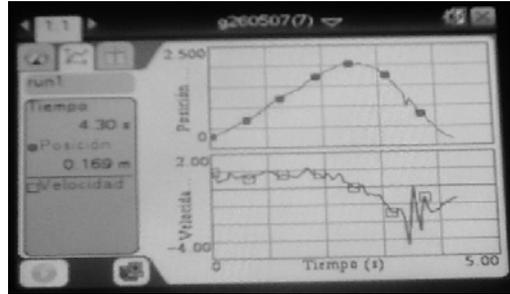
Es evidente que se necesita hacer un análisis cualitativo más profundo en donde estriba el problema en los movimientos en donde se va y se regresa desde y para el sensor, las gráficas correctas de estos movimientos se pueden observar en la figura 5. En cuanto a esto estos movimientos, haciendo un análisis más exhaustivo de lo que graficaron los estudiantes se ve que la concepción de la pendiente negativa y el decaimiento exponencial si se hace un poco diferente el movimiento no es tan claro en el estudiante. Y se deja de ver claro que el movimiento que da lugar a una parábola también representa su complejidad es decir la modelación de un movimiento que va y viene con un modelo cuadrático no están transparente para un estudiante como quisiéramos que fuera. El mayor problema se presenta cuando el movimiento es de ir y regresar por una misma línea porque en una proyección gráfica se ve como una parábola, cuando quisiéramos verla como una recta que

va y viene, quizá si la velocidad no varía podríamos pensar una recta con una pendiente positiva hacia adelante y con pendiente negativa de regreso y si se vería como una montaña perfectamente angular y con lados rectos, ahora como la velocidad cambia eso es lo que le da la forma de parábola, está problemática se trabaja más adelante con los infinitesimales dentro del curso, sin embargo se hace importante por los resultados hacer más análisis de cómo los movimientos están siendo representados en una gráfica mediante una función polinomial.

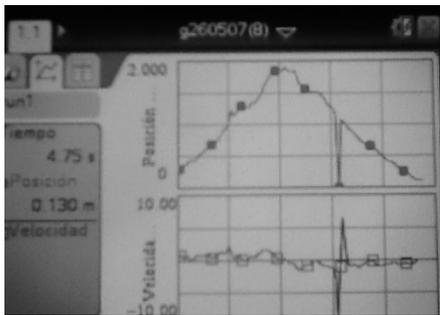
Movimiento 6



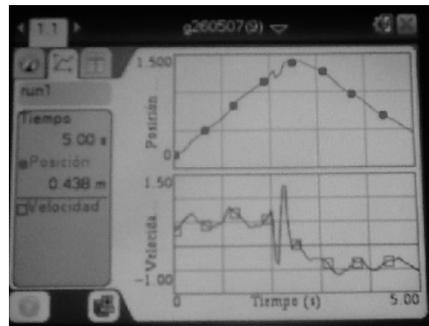
Movimiento 7



Movimiento 8



Movimiento 9



Movimiento 10

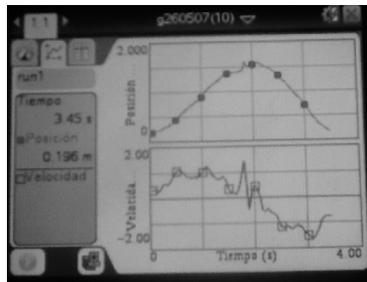


Figura 5. Movimientos problemáticos dentro de la investigación.

Para terminar daremos algunas conclusiones e ideas de futuras investigaciones que es necesario esclarecer para poder enseñar la modelación de una manera efectiva y que se logre el aprendizaje deseado.

### **Conclusiones**

Los resultados obtenidos permiten evidenciar de entrada la necesidad de depurar el instrumento de medición para futuras implementaciones del mismo de tal modo que las categorías de diseño del reactivo sean más compatibles con las etapas del proceso de modelación inicialmente definido en Rodríguez (2007, 2010a).

Existe la necesidad de modelar más profundamente los movimientos haciendo más patente la situación real y su modelación matemática como modelo polinomial. Al mismo tiempo se requiere confrontar los resultados obtenidos con la realidad. Es decir es necesario regresar constantemente a la realidad, se requiere un análisis que confronte más al alumno con la realidad.

Desde una perspectiva didáctica creemos importante el continuar con el desarrollo de la competencia de la modelación a través de la tecnología para fortalecer el aprendizaje de la aplicación de las matemáticas en contextos concretos dada la experiencia previa. La tecnología utilizada, en nuestro caso el uso de una calculadora simbólica, y un sensor permite al alumno enfocar su atención a aspectos importantes y relevantes del proceso de modelación si y no tanto a aspectos meramente algorítmicos propios de la actividad matemática.

El estudio también nos permite evidenciar que no es fácil para los alumnos el pasar de manera automática a la implementación de lo aprendido en representaciones gráficas polinomiales. Matemáticamente hablando a la cuestión de los significados propios de las operaciones entre el movimiento y su representación gráfica mediante una función polinomial, entonces será la modelación la que permitirá al alumno dar significado a los conceptos matemáticos. Finalmente, respecto al trabajo colaborativo cuando se implementa la modelación en clase, se observa la riqueza de entornos que favorecen este trabajo entre iguales.

### **Referencias**

- Beichner, R., Saul, J., Abbott, D., Morse, J., Deardorff, D., Allain, R., Bonham, S., Dancy, M., & Risley, J. (2007). The Student-Centered Activities for Large Enrollment Undergraduate Programs (SCALE-UP) project, a peer reviewed chapter of *Research-Based Reform of University Physics*, (Redish, E., and Cooney, P., eds.), College Park, MD: Am Assoc of Physics Teachers.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects – State, *trends and issues in mathematics instruction. Educational Studies in Mathematics* 22 (1), 37-68.
- Collazos, C. A. y Mendoza, J. (2006). Cómo aprovechar el "aprendizaje colaborativo" en el aula. *Educación y Educadores*, pp. 61-76.
- Dresel, M., y Haugwitz, M. (2008). A Computer-Based Approach to Fostering Motivation and Self-Regulated Learning. *The Journal of Experimental Education*, 77(1), 13-18. Recuperado en agosto, 30, 2009 de la Base de Datos Proquest.
- Ferreira, A.F. (2009). *Las innovaciones tecnológicas y su impacto en la educación*. El Cid Editores.
- Henning, H. y Keune, M. (2007). Levels of modelling competencies. En Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. y Niss, M. (Eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education*. The 14th ICMI Study, 225-232. New York: International Commission on Mathematical Instruction ICMI.

- Henry, M.(2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. En Henry, M. (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (149-159). Besançon : Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.
- Maab, K. (2006). What are modeling competencies?. *ZDM*, 38 (2). pp. 113-142.
- Niss, M., Blum,W. y Galbraith P. (2007). *Introduction. ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education*. New York: Springer, 3-32.
- NCTM (2000) National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: The Council. Recuperado el 11 de marzo del 2012 en: <http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=24600#9-12>
- Omrod, J. (2005). *Aprendizaje Humano (4ª ed.)*. Madrid: Pearson Educación, S.A.
- Organista, S. J (2010) Análisis del uso de objetos de aprendizaje en las materias de Matemáticas 1y Física 1 de bachillerato. *Revista electrónica Sinéctica*, Sin mes, 1-16. Recuperado el 16 de marzo del 2012 de: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=99815691005>
- Pape, S.y Smith, C. (2002). Self-Regulating Mathematics Skills. *Theory in Practice*, 41(2), 93-101. Recuperado en agosto, 30, 2009 de la Base de Datos Proquest Educational Journals.
- Rodríguez, R. (2007). Les équations différentielles comme outil de modélisation en Classe de Physique et des Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation en Terminale S. Tesis doctoral. *Escuela Doctoral de Matemáticas, Ciencias y Tecnologías de la Información*. Universidad Joseph Fourier, Grenoble, Francia. Recuperado el 6 de febrero de 2011 de: <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/29/22/86/PDF/TheseRuthRdz.pdf>
- Rodríguez, R. (2010a). El desarrollo de competencias de modelación en clase de matemáticas: un enfoque teórico. *XXII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME XXII)*. Guatemala, Guatemala.
- Rodríguez, R. (2010b). Diseñando un curso de Ecuaciones Diferenciales a través del Trabajo Colegiado: una experiencia docente. *XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Nuevo León.
- Rodríguez, R. (2010c). Aprendizaje y Enseñanza de la Modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (RELIME, 2010)*. 13 (4-I): 191-210. México.
- Schunk, D. (1996). Self-evaluation and Self-Regulated Learning. *Graduate School and University Center of New York*. Recuperado en septiembre, 2, 2009 de la Base de Datos Proquest
- Woods, D. M. y Chen, K. (2010). Evaluation Techniques For Cooperative Learning. *International Journal of Management and Information Systems*, 14(1), 1-5
- Zavala, G., Alarcón, H., Domínguez, A. y Rodríguez, R. (2010). Sala ACE: Aprendizaje al servicio de la Educación. *Revista Ciencia Conocimiento Tecnología*. Pp. 36-40. Gobierno de Nuevo León.