REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen XII Número 1 Fecha: enero-junio de 2024

ISSN: 2395-955X

CONSTRUYENDO RECTÁNGULOS

Luz Graciela Orozco Vaca

Secretaría de Educación Pública

luzgracielaorozco@gmail.com

Para citar este artículo:

Orozco, L. G. (2024). Construyendo rectángulos. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, XII (2), 1-12.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año XII, No. 1, enero-junio de 2024, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor.

CONSTRUYENDO RECTÁNGULOS

Orozco Vaca Luz Graciela
Secretaría de Educación Pública
luzgracielaorozco@gmail.com

Resumen

Los estudiantes de tercer grado de secundaria, después de trabajar con la plataforma Classroom desde sus casas durante todo el ciclo escolar 2020 – 2021, han presentado dificultades en las operaciones básicas, por ejemplo, se les complica factorizar un número. Nuestro interés es proporcionarles ejercicios y materiales, que les ayuden a reforzar los aprendizajes esperados en los ciclos anteriores y a partir de ahí, continuar con la resolución de ecuaciones cuadráticas aplicando la factorización. Diseñamos el proyecto "Construyendo Rectángulos" para que los estudiantes, mediante una aplicación tecnológica, logren clarificar la factorización de un número, con un tema de geometría que tienen claramente desarrollado (el área de los rectángulos).

Palabras clave: Tecnología, Geometría, Áreas, Factorización.

Abstract

Third grade high school students, after working through the Classroom platform from their homes throughout the 2020-2021 school year, have had difficulties in basic operations, and it is difficult for them to factor a number. Our interest is to provide them with exercises and materials that help them reinforce the learning expected in the previous cycles and from there continue with the resolution of quadratic equations by applying factorization. We designed the project "Building Rectangles" so that students, through a technological application, can clarify the factorization of a number, through a geometry topic that they have clearly developed (the area of rectangles).

Keywords: Technology, Geometry, Areas, Factoring.

1. Formas y patrones

Con el fin de tener un material accesible para los estudiantes y más fácil de conseguir para el docente, se empleó el equipo de cómputo con el software *Classroom* instalado y una de las aplicaciones gratuitas que pertenece al Centro de Enseñanza de las Matemáticas (*The Math Learning Center (MLC)*). La MLC fue fundada en 1976 por Eugene Maier, Don Rasmussen y David Raskin en Chicago, Illinois, Estados Unidos, como una corporación sin fines de lucro. A partir de 1980 agregaron materiales para facilitar a los docentes la implementación de productos en el aula clase, así como los servicios de soporte al utilizarlos.

quienes crearon el programa de *Bridges in Mathematics* (2002). Este programa trabaja a partir de modelos visuales con las que los estudiantes pueden jugar, manipular y diseñar, para comprender y aplicar los conceptos matemáticos con mayor facilidad.

De las aplicaciones que comparte el Centro de Enseñanza de las Matemáticas escogimos "Formas de patrones", que proporciona a los estudiantes figuras geométricas, con las que puede explorar el conteo, trabajar las fracciones, identificar patrones visuales, hacer teselaciones, etc., y en nuestro proyecto construir los rectángulos, tomando uno de los patrones como unidad cuadrada.

2. Construyendo rectángulos

A partir de la aplicación "Formas y patrones", las actividades para los estudiantes fueron diseñadas combinando los conceptos que tienen claros y manejan muy fácilmente como es el área de un rectángulo (Eje de forma espacio y medida), para que al tratar de construir estas figuras el alumno identifique todos los factores que pueden cumplir con esa condición y desde ahí guiarlo al tema de factorización (Eje de sentido numérico y pensamiento algebraico).

Intentamos combinar las actividades de factorización incluidas en el programa SEP (2017), que trabajaron los alumnos con mucha facilidad en primer y segundo grado de secundaria para guiarlos a uno de los aprendizajes esperados de tercer grado: "*Desarrollar con los estudiantes el uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas utilizando la factorización*", de acuerdo con el programa SEP (2011).

Consideramos necesario que tuvieran claro qué es la factorización. Comenzando con los factores de una cantidad, utilizados comúnmente en los ejercicios de áreas, con el fin de que llegaran a validar los procedimientos y resultados, ya que, al identificar todas las relaciones que tienen los factores para encontrar los distintos rectángulos que tienen la misma área, lograrán explicar el proceso de factorizar un número y modificar su aplicación en la factorización algebraica de un trinomio cuadrado.

3. El uso de recursos tecnológicos en la enseñanza.

Al inicio del 2000 la National Council Teacher Mathematics (NCTM), con el fin de clarificar las principios y estándares, trabajó un proyecto con los estudiantes, para que ellos descubran, conjeturen y analicen conceptos matemáticos, a partir de las representaciones construidas con recursos electrónicos. En esas fechas no era posible contar con equipos, pero si con material concreto que ayudaba a los alumnos a lograr estas representaciones geométricas, por lo que nos enfocamos a trabajar con material concreto que ayudó a los estudiantes a visualizarlas.

El uso de estas representaciones favoreció a los estudiantes para entender mejor los problemas, organizar su pensamiento para plasmar sus ideas y llegar a la solución de las preguntas planteadas. Así los profesores obtuvieron información relacionada con la interpretación de los estudiantes para una reflexión, guiándolos a construir un puente de las representaciones personales a unas más conocidas, el lenguaje algebraico.

Durante el desarrollo de estas actividades se pueden revisar las diferentes formas en las que los estudiantes interpretan los conceptos matemáticos y los aplican. Esta valiosa información en los cambios que enfrenta el estudiante del lenguaje geométrico, al aritmético y por último al algebraico, le ayuda a enfrentar algunos conceptos para más adelante lograr generalizarlos. Es decir, se guía al alumno a identificar las características comunes en las representaciones geométricas y el lenguaje aritmético para a continuación sistematizarlos hasta lograr el proceso de abstracción en el lenguaje algebraico (Dorier, 2002).

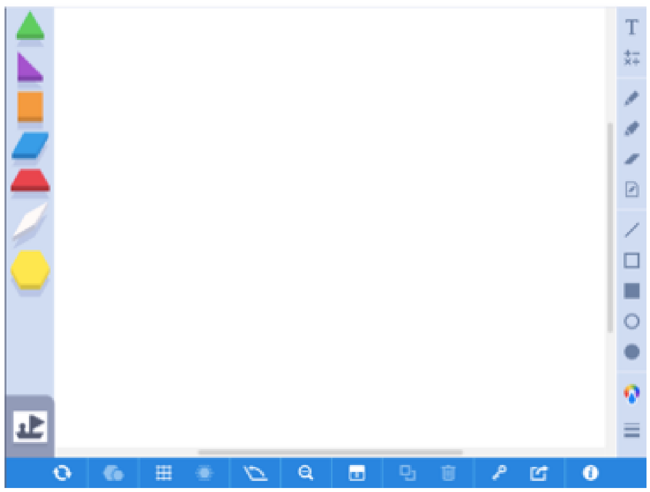
Durante la época de la pandemia COVID 19, se enfrentó a continuar la enseñanza a distancia, por lo que ya no se contó con el material concreto para que los alumnos elaboraran las representaciones geométricas, pero en cambio se integró el uso de la tecnología para trabajar desde la casa de cada estudiante, lo que permitió tener el apoyo de las computadoras para que los alumnos experimentaran con el programa de "formas y medidas" los movimientos de las figuras geométricas y sus representaciones hacia la comprensión de la factorización aritmética, para guiarlos a establecer conjeturas y soluciones a las situaciones de factorización algebraica.

4. Actividades y retos al aplicarlas

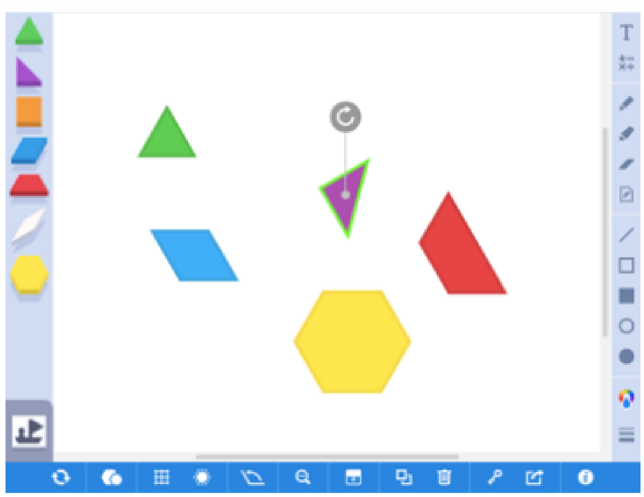
La primera actividad fue presentar a los estudiantes la aplicación de "Formas y patrones" y pedirles que intentaran formar diferentes dibujos, con las figuras geométricas que aparecen. Únicamente tenían que seleccionar las figuras, dar clic y trasladarlas para ir acomodándolas y dibujar lo que estaba en su imaginación (Figura 1a, 1b, 1c).

Figura 1

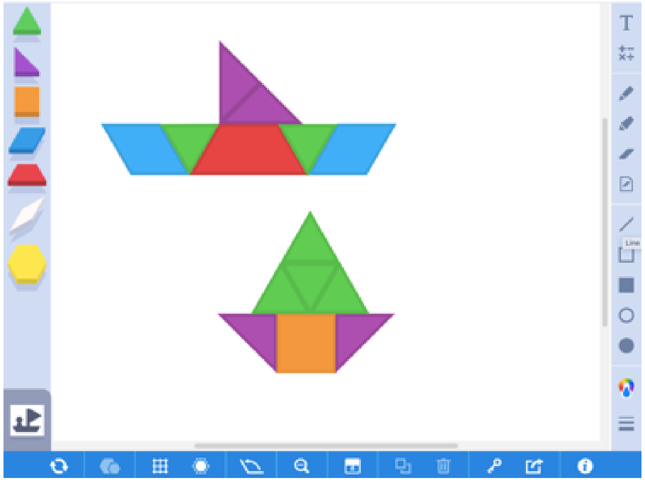
Presentación de la aplicación "Formas y patrones" a los estudiantes



a



b

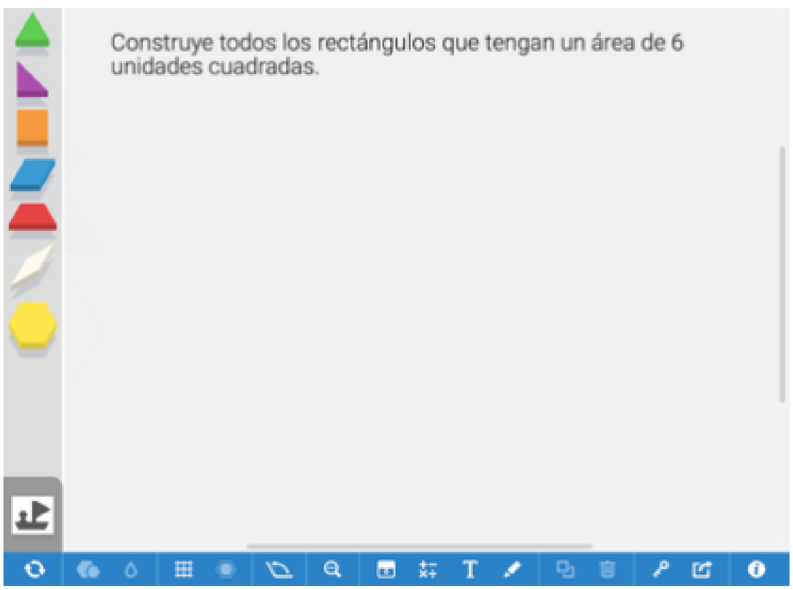


c

Como segunda actividad se presentó la aplicación con la indicación que se muestra en la figura 2a. La indicación solicitaba a los estudiantes construir todos los rectángulos que tengan un área de 6 unidades cuadradas. Se preguntó al grupo ¿qué condiciones se debían seguir para formar un rectángulo de manera que se cumplieran las condiciones que el área solicitada?

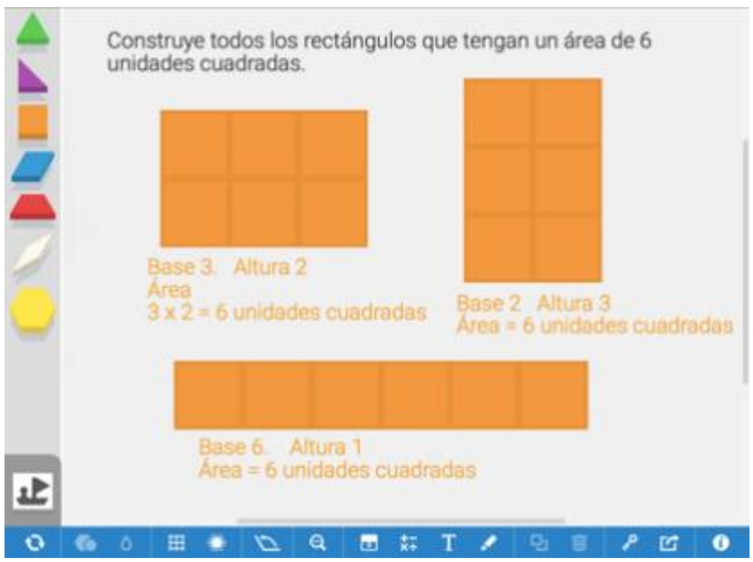
Figura 2

Construcción de rectángulos de acuerdo con las indicaciones dadas



a

b



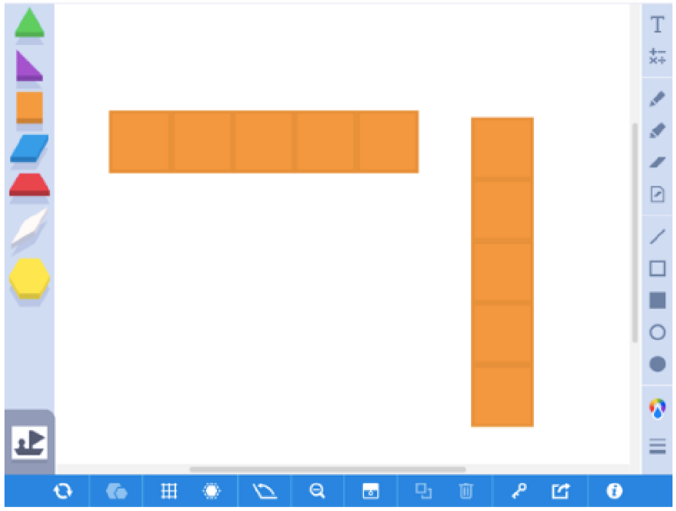
c

Para ellos lo más sencillo fue, establecer como acuerdo, utilizar los cuadrados naranjas que representarían una unidad cuadrada y todos aprobaron la decisión, formando así los 3 rectángulos de la figura 2b. Algunos estudiantes por curiosidad comenzaron a utilizar los demás comandos de la barra de herramientas y agregaron información a los rectángulos formados como la medida de la base y de la altura, así como el área de cada uno (Figura 2c).

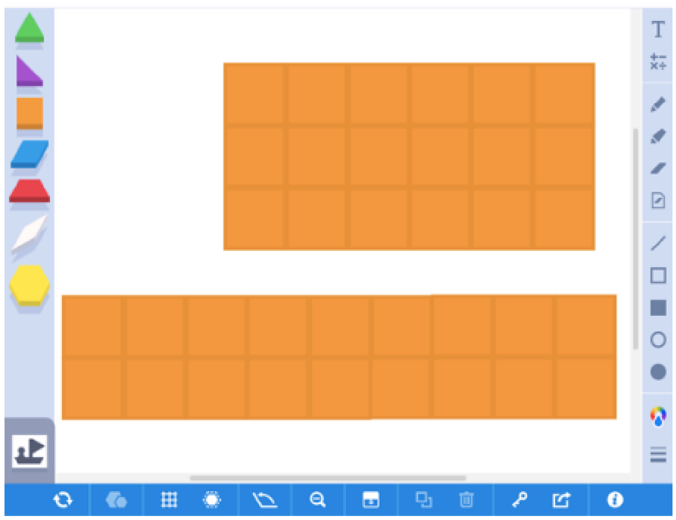
Las siguientes actividades fueron de invitación a los estudiantes a la construcción de rectángulos con otras áreas, algunos que tuvieran una sola respuesta como opción y otras con más respuestas, por ejemplo: $3u^2$, $5u^2$, $12u^2$, $18u^2$, $20u^2$, (Figura 3a, 3b).

Figura 3

Rectángulos con área igual a $5u^2$ y $18u^2$



a



b

Cuando el área era mayor, ya no construían el rectángulo que tuviera de altura o de base la unidad porque el espacio en la aplicación no les era suficiente y al revisar las actividades en grupo, se les preguntó: ¿Lograron construir todos los rectángulos posibles que tuvieran el área solicitada?

Se obtuvo la respuesta favorable de que no siempre se podría construir el rectángulo que cumplía con la altura o base de 1u, pero que invariablemente sería posible tenerlo como opción de respuesta. Se observa en la figura 3a que la única opción es 5u por 1u y cambian de lugar las medidas para obtener los dos rectángulos posibles.

En la figura 3b, se presentan dos respuestas para los rectángulos con un área de $18u^2$: el de base 9u y altura 2u, y el de base 6u y altura 3u. Los estudiantes aclaran que los rectángulos podrían presentarse de forma inversa base 2u y altura 9u, base 3u y altura 6u. Además, el rectángulo que siempre tendría 1u de base y 18u altura y de forma inversa 18u de base y 1u de altura.

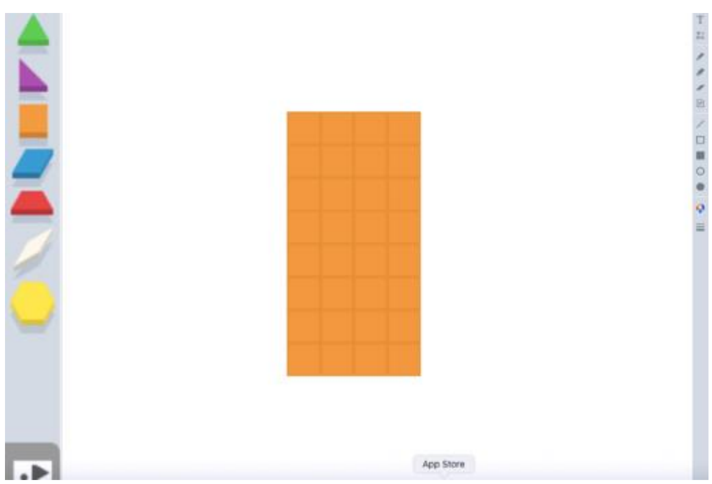
Otras de las preguntas de reflexión fueron ¿por qué en algunos rectángulos únicamente se tenía una respuesta y lo que cambiaba era la posición del rectángulo? (Figura 3a) y ¿por qué en otros eran más las opciones de rectángulos con la misma área?

Estas preguntas intentaban guiar a los estudiantes para que relacionaran las medidas de los rectángulos, con los factores del número que representaba el área del rectángulo. Como se observa en la figura 4a y 4b, los rectángulos ya eran muy grandes y solo alcanzaban a representar una de las opciones para $32u^2$ o $36u^2$, por lo que la mayoría de los estudiantes empezaron a buscar otros procedimientos de obtener las medidas de la base y altura que podrían tener esos rectángulos.

Figura 4

Rectángulos con área igual a $32u^2$ y $36u^2$

a



b

La mayoría comenzó a anotar en su cuaderno las opciones que ya habían dicho, siempre estaría 1u de base o altura y la otra cantidad de unidades en la posición inversa. A continuación, anotaban el rectángulo que lograron formar (Figura 4a o 4b) y luego las otras opciones que se podrían tener sin acomodar todos los cuadrados en la aplicación (Figura 5).

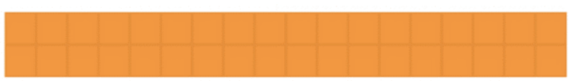
Figura 5

Tabla con las medidas de base y altura que tendría el rectángulo

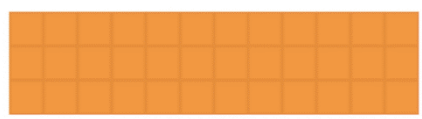
Área del Rectángulo	Base	Altura
32 u^2	32u	1u
32 u^2	1u	32u
32 u^2	8u	4u
32 u^2	4u	8u
32 u^2	16u	2u
32 u^2	2u	16u

Otro estudiante observó las respuestas con más detenimiento y dijo que se parecía a las tablas de multiplicar. ya que las medidas de la altura y base del rectángulo podrían ser los números que al multiplicarse dieran esa cantidad. Comprobó lo anterior, con un rectángulo de área igual a 36u^2, cambiando el tamaño de la pantalla en la aplicación y luego lo relacionó con las tablas de multiplicar (Figura 6).

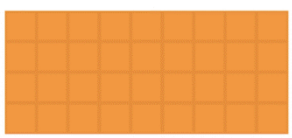
Figura 6. Rectángulos y anotación con las tablas de multiplicar



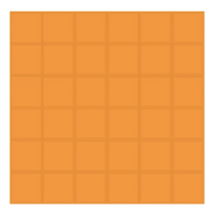
2 x 18



3 x 12



4 x 9



6 x 6

Al observar los cambios de decisiones que fueron haciendo los estudiantes, se organizó un debate de grupo, donde cada uno exponía los diferentes pasos que se podrían seguir para encontrar las respuestas, comprobando que fueran ciertos y que era más sencillo que construir los rectángulos. Finalmente lograron establecer una explicación para la factorización aritmética de cualquier número.

Se continúo trabajando con la aplicación de la factorización aritmética, pero ahora los retos fueron aplicar la factorización en una ecuación cuadrática, donde el primer paso era buscar los factores del tercer término del trinomio y enseguida verificar cuales cumplían la condición de que, al sumarse los factores, el resultado fuera igual al coeficiente del segundo término del trinomio, como podemos ver en la tabla de la figura 7.

Figura 7

Factores en un trinomio cuadrado

Trinomio	**Factores del tercer término**	**Suma de los factores**
$x^2 + \underline{7}x + \underline{12} = 0$	Factores de 12	
	12 x 1 ó 1 x 12	12 + 1 = 13
	6 x 2 ó 2 x 6	6 + 2 = 8
	4 x 3 ó 3 x 4	**4 + 3 = 7**
En este caso los factores que cumplen ambas condiciones son 4 y 3. A partir de esta información podían obtener la respuesta de los factores que al multiplicarse (x + 4) (x + 3) daban como resultado ese trinomio.		

Después de este ejemplo con números positivos, se agregaron otros ejemplos con números positivos y negativos, para verificar que no olvidaran las reglas al momento de realizar las sumas de los factores. Para la mayoría fue más fácil encontrar los factores que cumplieran las condiciones, aunque tuvieran que escribir más datos pero así tendrían la seguridad de que fueran los correctos.

Figura 8

Factores en un trinomio cuadrado con signos diferentes

Trinomio	**Factores del tercer término**		**Suma de los factores**
$x^2 \underline{- 8}x - \underline{48} = 0$	**Factores de 48**		-48 + 1 = -47
	48 x 1	**12 x 4**	-24 + 2 = -22
	24 x 2	8 x 6	-16 + 3 = -13
	16 x 3		**-12 + 4 = -8**
			-8 + 6 = - 2
En este caso los factores eran números con signos diferentes y se debían restar las cantidades. Como -8 era el resultado indicaba que el número mayor tenía signo negativo. Por lo tanto, los factores que cumplen ambas condiciones son -12 y + 4. Entonces los factores que al multiplicarse dan este trinomio son (x - 12) (x + 4).			

Los resultados en este proyecto fueron favorables, ya que en la primera parte de las actividades los estudiantes establecieron rápidamente varias respuestas para formar todos los rectángulos posibles, sin importar el acomodo. Y con la manipulación de las figuras distinguieron que algunos era el mismo rectángulo y únicamente cambiaba de posición (por ejemplo 3 x 4, o 4 x 3).

En la segunda parte de las actividades, identificaron rápidamente las opciones sin tener que construir todos los rectángulos. Lograron puntualizar cuando se obtenía únicamente un rectángulo y en los que no, localizaron todas las opciones posibles. Al momento de trabajar el debate los estudiantes comprendieron el concepto de factorización, a partir de ahí aclararon en que situaciones un número solo tenía dos factores (números primos) y en cuales tenían más factores (no son números primos).

En las últimas actividades, con las ecuaciones cuadráticas, se dio un paso más rápido para la factorización del tercer término de cada trinomio, cumpliendo las condiciones asertivas de los factores, sin presentar errores en los signos, como comúnmente lo observábamos con los estudiantes de las generaciones anteriores que trabajaban con material concreto.

5. Conclusiones

Aunque fue largo el proceso de trabajo y múltiples actividades las que realizaron los estudiantes, en comparación de otros ciclos escolares, se logró obtener el aprendizaje esperado y se fortalecieron los conceptos que aún no tenían claros para continuar con el desarrollo de la factorización en ecuaciones cuadráticas.

Queda aún un reto por trabajar con los alumnos de las siguientes generaciones de la zona escolar, que ya están utilizando la tecnología más seguido, para ver si con la práctica que desarrollan en el uso de la tecnología, el proceso para cada aplicación del programa de *Bridges in Mathematics* (2002) es más eficiente en los tiempos del desarrollo del aprendizaje.

Referencias

Bridges in Mathematics (2022). https://apps.mathlearningcenter.org/pattern-shapes/

Dorier J. L. (2002). Teaching Linear Algebra at University. *Proceedings of the international congress of mathematicians*, ICM 2002, Vol. III: Invited lectures. Beijing: Higher Education Press. 875-884. National Council Teacher Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2011, a). *Plan y programas de estudio de educación secundaria.* *https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/20177/Plan_de_Estudios_2011_f.pdf*

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2011, b). *Programa de estudio de matemáticas en secundaria.* https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/18394/Programa._Secundaria_tercer_grado_Matematicas_guia_para_maestros.pdf

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programa de estudios de educación básica.* https://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/10933/1/images/Aprendizajes_clave_para_la_educacion_integral.pdf

The MATH LEARNING CENTER (2022). https://apps.mathlearningcenter.org