NUEVAS TENDENCIAS EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO: LA DERIVADA EN AMBIENTES TICE

Fernando Hitt
Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal

Palabras clave: TIC, Derivada, Cálculo, Ambientes TICE.

Resumen

Los problemas de aprendizaje de los conceptos del cálculo han sido constantemente documentados en la literatura en educación matemática desde hace varias décadas. Nuevas tendencias sobre procesos de modelación matemática han sido promovidas por los investigadores (por ejemplo, proyecto europeo PRIMAS (2007-2013): www.primas-project.eu) en donde la integración a otras ramas científicas aparte de las matemáticas se muestra imprescindible. ¿Cómo integrar las Tecnologías de la Información y Comunicación en Educación (TICE) a esta problemática? ¿Cómo desarrollar un pensamiento matemático ligado al cálculo? En este documento, hacemos énfasis en la elaboración de situaciones problema referentes a la introducción al cálculo y específicamente a la derivada. Proponemos una secuencia de actividades en donde la manipulación de objetos físicos, producción de representaciones, historia de las matemáticas (método de Fermat para el cálculo de máximos y mínimos) y producción y análisis de videos de un fenómeno físico con el soporte de Tracker y GeoGebra, forman un todo coherente en la enseñanza del concepto de derivada. Para la elaboración de esta propuesta, se han tomado en consideración resultados de investigación sobre el papel de las representaciones, la noción de obstáculo epistemológico, visualización matemática, co-variación entre variables y procesos dinámicos, todo ello, bajo un lente de las TICE. Esta propuesta está dirigida a la enseñanza del cálculo en la escuela pre-universitaria.

Introducción

La literatura sobre los problemas del aprendizaje del cálculo es extensa, asimismo los acercamientos con tecnología. Ejemplos ligados a esta problemática con tecnología la tenemos con los trabajos de Tall (2000), Artigue (2002), Guin & Trouche (1999, 2002), Schwartz, Dreyfus & Brukheimer (1990), Cortés y Guerrero (2012), Borbón (2003), entre muchos otros. En las primeras investigaciones con tecnología se tenía una gran tendencia en tratar de demostrar que dentro de un medio tecnológico podría ser más adecuada la enseñanza del cálculo que sin tecnología. Al enfrentarse a la cruda realidad, los investigadores se han percatado que los resultados son similares, e incluso en algunos casos peores a los que se tiene sin tecnología. La posición de los investigadores empezó a cambiar, intentando elucidar qué habilidades se desarrollaban con tecnología y cuáles sin ella (p. e. Tall, 2000; Guin & Trouche, *Ibid*) y un elemento muy importante, qué dificultades enfrenta el estudiante en un medio tecnológico.

Precisamente con el trabajo de Rabardel (1995) surgieron nuevos paradigmas, mostrando que los procesos de instrumentalización e instrumentación con el uso de la tecnología requiere de construcción de esquemas de acción que son diferentes en otro medio. Este tipo de acercamiento teórico de la acción (post-Leontiev y por ende post-Vigotskiano), promovió la reflexión sobre el papel de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas (p.e. Artigue, *Ibid*; Guin & Trouche, *Ibid*).

Las preguntas se hicieron más específicas. Por ejemplo, Artigue (*Ibid*) se pregunta sobre el poco impacto de la tecnología después de 20 años de acercamiento tecnológico en la enseñanza (período entre 80's al 2000).

Resultados de investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas en medios tecnológicos han sido ampliamente reportados en la literatura, por ejemplo, Artigue (*Ibid*), Guin & Trouche (*Ibid*), Lagrange (2002); Kieran *et al.* (2006), Hitt (2007), Hitt & Kieran (2009), Kieran &

Guzman (2010), Hitt, Saboya & Cortés (2013), Borbón (2003), Pluvinage & Marmolejo (2011), Thompson (1994), entre muchos otros. Pero no solamente se debería consultar trabajos experimentales en donde se utiliza tecnología, también es importante elucidar sobre las dificultades de los estudiantes sin o con tecnología. Por ejemplo, los resultados de Selden *et al*, (2000), Eisenberg y Dreyfus (1991), Carlson (1998, 2002), Hardy (2008, 2009), Zandieh (2000), entre otros, nos proporcionan elementos sobre las dificultades que los estudiantes tienen sobre uno o varios conceptos del cálculo; tales como, obstáculos cognitivos alrededor de las función, pendiente, tangente, taza de cambio, taza instantánea de cambio, velocidad media, velocidad instantánea, limites, infinito, derivada.

El intentar promover en los estudiantes un aprendizaje conceptual causa muchos problemas de enseñanza. Se podría optar por una enseñanza operatoria que tuviera menos énfasis en lo conceptual. De hecho, ese ha sido el acercamiento clásico que ha tenido la enseñanza del cálculo durante muchas décadas, y sabemos bien que tampoco ha dado un resultado satisfactorio (p.e. ver Hardy, 2008, 2009).

Después de los resultados catastróficos en el aprendizaje del cálculo en los USA (ver p. e. Selden *et al*., 2000) en ese país hubo una reforma curricular para la enseñanza del cálculo dando pie a nuevos libros (Hughes, Gleason *et al*, 1998/1999), cambios estructurales en el aula de matemáticas (Star & Smith, 2006) desde un punto metodológico de la enseñanza, reducción de número de alumnos en el aula para el aprendizaje del cálculo, formación de profesores, etc.

De acuerdo con la investigación de Star & Smith (*Ibid*), analizando varias generaciones de estudiantes del 1er año universitario sobre su actuación en su curso de cálculo, los resultados no son del todo satisfactorios. Otro ejemplo son las cifras que proporcionan los sistemas educativos por ejemplo en Québec, de acuerdo a Odierna (2004), la obtención de un diploma de “Cégep” (6 años de primaria, 5 de secundaria, 2 de Cégep antes de entrar a la universidad) se realiza de la siguiente manera:

- 39% realizan estudios en 2 años; 17% entre 3 y 4 años y 22% en más de 4 años,
- Abandono más elevado : Cálculo diferencial,
- Taza de éxito general es de 75%. En algunos colegios está entre 40 % et 59 %.

En "una palabra", con o sin tecnología, el problema de la enseñanza y aprendizaje del cálculo está vigente.

¿Cómo desarrollar en los estudiantes un pensamiento matemático ligado al cálculo?

Durante varias décadas se ha intentado profundizar sobre el pensamiento algebraico, proporcionando características de ese pensamiento (Kaput, 2008; Kieran, 2007; Artigue, 2012).

Bajo un punto de vista similar al explicado por Artigue (*Ibid*) sobre el camino natural hacia el pensamiento algebraico, podemos preguntarnos sobre un camino también natural para el aprendizaje del cálculo y el desarrollo del pensamiento matemático ligado a él.

Los problemas del aprendizaje del cálculo en los USA no es del todo reciente. De hecho, podemos mencionar que la aparición de los cursos y manuales escolares ligados al “Pre-cálculo” intentaron moderar el choque que tienen los estudiantes al enfrentarse a un curso de cálculo.

Analizando el contenido de algunos libros de Pre-cálculo, no directamente ligados a la tecnología (p.e. Smith, 5th edition, 1979/1993) o con tecnología (p.e. Viglino & Berger, 1998) podemos sintetizar el contenido en: Conceptos básicos de los reales; Funciones y gráficas; Trigonometría; Tópicos avanzados de álgebra y geometría analítica.

De este acercamiento ligado a los cursos de Precálculo podemos deducir dos aspectos:

a) Lo que se considera como los prerrequisitos necesarios para el aprendizaje del cálculo, antes de abordar el concepto de límite, continuidad, tangente, derivada e integral.

b) Una división del curriculum en donde se deben considerar los prerrequisitos del cálculo dada la complejidad de integrar varias ramas de la matemática y después, centrarse sobre los procesos infinitos.

Esto pareciera mostrar un camino natural para promover el aprendizaje del cálculo. Sin embargo, de acuerdo con lo señalado por Star & Smith (*Ibid*) sobre los problemas de aprendizaje del cálculo en los USA, estima que el problema sigue vigente. Ello confirma en cierta manera la crítica de Tall (1991, p. 17) en donde afirma que un camino usual de ciertos autores es creer que un tópico complejo hay que partirlo en piezas menores y que con eso el problema queda resuelto.

En la época actual podemos decir que ese es un acercamiento clásico a la enseñanza del cálculo. Lo que se ha hecho es una división de los programas de estudio en dos partes sin realizar un cambio sustancial semejante a la crítica de Tall (*Ibid*).

Si analizamos las nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo, lo que ha cambiado (p.e. ver el proyecto Harvard: *Cálculo diferencial e integral*, Hughes & Gleason et al., 1999) es el tipo de acercamiento en su enseñanza. Por ejemplo, en ese proyecto, para la enseñanza del cálculo (en donde participaron matemáticos, profesores y didactas de las matemáticas de 11 instituciones) se propone iniciar con el tema de funciones. Nada nuevo con respecto al tema. La diferencia es que la resolución de problemas es importante y el contexto también. Bajo ese punto de vista, inician el segundo capítulo con el concepto de velocidad y de inmediato con la derivada, técnicas de derivación, utilización de la derivada (aquí se incluye el cálculo de máximos y mínimos), la integral definida, construcción de primitivas, integración aplicaciones de la integral definida y finalmente, las aproximaciones y las series.

El primer capítulo se parece mucho a lo que los libros de texto sobre Pre-cálculo presentan. Lo novedoso en este proyecto Harvard es la idea de iniciar con un problema relativo a la física: Lanzamiento de una toronja en el aire para introducir la velocidad media, e ir hacia la velocidad instantánea. Sin embargo, rápidamente se cae en el acercamiento clásico de la enseñanza de la derivada. Es decir, en realidad no hay mucha discusión sobre el fenómeno físico.

Esto nos muestra algunas de las nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo que se relaciona con la introducción de un problema de física en contexto, y el paso a la construcción del concepto de derivada.

¿Esto determina un camino hacia la construcción de un pensamiento matemático en relación al cálculo?

En lo que sigue, nosotros intentamos encontrar soluciones parciales a este problema de aprendizaje enfocándonos al uso de la tecnología en la enseñanza del cálculo, utilizando situaciones problema en contexto y en relación a los libros de texto quebequenses.

Aspectos teóricos

Como lo mencionamos en el párrafo anterior, por un lado, la literatura nos muestra una gran variedad de obstáculos cognitivos de los alumnos relativos al aprendizaje del cálculo, como son el concepto de función, pendiente, tangente, taza de cambio, taza de cambio instantáneo, limites, infinito, velocidad media, velocidad instantánea, derivada. Por otro lado, desde hace una década, muchos investigadores consideran que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas deben estar ligados a procesos de modelación matemática (congresos del CERME; ICME a través del libro de Blum *et. al.*, “*Modelling and applications in mathematics education*“, 2007; el PRIMAS-Project, 2007-20013); de una u otra manera, la influencia de esta nueva tendencia se ha hecho presente en los libros de cálculo, o por lo menos, ese es el caso de los manuales escolares en Québec.

Analicemos esos dos puntos de vista. Si tomamos en cuenta los resultados de Zandieh (2000), ella investiga acerca de los problemas cognitivos de los estudiantes que han llevado exitosamente un curso de cálculo. Zandieh (*Idem*) clasifica a esos alumnos en razón a la respuesta que ellos proporcionan a la pregunta específica: ***What is a derivative?*** Sus datos provienen de su tesis sobre una experimentación realizada en 1997. Con estos datos, fundamentalmente provenientes de la pregunta antes mencionada, ella clasifica a los estudiantes de acuerdo a su respuesta en una tabla como la siguiente:

	Contexto				
	Gráfico	Verbal	Físico paradigmático	Simbólico	Otro
Estratos Proceso-objeto	Pendiente	Razón de cambio	Velocidad	Cociente de diferencias	
Razón de cambio					
Límite					
Función					

Figura 1. Esquema del marco sobre el concepto de derivada.

Zandieh muestra que los problemas de aprendizaje de nociones de cálculo siguen vigentes. Este estudio contrasta considerablemente con los realizados por Selden *et al*., ya que Zandieh muestra los problemas cognitivos para recordar un concepto matemático, mientras que Selden *et al*., muestran los problemas que los estudiantes tienen al resolver problemas no rutinarios de cálculo. Otro enfoque es el de Hardy (*Idem*) en relación al concepto de límite, en donde muestra los obstáculos cognitivos de los alumnos en el cálculo de límites desde una perspectiva institucional (analizando exámenes propuestos durante varios años en una misma institución).

Regresando al estudio de Zandieh, algunos alumnos evocan la noción de velocidad en relación a la pregunta (What is a derivative?), pero Zandieh no les proporciona un problema físico explícito a resolver. En el caso de Selden *et al*., ellos dejan completamente de lado los problemas en contextos físicos. En el caso de Hardy, como lo mencionamos, ella analiza los exámenes propuestos en varios años con respecto al concepto de límite, en una sola institución, y en todos esos exámenes lo que se les solicita a los alumnos es de corte operatorio y no conceptual. En la parte experimental de su tesis, ella propone a los alumnos la clasificación de enunciados sobre el cálculo de límites sin realizar propiamente el cálculo, mostrando los problemas que tienen los estudiantes desde un punto de vista conceptual. En este estudio, el contexto es puramente algebraico. Nuevas tendencias sobre problemas de aprendizaje en contexto son pocos, por ejemplo la tesis de Paéz (2004), Dufour (2010), entre otros.

¿Qué hacer bajo la nueva óptica de la enseñanza del cálculo en contextos físicos como los promulgados por CERME, PRIMAS e ICME? Nuestra posición es que nos acerquemos a los nuevos cambios en la enseñanza del cálculo y propongamos a los profesores de matemáticas nuevas actividades que les permita contar con un apoyo en esta reforma de la enseñanza del cálculo en la escuela pre-universitaria.

Objetivo de investigación

En este documento, queremos analizar la introducción a la derivada en los libros de texto, asociar este análisis con resultados de investigación y proponer una nueva secuencia desde un punto de vista tecnológico.

Metodología

De acuerdo con nuestro objetivo de investigación, la metodología sigue tres etapas:

1ª Análisis de textos actualmente vigentes en el sistema educativo (en nuestro caso en Québec) con respecto al tema de derivada,

2ª Análisis de productos de investigación alrededor de los obstáculos cognitivos que presentan los estudiantes de enseñanza preuniversitaria o de primer año universitario.

3º Propuesta de una nueva secuencia de enseñanza que tome en consideración las dos etapas antes mencionadas y que pueda ser aplicada dentro de un marco de aprendizaje sociocultural con una metodología *ad hoc*, en nuestro caso ACODESA.

Lo ideal sería contar con una 4ª etapa de experimentación y análisis de resultados.

Análisis de textos (1ª etapa)

Iniciamos nuestro análisis de textos con el libro clásico de Cruse & Leman (1971/1982): “Lecciones de Cálculo 1”.

Los autores mencionan que el libro está dirigido para estudiantes de muchas ramas científicas y no exclusivamente para los matemáticos.

En su libro, lo inician con: Dos problemas de optimización, tangente, método de Descartes de raíces iguales, método de Fermat, y así llegan a la definición de derivada.

¿Por qué iniciar con problemas de optimización?

En otros libros de la época, iniciaban completamente con otro acercamiento, por ejemplo, con los números reales, funciones, limites, continuidad y así llegaban a la derivada (Spivak, por ejemplo).

Hemos escogido analizar el libro de Cruse & Leman (versión en Español, 1982) porque está más cercano al curriculum de Québec por competencias y ligado a la resolución de situación problema (existen otros libros de ese tipo escritos en el pasado, p. e. Hervieux, Langois et Dupont, 1971). En realidad la introducción del libro Cruse & Leman (*Idem*) está ligado a la resolución de problemas en contexto y no a la noción de situación problema (ver más lejos la comparación que hacemos al respecto).

En libro de Cruse & Leman, ellos proponen en su introducción a la derivada, trabajar con dos problemas de optimización:

a) El problema de la caja (sin tapa),
b) El problema de la lata de aceite.

Qué podemos decir del problema, que trata sobre la construcción de una caja de volumen máximo a partir de un trozo de papel con medidas determinadas.

1) El problema es de aplicación de la matemática en contexto.
2) La solución es única.

3) Uso de representaciones múltiples, pasando de un dibujo, representación de una figura en el plano, a la representación en el plano de varias cajas para ejemplificar diferentes volúmenes.
4) Representación algebraica.
5) Tabla de valores.
6) Paso a la representación gráfica de la función continua y puntos sobre la curva en relación a la tabla de valores.
7) Observación y decisión sobre el valor que proporcionaría un valor máximo de la función.
8) Discusión para mostrar la necesidad de un proceso de refinamiento para calcular el máximo de la función, promoviendo la idea de que ese punto se conseguiría construyendo la tangente horizontal para el máximo de la curva.

Proceso análogo para el segundo ejemplo con la lata de aceite, en donde el problema es el de calcular el mínimo de material para construir un recipiente cilíndrico de un litro.

Ahora, analicemos un libro de texto actual que sea utilizado en la escuela quebequense; entre los diferentes manuales hemos seleccionado dos de entre ellos: Hamel & Amyotte (2007), Brunel & Désaultels (2011).

Iniciemos con Hamel & Amyotte. Su introducción al concepto de derivada se realiza primero con un ejemplo el llenado de un recipiente en el registro algebraico exclusivamente sobre el cálculo del límite del volumen en un momento dado. El segundo ejemplo es mucho más desarrollado, en donde se proponen varias representaciones con respecto a la actividad: Lanzamiento de una bola hacia arriba (fenómeno utilizado también por Hughes & Gleason et al., *Ibid*).

Las nociones implicadas en el ejemplo de Hamel & Amyotte son las siguientes:

a) Contexto físico. Lanzamiento de una bola,

b) Variables: altura de la bola y tiempo transcurrido.

c) Función. Se proporciona una función que determina la altura de la bola en cualquier instante según las leyes de la física. La función es una cuadrática.

d) Velocidad media,

e) Secante y taza de variación media,

f) Tangente como limite de secantes, tabla de valores,

g) Velocidad instantánea como el límite de las velocidades medias en un instante dado.

Con respecto al texto de Brunelle & Désaultels, el primer ejemplo es general sobre la velocidad de la sangre en las venas y también se desarrolla en el contexto algebraico. En el segundo ejemplo se tratan varias representaciones con respecto a: Trayecto en automóvil de una ciudad a otra. Las características del ejemplo son:

a) Contexto físico. Trayecto en automóvil,

b) Variables: distancia recorrida y tiempo transcurrido.

c) Representación gráfica de una función. Se proporciona la representación gráfica de una función que determina la distancia recorrida por el automovilista en función del tiempo transcurrido. Función estrictamente creciente, derivable, no ligada en principio a ninguna función conocida por los estudiantes.

d) Velocidad media,

e) Derivada como el límite de las velocidades medias en un instante dado.

Posteriormente al ejemplo, se introduce:

e) Taza de variación media y representación gráfica con su correspondiente secante,

f) Derivada como el límite de la taza de variación media.

Doufour (2011) realiza una investigación la cual consiste en observar la introducción al concepto de derivada en el aula de matemáticas por dos profesoras. Que cuenta en su formación con una licenciatura en matemáticas y con 30 años de experiencia, otra con licenciatura y maestría en matemáticas y licenciatura en enseñanza de las matemáticas y con 2 años de experiencia en la escuela secundaria e inicia la impartición de un curso en la escuela preuniversitaria. Las dos utilizan el mismo programa de estudios, el mismo manual (Harel y Hamyotte) y en general trabajan juntas para la impartición de sus cursos de cálculo.

Dufour (*Idem*) nos proporciona los obstáculos cognitivos que tuvieron los alumnos en cada uno de esos cursos, obstáculos de diferente índole, unos ligados a la dificultad de los temas de cálculo, y otros ligados a la manera como se enseña.

La enseñanza de las profesoras es magistral y solamente las profesoras hacen preguntas de tanto en tanto para saber si los alumnos las siguen. Como es usual en estos casos, a la respuesta de la parte de uno de los estudiantes, la profesora se da por satisfecha y prosigue su discurso.

Dufour (*Idem*) muestra la clase de obstáculos cognitivos ligados a la complejidad del contenido que pudo observar en la clase:

a) Dificultades para entender el enunciado. El libro no presenta dibujo alguno, y la profesora no simula el fenómeno en clase. Problemas para representar gráficamente la situación.

b) El concepto de función y la evaluación de elementos del dominio de la función. Por ejemplo, qué significa evaluar f(x+h),

c) Problemas entre la equivalencia de notaciones $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ y $\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$

d) Problemas entre la equivalencia de notaciones $\lim_{t\to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ y $\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$

e) Problemas para entender que $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ representa una función, la función derivada.

Problemas promovidos por la manera como se enseña (profesora con experiencia):

a) La profesora le proporciona poca importancia al contexto físico de las actividades,

b) La profesora le proporciona poca importancia a las representaciones gráficas y a los procesos de conversión,

c) La profesora proporciona una prioridad absoluta a las representaciones algebraicas.

Problemas promovidos por la manera como se enseña (profesora con poca experiencia):

a) La profesora pareciera otorgarle una gran importancia al contexto físico,

b) La profesora pareciera otorgarle una gran importancia a la representación gráfica y procesos de conversión entre la representación gráfica y la algebraica; sin embargo, sus ejemplos de fenómenos físicos los ejemplifica todos con una cuadrática cóncava hacia arriba, mostrando contradicciones en la interpretación con los fenómeno físicos por ella mencionados. Mostrando con ello que la representación gráfica no es prioritaria y que la representación algebraica si que lo es.

b) La profesora pasa de una notación a otra sin proporcionar explicaciones diciendo solamente que son equivalentes, p.e. entre $\lim_{t \to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ y $\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$.

Precisamente, el estudio de Dufour (2011) trata del problema de analizar el comportamiento de los alumnos frente a una tarea en contexto; y lo primero que salta a la vista en este estudio, es que los profesores de matemáticas de su muestra le otorgan poca importancia al contexto y a la conversión entre representaciones, priorizando la representación algebraica.

Nuestra posición es que con estos cambios curriculares, es necesaria una mayor investigación de la enseñanza y aprendizaje del cálculo en situaciones en contextos reales.

Regresando a los dos ejemplos de los manuales escolares podemos decir que en los dos ejemplos introductorios, el lector se lleva la impresión que el contexto físico ha sido poco analizado:

1. En los dos casos, se proporciona la función (en el primero con una expresión algebraica, y en el segundo con una representación gráfica). El estudiante no tiene idea de dónde proviene la representación.

2. No hay una pregunta clave que motive el cálculo de la velocidad instantánea.

Con un acercamiento semejante, pareciera que la motivación se pierde tanto de parte del profesor como del alumno.

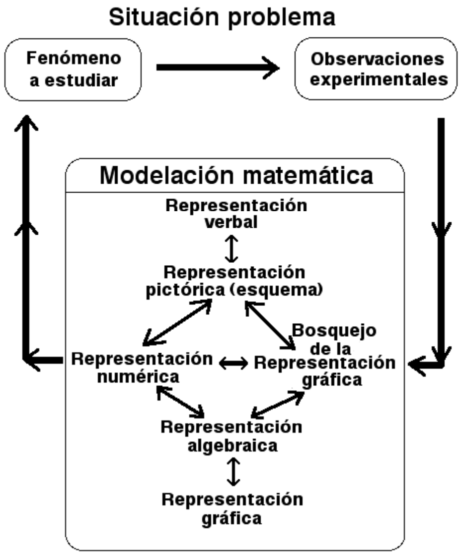
Las situaciones de aprendizaje tendrían que ser mejor seleccionadas en donde pudiera existir más tiempo de reflexión por parte del estudiante con respecto al fenómeno físico en estudio.

Acercamiento clásico Listado de contenidos a presentar en el aula	**Acercamiento en contexto físico** Situación matemática que solicita la intervención activa de los estudiantes para encontrar la solución
1. funciones, 2. límites, 3. razón de cambio, 4. tangente, 5. derivada.	* La situación se puede modelar con una o varias funciones, * La situación promueve el uso de la razón de cambio, secante, * La situación promueve el paso al límite para encontrar una respuesta adecuada, tangente, velocidad instantánea, derivada.

En la columna de la derecha se excluye la definición de derivada que deberá ser tratada por el profesor en un proceso de institucionalización.

Diseño de actividades en la enseñanza del cálculo para el aprendizaje en el aula desde un punto de vista sociocultural

En nuestra propuestas de la enseñanza de las funciones (curso de didáctica y de la variable y las funciones), proponemos situaciones problema que permiten la manipulación de objetos físicos y toma de datos. Bajo esta óptica, la modelación matemática se realiza de manera natural, permitiendo la construcción de expresiones algebraicas y su manipulación respectiva. Precisamente, en Hitt & Cortés (2009), hemos presentado un esquema general:



En forma similar a lo realizado en la enseñanza de las funciones, en este documento nuestra intención es la de proponer una actividad matemática que introduzca a los estudiantes a los procesos de modelación matemática, que tenga algún interés desde un punto de vista tecnológico, y que pueda tratar contenidos matemáticos que nos interesen en un aprendizaje sociocultural; en este caso el concepto de derivada.

Desde un punto de vista metodológico, hemos considerado las nociones de la escuela de Freudenthal (ver Gravemeijer & Doorman, 1999; Doorman & Gravemeijer, 2009), en relación a la "Realistic Mathematics Education and Guided Reinvention". Precisamente, en un medio de aprendizaje sociocultural, esta metodología se muestra interesante e importante: La matemática es vista como una actividad y no como un sistema de signos en donde las reglas ya están dadas y lo que tengo que aprender son los procedimientos. Nuestro diseño de actividades seguirá el punto de vista de Freudenthal.

De acuerdo a los programas vigentes y libros de texto quebequenses, debemos iniciar la enseñanza de conceptos matemáticos con situaciones problema en contexto. Desde ese punto de vista, consideramos importante que la introducción a un curso de cálculo se sigan las siguientes etapas que se describen a continuación:

Etapa 1. Proposición de una situación problema en contexto sobre el cálculo de un máximo o mínimo, de manera a iniciar en el aula una actividad que permita la manipulación de objetos físicos, toma de datos y su representación discreta de esos datos con un software adecuado (GeoGebra, calculadora, etc.).

Etapa 2. Un análisis de los datos discretos y discusión sobre el carácter continuo de la situación. Ello para introducir el polígono que permita unir los puntos discretos en el plano. De hecho, sería importante de discutir la construcción de una función por partes desde un punto de vista geométrico. Su dominio, conjunto imagen (en forma dinámica con el software utilizado).

Etapa 3. Construcción visual de $f(x) = f(x+h)$. Construir el intervalo $[x, x+h]$ y una paralela al eje x que pase por el punto $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$. Encontrar el máximo o mínimo de acuerdo a la situación problema en forma aproximada a partir de un método visual.

Etapa 4. Búsqueda de una expresión algebraica que modele el fenómeno. Realizar lo mismo que en la etapa 3. En este caso, poner énfasis visualmente en el método de Fermat para cálculo de máximos y mínimos.

Etapa 5. Utilizar el método de Fermat desde un punto de vista algebraico y ejemplificado con el software. Encontrar el máximo o mínimo para resolver el problema.

Etapa 6. Discutir sobre la pertinencia del método (incremento no nulo y luego nulo…), discusión de la tangente al máximo y/o mínimo desde un punto de vista visual cuando el incremento es nulo.

Etapa 7. Utilizar una situación problema en contexto de la física. Lo que parece más adecuado es el movimiento horizontal para utilizar conceptos intuitivos de velocidad. La situación debe implicar en forma natural el surgimiento de la pregunta ¿Cuál es la velocidad máxima del objeto que se analiza? Es decir que se considera el paso de la velocidad media a la velocidad instantánea. Nuevamente la situación debe permitir el uso de un paquete que permita el análisis de datos y de funciones. Proponemos el realizar un pequeño film que pueda ser procesado con el software TRACKER (uso libre para PC y Mac) y luego con GeoGebra (uso libre para PC y Mac) u otro paquete con características similares. En este caso, no necesariamente se trata de encontrar el máximo o mínimo de una función, puede ser la búsqueda de un punto de inflexión. El proceso debe ser similar al utilizado en las etapas preliminares.

Etapa 8. Proceso de institucionalización. Introducción de la derivada en el contexto usual.

Siguiendo nuestra propuesta, de hecho, podemos proporcionar una serie de actividades en el aula siguiendo las etapas antes mencionadas.

Etapa 1 a 6. Una actividad clásica transformada a un medio tecnológico. El famoso problema de la cajita de volumen máximo

Con el problema de la cajita, queremos introducir aspectos como:

a) Un acercamiento experimental de las matemáticas,

b) Manipulación de objetos físicos, toma de datos, uso de tecnología (GEOGEBRA),

c) Acercamiento discreto a la solución del problema desde un punto de vista gráfico (GEOGEBRA),

d) Acercamiento continuo a la solución del problema, primero con una función no derivable en algunos puntos, posteriormente con una función derivable, desde un punto de vista gráfico (GEOGEBRA),

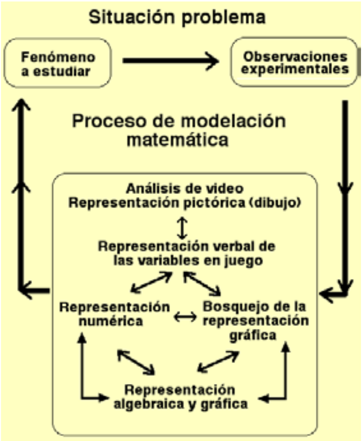
e) Introducción de la secante y tangente horizontal para el cálculo de máximos desde un punto de vista geométrico con GEOGEBRA,

f) Introducción de la notación f(x) y f(x+h) desde un punto de vista gráfico con GEOGEBRA y trabajo en ambiente de papel y lápiz,

g) Introducción del proceso de Fermat sobre la "adegalidad": "$f(x) \approx f(x+h)$" y la tangente en el máximo de la representación gráfica de la función.

Etapa 7. Una actividad en contexto real que pueda ser tratada en un contexto tecnológico. El famoso problema de Aquiles y la tortuga. Nuestra propuesta es sobre el entrenamiento de Aquiles para el gran evento…

Nuevamente como lo hemos señalado, nuestra proposición está pensada para desarrollarse en un medio tecnológico.



Considerando el esquema, la proposición tiene que ver con:

a) Un acercamiento experimental de las matemáticas,

b) Análisis de un video, toma de datos con el paquete TRACKER, tratamiento de los datos con GEOGEBRA,

c) Acercamiento discreto a la solución del problema desde un punto de vista gráfico (GEOGEBRA),

d) Acercamiento continuo a la solución del problema, primero con una función no derivable en algunos puntos, posteriormente con una función derivable, desde un punto de vista gráfico (GEOGEBRA),

e) Introducción de la notación f(x) y f(x+h) desde un punto de vista gráfico con GEOGEBRA y trabajo en ambiente de papel y lápiz y uso de la tangente en conexión a la velocidad instantánea, desde un punto de vista gráfico con GEOGEBRA,

En las dos primeras etapas está muy presente una construcción sociocultural de la matemática. La idea es que las actividades sean propuestas en el aula siguiendo las etapas de la metodología ACODESA.

8a etapa. Proceso de institucionalización

Introducción en forma paralela:

1. velocidad media y velocidad instantánea, representación algebraica,

2. secante y la tangente como límite de las secantes, forma gráfica y algebraica,

3. Reconciliación con el método de Fermat y definición de derivada.

Consideraciones finales

En la introducción a este documento, hemos querido proporcionar una visión de los problemas de aprendizaje del cálculo que subsisten todavía en la época actual. Las reformas en la enseñanza del cálculo no han podido resolver el problema y se sigue buscando soluciones al mismo.

Con la nueva reforma de la enseñanza del cálculo en donde las situaciones problema y procesos de modelación matemática se hacen presentes, nuevos retos se imponen. Nuevamente como en reformas anteriores, los profesores de matemáticas no cuentan con ejemplos claros de qué hacer en el aula, y en muchos casos, los problemas y situaciones problema utilizados en los manuales escolares no están completamente adecuados a las estrategias didácticas del profesor. De hecho, en este nuevo tratamiento de los contenidos del cálculo en los manuales quebequenses, la tecnología no juega el papel que debería jugar. En los libros de cálculo se sigue promoviendo exclusivamente el uso de tecnología para graficar funciones, perdiéndose toda la riqueza que podría proporcionar la tecnología en los procesos de modelación matemática.

Es por ello que en este documento hemos enfatizado elementos teórico-prácticos en el diseño de actividades en ambientes tecnológicos.

Un punto importante en nuestros diseños de enseñanza es la importancia de realizar manipulaciones con los objetos físicos. Es el caso del problema de la cajita de volumen máximo. Una vez desarrollada esa etapa, consideramos el video como herramienta importante para analizar fenómenos físicos. La relación que hacemos entre TRACKER y GEOGEBRA es importante para formalizar procesos de modelación. Tracker nos permite la toma de datos, y GeoGebra su tratamiento para la búsqueda de modelos matemáticos, ya sean desde un punto de vista, geométrico, gráfico y algebraico. Promoviendo si se quiere la articulación entre representaciones que es importante en la construcción de conceptos (Duval, 1993, 1995).

Otro punto fundamental en nuestra propuesta de enseñanza es sobre la importancia del trabajo con papel y lápiz. Es importante el paso de un ambiente a otro para que el aprendizaje sea efectivo. Hasta que no contemos con un uso expedito de herramientas de la escritura natural en alguna tableta electrónica, no es recomendable olvidarse de los gestos al apoyarse en la escritura natural y representaciones pictóricas que realiza el estudiante fuera del ambiente tecnológico para resolver un problema matemático o una situación problema.

Agradecimientos

Agradecemos al Conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada por el apoyo otorgado al proyecto No. 410-2008-1836, CID 130252. Asimismo, queremos agradecer al grupo de alumnos del Dr. Rafael Pantoja en la producción de videos en acuerdo al proyecto de producción de actividades entre las instituciones UdeG-UMSNH-UNISON-UQAM (ver Cortés *et al*. 2011).

Referencias

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7: 245-274.

Artigue, M. (2012). Enseignement et apprentissage de l'algèbre. Consulté le 16 janvier 2013 en http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/

Borbón A. (2003). *Concepciones de profesores sobre varios conceptos del cálculo diferencial*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN. México.

Brunelle, É., & Désautels, M.-A. (2011). *Calcul différentiel*. Les Éditions CEC.

Carlson M. (1998). A Cross-Sectional Investigation of the Development of the Function Concept. *Research in Collegiate Mathematics Education.* Vol. 7, pp. 114-162.

Carlson, Marilyn P. (2002). Physical enactment : a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships. In Hitt F., (ed.), *Representations and mathematics visualization*. (pp. 63-77). Special issue of PME-NA and Cinvestav-IPN.

Cortés C. & Guerrero L. (2012). Programas de cómputo interactivos para crear ambientes tecnológicos para el aprendizaje de las matemáticas. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol. 17, 117-136.

Cortés C., Nesterova E., Grijalva A. & Hitt F. (2011). Proyecto de producción de actividades para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ambientes de papel y lápiz y tecnología entre UMSNH-UNISON-UdeG y la UQAM. En F. Hitt & C. Cortés (Eds.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques*, (pp. 95-100), Montréal : Loze-Dion.

Cruse A. & Lehman M. (1971/1986). Lecciones de cálculo. Introducción a la derivada. México: SITESA.

Doorman, M. & Gravemeijer, K. (2009).Emergent modeling : discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education, 41*, 199-211.

Dufour, S. (2011). *L'utilisation des représentations par deux enseignants du collégial pour l'introduction de la dérivée*. Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 111-129.

Guin D. & Trouche L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*, 195-227.

Guin D. & Trouche L. Eds. (2002). *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. La Pensée Sauvage éditions. Grenoble.

Hamel, J., & Amyotte, L. (2007). *Calcul différentiel* (p. 449). Canada: Édition du Renouveau Pédagogique Inc.

Hervieux M., Langois J-P et Dupont Y. (1971). Limite, Dérivée, Primitive. Montréal-Toronto: Holt, Rinehart et Winston Limitée.

Hitt, F., & Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a Task-Technique-Theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14,* 121-152.

Hitt F., Saboya M. & Cortés C. (2013). Structure cognitive de contrôle et compétences mathématiques de l'arithmétique à l'algèbre au secondaire: Les nombres polygonaux. Actes du congrès CIEAEM65, Turin, Italie, Juillet 2013.

Hughes-Hellett, D, Gleason A-M, *et al*. (1999). Fonctions d'une variable. Traducción de: Calculus: Single variable, 2nd edition. Montréal: Chenelière/McGraw-Hill.

Kaput, J.J. (2008). What is algebra? What is Algebraic Reasoning?. In Kaput, Carraher & Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York : Routledge.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester, Jr., (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kieran, C., & Guzman, J. (2010). Role of task and technology in provoking teacher change: A case of proofs and proving in high school algebra. In R. Leikin & R. Zazkis (Eds.), *Learning through teaching mathematics: Development of teachers' knowledge and expertise in practice* (pp. 127-152). New York: Springer.

Kieran C., Boileau A., Saldanha L., Hitt F., Tanguay D. et Guzmán J. (2006). Le role des calculatrices symbolique dans l'emergence de la pensée algébrique: Le cas des expressions equivalents. Actes de l'*Espace Mathématique Francophone* 2006, Sherbrooke, Québec.

Odierna M. (2004). *Étude de l'enseignement et de l'apprentissage des formes indéterminées*. Mémoire de maitrise non publié. Université de Montréal. Montréal, Québec.

Páez R. (2004). Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y auto reflexión. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN. México.

Pluvinage F. et Marmolejo E. (2011). Une recherche didactique recourant à la modélisation et au travail collaboratif : un cas d'étude de paramètres. En F. Hitt & C. Cortés (Eds.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques*, (p. 11-24). Montréal : Loze-Dion.

Selden A., Selden J., Hauk S. & Mason A. (2000). Why Can't Calculus Students Access their Knowledge to Solve Non-routine Problems? In Ed Dubinsky, Alan Schoenfeld & Jim Kaput (Eds.), *Research Issues in Collegiate Mathematics Education IV*. CBMS Vol. 8, pp. 128-153.

Schwartz B., Dreyfus T. & Brukheimer M. (1990). A model of the function concept in a three-fold representation. *Computers Education*, *14*(3), 249-262.

Smith, K. J. (1979/1993). Precalculus eith graphing and problem solving. 5th edition, California: Brooks/Cole Publishing Company.

Star J. & Smith J. (2006). Un image of calculus reform: student's experiences of Harvard Calculus. In F. Hitt, G. Harel & A. Selden (Eds.), *Research Issues in Collegiate Mathematics Education VI*. CBMS Vol. 13, pp. 1-26.

Tall D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Tall D. (2000). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics education research journal*, Vol. 12, No. 3, p. 210-230.

Thompson P. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theoreme of calculus. *Educational Studies in Mathematics*. 26, 229-274

Viglino G. & Berger M. (1998). Precalculus in light of technology. Pacific Grove: Brooks/Cole Publishing Company.

Zandieh M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In Ed Dubinsky, Alan Schoenfeld & Jim Kaput (Eds.), *Research Issues in Collegiate Mathematics Education IV*. CBMS Vol. 8, pp. 103-127.

Anexo: Actividades a desarrollar en el aula de matemáticas con ACODESA

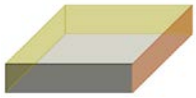
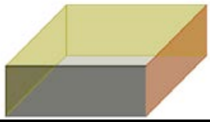
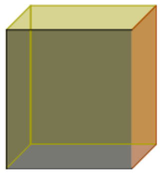
Página 1 Caja sin tapa de volumen máximo

<table>
<tr>
<td>
<u>ACTIVIDAD EN EQUIPO</u>

Nombre del equipo :
____

Nombres de los miembros del equipo :
____
____
____
</td>
<td>
Consignas :

Para el trabajo individual/inicial, utilizar bolígrafo de tinta negra.
Para el trabajo en equipo (o especificar el momento), si tu modificas tu trabajo, utilizar un bolígrafo de tinta roja.
Después del debate en gran grupo (o especificar el momento), si tu modificas tu trabajo, utilizar un bolígrafo de tinta verde.

Caja sin tapa de volumen máximo



</td>
</tr>
</table>

Página 2

Caja sin tapa de volumen máximo

De una pieza de papel de 13,97 cm sobre 10,79 cm (un cuarto de hoja de papel), se puede construir una caja al doblar un cuadrado en las cuatro esquinas para así construir una caja sin tapa. ¿Cuál debe ser la medida de un lado de los cuadrados para que el volumen sea máximo?

Realice un dibujo de la situación:

Preguntas generales:

a) ¿Qué variables podemos tomar en cuenta ?

Página 3

Pregunta a)

Construye tu propia caja para que la compares con tus compañeros.

Mide la altura y el volumen de tu caja.

Página 4

Realiza una tabla de valores con los datos de varios de los participantes y pasa a GeoGebra para hacer una tabla de valores con los datos obtenidos para realizar un análisis visual.

Utiliza la instrucción « línea poligonal » de GeoGebra para tener una mejor visión de la situación.

Construye un punto en el intervalo entre 0 el valor máximo que podría tomar la variable independiente, dibuja una línea vertical a partir de ese punto, el punto de intersección con la curva, una línea horizontal para encontrar un punto del otro lado de la curva y por último, una línea vertical pasando por se punto para encontrar la intersección con el eje de la variable independiente.

Página 5

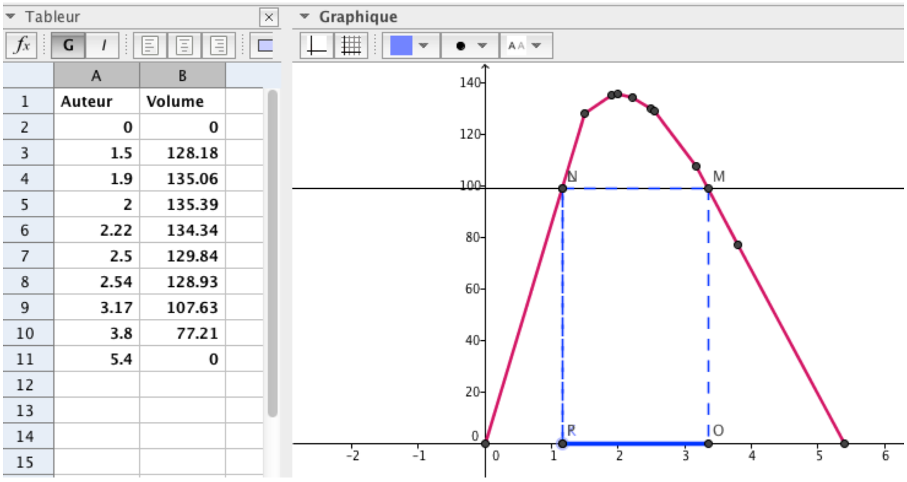
Desplazar el punto libre para visualizar en dónde se encuentra el máximo. De forma aproximada, encontrar el valor de la variable independiente que proporciona el valor máximo.

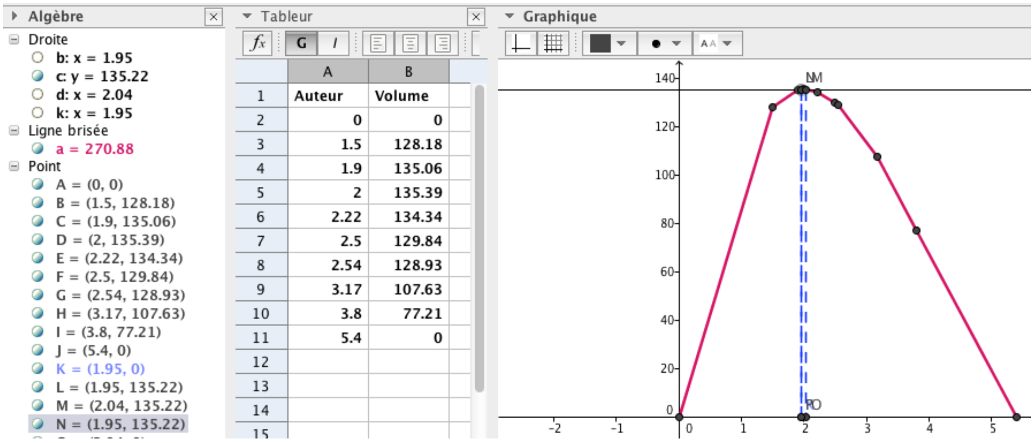
Página 6

Ahora, realiza un análisis algebraico de la situación, para construir una función que modele el fenómeno.

Una vez que se ha obtenido la función, hacer el mismo procedimiento que se ha hecho con la línea poligonal, pero esta vez con la representación gráfica de la función.

Página 7
Realiza un resumen analizando las etapas desarrolladas desde un punto de vista geométrico y algebraico.

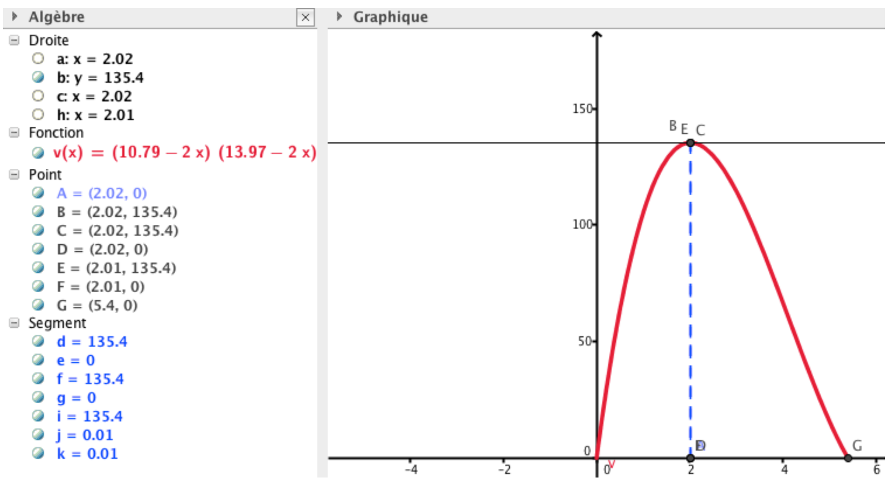




Una aproximación a la resolución del problema es que para una medida del lado del cuadrado de 1.95 cm, obtenemos un volumen de 135.22 cm^3.

El descubrimiento de la fórmula no es difícil. Lo hemos visto con estudiantes egresados del nivel Cégep. Ellos, en un contexto algebraico, proporcionan rápidamente:

Volume (x) = (10,79 – 2 x) (13,97 – 2 x) x



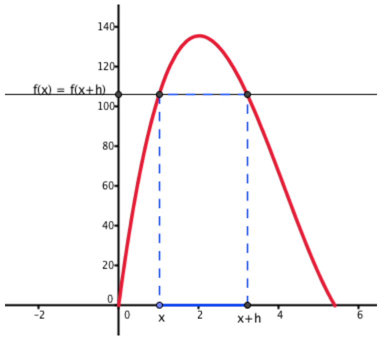
Para x entre 2.01 y 2.02 se obtiene que el volumen es igual a 135.4 cm^3.

Cómo precisar esta aproximación. Veamos el siguiente método debido a Fermat:

Volume (x) = (10,79 – 2 x) (13,97 – 2 x) x

Entonces,

V(x) = V(x+h).



$$V(x+h)=\left[10,79-2(x+h)\right]\left[13,97-2(x+h)\right](x+h)$$

$$V(x+h)=\left[(10,79-2x)-2h\right]\left[(13,97-2x)-2h\right](x+h)$$

$$V(x+h)=\left[(10,79-2x)(13,97-2x)-2h(10,79-2x)-2h(13,97-2x)+4h^2\right](x+h)$$

$$V(x+h)=x\left[(10,79-2x)(13,97-2x)-2h(10,79-2x)-2h(13,97-2x)+4h^2\right]$$
$$+\left[(10,79-2x)(13,97-2x)-2h(10,79-2x)-2h(13,97-2x)+4h^2\right]h$$

$$V(x+h)=x(10,79-2x)(13,97-2x)-2xh(10,79-2x)-2xh(13,97-2x)+4xh^2$$
$$+\left[(10,79-2x)(13,97-2x)-2h(10,79-2x)-2h(13,97-2x)+4h^2\right]h$$

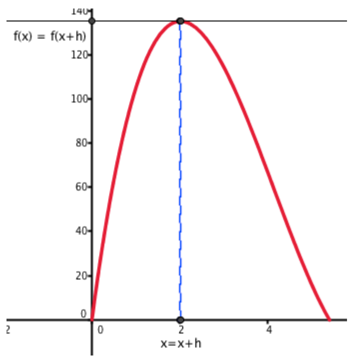
Ya que, ***V(x) = V(x+h),***

$$0=-2xh(10,79-2x)-2xh(13,97-2x)+4xh^2$$
$$+\left[(10,79-2x)(13,97-2x)-2h(10,79-2x)-2h(13,97-2x)+4h^2\right]h$$

Dividiendo la expresión por h, se obtiene:

$$0=-2x(10,79-2x)-2x(13,97-2x)+4xh$$
$$+\left[(10,79-2x)(13,97-2x)-2h(10,79-2x)-2h(13,97-2x)+4h^2\right]$$

Puesto que h es « despreciable »,



$$0=-2x(10,79-2x)-2x(13,97-2x)+(10,79-2x)(13,97-2x)$$

Resolviendo esta ecuación de 2o grado, obtenemos que el máximo se alcanza para x = 2,01289.

Actividad para el aula utilizando ACODESA

Página 1	
ACTIVIDAD EN EQUIPO Nombre del equipo : ________________________ Nombres de los miembros del equipo : ________________________ ________________________ ________________________ ________________________	Consignas : ▪ Para el trabajo individual/inicial, utilizar bolígrafo de tinta negra. ▪ Para el trabajo en equipo (o especificar el momento), si tu modificas tu trabajo, utilizar un bolígrafo de tinta roja. ▪ Después del debate en gran grupo (o especificar el mom si tu modificas tu trabajo, utilizar un bolígrafo de tinta ver Entrenamiento de Aquiles 

Página 2

Entrenamiento de Aquiles

Aquiles está en constante preparación para su competencia con la tortuga.
Dado que la competencia es por etapas, él inicia su preparación con la carrera a pie.

[1]

Puedes analizar el video de Aquiles para responder a las preguntas siguientes:

Preguntas globales:

a) ¿Cuáles son las variables que debemos tomar en cuenta?
b) ¿Cuál es la velocidad media en su primer intento de un lado al otro de la cancha de basquetbol?
c) Si consideramos varios intervalos de tiempo, cuál es su velocidad media para cada intervalo?
d) Si consideramos intervalos de tiempo más y más pequeños, ¿la velocidad media es la misma?
e) ¿Cuál es la velocidad máxima de Aquiles en los primeros 15 metros?

Página 3

Pregunta a)

Analizando el video, ¿Qué variables debemos tomar en cuenta?

Página 4

Pregunta b)

Utilizando el paquete Tracker, determina la velocidad media en la primera etapa.

[1] Video realizado por el grupo de alumnos del Dr. Rafael Pantoja.

Dato necesario en el uso de Tracker: Ancho de la cancha de basquetbol 15 m.

Página 5
Pregunta c) Una vez que se ha fijado el número de cuadros por cada 0.3 de segundo (por ejemplo, 5 cuadros por 0.3 s), el paquete Tracker proporciona una partición de intervalos de tiempo. Calcular la velocidad media para cada intervalo con la ayuda de otro paquete. Por ejemplo, copiar los datos de Tracker a una hoja de Excel o de GeoGebra y proporcionar diferentes representaciones del fenómeno. ¿Es posible de representar el fenómeno con una curva continua? Si la respuesta es sí, ¿cómo construirla? No, explicar por qué no.

Página 6
Pregunta d) Con la ayuda de Tracker, fijar un número más pequeño de cuadros por segundo. Tracker proporciona una partición en intervalos de tiempo más pequeños. Calcula la velocidad media para cada intervalo. Realiza una comparación con lo obtenido en c). ¿Qué puedes deducir de la comparación? ¿Qué sucedería con la representación gráfica si continuáramos con el proceso de reducir los intervalos de tiempo? ¿El fenómeno permitiría el pensar en realizar un proceso de intervalos más cortos?

Página 7
Pregunta e) ¿Sería posible proporcionar una respuesta a la pregunta sobre la velocidad máxima de Aquiles en los primeros 15 metros? Argumenta, explica, calcula, demuestra,…