GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA TECNOLÓGICA PARA ENTENDER LAS DERIVADAS Y SUS APLICACIONES

Noelia Londoño M.
noelialondono@uadec.edu.mx
Otilio Mederos A.
omederosa@gmail.com
Victoria G. Decena G.
vgdecena@hotmail.com
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Universidad Autónoma de Coahuila, México

Palabras clave: Máximo, Mínimo, Criterio de la derivada.

Resumen

En este trabajo se dan a conocer resultados parciales de una propuesta para mejorar el aprendizaje del tema de aplicaciones a la derivada, el cual se incluye en la asignatura de cálculo diferencial para estudiantes del nivel bachillerato. Los temas abordados hacen referencia a graficación de funciones, estudio del criterio de la primera y segunda derivada para hallar puntos críticos. Este proyecto se realizó usando la tecnología computacional, específicamente con el software GeoGebra. Para la propuesta se diseñaron hojas de trabajo en las cuales los alumnos interactuaban simultáneamente con ellas y con el software, responden preguntas, analizan los resultados que obtienen para establecer una conjetura respecto a los conceptos mediante la visualización de máximos y mínimos de una función, y posteriormente los alumnos logren interpretar geométricamente la derivada.

Introducción

Hoy día como una directriz general emanada de la Secretaria de Educación Pública (SEP) surge la enseñanza con el enfoque por competencias, que se implementa actualmente en los bachilleratos del país, la cual hace énfasis en la formación de individuos que tengan conocimientos (saber conocer), que tengan habilidades (saber hacer) y que sean personas con valores (saber ser). Las directrices también proponen que cada maestro debe promover el desarrollo de la competencia de resolver problemas, y que se promueva el uso de las tecnologías de la información científicas, entre otras. Se considera viable y actual presentar un conjunto de actividades con las cuales se pretende que el alumno extraiga una serie de ideas mediante la interacción con la tecnología computacional, que le sirvan de apoyo para entender un concepto matemático, como es la derivada, y usarlo para la resolución de problemas.

Marco teórico

Una pregunta a responder en este documento es ¿por qué usar la tecnología en la enseñanza del Cálculo? Para empezar se harán una serie de consideraciones al respecto para luego pasar a responder la pregunta. Para la mayoría de los maestros no es desconocida la situación actual de los alumnos, porque se encuentran en un estado de apatía por el conocimiento en general y por las matemáticas en particular, siendo su mayor interés el uso de los medios electrónicos y las redes sociales, entre otras situaciones propias de la contexto social actual. Esto debe ser encauzado para lograr el aprendizaje de las matemáticas, en particular temas del cálculo diferencial, por lo cual es tarea del maestro diseñar actividades que generen interés en los alumnos, además hoy se cuentan con varias herramientas tecnológicas que permiten realizar gráficas, tanto estáticas como dinámicas, visualizar desde varias ventanas la misma función, modificar parámetros, ver comportamientos de curvas, analizar tablas; por tanto las actividades diseñadas deben permitir al estudiante construir conjeturas, comunicar ideas matemáticas que lo lleven a resolver problemas, ser una persona crítica, con amplio vocabulario y además ampliar el dominio de conocimientos, por lo tanto se aclara que por sí misma la tecnología no hace todo el trabajo, se sugiere que se aterrice en un tema en particular, acompañado del diseño de actividades que le apoyen, y desde luego, propiciar el planteamiento formal que le corresponde desarrollar al maestro.

Schoenfeld (1985) afirma, que el individuo tenga el dominio de conocimientos, que el alumno tenga los recursos matemáticos necesarios y que además pueda emplearlos para resolver problemas. Dentro de este conjunto de recursos se encuentran los axiomas, las definiciones, los algoritmos, las técnicas y los teoremas. Profundizando un poco al respecto, cada estudiante debe tener una base amplia de conocimientos de matemáticas para proponer y resolver problemas. En este sentido, Schoenfeld (1985) presenta un amplio rango de recursos que pueden contribuir a la ejecución de la resolución de problemas en un dominio matemático particular:

a. El conocimiento informal e intuitivo acerca del dominio del problema.
b. La familiaridad con procedimientos rutinarios.
c. El conocimiento de hechos y definiciones.
d. La habilidad para ejecutar procedimientos algorítmicos.
e. La posesión de un espectro de competencias relevantes.

Siempre que se resuelve un problema se debe entender, es decir, debe tenerse claridad respecto a los datos, las incógnitas y las condiciones del problema. Estos elementos deben ser localizados cuando se respondan las preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las condiciones?

El problema debe leerse detenidamente e interpretar qué es lo que queremos obtener, cuáles son los datos con los que contamos y si éstos son suficientes, el alumno no sólo debe entender el problema, debe de interesarse en resolverlo.

Los tipos de habilidades útiles en la resolución de problemas son la utilización de *estrategias heurísticas* incorporadas por Polya (1945) y de las *estrategias de control* (Schonfeld, 1985).

Las estrategias heurísticas son acciones que pueden resultar de utilidad para resolver problemas, se pueden considerar tales acciones como estrategias y técnicas para un avance en el proceso de solución.

Este tipo de estrategias cognitivas, constituyen métodos tales como descomponer el problema en casos más simples, invertir el problema, relajar las condiciones, particularizar, generalizar, entre otras.

En la dimensión de estrategias de control, se ubican las preguntas que se auto-formule el alumno y las decisiones que tome, encaminadas a entender, a revisar la veracidad de las ideas, la claridad y sencillez de la argumentación**.** Resulta útil para el alumno que se plantee las preguntas siguientes para desarrollar un pensamiento crítico sobre la solución: ¿Estoy entendiendo adecuadamente el enunciado del problema? ¿Estoy contestando la pregunta que me hicieron? ¿Está bien justificado un paso de la solución? ¿Existen alternativas más sencillas para resolver el problema?

Por ejemplo, una estategia de control es examinar la solución obtenida. Cuando el alumno, supone que ha encontrado la respuesta al problema, se inicia un nuevo proceso, donde hay que realizar nuevas acciones, tales como, verificar los resultados, revisar los razonamientos, explorar caminos más cortos y aplicar el resultado obtenido en la solución de otro problema.

Schoenfeld (1992) reporta que los matemáticos que tienen mucha experiencia en solución de problemas de matemáticas (expertos) dedican más tiempo en la fase de entendimiento del problema. Por su parte, los estudiantes no le dedican tanto tiempo a entender el problema, más bien ponen en práctica las estrategias de solución, aunque no lo hayan entendido claramente. A diferencia de los expertos, generalmente los estudiantes no tienen la costumbre de revisar las respuestas dadas a los problemas.

Metodología

Primero se revisó la asignatura de Matemáticas IV, incluida en el plan de estudios de los bachilleratos de la Universidad Autónoma de Coahuila, específicamente en el tema de aplicaciones a la derivada y se encontraron temas que fueron de interés para investigar: funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada, concavidad y el criterio de la segunda derivada, análisis de gráficas y problemas aplicados a máximos y mínimos. Con estos temas se diseñaron actividades usando la tecnología para entender la interpretación geométrica de la derivada.

La prueba piloto se aplicó a 21 estudiantes de primer semestre de la licenciatura en matemáticas aplicadas, (de nuevo ingreso a la facultad), de ellos sólo algunos habían llevado el curso de cálculo en la preparatoria. La aplicación de la prueba permitió descubrir algunas dificultades de los estudiantes y se procedió a hacer un rediseño de la actividad.

Durante la ejecución del proyecto, ya con estudiantes de preparatoria, en su fase inicial, se aplicó un diagnóstico, cuyo objetivo central fue la identificación de algunas dificultades que tienen los alumnos para usar la derivada como instrumento para graficar funciones polinómicas continuas en todo su dominio.

En el diagnóstico se preguntó sobre intervalos donde la función es creciente, decreciente, puntos máximos, puntos mínimos, concavidad y puntos de inflexión; a partir de la gráfica de una función. Como se observa en la Figura 1.

Actividad 1.

Observa la siguiente gráfica de la función $f(x)$ y contesta a las siguientes preguntas.

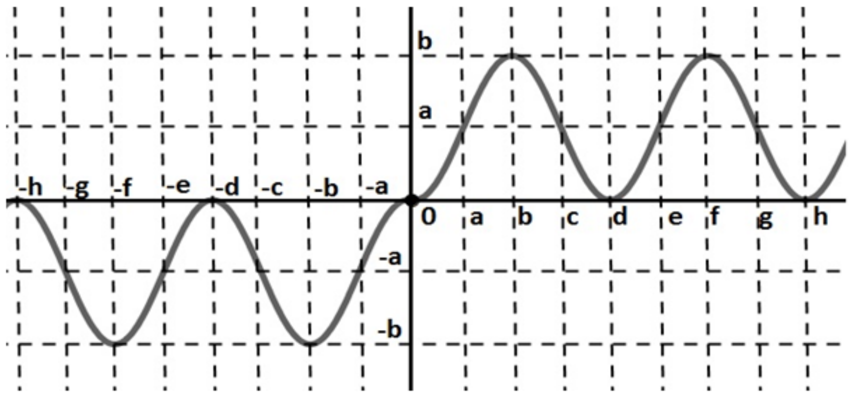


Figura 1. Gráfica proporcionada a los alumnos

En la segunda parte se le pide que identifique los intervalos con la misma información del anterior, pero a diferencia de la actividad 1, se le proporcionó la expresión algebraica de una función polinómicas de grado tres que debían graficar.

Actividad 2.

A partir de la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + 3.$

2.1) Determine los intervalos en los que $f(x)$ es creciente y en los que es decreciente.

2.2) Calcula los máximos y mínimos de $f(x)$.

2.3) Encuentre los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.

2.4) Determine donde la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo.

2.5) Dibuje la gráfica de la función.

Seguidamente del diagnóstico se diseñaron una serie de actividades que se describen a continuación.

Exposición de la propuesta

Luego de analizados los resultados del diagnóstico se procedido a implementar la propuesta que se presenta a continuación, la cual tiene por objeto vincular de manera directa, la gráfica de una función, continua en todo su dominio, con la recta tangente a la curva en un punto (P), usando como herramienta un archivo en GeoGebra, manipulable, en el cual se ha trazado la función, la recta tangente en el punto (P) y la pendiente de dicha recta.

Al hacer diferentes desplazamientos del punto P, sobre la curva, se observa la variación que presenta la pendiente de la recta tangente.

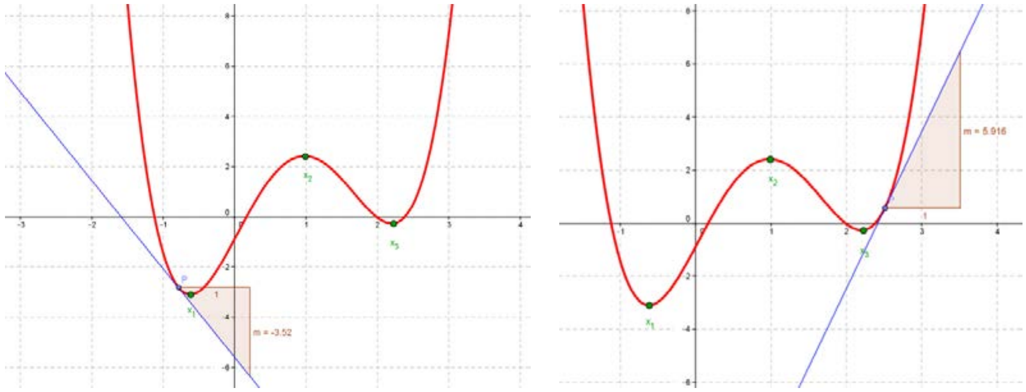


Figura 2. Gráfica construida en el archivo electrónico, donde se muestra una funcion, la recta tangente en el punto P y el valor de la pendiente.

Otra herramienta de GeoGebra usada en este trabajo es la rutina que grafica la derivada de la función f, conservando la misma construccion anterior, sólo se graficó su respectiva derivada usando el comando ***Deriva[f],*** con el objeto de asociar el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto, el valor de la derivada de la función y el comportamiento de la funcion f.

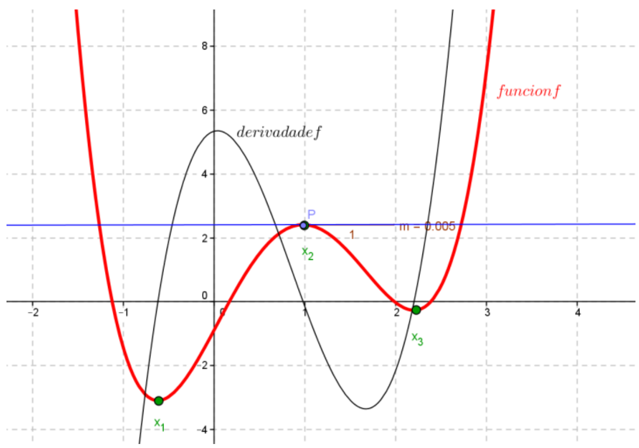


Figura 3. Gráfica construida en el archivo electrónico, donde se muestra una funcion, la recta tangente en el punto P y el valor de la pendiente y la derivada de la funcion.

En una actividad posterior se consideró prudente ocultar elementos como la recta tangente, su pendiente, para trazar esos mismos elementos pero ahora sobre la curva que corresponde a la derivada de la función. Esto con el fin de abrirle un espacio a lo que es el criterio de la segunda derivada y sus signos para enseñar la interpretación geométrica.

Experimentación

Las actividades se pusieron en práctica con alumnos de último año de la Escuela de Bachilleres Dr. Mariano Narváez González del turno vespertino nocturno. En varias sesiones de trabajo, en uno de los centros de cómputo de la institución. Las sesiones de trabajo fueron diarias. El total de alumnos participantes fueron 16, aunque algunos días fueron menos alumnos, vale la pena aclarar que la asignatura de Cálculo Diferencial en las preparatorias de la Universidad Autónoma de Coahuila es optativa, es decir, sólo la toman aquellos alumnos que así lo deseen.

Resultados

El diagnóstico permitió encontrar algunas necesidades respecto al dominio de conocimientos, específicamente lo que refiere a intervalo, una gran mayoría pueden señalar con sus propias manos la porción de función creciente, pero a la hora de escribir el intervalo donde la función es creciente, la mayoría lo anotan usando un punto para el inicio y otro punto para el final, (-f, -b), (-d, 0), de acuerdo a la gráfica de la Figura 1. Otra dificultad tiene que ver con el desconocimiento que lo que se pide es referida a los valores de x para los cuales la función es creciente. Que en este caso una respuesta correcta para un intervalo en la gráfica de la Figura 1 es (-f, -d). Ningún alumno pudo ubicar el término punto de inflexión, algunos expresaron que esa palabra no estaba dentro de su vocabulario. En general del diagnóstico se extrajo que:

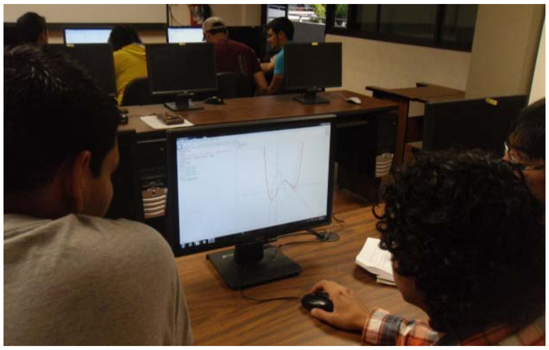
- Algunos alumnos no utilizan las notaciones adecuadas para señalar cuáles son los intervalos donde la pendiente de la recta tangente es positiva y negativa.
- No recuerdan la interpretación geométrica de la derivada y sólo escriben la fórmula de la derivada, la cual no es la interpretación de dicho concepto.
- Pocos estudiantes identificaron gráficamente dónde estaba un máximo o un mínimo.
- Los alumnos no asocian el máximo o el mínimo de una función con la pendiente de la recta tangente y el valor cero. además que la función del lado derecho crece y la primera derivada es mayor que cero y del lado izquierdo la función decrece y la primera derivada es menor que cero.
- Una parte de los alumnos muestra confusión al no saber asociar la relación que tiene el comportamiento de la pendiente a la recta tangente con la derivada de la función, para encontrar puntos máximos y mínimos. Ningún alumno escribe los intervalos con valores con menos infinito y más infinito.
- En cuanto al dominio de conocimientos que muestran los alumnos se aprecia que no recuerdan los conceptos de máximo y mínimo ya que no les fue posible concluir la actividad.
- En general para la actividad 1, el 50 % de los alumnos contestaron de manera correcta, mientras el 30 % lo hace de forma incorrecta. Para la actividad 2 se obtuvo que el 16 % responde de manera correcta, mientras que el 50% de estudiantes lo hace de manera incorrecta y un 7% no responde la actividad. Algunos empezaron por usar la regla de los cuatro pasos, pero en el proceso tuvieron errores bastante notorios como derivaciones equivocadas, al igualar la derivada a cero usaron la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{a^2 - 4ac}}{2a}$ y desde luego el resultado les quedó erróneo.

Los resultados del diagnóstico no fueron alentadores, sin embargo, de cierta manera justifica la implementación de las actividades diseñadas para realizarse de una manera diferente, donde el alumno explora, conjetura, comunica y por último discute con sus compañeros de una manera ordenada y haciendo uso de la tecnología.

Luego del diagnóstico se procedió a hacer la implementación.

Conociendo algunas dificultades en cuanto a conocimientos previos, se procedió a hablar de esas dificultades para que no entorpecieran el buen desarrollo de las actividades posteriores.

Al aplicar las actividades de aprendizaje usando GeoGebra como herramienta tecnológica, se logró que los alumnos asociaran el parámetro pendiente de la recta tangente a la curva con los términos intervalo creciente, decreciente, relacionar los puntos críticos, entendieran la concavidad de una función y además graficar una función polinómica solamente usando la derivada de la función, y algunas tabulaciones. Posteriormente dicha gráfica la pudieron verificar con el GeoGebra. También entendieron el significado de la regla de los cuatro pasos, que aplicaban anteriormente de manera mecánica sin entender el por qué.



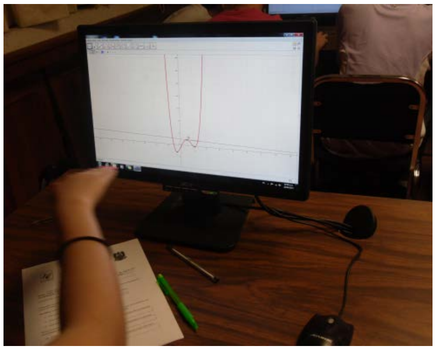


Figura 4. Fotografías de los alumnos realizando una de las actividades con GeoGebra

Es de resaltar que luego de hacer las interacciones con la tecnología, responder las hojas de trabajo y hacer la fase de socialización de las actividades, se procedió a dar la parte formal, es decir, las definiciones de los conceptos tratados, con sus respectivas notaciones e interpretaciones.

Otras actividades que se implementaron con GeoGebra, fue el uso de la derivada para solucionar problemas de máximos, mínimos y de velocidad, con archivos diseñados como se muestran a continuación, para ellos fue una sorpresa ver el área de un polígono como una función que se puede graficar y obtener un máximo, siempre consideraron el área como un número. Por cuestiones de espacio los resultados de los problemas no se discuten en el presente documento y solo de muestran algunos ejemplos de los archivos electrónicos que es aplicaron de manera exitosa con los alumnos.

Figura 5. Problema de una lona. Usando GeoGebra.

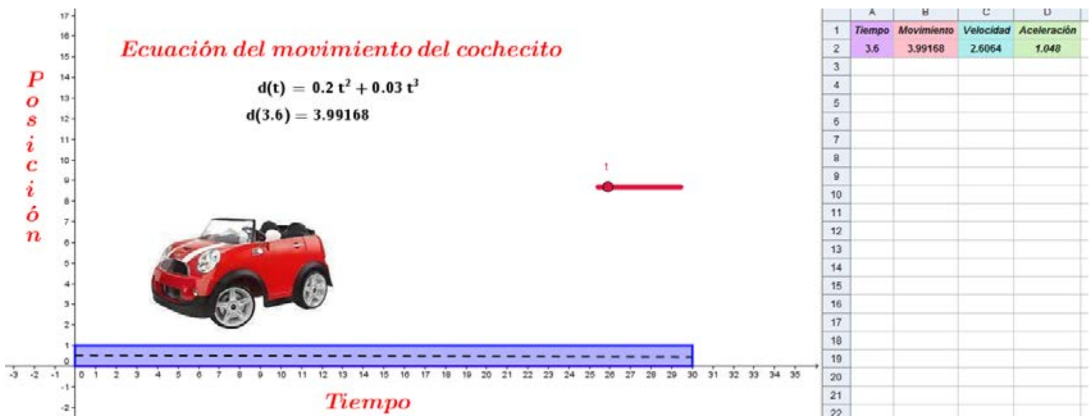


Figura 6. Problema de un coche usando GeoGebra.

Conclusiones

Estamos convencidos que herramientas tecnológicas como GeoGebra ofrecen un panorama amplio para construir, fundamentar, visualizar los conceptos de Cálculo Diferencial como lo son gráficas de funciones, interpretación geométrica de la derivada y para la resolución de problemas de máximos y mínimos.

El uso de la tecnología computacional ayudó de manera significativa a mejorar el desempeño de los alumnos cuando resolvieron problemas en diferentes tipos de contexto.

Además los alumnos mostraron gran interés en el desarrollo de las actividades, manifestaron estar complacidos con nuestra presencia en la institución, les llamaron la atención las actividades diseñadas, además en entrevista la mayoría dijeron que les hubiese gustado que todo el curso de cálculo diferencial lo hubieran visto con actividades del mismo tipo.

Referencias Bibliográficas

Anton, H. 1991. *Cálculo y Geometría Analítica*. Vol. 1. México, D.F. Editorial LIMUSA.

Leithold, L. (1999). El Cálculo. 7 Edición. México D.F. Editorial OXFORD.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas: México.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Thinking Mathematically: Problem Solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NCTM.

Universidad Autónoma de Coahuila (UAdeC). (2013). Dirección de Asuntos Académicos. Coordinación de Bachilleratos. *Planes y programas de estudios de los bachilleratos de la Universidad Autónoma de Coahuila*. México.