REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen XII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2024

ISSN: 2395-955X

PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN EMR PARA APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN NIVEL SUPERIOR

Paola Guadalupe Chávez Gutiérrez, Liliya Yakhno, Guadalupe Vera-Soria

paola.gcg97@gmail.com, liliya.y@academicos.udg.mx,

guadalupe.vera@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara, Jalisco, México.

Para citar este artículo:

Chávez, G. P., Yakhno, L.,Vera-Soria G. (2024). Propuesta didáctica basada en EMR para aprendizaje de la función cuadrática a nivel superior. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, XII (2), 40-51.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año XII, No. 2, julio-diciembre de 2024, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN EMR PARA APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN NIVEL SUPERIOR

Paola Guadalupe Chávez Gutiérrez, Liliya Yakhno, Guadalupe Vera-Soria

paola.gcg97@gmail.com, liliya.y@academicos.udg.mx, guadalupe.vera@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara, Jalisco, México.

Resumen

En este artículo se presentan los resultados de la implementación de una secuencia didáctica basada en Educación Matemática Realista para el aprendizaje de la función cuadrática. El experimento fue aplicado en febrero del 2024 con un grupo de estudiantes de Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. El tipo de estudio es cualitativo fenomenológico y tiene como objetivo describir el proceso de matematización que desarrollan estudiantes universitarios al modelar situaciones realistas en el marco de la función cuadrática. El uso de los niveles cognitivos propuestos por Freudenthal permitió analizar el proceso de matematización del grupo en estudio.

Palabras clave: Función cuadrática, Educación Matemática Realista, GeoGebra.

Abstract

This article presents the results of the implementation of a didactic sequence based on Realistic Mathematics Education for learning the quadratic function. The experiment was applied in February 2024 with a group of students from the Institute of Engineering and Technology of the Autonomous University of Ciudad Juárez. The type of study is qualitative phenomenological and aims to describe the mathematization process developed by university students when modeling realistic situations within the framework of the quadratic function. The use of the cognitive levels proposed by Hans Freudenthal allowed us to analyze the mathematization process of the group under study.

Keywords: Quadratic function, Realistic Mathematics Education, GeoGebra.

Introducción

Las funciones cuadráticas encuentran amplia aplicación para resolver problemas relacionados con diferentes áreas de la ingeniería. Por ejemplo, en el caso de la Ingeniería Civil, los cálculos para la construcción de puentes colgantes o canales de agua comienzan con las parábolas que los representan. Es evidente que tener bases sólidas en matemáticas, aportará a los ingenieros las herramientas necesarias para su futuro trabajo profesional. Sin embargo, los alumnos de estas carreras presentan dificultades en el aprendizaje de algunos temas matemáticos.

En un estudio realizado por Lozano et al. (2015) con 109 estudiantes de nuevo ingreso a carreras de ingeniería encontraron que 51.4% de ellos tienen problemas para articular registros gráficos y algebraicos de la función cuadrática. Por su parte, Villada (2013) comenta que el alumnado cuenta con deficiencias para interpretar el lenguaje matemático de esta noción, aunado con las "dificultades y errores respecto a la conceptualización, la simbología algebraica, la representación gráfica y las situaciones problemas" (Tovar et al., 2020, p. 130).

Endara (2021) y Villada (2013) mencionan que los alumnos no vinculan la parábola en sus diferentes formas de notación: canónica, estándar y factorizada. Además, que para construir la gráfica de la función cuadrática solamente usan tablas de valores, y no toman en consideración los parámetros de ésta.

En un caso con alumnos de Ingeniería Civil, Giraldo y Rodríguez (2009) propusieron introducir la parábola mediante problemas relacionados con su futuro trabajo, debido a que esto motiva su aprendizaje. Por esa razón es que en esta investigación se han diseñado actividades que están contextualizadas dentro de situaciones de la ingeniería, con el objetivo describir el proceso de matematización que desarrollan estudiantes de licenciatura al modelar situaciones realistas en el marco de la función cuadrática.

La meta establecida de este trabajo fue analizar la efectividad que tiene la implementación de la clase que se diseña con base en la EMR y con apoyo del software libre GeoGebra. Además, determinar el nivel cognitivo que alcanzan los estudiantes en su aprendizaje de la función cuadrática a partir de los problemas propuestos. Así como la forma en que influye el uso de las situaciones realistas para la motivación del estudiante en cuanto a su aprendizaje.

Referente Teórico

La teoría de Freudenthal llamada Educación Matemática Realista (EMR) es reconocida como una teoría global. Una de las principales ideas de la EMR es la matematización, la cual implica "traducir los problemas desde el mundo real al matemático. Matematizar es un ejercicio de generar nexos con la realidad, y es a través de esos procesos como el enfoque realista considera que ha emergido la matemática" (Gómez-Chacón & Maestre, 2008, p. 107).

Gómez-Chacón y Maestre (2008) mencionan que el proceso de matematización puede ser de dos tipos: horizontal y vertical. En la matematización horizontal se traduce el problema del mundo real a un modelo matemático y se conectan los lenguajes natural, simbólico y formal. Y en la matematización vertical el aprendizaje del alumno se traslada a lo largo del mundo simbólico.

Otra idea importante de la EMR, según Bressan et al. (2005) es que el desarrollo del aprendizaje matemático pasa por cuatro niveles de comprensión: situacional, referencial, general y formal. "La evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente" (Bressan et al., 2016, p. 7). En la teoría de Freudenthal los niveles se determinan de la siguiente forma:

- En el **nivel situacional** se utiliza la intuición a partir de la experiencia previa y el conocimiento formado es informal.
- En el **nivel referencial** se utilizan descripciones, materiales y modelos gráficos para explicar situaciones particulares.
- En el **nivel general** se extienden los conocimientos recibidos en el nivel anterior. En el aprendizaje de los alumnos aparecen conceptos generalizados, y los mismos estudiantes ya pueden concluir que estas competencias pueden ser aplicadas en los problemas homólogos.
- Y en el **nivel formal** se logra un conocimiento formal en procedimientos y notaciones.

Además, la elaboración de actividades didácticas basadas en teoría EMR involucra seis principios: actividad, realidad, reinvención, niveles, interacción e interconexión.

Metodología

Participantes.

La investigación se realizó con los 30 alumnos del Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez en la clase de Cálculo I. El programa de las carreras de ingeniería incluye el tema de la función cuadrática en la primera unidad temática de la materia. El grupo en estudio fue formado con estudiantes de las careras de ingeniería industrial, civil, sistemas digitales y computacionales, eléctrica, aeronáutica, mecatrónica y mecánica. Los participantes fueron divididos en siete equipos de cuatro a cinco integrantes cada uno.

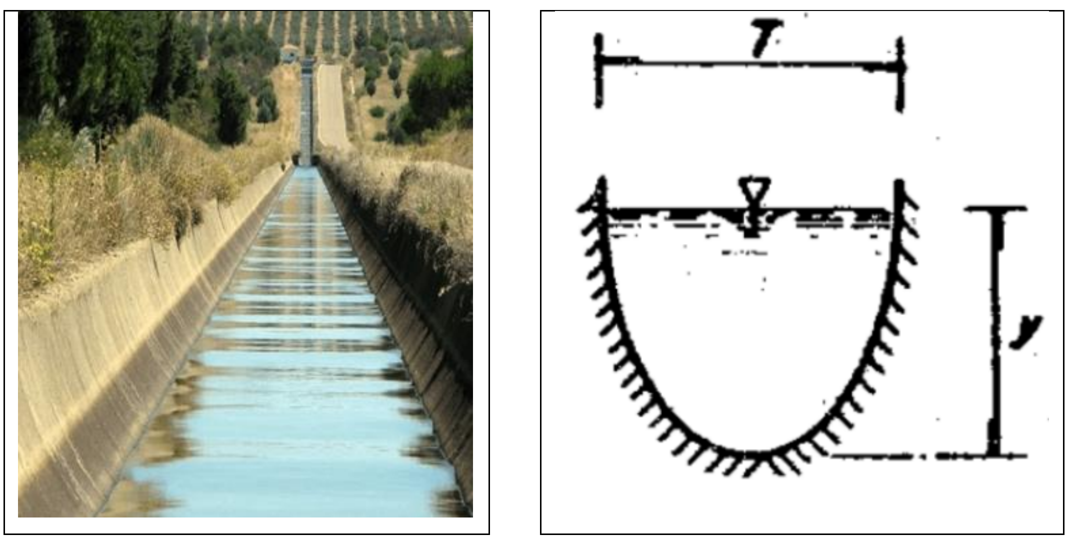
Técnica e Instrumentos.

Para realizar la investigación, se analizaron los antecedentes del tema y se elaboraron tres actividades: las dos primeras se desarrollaron en equipo en el salón de clases y la tercera fue individual y de tarea para trabajar en casa.

La primera actividad está relacionada con un canal hidráulico abierto con una sección transversal de forma parabólica (Figura 1). Esta actividad está enfocada en el aprendizaje de la influencia de los parámetros de la función cuadrática en la apertura de parábola, su concavidad y el desplazamiento vertical de la gráfica.

Figura 1

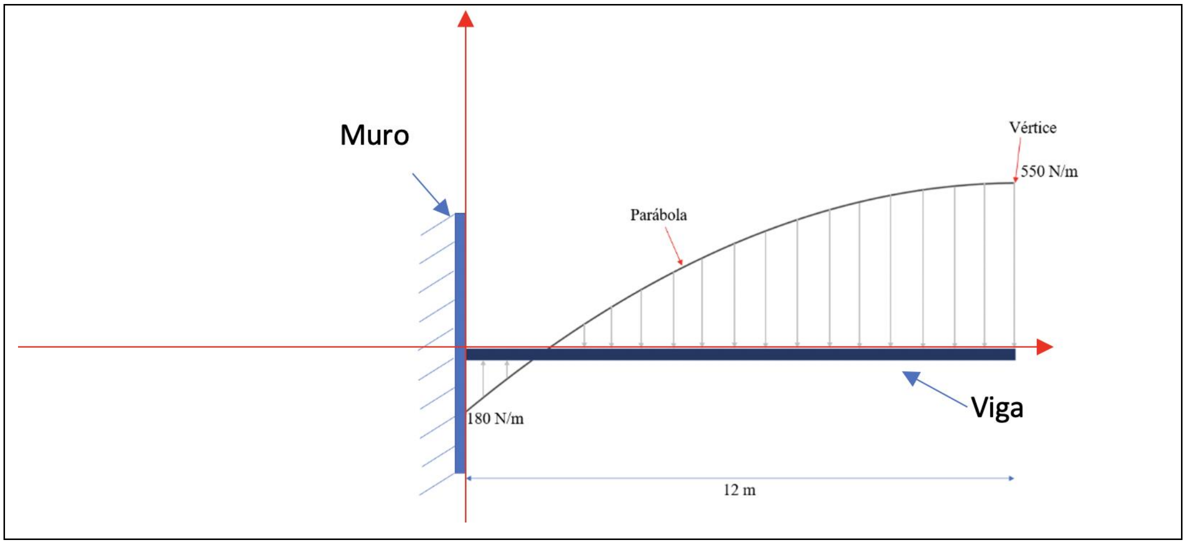
Canal hidráulico con sección transversal parabólica



En la segunda actividad se aborda una situación relacionada con una carga parabólica que recibe una viga en voladizo o cantiléver (Figura 2). En la ingeniería civil, el ejemplo más sencillo de esta aplicación es un balcón. Esta actividad está enfocada en el efecto de parámetros de la parábola para los desplazamientos horizontales y verticales.

Figura 2

Viga en voladizo con una carga parabólica



Y la tercera actividad está relacionada con el puente colgante Juscelino Kubitschek, en Brasilia (Figura 3). A partir de las características dadas, el estudiante debe proponer la función que describa a cada uno de estos arcos, escribiendo las funciones en sus formas canónica y estándar.

Figura 3

Puente Juscelino Kubitschel en Brasilia

En esta investigación de corte cualitativo y fenomenológico, se recolectaron los datos a través de hojas de trabajo, la grabación de video y anotaciones del investigador durante la clase.

Las preguntas abiertas en hojas de trabajo guiaron la reflexión de los estudiantes y sus respuestas a dichas preguntas permitieron conocer el nivel de comprensión logrado al modelar situaciones realistas en el marco de la función cuadrática.

Procedimiento.

En la primera actividad el proceso de modelización empieza con una situación realista, la cual se interpreta con un modelo matemático (parábola) y, haciendo análisis de este modelo, el alumno genera las conclusiones matemáticas las cuales se interpretan en predicciones que se trasladan nuevamente al mundo real, pero en nivel más alto que el inicial.

De acuerdo con el principio de reinvención de la EMR, durante esta actividad los alumnos debían utilizar la intuición para relacionar el canal hidráulico con su modelo matemático representado por una parábola. En los primeros ejercicios, la función cuadrática se introdujo en la forma incompleta $f(x) = ax^2$. Con ayuda del software GeoGebra los alumnos construyeron las gráficas para diferentes valores del parámetro a, y comparando éstas entre sí buscaron las regularidades, discutieron y analizaron las modificaciones que el parámetro generaba en la parábola. Los resultados de las discusiones grupales y en equipo se anotaron en las hojas de trabajo, y en las respuestas a las preguntas abiertas fue posible observar el desarrollo del proceso de matematización de los estudiantes. Después, la actividad pide proponer tres valores positivos y tres valores negativos del parámetro a para diferentes aperturas de las parábolas; y al final generalizar las predicciones e indicar los intervalos de valores de este parámetro para los cuales las gráficas se contraen o se expanden. Además, para diferentes valores del coeficiente a los alumnos comparan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las parábolas, su tipo de concavidad y las coordenadas del vértice. Es decir, de acuerdo con el principio de reinvención de teoría de la EMR, las preguntas abiertas guían a los alumnos para reinventar las matemáticas.

Análogamente se agrega el parámetro k de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + k$ para que los estudiantes exploren la influencia de este parámetro en las gráficas de las funciones propuestas, hagan sus predicciones y propongan las reglas para obtener los desplazamientos verticales de la parábola. Finalmente, la actividad concluye pidiendo a los alumnos que establezcan cuál es la función que satisface las características del canal hidráulico de la situación problemática en estudio.

El objetivo de la actividad dos es que los alumnos identifiquen los desplazamientos horizontales y verticales de la gráfica de la función $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Para esta actividad los estudiantes comienzan revisando cómo el parámetro h afecta gráfica de la función y haciendo deducciones sobre su efecto en la parábola. Así mismo establecen los intervalos de valores de h para los cuales el desplazamiento de la gráfica es a la derecha o a la izquierda del origen. De forma semejante a los ejercicios de la actividad uno, los estudiantes analizan la influencia del parámetro k de la función sobre los desplazamientos verticales de su gráfica. Y para concretar la actividad se solicita a los alumnos que determinen la función relacionada con una carga parabólica que recibe una viga en voladizo, para la cual el eje de las abscisas se ubica en la viga, mientras que el eje de las ordenadas se ubica sobre el muro, de acuerdo con un objeto de construcción en la ingeniería civil.

La tercera actividad está enfocada en la aplicación práctica de los conocimientos construidos por los alumnos al resolver las actividades 1 y 2. En el problema se explica que los cables del puente colgante propuesto se soportan por tres arcos de forma parabólica. Se plantea que las dimensiones de los arcos son iguales entre sí, además que cada arco tiene altura de 60 metros y separación de sus vértices es 240 metros. Se solicita a los estudiantes escribir las formas canónicas y estándar que corresponden a las funciones cuadráticas que describen a cada uno de los arcos cuando la posición del eje de abscisas coincide con el nivel de agua y el vértice del segundo arco está en eje de ordenadas. Luego se pide realizar una síntesis de los parámetros de estas funciones, dibujarlas y describir las similitudes y diferencias entre sus parábolas. Además, es necesario indicar las coordenadas de sus vértices, intervalos de crecimiento y decrecimiento y concavidad.

Por otra parte, para analizar el proceso de matematización de los estudiantes se utilizan siguientes criterios de clasificación de los niveles de comprensión:

1) **Nivel situacional.** Los alumnos utilizan la intuición para identificar una parábola en los objetos de la vida cotidiana.
2) **Nivel referencial.** Los alumnos grafican, comparan y analizan las parábolas de las funciones cuadráticas con diferentes coeficientes propuestos por el docente.
3) **Nivel general.** Los alumnos indican cuáles son los coeficientes correspondientes a las funciones cuyas gráficas satisfacen las características propuestas en la actividad.
4) **Nivel formal.** Los alumnos proponen las funciones cuadráticas que definen las parábolas, a partir de información obtenida de situaciones realistas.

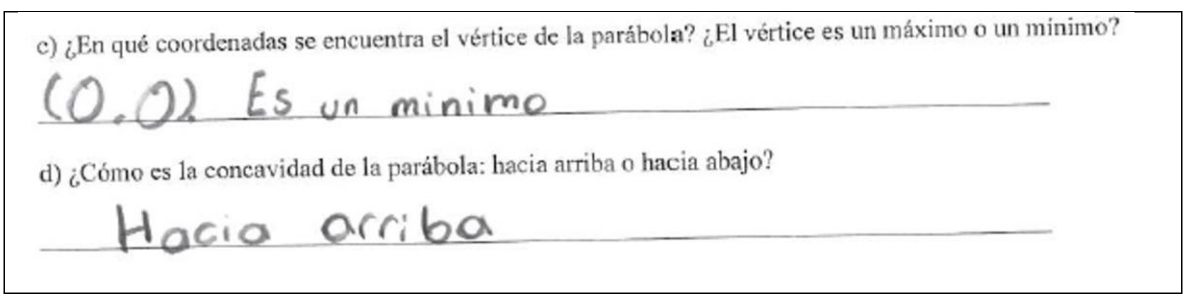
Resultados

El análisis de la implementación de la secuencia didáctica permitió describir el proceso de matematización de los estudiantes de ingeniería al transitar por los niveles cognitivos hasta llegar a la formalización de su conocimiento y su aplicación posterior en la resolución de problemas realistas. A continuación, se presentan los resultados de los distintos niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes durante el desarrollo de las actividades de la secuencia.

En la Figura 4 se presenta una de las respuestas codificada como nivel situacional, debido a que los alumnos utilizaron el sentido común y experiencia de la vida cotidiana para dar respuesta a las preguntas que se plantearon en la actividad 1.

Figura 4

Respuesta de nivel situacional en la Actividad 1


c) ¿En qué coordenadas se encuentra el vértice de la parábola? ¿El vértice es un máximo o un mínimo?

(0,0) Es un minimo

d) ¿Cómo es la concavidad de la parábola: hacia arriba o hacia abajo?

Hacia arriba

En cuanto a las respuestas de los estudiantes registradas en un nivel referencial, las Figuras 5 y 6 muestran que los alumnos graficaron las funciones $f_1(x) = x^2, f_2(x) = 3x^2,\ f_3(x) = \frac{1}{3}x^2,\ f_{13}\ (x) = -(x+2)^2 + 1$ y $f_{14}\ (x) = (x+2)^2 - 3$, compararon y analizaron sus parámetros, buscaron las regularidades, discutieron y establecieron las modificaciones que éstos generaban.

Figura 5

Respuesta de nivel referencial en la Actividad 1

2.- Compara la forma de las gráficas de las funciones f_1, f_2 y f_3, ¿qué diferencias observas entre la gráfica f_2 con respecto a f_1? y, ¿entre la gráfica de f_3 con respecto a f_1? La forma es la misma (parabola), entre F1 y F2 es que F2 su parabola se contrae o diferencia de F1, y F3 su parabola es mas "extensa" que F1

Figura 6

Respuesta de nivel referencial en la Actividad 2

4.- Observa las gráficas de las funciones f_{13} y f_{14}, compáralas con la función f_1, ¿cómo se desplazan las gráficas de f_{13} y f_{14} en comparación con la gráfica de f_1?
La f_{13} se desplazo dos unidades hacia la izquierda y 1 hacia arriba respecto a f_1
f_{14} se desplazo 2 hacia la izquierda y 3 hacia abajo respecto a f_1

En cuanto a las respuestas clasificadas en el nivel general, las Figuras 7 y 8 muestran que los estudiantes propusieron los coeficientes de las funciones cuyas gráficas satisfacen características de las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2$ o $f(x) = a(x-h)^2 + k$ propuestas, por lo que generalizaron sus conocimientos e hicieron predicciones sobre influencia de los parámetros a y k de la función en sus conclusiones.

Figura 7.

Respuesta de nivel general en la Actividad 1

8.- Indica los intervalos de valores (positivos y negativos) de "a" para la función $f(x) = ax^2$ para los cuales la gráfica se expande. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

9.- Indica los intervalos de valores (positivos y negativos) de "a" para la función $f(x) = ax^2$ para los cuales la gráfica se contrae. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Figura 8

Respuesta de nivel general en la Actividad 2

10.- Para la función $g(x) = a(x-h)^2 + k$, menciona cinco valores de h para los cuales la parábola (**observa que en la función $g(x)$, h tiene signo negativo**):

Se desplazaría hacia la izquierda	-1	-2	-3	-4	-5
Se desplazaría hacia la derecha	1	2	3	4	5

11.- Para la función $g(x) = a(x-h)^2 + k$ indica el intervalo de valores de "h" para los cuales la gráfica se desplaza (recuerda que el valor de h en la función $g(x)$ es negativo):

- Hacia la izquierda. $(-\infty, 0)$
- Hacia la derecha. $(0, \infty)$

Y finalmente, en las respuestas clasificadas como nivel formal de comprensión los alumnos propusieron las funciones cuadráticas que definen las parábolas, a partir de información obtenida de situaciones realistas, además de utilizar notaciones formales, como se presenta en las evidencias que se muestran en las figuras 9, 10 y 11.

Figura 9

Respuesta de nivel formal en la Actividad 1

Partiendo de las conclusiones anteriores, se propone el siguiente problema relacionado con un canal hidráulico. Léelo y responde las preguntas propuestas.

a) Si un canal hidráulico tiene 4 metros de profundidad y tiene una forma parabólica, ¿cuáles deben ser los coeficientes de la función cuadrática si el eje de las abscisas coincide con el nivel del agua y el eje de las ordenadas coincide con la línea de simetría del canal? Escribe la nueva función que satisface estas características, considera la unidad de medida en metros.

$n(x) =$ $x^2 - 4$

b) ¿En qué coordenada se encuentra el punto más bajo del canal? $(0, -4)$

c) Supongamos que se quiere expandir el canal haciéndolo el espejo de agua más ancho con el propósito aumentar su capacidad de agua, ¿cómo podría ser la nueva función que describe al canal?

$o(x) =$ $1/4\, x^2 - 4$

d) ¿En qué coordenada se encuentra el punto más bajo del canal? $(0, -4)$

e) Comparar coordenadas de los vértices de las funciones $n(x)$ y $o(x)$ ¿Tuvieron algún cambio? ¿Por qué?

NO, porque es la misma profundidad.

f) Si se quisiera disminuir el ancho del espejo de agua del canal con el propósito disminuir su capacidad de agua, ¿cómo podría ser la nueva función que describe al canal?

$p(x) =$ $3x^2 - 4$

Respondiendo a preguntas auxiliares en la actividad 2, los alumnos escribieron la función cuadrática que describe una carga parabólica que recibe una viga en voladizo o cantiléver y vincularon la parábola en sus formas canónica y estándar (Figura 10).

Figura 10

Respuesta de nivel formal en la Actividad 2

14.- Completa la siguiente tabla a partir de la función $m(x)$ en su forma canónica:

$m(x)$	Coeficiente a	Parámetro h	Parámetro k	Coordenadas de vértice
$F(x) = -\frac{365}{72}(x-12)^2 + 550$	$-\frac{365}{72}$	12	550	(12, 550)

15.- ¿Observas alguna similitud de la coordenada del vértice con respecto a los parámetros h y k de la función $m(x)$?

Son los valores que definen el vértice

Cuando se desarrolla el binomio al cuadrado y se simplifica los términos semejantes, la función queda de la forma $g(x) = ax^2 + bx + c$ denominada como *forma estándar*.

16.- Escribe la función $m(x)$ en su forma estándar y completa la tabla mostrada a continuación.

$ax^2 + bx + c$	Coeficiente a	Coeficiente b	Coeficiente c
$F(x) =$ $-\frac{365}{72}x^2 + \frac{365}{3}x - 180$	$-\frac{365}{72}$	$\frac{365}{3}$	-180

$$-\frac{365}{72}(x-12)(x-12) + 550$$

$$x^2 - 12x - 12x + 144$$

$$-\frac{365}{72}(x^2 - 24x + 144) + 550$$

$$-\frac{365}{72}x^2 + \frac{365}{3}x - 730 + 550$$

$$-\frac{365}{72}x^2 + \frac{365}{3}x - 180$$

Para la actividad 3, los alumnos también relacionaron las parábolas que describen los arcos en las formas canónica y estándar por medio de un razonamiento formal debido a que utilizaron sus conocimientos para contestar las actividades con información obtenida de la situación realista, además de usar lenguaje matemático en sus respuestas (Figura 11).

Figura 11

Respuesta de nivel formal en la Actividad 3

	Forma canónica	Forma estándar
Arco 1: $f_1(x)$	$-\frac{x^2}{240}+60$	$-\frac{x^2}{240}+60$
Arco 2: $f_2(x)$	$-\frac{(x+240)^2}{240}+60$	$\frac{-x^2}{240}-2x-180$
Arco 3: $f_3(x)$	$-\frac{(x-240)^2}{240}+60$	$\frac{-x^2}{240}+2x-180$

3.- En síntesis, a partir de la función $f(x) = -\frac{x^2}{240}$, describe cómo cambia la gráfica de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ al modificar los valores de los parámetros en la forma canónica, sabiendo que los tres arcos tienen las mismas dimensiones.

el vertice se mueve a la izquierda o a la derecha

4.- Dibujas las tres parábolas de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ en el siguiente espacio y contesta las preguntas que se plantean a continuación.

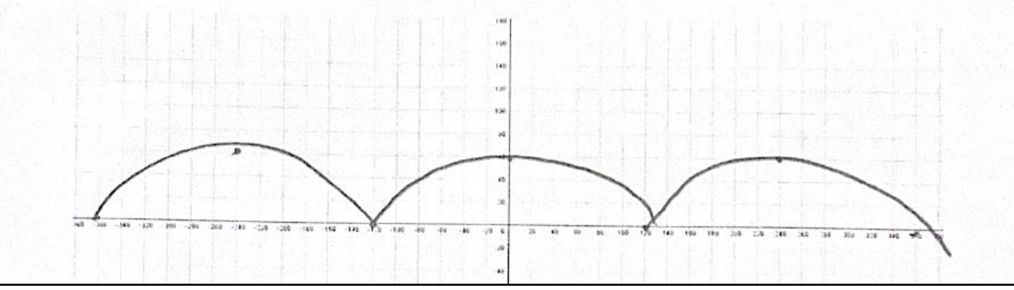


Figura 14

Ajuste de funciones y ecuaciones paramétricas

Nuestras ecuaciones

$$x = 0.21 + 9.73\,\text{Sen}(1.88t + 2.01)$$

$$x - 0.21 = 9.73\,\text{Sen}(1.88t + 2.01)$$

$$\text{Sen}(\overset{\alpha}{1.88t} + \overset{\beta}{2.01}) = \text{Sen}(1.88t)\text{Cos}(2.01) + \text{Sen}(2.01)\text{Cos}(1.88t)$$

$$= \underset{A}{-.4252}\,\text{Sen}(1.88t) + \underset{B}{.9050}\,\text{Cos}(1.88t)$$

$$\text{arctg}\left(\frac{.9050}{-.4252}\right) = -1.1315$$

$$= \sqrt{(-.4252)^2 + (.9050)^2}\;\text{Sen}(1.88t - 1.1315)$$

$$= 0.9999\,\text{Sen}(1.88t - 1.1315)$$

$$= 0.9999\,\text{Cos}(1.88t - 1.1315 - 1.570)$$

$$\boxed{= 0.9999\,\text{Cos}(1.88t - 2.7015)}$$

Conclusiones

El objetivo del estudio fue describir el proceso de matematización que estudiantes de licenciatura desarrollan al modelar situaciones realistas en el marco de la función cuadrática. Al respecto, en este trabajo se presentaron resultados y evidencias de cómo se realizó dicho proceso.

77% de los estudiantes que participaron en la investigación alcanzaron un nivel formal de aprendizaje y el 23% llegó al nivel general.

Mediante la implementación de la secuencia didáctica desarrollada, los estudiantes construyeron las parábolas de las funciones cuadráticas propuestas en las actividades, analizaron los valores de sus parámetros y su efecto en las modificaciones de las gráficas, buscaron regularidades y comprendieron el comportamiento de la parábola producido por los coeficientes de la misma. Después, aplicaron las reglas elaboradas anteriormente y fueron capaces de proponer algunos valores de parámetros de tal manera que las gráficas satisfacían las características definidas en el problema. Y organizando matemáticamente sus conocimientos, los estudiantes completaron intervalos para cada uno de los parámetros de tal manera que se cumplieran las características de la~~s~~ gráficas indicadas.

La implementación de las actividades ofreció a los alumnos la oportunidad de reinventar matemáticas de acuerdo con enfoque de EMR. Las preguntas auxiliares ayudaron a los alumnos a desarrollar la matematización vertical y, a su vez, el nuevo conocimiento les permitió generar predicciones y trasladarlas a una situación realista promoviendo la matematización horizontal, la cual se pudo verificar a partir de los resultados presentados en el apartado anterior. El uso del enfoque de EMR en el diseño de las actividades permitió un razonamiento profundo y un aprendizaje formal en los estudiantes en tema de función cuadrática.

Este modelo de la EMR benefició al aprendizaje de los alumnos al hacerlo más atractivo por medio de situaciones imaginables para ellos, motivándolos a construir su aprendizaje por medio de la creación de modelos matemáticos a través de sus propias ideas desarrolladas durante las actividades. Así mismo, el trabajo en equipo ayudó al desarrollo del proceso de matematización a través del diálogo, la discusión y la argumentación de las soluciones de problemas.

Finalmente, el uso de Applets de GeoGebra facilitó el proceso de construcción de parábolas debido a que este software cuenta con diversas herramientas que permiten la interactuar con las funciones. Con esta Applet, los alumnos pudieron analizar y comparar los desplazamientos y comportamientos que tienen las parábolas al modificar el valor de los coeficientes de las funciones que se propusieron en las actividades. Además, facilitó la identificación de los elementos de la función como el vértice de la parábola. Por lo tanto, este tipo de herramientas favorecen al aprendizaje de los alumnos al hacer más sencillo el análisis al poder manipular el programa de acuerdo a la conveniencia de cada alumno.

Referencias bibliográficas

Bressan, A., Zolkower, B., y Gallego, M. F. (2005). Los principios de la educación matemática realista. En O. Kulesz, (Ed.), *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (1ª ed., pp. 69-98) Libros del Zorzal.

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). Educación matemática realista bases teóricas. *Educación*, *63*, 1-11.

Endara, E. F. (2021). *Las estrategias metodológicas y funciones cuadráticas.* [Tesis de maestría, Universidad Técnica de Ambato]. https://repositorio.uta.edu.ec/jspui/handle/123456789/32862

Giraldo, S., & Rodríguez, F. (2009). Propuesta didáctica para la enseñanza de la parábola en Ingeniería Civil. *Inventum, 4*(7), 30-37. https://doi.org/10.26620/uniminuto.inventum.4.7.2009.30-37

Gómez-Chacón, I., & Maestre, N. (2008). Matemáticas y Modelización. Ejemplificación para la enseñanza obligatoria. *Experiencias de aula y experiencias didácticas, 17*(1), 107-121.

Lozano, M. E. D., Haye, E. E., Montenegro, F., y Córdoba, L. M. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *11*(41), 20-38.

Tovar, T., Pitalua, L.F., & Sarmiento, M. (2020) Khan Academy como recurso didáctico para enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Miradas y perspectivas de la educación matemática: desde la formación, la inclusión y la tecnología* (pp. 128-145). Sello Editorial Coruniamericana. https://www.researchgate.net/publication/363207965_ALGUNAS_REFLEXIONES_SOBRE_EDUCACION_MATEMATICA_INCLUSIVA#page=128

Villada, A. P. (2013). *Diseño e implementación de curso virtual como herramienta didáctica para la enseñanza de las funciones cuadráticas para el grado noveno en la institución educativa Gabriel García Márquez utilizando Moodle* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UNAL.