REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen XII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2024

ISSN: 2395-955X

PRÁCTICAS DE MODELACIÓN CON TRACKER Y GEOGEBRA CON SITUACIONES COTIDIANAS, PARA EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES PARAMETRICAS

Maritza Elizabeth López Alcalá

CBTIS 10. SEP. CUCEI, Universidad de Guadalajara

maritza.lalcala@academicos.udg.mx

Rafael Pantoja Rangel

CUCEI, Universidad de Guadalajara

rafael.prangel@academicos.udg.mx

Para citar este artículo:

Alcalá, M. E., Pantoja, R. (2024). Prácticas de modelación con Tracker y GeoGebra con situaciones cotidianas, para el estudio de las ecuaciones paramétricas. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, XII (2), 1-25.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año XII, No. 2, julio-diciembre de 2024, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

PRÁCTICAS DE MODELACIÓN CON TRACKER Y GEOGEBRA CON SITUACIONES COTIDIANAS, PARA EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES PARAMETRICAS

Maritza Elizabeth López Alcalá
CBTIS 10. SEP. CUCEI, Universidad de Guadalajara
maritza.lalcala@academicos.udg.mx

Rafael Pantoja Rangel
CUCEI, Universidad de Guadalajara
rafael.prangel@academicos.udg.mx

Resumen

El artículo se centra en la aplicación de prácticas integradas en una secuencia didáctica, cuyo propósito es que los alumnos aprendan a modelar las ecuaciones paramétricas del movimiento de tres juguetes (tren, caballo y un gato chino) y comprender el concepto de parámetro. El marco teórico para el estudio fue la Teoría de las representaciones Semióticas de Duval y la metodología ACODESA, con el empleo del trabajo matemático individual, colaborativo y las Tecnologías de la Información y Comunicación. Los alumnos emplean el video, el Tracker y el GeoGebra para generar los registros visual numérico, gráfico, analítico, verbal y escrito. Con base a los datos recabados de las prácticas, la encuesta, la entrevista y la evidencia digital obtenida de la observación directa, se afirma que los alumnos logran obtener las ecuaciones paramétricas e identificaron al tiempo como parámetro, además de representar e interpretar el movimiento del objeto en las diversas formas exploradas: gráfica, numérica y analítica.

Palabras clave: Parámetro, Ecuaciones paramétricas, Video, Tracker, GeoGebra

Abstract

The article focuses on the application of practices integrated in a didactic sequence, whose purpose is for students to learn to model the parametric equations of the movement of three toys (train, horse and a chinese cat) and to understand the concept of parameter. The theoretical framework for the study was Duval's Theory of Semiotic Representations and the ACODESA methodology, with the use of individual and collaborative mathematical work and Information and Communication Technologies. Students use video, Tracker and GeoGebra to generate visual, numerical, graphic, analytical, verbal and written records. Based on the data collected from the practices, the survey, the interview and the digital evidence obtained from direct observation, it is stated that the students managed to obtain the parametric equations and identified time as a parameter, in addition to representing and interpreting the movement of the object in the various forms explored: graphic, numerical and analytical.

Keywords: Parameter, Parametric equations, Video, Tracker, GeoGebra

Introducción

Las ecuaciones paramétricas es un tema que se trata de una manera muy superficial en los libros de texto y por consiguiente en el aula, por ejemplo, en el libro de Geometría Analítica de Lehmann (1989) se describe la interpretación de las ecuaciones paramétricas para la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, con un par de ecuaciones expresada en función de la variable angular t a saber, $x(t) = cos(t)$ y $y(t) = sen(t)$, obtenidas con el triángulo rectángulo inscrito y el Teorema de Pitágoras. En el texto se señala que no existe un método para elegir el parámetro y para deducir las ecuaciones paramétricas, pero generalmente se toma la representación paramétrica más sencilla o aquella que sea más útil y conveniente para los propósitos de la investigación.

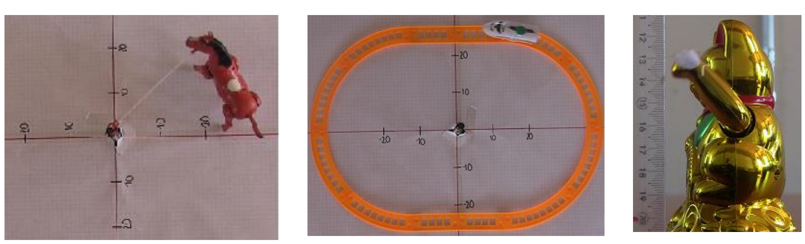
Así en general, si $F(x, y) = 0$ es la ecuación rectangular de la curva plana C, y cada una de las variables x y y, son función de una tercera variable t, $x = x(t)$ y $y = y(t)$ entonces, si para cualquier valor permisible de la variable independiente t, las ecuaciones determinan un par de valores reales de $x = x(t)$ y $y = y(t)$ se llaman ecuaciones paramétricas de la curva C. No es claro pues, cómo se determina el parámetro para representar la curva C como un par de ecuaciones paramétricas. Una de las representaciones paramétricas ancestrales es la que desarrolló Galileo (1638) y que denominó descomposición del movimiento de un objeto esférico rodando por un riel sin fricción y lanzado en caída libre al abandonar el riel, debido a la aceleración de la gravedad. Galileo describe que el movimiento del objeto tiene una componente horizontal $x(t) = a_1 t + b_1$ y una componente vertical $y(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2$, que son las ecuaciones paramétricas del tiro parabólico o caída libre.

Otro ejemplo ancestral de curvas parametrizadas es la cicloide, una curva cuya trayectoria se describe con el movimiento de un punto $\mathrm{P(x, y)}$ sobre la circunferencia, que se mueve cuando una rueda que gira sobre su eje sin resbalar, en la que se toma como parámetro el ángulo de giro de la circunferencia (Lehmman, 1989, pp 272-274). Otros tipos de curvas a los que se recurre para ejemplificar la parametrización de curvas planas, son: la elipse, la parábola, la hipocicloide, la astroide y la involuta de la circunferencia, entre tantas otras.

Las actividades se realizaron en un taller en el que se emplearon situaciones problema (Hitt y González-Martín, 2015) de la vida cotidiana de objetos en movimiento, en este caso tres juguetes (tren, caballo y un gato chino) (Figura 1), que son grabadas en video digital (Jofrey, 2010; Ezquerra et al., 2011) y trabajados con los softwares Tracker (2024) y GeoGebra (2024). El propósito del taller fue que los alumnos, primero, se den cuenta de la relación que existe entre la modelación matemática de una situación problema y la matemática escolar (Arrieta y Díaz, 2015, Pantoja et al., 2016), y segundo, que determinen las ecuaciones paramétricas ***f(t)= (x(t), y(t))*** de los tres juguetes y comprendan que el tiempo es el parámetro de referencia posicional.

Figura 1

Juguetes: Caballo, Tren y Gato chino



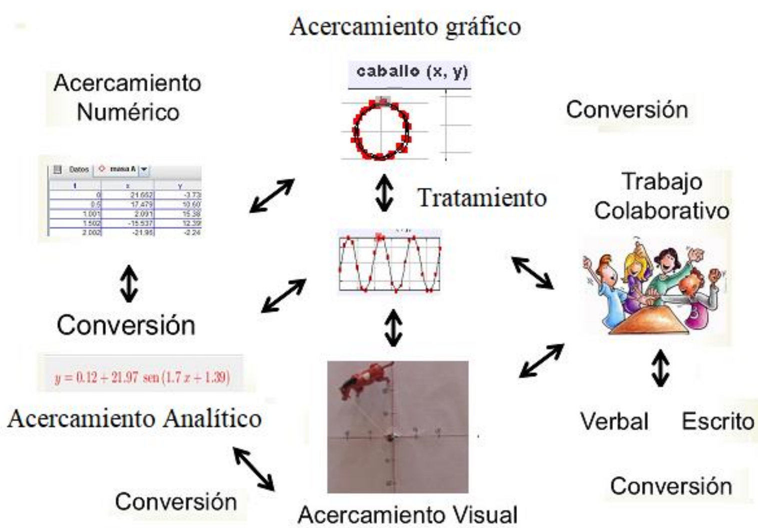
a b c

Referencia Teórica

La propuesta consideró la Teoría de los registros de representaciones semióticas de Raymond Duval (Duval, 2004) como sustento del estudio, porque de manera *"natural"*, a partir del análisis de video con el software Tracker, se presenta al alumno en pantalla, los registros semióticos verbal, pictórico, escrito, gráfico, numérico y analítico relacionados con la situación problema. De acuerdo a los resultados de la fase experimental, el alumno logró transitar entre un mismo registro (Tratamiento) y entre dos registros (conversión), con la finalidad de lograr un aprendizaje significativo al responder la secuencia didáctica planeada para el taller (Figura 2). Bajo esta perspectiva, la teoría de las representaciones semióticas proporciona una herramienta útil, para entender los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático de los alumnos y lograr la noesis a partir de la semiosis.

Figura 2

Representaciones semióticas del movimiento del tren de juguete



Metodología

a. Se integran los equipos y a partir de un video, ya sea previamente grabado o que se filme en ese momento, alumnos y profesor manipulan el software Tracker y el GeoGebra.

b. En esta parte, cada grupo colaborativo selecciona una situación problema, diseña el set de grabación, graba el video y lo procesa con el Tracker. Los alumnos relacionan la situación problema con lo mostrado en pantalla por el software Tracker, que consiste en una tabla de datos, tres gráficas (x vs. t, y vs. t, y vs. x) y en su caso, un ajuste a las funciones. Se aclara que la rutina de ajuste de funciones de Tracker es limitada y se sugiere exportar los datos a GeoGebra para lograr una mejor aproximación a la trayectoria.

c. En la última fase cada uno de los equipos presenta y discute ante el grupo su reporte.

Resultados

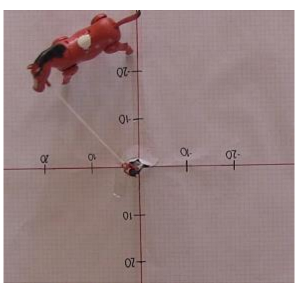
En este apartado, en primer lugar, se presenta un resumen de la secuencia didáctica que se empleó en el taller y, en segundo lugar, se describen algunos de los resultados de mayor relevancia obtenidos por los alumnos.

Secuencia didáctica

1. **Identificación de la secuencia didáctica.**
   - Nivel educativo: medio superior y superior.
   - Tipo: Curso Taller.
   - Palabras clave: Ecuación paramétrica, Situación problema, Tracker, Video, GeoGebra.
   - Asignatura: Cálculo integral
   - Tema: Ecuaciones Paramétricas
   - Conocimientos previos: Funciones sinusoidales, Polinomios, Tiempo, Distancia, Velocidad.
   - Duración: 4 horas
2. **Problema significativo del contexto:** Encontrar las ecuaciones paramétricas del movimiento del caballo, video que se te ha proporcionado en el archivo caballo 1. mp4 y cuya imagen se muestra en la figura 3.

Figura 3

Situación problema: Caballo como motor de la molienda de agave




- Analizar el video con el software Tracker para obtener los datos y las gráficas relacionadas con la situación problema.
- Ajustar los datos obtenidos de la periferia del recipiente, con las rutinas de ajuste de funciones del Tracker o de GeoGebra.
- Elaborar un reporte de la actividad.

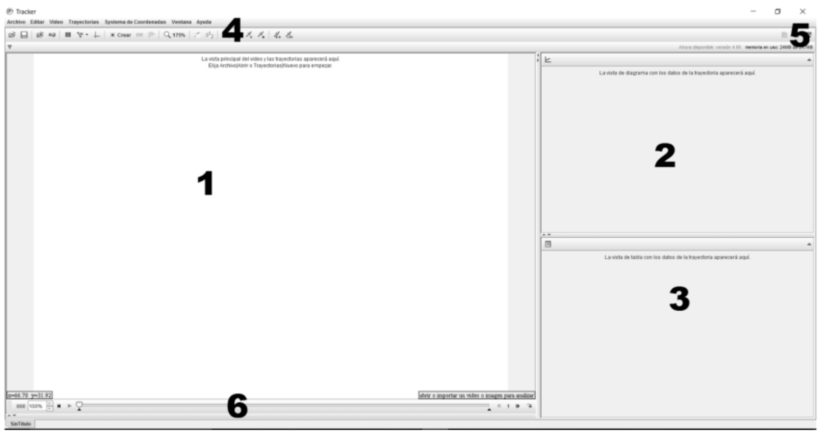
3. **Objetivos**
   - Comprender el concepto de parámetro.
   - Determinar la ecuación paramétrica de la situación problema.
   - Motivar la enseñanza y aprendizaje de ecuaciones paramétricas a partir de situaciones problema de la vida diaria.

4. **Metas**
   - Analizar la videograbación de objetos en movimiento para el ajuste de las ecuaciones paramétricas con el Tracker y GeoGebra.
   - Elaborar el reporte de la actividad.
5. **Saber conocer**
   - Identidades trigonométricas, propiedades de los ángulos para seno y coseno, trazar el bosquejo de gráficas de funciones, ajuste de funciones, gráficas de datos y manipulación de la hoja de cálculo.
6. **Saber hacer**
   - Modelación de situaciones problema y relacionarlo con la matemática escolar.
7. **Saber ser**
   - Trabajar en equipo colaborativo para propiciar el aprendizaje de las ecuaciones paramétricas: puntualidad, participación, honestidad, respeto, entre otros valores.
   - Expone y elabora reportes por escrito de la actividad para presentarlo, discutirlo y defenderlo en la exposición grupal.
8. **Recursos**
   - Hoja de trabajo, computadora, Tracker, GeoGebra, Videos digitales de las situaciones problema, objetos de la vida cotidiana (caballo, tren y gato chino).
9. **Actividades con el docente**
   - Análisis de saberes previos, integración de los grupos colaborativos, selección de la situación problema y diseño de curso-taller.
10. **Actividades para el aprendizaje autónomo**
    - Diseño del set de grabación de la situación problema seleccionada para grabar el video del objeto.
    - Manipulación del video con Tracker para el análisis de las gráficas y datos arrojados por el Tracker.
    - Exportación y manipulación de datos obtenidos de Tracker para su tratamiento con GeoGebra y obtener las funciones ajustadas.
    - Discusión en grupo colaborativo de los resultados obtenidos del análisis del video de la situación problema.
    - Elaboración del reporte escrito de la actividad.
    - Presentación de los resultados ante el grupo para promocionar la discusión e interacción entre los participantes.
11. **Instrucciones para determinar las coordenadas de la trayectoria del objeto con Tracker**

a. Ejecutar el software Tracker. Se muestra el menú principal del Tracker (Figura 4): vista principal de video (1), vista de gráficas (2), vista de datos (3), barra de menús (4), barra de herramientas (5), deslizador de tiempo.

Figura 4

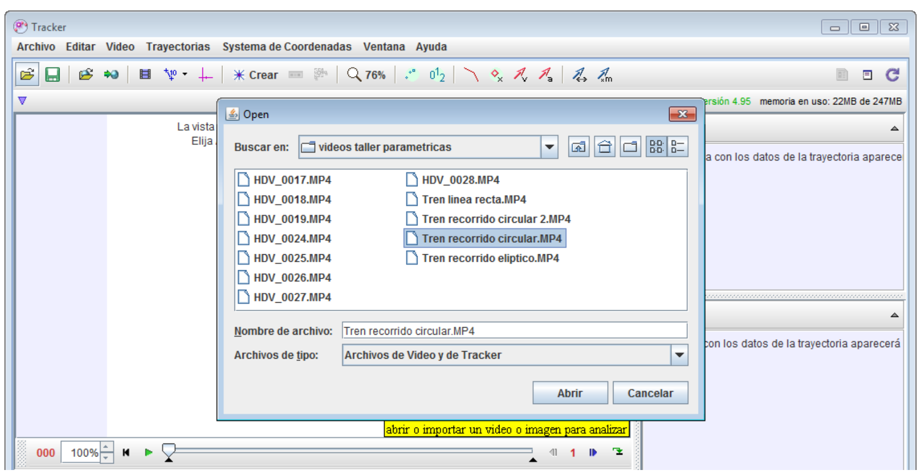
Menú principal de Tracker



b. En la barra de menús, seleccionar *Archivo* y elije la opción *Abrir* (Figura 5). Aparecerá una ventana en la cual se muestran archivos. Buscar la ubicación del video que se desea analizar y una vez encontrado, seleccionarlo y dar Clic en el botón *Open* o bien, dar doble Clic sobre el archivo.

Figura 5

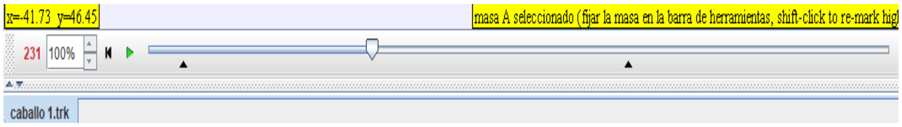
Seleccionar el archivo de video



c. Introducir y ajusta el video al segmento seleccionado para trabajar (Figura 6). Al abrir el video seleccionado, vista principal de video, se procede a definir el intervalo del video que será analizado. En el deslizador de tiempo se encuentran dos marcas como de punta de flecha negra, una al inicio del deslizador y otra al final. Ajustar tales marcas de modo que con ellas se delimite la parte del video que será analizada.

Figura 6

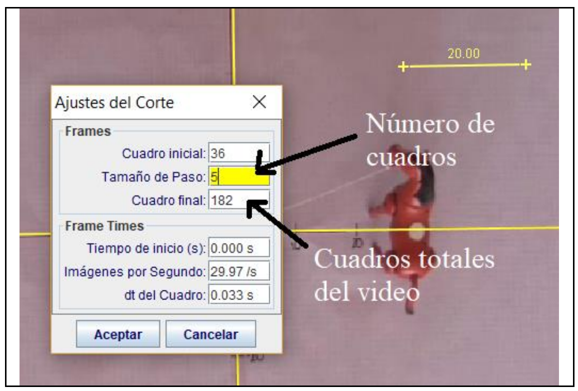
Herramienta del video y controles del video.



d. Elige el tamaño de paso (Opción Ajuste del corte). Definir el ***tamaño de paso*** significa determinar el número de cuadros del video que se consideran para la señalización de la trayectoria. En la figura 7 el video consta de 182 cuadros y se tomará una coordenada de la trayectoria del caballito cada 5 cuadros, que el programa Tracker lo hace de manera automática.

Figura 7

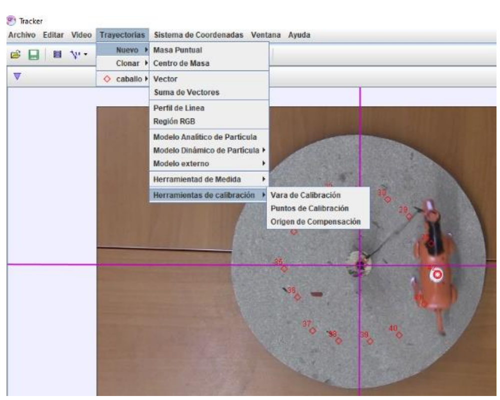
Selección del tamaño del paso

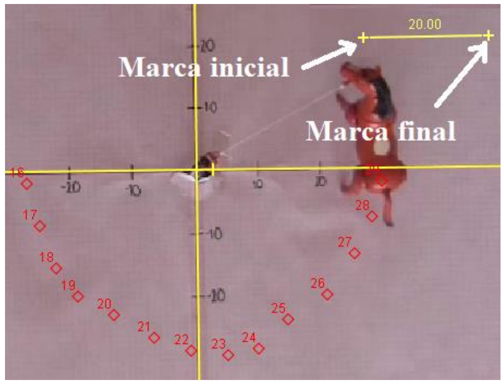


e. En la opción *Trayectorias* ➔ *Nuevo* ➔ *Herramientas de calibración*➔ *Vara de Calibración*, se activa la vara de calibración que tendrá la unidad de medida indicada a la hora de grabar el video, que es la rutina de Tracker que se ajustará a la longitud de la marca ubicada sobre el video. Primero se señala un extremo de la marca son Shift+Clic y luego sobre el otro extremo con las mismas teclas Shift+Clic. Con un Clic sobre la vara de calibración se sustituye el valor de la marca interface entre la vida real y el Tracker.

Figura 8

Selección de la vara de calibración y tamaño del paso

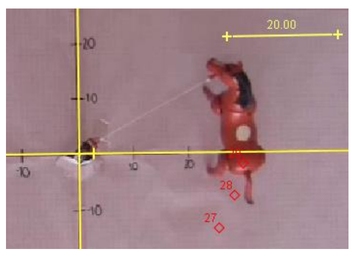




Ahora sobre el video selecciona un punto sobre el que colocarás el origen del sistema coordenado, de tal forma que se facilite la visualización de la trayectoria. Con un Clic sobre el ícono  se aparece sobre la pantalla el sistema coordenado (Figura 8), que el usuario puede ubicar en el lugar de su preferencia con el cursor sobre el origen.

Figura 8

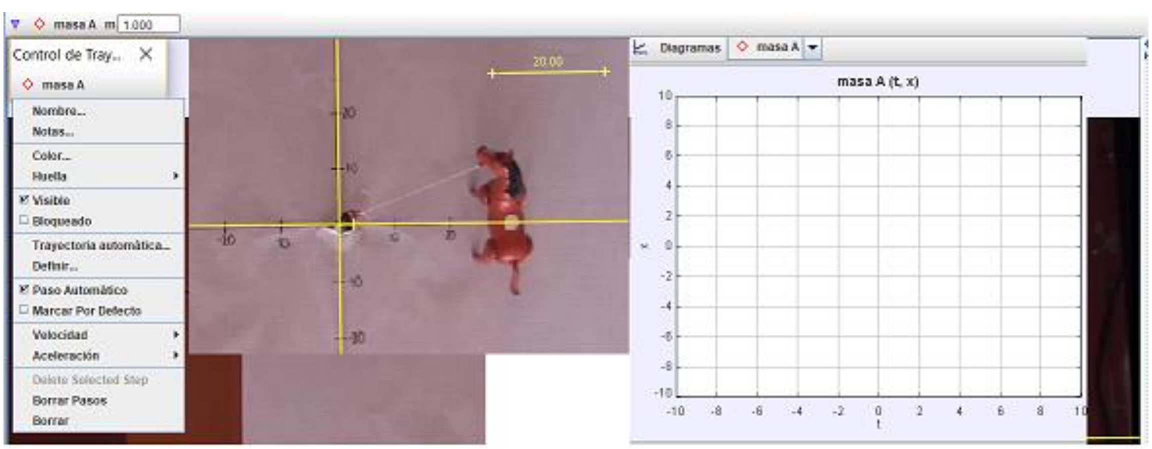
Colocación de los Ejes coordenados



f. El caballito de juguete se identifica en Tracker como una ***Masa Puntual*** y se interpreta como el objeto en video a analizar. En la figura 9 se presentan las parámetros que integran la masa puntual: Nombre, Notas, Color, Huella, entre otros.

Figura 9

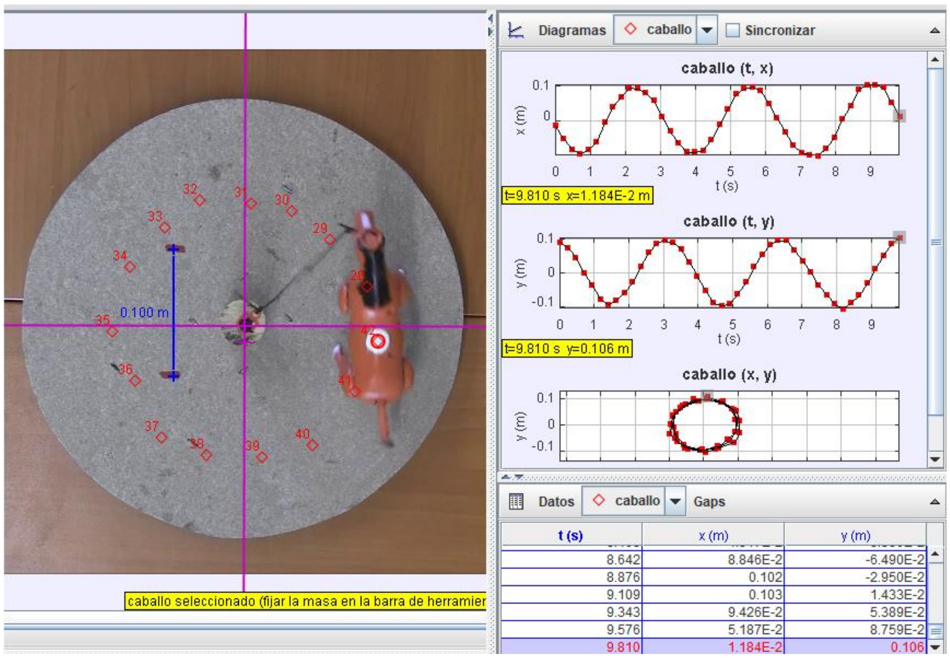
Herramienta de Masa Puntual.



g. Marcar la trayectoria del movimiento del caballito. Se sugiere que sobre el objeto en movimiento, se haga una marca visible que servirá de referencia para ubicar el cursor y señalar los puntos que indicarán la trayectoria que el objeto, de acuerdo a lo indicado en el apartado *Tamaño del paso* (Figura 10). La instrucción para señalar los puntos en la trayectoria es ubicar sobre el caballito el cursor y teclear *Shift + Clic*, acción que se manifiesta como un cambio en el puntero del cursor. La marca de la trayectoria es la correcta si aparece un punto sobre la gráfica y las coordenadas correspondientes en la tabla de datos. Se repite *Shift + Clic* hasta que se recorra todo el video y se refleje en forma gráfica y numérica en la parte derecha del video.

Figura 10.

Representaciones semióticas del movimiento del caballito: gráfica y tabla de datos



12. Instrucciones para manipular los datos con el software GeoGebra.

Los datos de la tabla calculados con el Tracker se exportan a GeoGebra para ello las instrucciones son las siguientes:

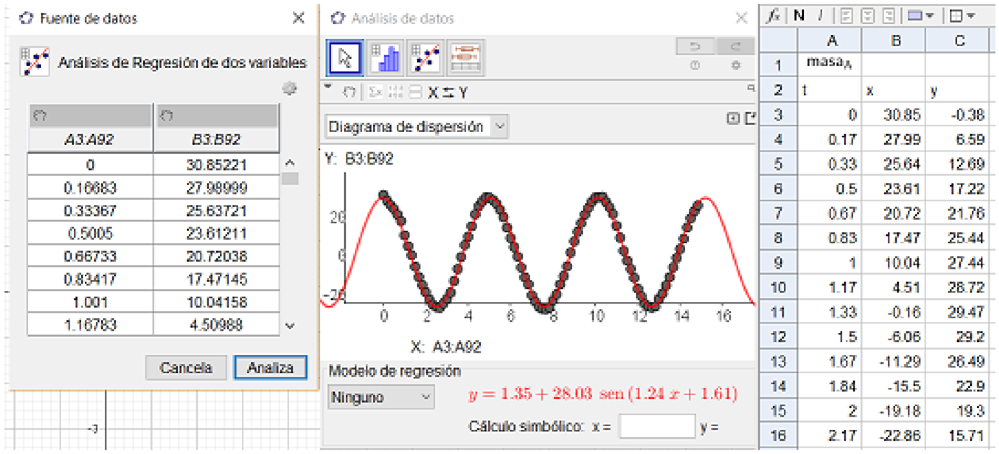
a. Se copian los datos de la tabla en Tracker al GeoGebra.

b. En el GeoGebra se activa la opción de hoja de cálculo y se pegan.

Una vez que se han exportado los datos a GeoGebra (Figura 11), se selecciona la opción *Análisis de Regresión de dos variables* ➔ *Modelo de regresión* ➔ *Polinomio* ➔ *Grado*➔ *Copiar a Vista Gráfica*, y se ajusta a la función al recorrido.

Figura 11

Modelación de la trayectoria del caballo con GeoGebra



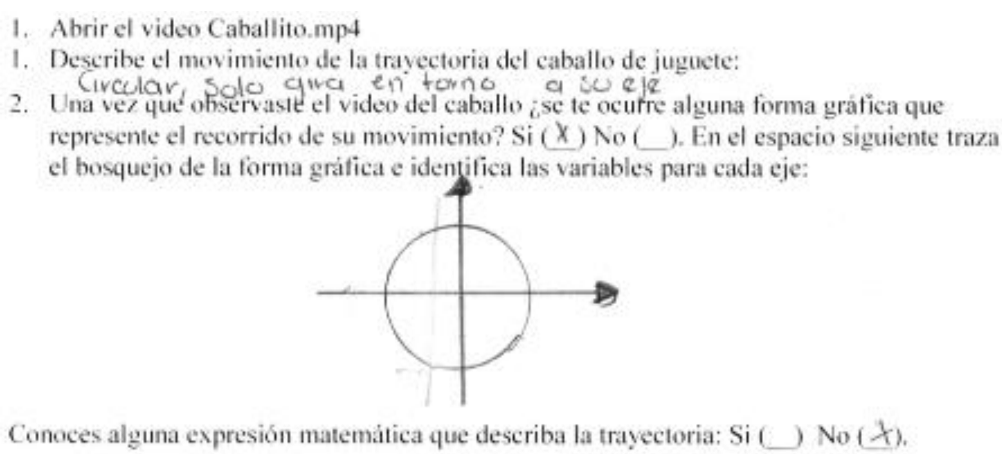
Al final de las actividades se les pide a los alumnos que entreguen el cuaderno de trabajo, un informe de las actividades realizadas y una presentación que será planteada a todo el grupo.

Resultados obtenidos por los alumnos

En la primera actividad descrita en la secuencia didáctica, se les solicita a los participantes que observen el video del caballito de juguete, para después resolver algunos cuestionamientos, con los cuales se pretende rescatar algunos de los conocimientos previos (Figura 12). Según los resultados obtenidos se observa que solo algunos de los participantes reconocieron que la trayectoria del caballo es casi circular y no la asociaron a ninguna forma.

Figura 12

Resultados obtenidos por los alumnos con relación a la trayectoria del caballito

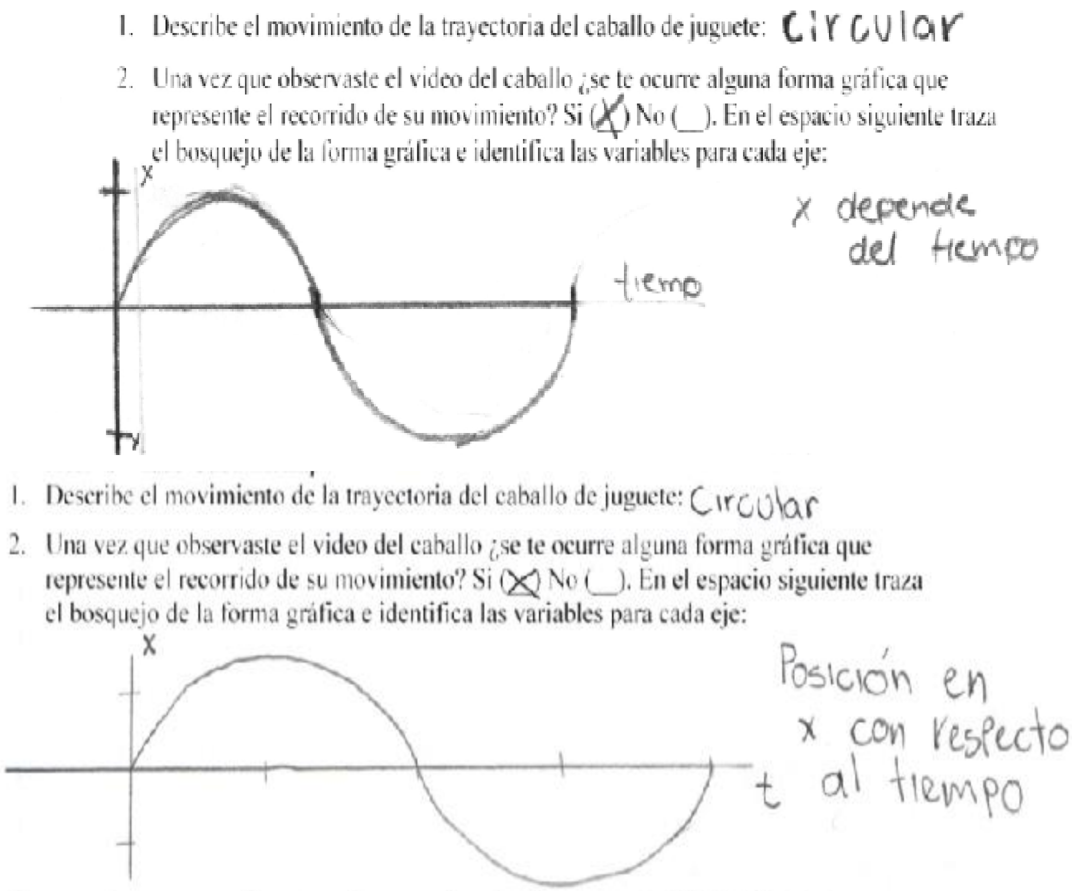


Con el desarrolla de esta actividad y lo descrito por los alumnos en las hojas de trabajo se puede concluir que los participantes cuentan con conocimientos previos en relación al recorrido del caballito de juguete, se observa que solo algunos de los estudiantes reconocieron que la trayectoria del caballo es casi circular y no la asociaron a ninguna forma algebraica

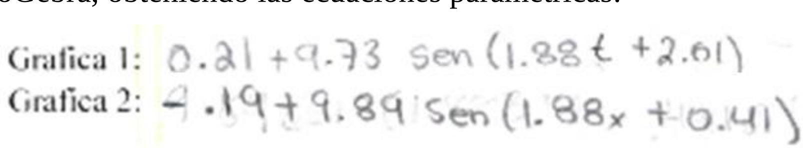
Una vez que el alumno analiza el video con los softwares de Tracker y GeoGebra, observa las gráficas obtenidas por los mismos, seleccionando la que consideran representan el movimiento del caballito de juguete, en la figura 13 se presentan algunos de los resultados obtenidos.

Figura 13

Representación gráfica de la trayectoria del objeto.



Luego de trabajar el análisis del video con el software Tracker, los datos fueron exportados a GeoGebra, ya que cuenta con una rutina más completa para el análisis algebraico de los datos, así que después de una explicación al respecto copiaron los datos de la tabla y los exportaron a GeoGebra, obteniendo las ecuaciones paramétricas:

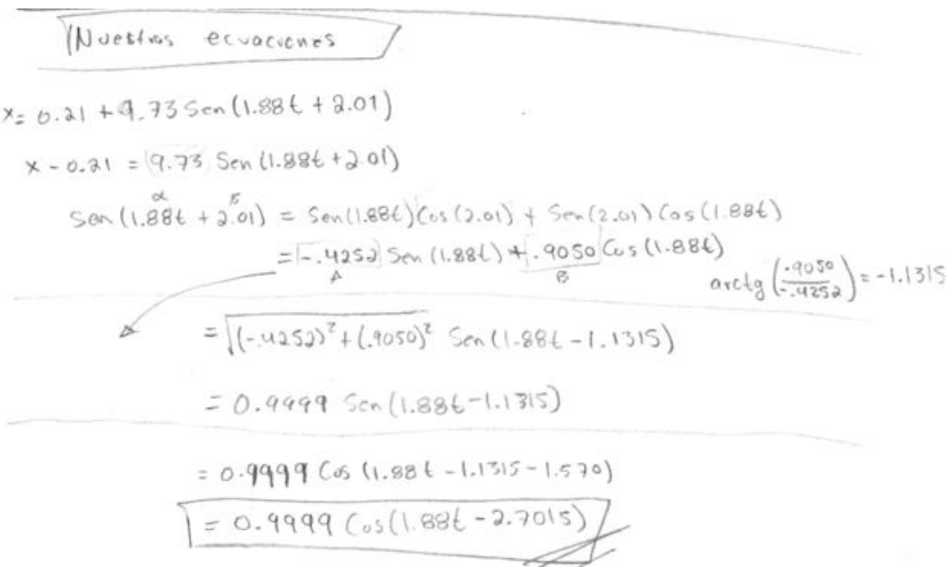


Estas ecuaciones difieren de los proporcionados en el cuaderno de trabajo $\{x(t) = R\cos(at + b), y(t) = R\ sen(at + b)\}$, por lo tanto, tuvieron que realizar un trabajo algebraico para lograr llegar a la forma paramétrica, en este paso los alumnos presentaron algunas dificultades ya que su conocimiento de los temas de trigonometría y de geometría euclidiana no era suficiente.

Para realizar esta actividad el instructor intervino compartiendo y explicando las identidades trigonométricas que permitieron al alumno realizar la conversión de las ecuaciones, como resultado obtuvieron lo mostrado en la figura 14.

Figura 14

Ajuste de funciones y ecuaciones paramétricas



Conclusiones

La aplicación de la secuencia didáctica para el aprendizaje de las ecuaciones paramétricas $f(t) = (x(t), y(t))$ a partir de situaciones problema de la vida cotidiana tiene un efecto positivo en el aprendizaje de los estudiantes, tratadas con las TIC, en particular con el empleo del video digital, Tracker y GeoGebra, medios que fueron precursores del aprendizaje de los estudiantes en el tema de ecuaciones paramétricas y el concepto de parámetro. Los alumnos se mostraron motivados a participar activamente en el desarrollo de las prácticas con el trabajo individual y colaborativo. Se promovieron valores como el compromiso, puntualidad, interés, honestidad y tolerancia, entre otros, detectados cuando desarrollaban las tareas encomendadas en un contexto más allá del escolar

Bibliografía

Arrieta, J., Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 18, núm. 1, pp. 19-48. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33535428002 (May 18, 2018).

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.

Ezquerra, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz*. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733 http://hdl.handle.net/10498/14733. http://reuredc.uca.es.

Galileo, G. (1638). Dialogues Concerning Two New Sciences by Galileo Galilei. *Translated from the Italian and Latin into English by Henry Crew and Alfonso de Salvio. With an Introduction by Antonio Favaro (New York: Macmillan, 1914)*. Recuperado el 10 de Septiembre de 2014 de http://oll.libertyfund.org/titles/753.

Geogebra (2024). GeoGebra Clásico

Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational studies in mathematics*, *88*(2), 201-219.

Jofrey, J. A. (2010). Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases. *Physics Education*. DOI 10.1088/0031-9120/1/005.

Lehmann, CH. (1989). *Geometría Analítica*, México: LIMUSA.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016). Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development*, Vol. 5, No. 1, pp. 62-76. Published by American Research Institute. Recuperado el 23 de Mayo de 2016 de http://jehdnet.com/. Electronic Version. DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. IS**SN**: 2334-2978.

Tracker (2024). Tracker Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education