



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores
del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Directorio

Volumen IX Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2021

ISSN: 2395-955X

Rafael Pantoja R.

Director

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Sección: Artículos de
investigación

Elena Nesterova

Alicia López B.

Verónica Vargas Alejo

Sección: Experiencias
Docentes

Esnel Pérez H.

Armando López Z.

Sección: GeoGebra

SIMULADOR DE UN MODELO DE URNA PARA LA PROBABILIDAD CONDICIONAL EN NIVEL BÁSICO

Fabiola Juárez Morales, Yuridia Arellano García

14423279@uagro.mx, yarellanog@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero, México

Para citar este artículo:

Juárez, F., Arellano, Y. (2021). Simulador de un modelo de urna para la probabilidad condicional en nivel básico. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. IX, No. 2, pp. 25-42. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año IX, No. 2, julio-diciembre de 2021, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: <http://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

SIMULADOR DE UN MODELO DE URNA PARA LA PROBABILIDAD CONDICIONAL EN NIVEL BÁSICO

Fabiola Juárez Morales, Yuridia Arellano García

14423279@uagro.mx, yarellanog@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero, México

Resumen

En este informe se presenta el diseño de un simulador de tómbola (SDT) asociado a un proyecto de enseñanza dirigido a estudiantes de secundaria, para introducir la probabilidad condicionada. Basados en las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) y en un modelo de urna. El SDT se utilizó al desarrollar 5 actividades donde participaron 4 estudiantes de 1° de secundaria, cuyo principal objetivo es el construir un razonamiento probabilístico condicional a partir de la experimentación y observación de eventos por medio de la simulación. El SDT consiste en una aplicación de escritorio en lenguaje de programación C#, la cual simula el juego de la tómbola, con la intención de llevar a cabo la experimentación de forma rápida, fácil y eficaz. Los resultados sugieren un rediseño de la propuesta, ya que no se llegó a concluir la probabilidad condicional, pero se logró promover las ideas de medida de la probabilidad, espacio muestra, combinatoria, variable aleatoria, modelo de urna y simulación y la ley de los grandes números.

Palabras Clave: Probabilidad, Condicional, Simulación, Ideas Fundamentales.

Abstract

This report presents the design of a tombola simulator (SDT) associated with a teaching project aimed at high school students, to introduce the conditional probability. Based on the fundamental ideas of stochastics (Heitele, 1975) and on urn model. The SDT was used when developing 5 activities where 4 students from 1st year of secondary school participated, whose main objective is to build a conditional probabilistic reasoning from the experimentation and observation of events through simulation. The SDT consists of a desktop application in the C # programming language, which simulates the tombola game, with the intention of carrying out experimentation quickly, easily and efficiently. The results suggest a redesign of the proposal, since the conditional probability was not concluded, but it was possible to promote the ideas of probability measurement, sample space, combinatorial, random variable, urn model and simulation and the law of the large numbers.

Key words: Probability, Conditional, Simulation, Fundamental Ideas.

Introducción

En la vida cotidiana nos enfrentamos a situaciones de tipo aleatorio de forma recurrente, muchas veces al elegir una opción se termina usando nuestras creencias, lo cual nos reduce las posibilidades de tomar una buena decisión basada en datos y de forma consciente. Esto se debe a que no fuimos preparados adecuadamente para enfrentar este tipo de situaciones azarosas, esta preparación debe darse desde muy pequeños, para desarrollar nuestro razonamiento estocástico y así poder aplicarlo en el momento que se necesite. Para comprender, analizar y procesar información, esas situaciones demandan de los sujetos

competencias matemáticas asociadas al desarrollo de un pensamiento estocástico (SEP, 2019).

Diversos investigadores señalan la importancia de la enseñanza de los temas de estadística y probabilidad, por ejemplo, Holmes (1980) considera que su estudio es útil para la vida en desarrollo personal o profesional. Herrera (2004) sugiere que se desarrolle en los estudiantes un pensamiento diferente al determinístico, para que puedan ser capaces de distinguir algunas características básicas de la aleatoriedad. Batanero (2000) afirma que los estudiantes deben comprender y apreciar el papel de la estadística en la sociedad, conociendo sus diversos campos de aplicación y el modo en que la estadística ha contribuido a su desarrollo.

La enseñanza de los temas de probabilidad está considerada en el currículo mexicano a partir de 5° de Primaria (SEP, 2017) y se sigue su enseñanza en Secundaria, en 1° se debe trabajar con experimentos aleatorios, la recolección, el registro de datos e identificar el espacio muestra, estos conceptos son la base para que los estudiantes puedan comprender la probabilidad frecuencial. En 2° se introduce la noción de probabilidad teórica de un evento aleatorio y se enfatiza en que se comprenda la diferencia y semejanza entre la probabilidad frecuencial y la teórica. En tercer grado los alumnos deben de aprender a distinguir eventos singulares y no singulares, mutuamente excluyentes, así como la unión de dos eventos y la regla de sumas de probabilidades. Para su comprensión, se sugiere organizar juegos con dados, la recolección de datos en tablas y posteriormente su lectura y análisis (SEP, 2017).

A pesar de que en los programas de estudio se incluyen recomendaciones sobre la enseñanza de los temas de probabilidad, en la práctica a estos temas se le asigna poca importancia, ya que son delegados hasta el final de los contenidos propuestos en los libros de texto y como consecuencia se abordan superficialmente o no son abordados formalmente (Batanero, 2000), ya sea por falta de tiempo o por la poca preparación que tienen los profesores en estos temas (López-Mojica et al., 2018).

Se han llevado a cabo estudios para observar y comprender las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando tienen que realizar tareas donde interviene la aleatoriedad, y en nivel bachillerato se ha encontrado que a los estudiantes se les dificulta la comprensión de los conceptos de probabilidad y entre ellos la probabilidad condicionada e independencia de sucesos. Principalmente, los errores son por confundir la probabilidad condicional con la conjunta (Huerta et al., 2017; Ojeda, 1995), por la incompreensión de los sucesos dependiente e independientes (Megías et al., 2018) o por errores de razonamiento (De la Fuente & Díaz, 2005).

Es por esto que se plantea que la probabilidad condicional e independencia de sucesos debe ser abordada de forma intuitiva desde los niveles iniciales de la educación, implementando las ideas fundamentales de la probabilidad (Heitele, 1975). Para que su aprendizaje sea de forma gradual y continúa garantizando así su comprensión en los niveles superiores.

Basados en las ideas fundamentales se han propuesto actividades para estudiantes de preescolar, primaria y secundaria (Córdova et al., 2009; Lonngi y Ojeda, 2011; López-Mojica y Ojeda, 2014; López-Mojica y Ojeda, 2012), donde se obtuvieron resultados muy favorables en la introducción al pensamiento probabilístico condicional. De igual forma, el incluir diversas situaciones azarosas como urnas, tómbolas y dados favorece en gran medida

alcanzar tales objetivos. Además, se utilizaron simulaciones interactivas implementando software dinámico y se observó que facilita y acelera la experimentación, llegando a la conclusión de que contribuyen a desarrollar o mejorar las intuiciones probabilísticas de los estudiantes (Serrano et al., 2009).

Por todo, el objetivo de este documento es presentar el diseño de una aplicación ligada a una propuesta didáctica para introducir a los alumnos de secundaria en el pensamiento probabilístico, específicamente en la probabilidad condicionada, mediante la experimentación y observación de eventos. Esta propuesta es basada en las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) y en la simulación de un modelo de urna.

Marco Teórico

Ideas fundamentales estocásticas

En López Mojica (2013) se analiza el papel de la enseñanza de estocásticos en cuanto a la relación entre la naturaleza epistemológica del conocimiento matemático y su significado socialmente constituido en la interacción en el aula, resalta el papel de la enseñanza en la constitución progresiva del conocimiento estocástico, el cual requiere de la observancia del triángulo epistemológico (Steinbring, 2005)

El referente teórico principal es Heitele (1975), quien propone 10 ideas fundamentales para el desarrollo del pensamiento estocástico: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra. Las ideas fundamentales estocásticas *“son aquellas que proporcionan al individuo, en cada etapa de su desarrollo, modelos explicativos y que difieren en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural, sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración”* (p.188). Estas ideas son una vía para construir una enseñanza-aprendizaje progresivo del pensamiento estocástico y deben organizarse sobre un currículo en espiral (Figura 1) partiendo de un plano intuitivo hasta arribar en un plano formal, lo cual conduciría a cambiar el estudio de temas o definiciones formales desde un principio por el de ideas o nociones que han de asociarse para su comprensión de manera gradual y continua.

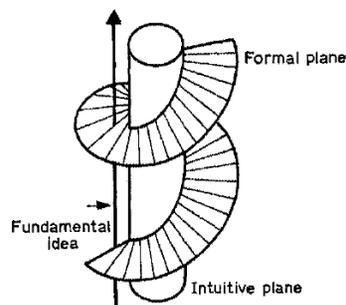


Figura 1. Currículo en espiral (Heitele, 1975).

Enfoques de la probabilidad

López-Mojica y Aké (2019) establecen que para fomentar una comprensión de la probabilidad es necesario desarrollar tres enfoques: intuitivo, clásico y frecuencial.

Enfoque intuitivo de la probabilidad se ha interpretado como el grado de creencia de una persona en la ocurrencia de los posibles resultados de una situación azarosa. (Fischbein, 1975)

Enfoque clásico se interpreta como la razón entre el número de casos favorables con el número total de casos posibles, siempre y cuando éstos sean igualmente posibles. Se tiene que n representa el número de casos favorables del evento A , N es el número total de casos posibles (Laplace, 1812), por lo tanto:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Enfoque frecuencial se interpreta como la estimación de la probabilidad de un evento con base en su frecuencia relativa ($\frac{n_A}{n}$) de ocurrencia en una secuencia grande de repeticiones del fenómeno aleatorio. Es decir, si un fenómeno se repite n veces bajo las mismas condiciones y n_A de los resultados son favorables a ese evento A , el límite de $\frac{n_A}{n}$, conforme n se vuelve grande, tiende a la $P(A)$.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

Probabilidad condicional

Intuitivamente se puede decir que la probabilidad condicional $P(A/B)$ de un suceso A dado otro suceso B es la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B se ha verificado. En un plano más formal, se define con la expresión $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$, siempre que $P(B) > 0$. La probabilidad condicionada está relacionada con la independencia, puede decirse que A y B son independientes si y sólo si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, es decir dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionar por el otro.

Se considera la construcción de los conocimientos estocásticos como un proceso derivado de la interacción de los individuos con su entorno social.

Metodología

Secuencia didáctica

Se diseñaron 5 actividades que parten de un modelo de urna, la experimentación a través de la simulación es importante para que el alumno observe y pueda reflexionar acerca de los resultados que se obtienen y con esto pueda pasar de un pensamiento determinista a uno probabilístico. El modelo de urna elegido es el juego de la tómbola, con el cual los estudiantes pudieron relacionar la probabilidad con un tema real y donde realizó las pruebas necesarias para poder observar los diferentes eventos que pueden suceder.

El juego de la tómbola consiste en introducir a la urna canicas de diferentes colores (rojo, azul, amarillo y verde) y cantidades, al inicio del juego se informa a los participantes el número de canicas y las cantidades (que van a variar en cada jugada). Se extraerán 2 canicas consecutivamente (con o sin reposición), los participantes deben inscribirse en el concurso y apostar al color de canica que creen saldrá en la primera y posteriormente en la segunda

extracción, si adivinan la primera se le devuelve la apuesta y si adivina la segunda gana el doble de su apuesta. El costo del boleto es de \$30.00 y solo se venderá un boleto por cada resultado posible.

Las actividades fueron separadas en dos secciones. En la sección 1 se diseñaron 2 actividades para abordar eventos independientes equiprobables e introducir el concepto intuitivo de probabilidad simple y condicional a través de las ideas de **medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la suma, equidistribución y variable aleatoria**.

En la sección 2 se diseñaron 3 actividades en las que se trabajó con eventos independientes y dependientes no equiprobables, donde se llevó a cabo la fase de experimentación por medio del SDT, se buscó promover especialmente **la ley del producto e independencia, modelo de urna y simulación y la ley de los grandes números**. Para poder observar resultados precisos, los juegos debieron realizarse un gran número de veces, es por esto por lo que se diseñó una aplicación de escritorio que simula el juego de la tómbola, fue desarrollada en lenguaje de programación C#, donde el usuario puede interactuar de forma dinámica. En cada juego, se pueden realizar extracciones al azar o extraer un color específico (rojo, amarillo, azul y verde). Los estudiantes pueden calcular la probabilidad de la primera y segunda extracción, en caso de equivocarse se les genera un mensaje con una retroalimentación y se les permite intentarlo las veces necesarias. Cabe resaltar que la aplicación fue diseñada especialmente para ser probada en este proyecto, para posteriormente realizar las mejoras necesarias y así poder implementarla en trabajos futuros.

La aplicación SDT

El SDT fue desarrollado en lenguaje de programación C# el cual permite crear aplicaciones de Windows Forms en Visual Studio. La figura 2 muestra las pantallas principales del SDT:

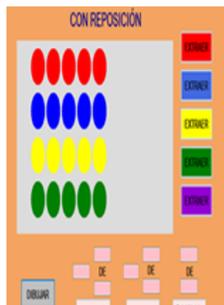


Pantalla inicial

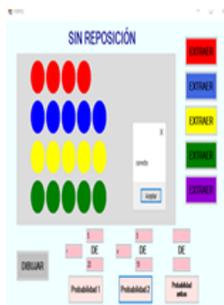
El SDT fue desarrollado en lenguaje de programación C# el cual permite crear aplicaciones de Windows Forms en Visual Studio.



Al dar clic a botón JUGAR enlaza al Form2, donde se van a introducir en cajas de texto la cantidad de canicas requeridas para cuatro colores diferentes y se elige si serán extracciones con reposición o sin reposición (figura 4). Se recomienda que el número máximo de canicas que se introduzca a la tómbola por cada color sea de 10, esto porque el contenedor donde se dibujaran las canicas tiene dimensiones reducidas.



Si se eligen extracciones con reposición, enlaza al Form4, se pueden extraer canicas específicas o de forma aleatoria (botón morado). Después de realizar una primera extracción la canica se devuelve automáticamente al contenedor, con el propósito de que las extracciones sean más rápidas y dinámicas



En caso de que se elijan extracciones sin reposición, enlaza al Form3 en el cual se realizan las mismas acciones que en el Form4, con la diferencia que las canicas no son devueltas al contenedor, para que lo estudiantes puedan diferenciar la dependencia e independencia de sucesos y observar que cuando los eventos son dependientes el resultado de la primera extracción afecta la probabilidad de la segunda.

Figura 2. Pantallas de la aplicación SDT.

Se espera que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos para proponer una medida de la probabilidad acerca del color que creen saldrá en la primera extracción, para posteriormente realizar la experimentación y llevarlos a calcular la probabilidad teórica para

la primera extracción y posteriormente para la segunda. Se diseñó un espacio donde los estudiantes podrán calcular y proponer la probabilidad teórica para la primera extracción, se comprueba si su cálculo es correcto, en caso de equivocarse se les genera un mensaje con una retroalimentación y se les permite intentarlo las veces necesarias (Figura 3). Después de haber calculado de forma correcta la Probabilidad de la primera extracción, los estudiantes deben calcular la probabilidad de la segunda, teniendo en cuenta el primer resultado (probabilidad condicionada) y observar si la probabilidad de la segunda extracción se ve afectada por la primera. Si son extracciones con reposición el segundo resultado no será afectado (independencia). Para la segunda extracción también se podrá comprobar si lo propuesto es correcto o incorrecto y llevar al estudiante a reflexionar sobre la probabilidad condicionada e independencia de sucesos.

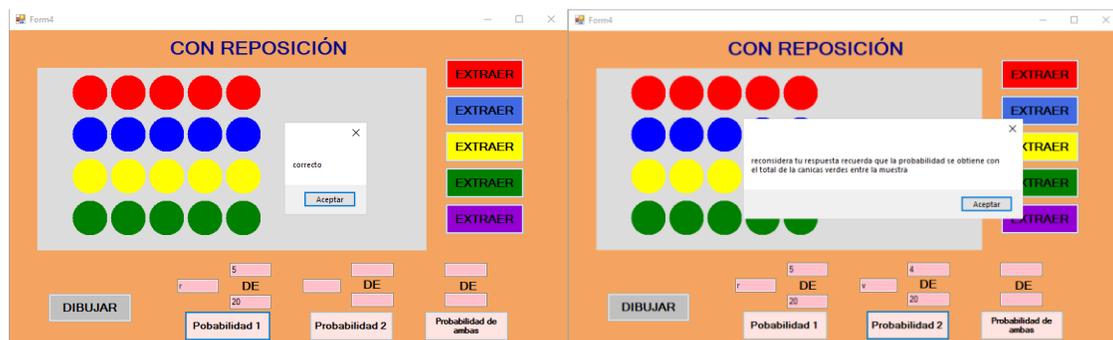


Figura 3. Comprobar probabilidad y mensajes de retroalimentación.

Para poder simular el juego de la tómbola, se programaron diversas *Funciones* que ejecutan acciones importantes, por ejemplo:

- Almacenar los datos introducidos por el usuario: por ejemplo, si se introducen a la tómbola las siguientes canicas rojo=3, azul=4, amarillo=1 y verde=2. Se genera un *Arreglo unidimensional* (Figura 4) cuya función es guardar los datos de forma temporal, para posteriormente utilizarlo para dibujar las canicas, elegir una canica de forma aleatoria, borrar la canica extraída, etc. Este *Arreglo* debe tener una dimensión, la cual se obtiene sumando el total de canicas para cada color, en este caso 10. Los datos que se guardan en cada posición, tienen asociado un *Identificador* que sirve para acceder fácilmente a los datos.

Identificador	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dato	rojo	rojo	rojo	azul	azul	azul	azul	amarillo	verde	verde

Figura 4: Arreglo que almacena los colores de las canicas

- Dibujar las canicas en el contenedor: para esto se usa el Método *CreateGraphics*, el cual requiere de los datos almacenados en el *Arreglo*. Las canicas se dibujan en una fila de forma ordenada dependiendo del color, esto hace al SDT más llamativo para los estudiantes.

- Extraer una canica de forma aleatoria: para esto se implementa la *Clase Random*, la cual genera un número *aleatorio* tomando en cuenta la dimensión del *Arreglo* (0, 9). Si *aleatorio*=5, se busca el identificador 5 y extrae el color guardado en esa posición, en este caso la canica de color azul.
- Extraer un color de canica específico: para abordar la probabilidad condicionada se requiere saber con anticipación el color de canica que resultó en la primera extracción, por ejemplo, se plantean situaciones como: Si en la primera extracción salió una canica roja ¿qué probabilidad hay que en la segunda salga una bola verde? Para cubrir esta situación se programaron botones que el estudiante decide si extrae un color rojo, azul, amarillo o verde, para posteriormente poder observar el nuevo espacio muestral y calcular la probabilidad.
- Comprobar la probabilidad propuesta por los estudiantes y emitir mensajes de retroalimentación: para comprobar la probabilidad para cada color y extracción, en el simulador se incluyen ecuaciones que calculan la probabilidad clásica para cada color en su forma de razón, por ejemplo, si necesito saber la probabilidad de que en la primera extracción salga una canica verde, el programa cuenta el total de canicas verdes y las compara con la cantidad propuesta por el alumno, posteriormente cuenta la cantidad total de canicas que hay dentro de la tómbola y lo compara por lo propuesto por los estudiantes, si las cantidades coinciden, se manda un mensaje que indica que la probabilidad propuesta es correcta, de forma contraria, se manda un mensaje con una retroalimentación para que el estudiante reconsidere su respuesta.

Estas son solo algunas *Funciones* importantes que dan sentido al SDT, además cabe resaltar que la aplicación fue diseñada especialmente para ser probada en este proyecto, para observar algunas ventajas o deficiencias para posteriormente realizar las mejoras necesarias y así poder implementarla en trabajos futuros.

Prueba piloto

La prueba piloto se desarrolló en cuatro fases (Diagrama 1). La primera es de planeación, se tomaron decisiones acerca de la población objetivo, los temas a trabajar, el marco teórico y la metodología a seguir. La segunda es de diseño inicial, se propusieron actividades iniciales, basados en el marco teórico y los objetivos propuestos. La tercera es de prueba, se realizó un experimento con los estudiantes de secundaria en modalidad mixta, la sesión fue videograbada para su posterior análisis. La cuarta es de análisis, tras la puesta en escena se consideraron los resultados obtenidos en contraste a los objetivos propuestos.

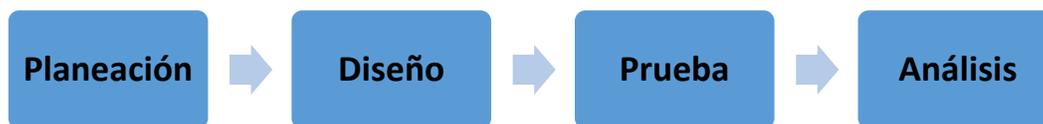


Diagrama 1. Fases del la prueba piloto.

Se trabajó con cuatro estudiantes de 1° de la Escuela Secundaria Pública Moisés Sáenz de Acapulco Guerrero, tres mujeres (M1, M2, M3) y un hombre (H1) con edades de 12 años,

quienes aceptaron participar voluntariamente y cuyos tutores fueron informados. Los estudiantes presentan promedio de entre 7 y 8, de carácter reservado, poco participativos, pertenecen a un nivel socioeconómico bajo y están poco familiarizado con el uso de las TIC.

Resultados preliminares y análisis

Las 5 actividades se llevaron a cabo en una sola sesión de trabajo con una duración de 2 horas 30 minutos aproximadamente. Durante la sección 1 se observaron respuestas que evidenciaron una comprensión intuitiva de medida de la probabilidad, espacio muestra equidistribución y variable aleatoria. Posteriormente, conforme se desarrollaba la sección 2 y con la interacción constante con el simulador de la tómbola los estudiantes lograron comprender las ideas de modelo de urna y simulación, la ley de los grandes números y un primer acercamiento a la probabilidad condicional e independencia de sucesos.

Medida de la probabilidad

En la actividad 1 se propone una situación en la que se plantea que dentro de la tómbola hay 5 canicas azules, 5 rojas, 5 amarillas y 5 verdes (sin usar el SDT) se les pregunta ¿Qué color de canica sería conveniente elegir para que le regresen su apuesta? Los estudiantes plantearon respuestas intuitivas como “*es muy posible* que salga la bola amarilla, porque es mi color favorito” (M1), hasta “*hay mucha posibilidad* que salga una bola roja, porque hay más bolas de ese color” (M3).

Posteriormente se pregunta ¿Qué canicas sería conveniente elegir para que se ganen el doble de su apuesta? La respuesta emitida “Elegiría amarillo-verde porque son los dos colores que más me gustan” (H1), todos los estudiantes eligieron por intuición ya sea por color favorito, de la suerte o solo por decir un color.

En la actividad 2 se les muestra a los estudiantes el SDT, se les explica su funcionamiento e interactúan con él. Se les plantea la siguiente situación: Si sacas dos canicas sucesivamente, con reposición ¿qué probabilidad hay de tener el doble de la apuesta si se eligen los colores rojo-rojo? Al observar las canicas en el simulador y el realizar las extracciones con reposición, pudieron evolucionar en su respuesta pasando del enfoque intuitivo al enfoque clásico. Por ejemplo, la estudiante M3 respondió “*para rojo es 5 de 20 y para rojo otra vez es 5 de 20*”.

Equidistribución

En la actividad 1 se esperaba que se observara la situación de equiprobabilidad e independencia y respecto a esto argumentaran que todos los colores tenían la misma probabilidad de salir en la primera y segunda extracción, sin embargo, los 4 alumnos dijeron que era “*muy posible*” que saliera el color que eligieron. En la actividad 2, al llenar la tómbola con la misma cantidad de canicas para cada color y el realizar extracciones con reposición, los estudiantes pudieron observar que no importa la combinación de canicas que se elija, ya que al ser las mismas cantidades y el estar devolviendo la canica a la tómbola la probabilidad que se tiene de ganar son las mismas para todos los casos.

Espacio muestra y combinatoria

Estas ideas fundamentales se pudieron promover en la actividad 2 (equiprobabilidad e independencia) y en la actividad 3 (no equiprobabilidad con dependencia e independencia), donde se les pregunta ¿Qué combinación de colores tendrían los boletos que se vendan? La idea principal es que ellos puedan realizar las combinaciones posibles para cada boleto y a partir de esto obtener el espacio muestra para dos extracciones. En un primer momento, los estudiantes no pudieron comprender la pregunta, pero se les explicó que se refería a los resultados posibles para la primera y segunda extracción. En una primera propuesta solo identificaron los 4 colores para la primera extracción (rojo, azul, amarillo y verde) y 4 colores para la segunda (rojo, azul, amarillo y verde), sin realizar combinaciones. Para orientarlos, se realizaron algunos juegos con el SDT, para que pudieran observar algunos resultados posibles para las dos extracciones, los estudiantes anotaron los primeros resultados (azul-rojo, verde-amarillo, rojo-rojo), se les preguntó qué otras combinaciones podrían resultar, trabajando en conjunto poco a poco identificaron los resultados posibles para la primera y segunda extracción (Figura 5).

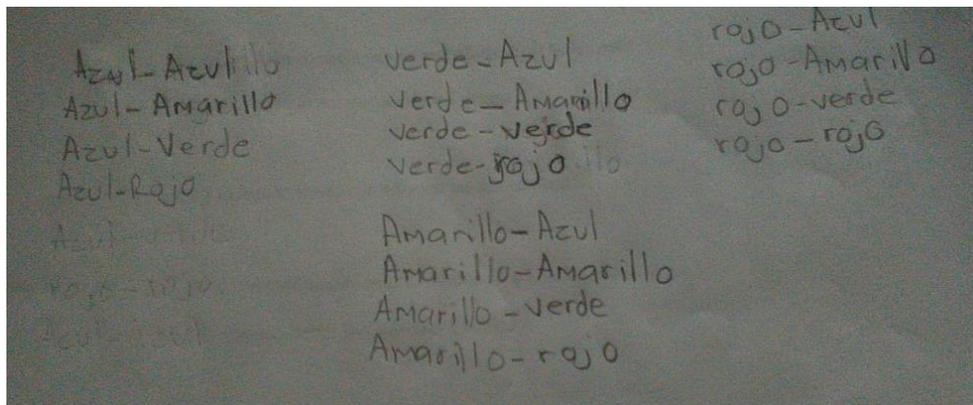


Figura 5. Resultados posibles para la primera y segunda extracción (M2).

Al término de estas actividades se obtuvieron 16 combinaciones posibles, es decir 16 boletos a vender.

Regla del producto e independencia

Esta idea fundamental fue el objetivo principal de la clase, ya que en ella se aborda la probabilidad condicional e independencia de sucesos. Para lograr este objetivo, se dibujaron en una diapositiva PowerPoint las combinaciones propuestas por los estudiantes, posteriormente usaron el simulador para proponer y comprobar las probabilidades para la primera y segunda extracción de las actividades 2 y 3 (Figura 6). En la figura 7 se muestra evidencia que lograron calcular la probabilidad para la primera y segunda extracción por separado y comprender que el espacio muestra no se modifica cuando son extracciones con reposición ya que son eventos independientes y que cuando son extracciones sin reposición el espacio muestra se modifica para la segunda extracción. Sin embargo, al realizar el producto de las probabilidades no supieron mencionar el porqué de los resultados. Esto evidencia que hubo un primer acercamiento a la comprensión de la probabilidad condicionada con dependencia e independencia de sucesos, sin embargo, requiere que se

dedique más tiempo y nuevos recursos para su enseñanza, los cuales serán contemplados para un rediseño.

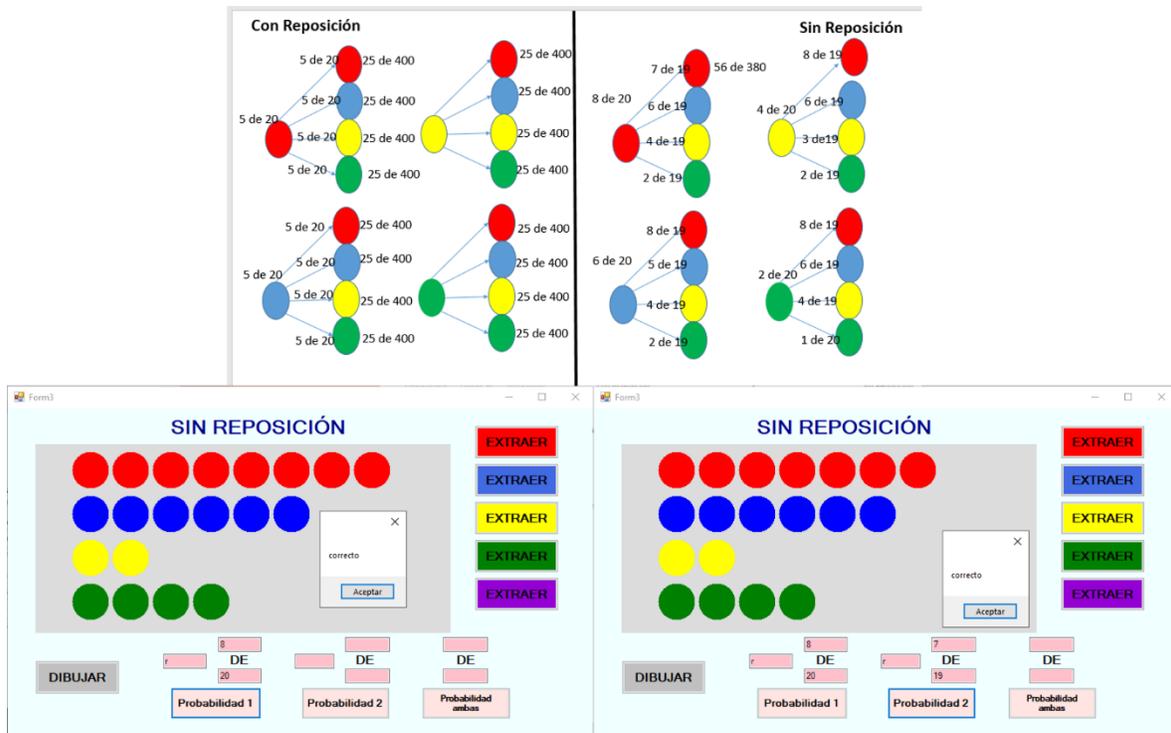


Figura 6. El SDT para comprobar las probabilidades.

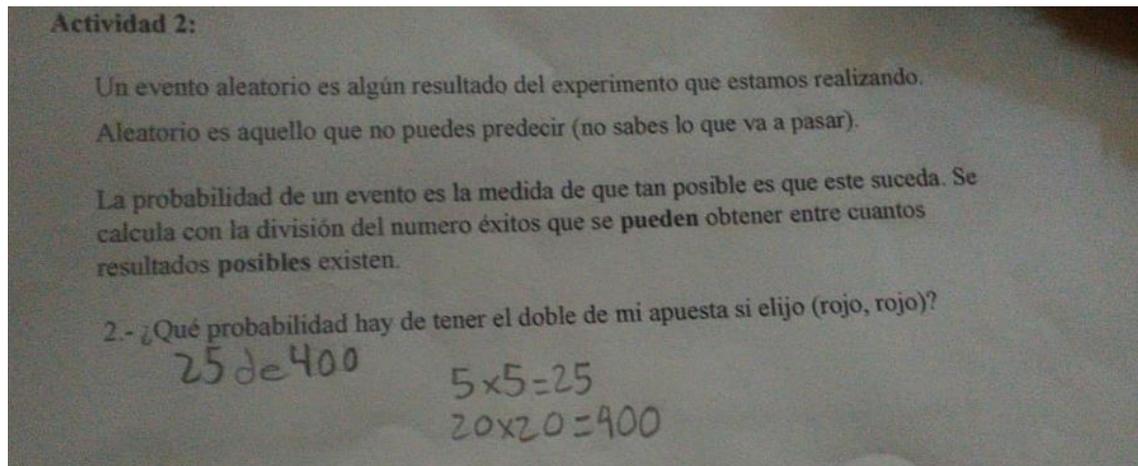


Figura 7. Producción de la estudiante M3

La probabilidad condicionada se aborda en esta idea fundamental y la mayor parte de las preguntas están diseñadas para promoverla, ya que, al proponer la probabilidad de la segunda extracción, los estudiantes debían analizar los resultados obtenidos en la primera y a partir de esto calcular la probabilidad de la segunda.

Modelo de urna y simulación

En la fase de experimentación (sección 2) se realizaron dos simulaciones con diferente número de canicas para cada color, Utilizando el SDT (Figura 8) los alumnos realizaron extracciones aleatorias y visualizaron los resultados para cada juego. En la simulación 1 (actividad 4) se introdujeron a la tómbola 8 canicas rojas, 6 azules, 4 amarillas y 2 verdes, antes de realizar los juegos se les pide que en equipo acuerden una combinación de colores para apostar, la estudiante M3 elige rojo-rojo, los estudiantes M1, M2 y H1 eligen rojo-azul, por mayoría se quedan con la combinación rojo-azul. Se realizaron dos extracciones sucesivas 30 veces, las estudiantes M1 y M3 realizaron los juegos en el SDT y los estudiantes M2 y H1 registraron los resultados en una tabla de frecuencia que les fue proporcionada. En los resultados pudieron observar que la combinación (rojo-rojo) se repitió 11 de 30 (Figura 9), la combinación que ellos eligieron se repitió 5 de 30. Al final de la actividad se les preguntó si cambiarían su decisión para un nuevo juego con las mismas características, a lo cual contestaron que la cambiaban a rojo-rojo, al observar que esa combinación de colores se obtenía más veces en los resultados. Con la simulación ellos pudieron darse cuenta de que la combinación con más probabilidad de ganar era rojo-rojo y a partir de esto repensar su decisión.



Figura 8. Juegos realizados usando el SDT en la simulación 1.

BOLETOS VENDIDOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	FRECUENCIA
ROJO-ROJO																															11/30
ROJO-AZUL																															5/30
ROJO-AMARILLO																															2/30
ROJO-VERDE																															1/30
AZUL-ROJO																															5/30
AZUL-AZUL																															1/30
AZUL-AMARILLO																															0/30
AZUL-VERDE																															1/30
AMARILLO-ROJO																															3/30
AMARILLO-AZUL																															0/30
AMARILLO-AMARILLO																															0/30
AMARILLO-VERDE																															0/30
VERDE-ROJO																															0/30
VERDE-AZUL																															0/30
VERDE-AMARILLO																															1/30
VERDE-VERDE																															0/30

Figura 9. Resultados registrados en la tabla de frecuencia de la simulación 1.

Ley de los grandes números

En la simulación 2 (Actividad 5) los estudiantes debían proponer la cantidad de canicas a introducir en la tómbola, decidieron jugar con 5 rojas, 6 azules, 2 amarillas y 3 verdes, con extracciones sin reposición (Figura 10). Debían de acordar una combinación para apostar y

posteriormente realizar el juego 30 veces, en esta ocasión los estudiantes M2 y H1 realizaron los juegos en el SDT y las estudiantes M1 y M3 registraron los resultados en la tabla de frecuencia, decidieron apostar a la combinación azul-rojo, en este caso esa combinación y la azul-azul, son las que tenían mayor probabilidad de salir. Por cuestiones de tiempo solo se realizaron 10 juegos (Figura 11) por lo cual no se pudo observar la combinación de colores con mayor probabilidad de ganar. Para solucionar este problema, se les preguntó a los estudiantes el porqué de estos resultados, a lo cual la estudiante M2 respondió que en la simulación 1 se habían realizado 30 juegos y que tal vez debían completar los 30 juegos para poder tener mejores resultados.

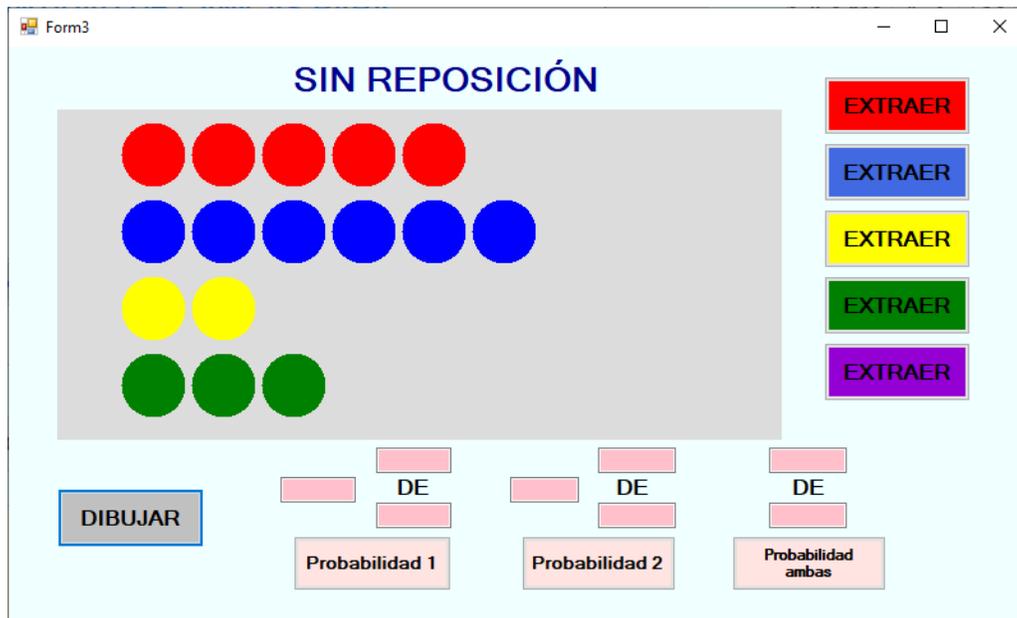


Figura 10. Juegos realizados usando el SDT en la simulación 2.

BOLETOS VENDIDOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	FRECUENCIA
ROJO-ROJO											2/10
ROJO-AZUL											1/10
ROJO-AMARILLO											1/10
ROJO-VERDE											0/10
AZUL-ROJO											2/10
AZUL-AZUL											0/10
AZUL-AMARILLO											0/10
AZUL-VERDE											2/10
AMARILLO-ROJO											0/10
AMARILLO-AZUL											1/10
AMARILLO-AMARILLO											0/10
AMARILLO-VERDE											0/10
VERDE-ROJO											1/10
VERDE-AZUL											0/10
VERDE-AMARILLO											0/10
VERDE-VERDE											0/10

Figura 11. Resultados registrados en la tabla de frecuencia de la simulación 2.

Conclusiones

Sobre las ideas fundamentales

La implementación de las ideas fundamentales en este proyecto de aprendizaje, fueron muy significativas, ya que se pudo introducir a los alumnos el concepto de probabilidad. Si bien no se llegó a concluir la probabilidad condicional ni a la ley del producto, es plausible mejorar tanto la secuencia como el simulador, además de agregar otros recursos tecnológicos. Se pudo observar que antes de trabajar con el simulador, los estudiantes se mostraban un tanto frustrados o aburridos, posteriormente se observó un cambio de actitud, ya que se les permitió interactuar con el software mostrando más participación y entusiasmo.

Nos gustaría resaltar que, en la medida de la probabilidad, los alumnos llegaron a significar “mayor probabilidad”, “menor probabilidad”, “ninguna probabilidad”, como términos probabilísticos, pudieron obtener el espacio muestra e imaginar posibles resultados con ella, comprender que la extracción de canicas es un evento aleatorio y que la simulación nos ayudó a visualizar los resultados. Si bien no se logró enunciar la *regla del producto e independencia*, obtuvo las probabilidades por separado y realizó la operación, es decir, sabía que la probabilidad de las dos extracciones se modifica con o sin reemplazo. Además, los estudiantes sospecharon que la manera de obtener resultados más “estables” debe realizar una cantidad de experimentos mucho mayor (ley de los grandes números intuitivamente).

Sobre los enfoques de probabilidad

En la actividad 1 se pudo identificar en primera instancia que los estudiantes no toman en cuenta los datos disponibles para tomar decisiones en situaciones donde intervienen la aleatoriedad, es decir, las decisiones son con base en sus creencias (enfoque intuitivo). El implementar el SDT en la actividad 2 ayudó a que los estudiantes pudieran visualizar las canicas dentro de la tómbola y por medio de esto reflexionar detenidamente acerca de los colores que tienen mayores posibilidades de salir en la primera y segunda extracción en una situación de equiprobabilidad e independencia de sucesos.

El STD ayudó a desarrollar de forma exitosa el enfoque frecuencial, ya que por medio del realizar los juegos cierta cantidad de veces y el registro de los datos en la tabla de frecuencia permitió que los estudiantes observaran los eventos que tienen mayor probabilidad de suceder, por lo menos en la simulación 1. A partir de esto pudieron reconsiderar su decisión inicial y decidir apostar a la combinación de colores con mayor probabilidad de ganar, tomando en cuenta los juegos realizados.

Se considera que hubo un acercamiento al enfoque clásico, ya que los estudiantes pudieron medir la probabilidad de que un cierto color de canica pudiera salir en la primera y segunda extracción, tomando en cuenta los casos favorables y todos los casos posibles.

Sobre la aplicación SDT

El SDT es una aplicación de escritorio que requiere ser ejecutada en una computadora, los estudiantes que participaron en la prueba piloto son de bajos recursos económicos que solo cuentan con un celular para llevar a cabo sus clases. Por lo tanto, esta situación representa una limitante ya que solo los estudiantes que cuentan con computadora pueden acceder a la aplicación y experimentar con ella. El SDT acelera el proceso de las extracciones y los

estudiantes deben registrar los resultados obtenidos en tablas de frecuencia para que puedan observar y comparar, este proceso es importante ya que los ayuda a comprender la probabilidad frecuencial, sin embargo, para obtener resultados claros se deben de realizar los juegos un gran número de veces (ley de los grandes números), lo cual no es posible por el tiempo que se requiere.

Para solucionar estos problemas detectados, proponemos diseñar una versión web del SDT que permita a los estudiantes acceder desde ambos dispositivos. Además de incluir una sección que ejecute juegos automáticamente (desde 10 hasta 1000000) donde se les presente a los estudiantes los resultados obtenidos y ellos se dediquen a realizar graficas de barras donde representen esas frecuencias y con esto se les haga más fácil visualizar las variaciones en los resultados y con esto significar la probabilidad frecuencial y la ley de los grandes números, y a través de esto se pueda arribar y relacionar con la probabilidad teórica.

Sobre futuras investigaciones

El desarrollo de la secuencia didáctica propuesta no concluyó con su objetivo principal, la probabilidad condicional e independencia de sucesos, por lo que un rediseño de la actividad es necesario, la experiencia de la prueba piloto nos muestra posibles vías. Sin embargo, más allá de ello consideramos que futuras investigaciones pueden enfocarse en la comprensión de las ideas fundamentales desarrolladas por este tipo de diseños enfocados en la simulación. También consideramos plausible la propuesta de más situaciones ligadas a la modelación y experimentación con ayuda del simulador SDT, que pueden resultar provechosas para el desarrollo del pensamiento estocástico en estudiantes de secundaria; hemos concluido que es posible introducir (desde el enfoque intuitivo) conceptos complejos a través del uso de la simulación.

Por otro lado, futuras investigaciones pueden replantear la estructura de presentación de las ideas fundamentales propuestas en este trabajo o contrastarla con otros grupos de interés, en tanto a que los enfoques de probabilidad muestran ser productivos.

Sobre implicaciones para la enseñanza

El diseño e implementación del SDT puede mejorar los tiempos en que se desarrolla una clase de probabilidad en un salón de secundaria, ya que como se sabe, estos contenidos son delegados hasta el final y la mayoría de las veces no se abordan. De igual forma el uso de la tecnología causa un gran revuelo en los estudiantes y como docentes debemos aprovechar esta situación y usarla a nuestro favor, en este caso, el uso del SDT ayudó a visualizar extracciones aleatorias y por medio de esto se mejoraron las intuiciones probabilísticas.

Se diseñó una secuencia didáctica que se desarrolla implementando el SDT, el cual después de realizar las mejoras necesarias, estará disponible en internet en su versión de escritorio y posteriormente en una versión web, para que otros profesores puedan realizar sus propios diseños didácticos, para trabajar diversos contenidos de probabilidad con sus estudiantes y con esto dejar de lado la enseñanza tradicional y más importante aún, hacer la invitación a no dejar de lado la enseñanza de estos temas ya que son de gran importancia en diversos contextos de la vida.

Por otro lado, también es importante recalcar que la enseñanza no debe limitarse a solo usar este tipo de recursos tecnológicos, si no que debemos de usarlos como complemento, ya que como se puede ver en los resultados de esta investigación, hizo falta implementar otro tipo de recursos didácticos para que se pudiera significar de forma exitosa la ley del producto y la probabilidad condicionada.

Referencias

- Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 15, 2–13.
- De la Fuente, I., & Díaz, C. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon: Revista de La Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”* 59, 245–260.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2), 187–205.
- Herrera, E. (2004). Desarrollo del pensamiento estocástico. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., 17, 735–739
- Holmes, P. (1980). Teaching Statistics. *Sloug: Foulsham Educational*, 11–16.
- Huerta, M. P., España, U. D. V., Arnau, J., Pío, C., & Valencia, X. I. I. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 87–106.
- Laplace, P. (1812). *Théorie analytique des probabilités* (3ª edición). París: Courcier.
- Lonngi, P., & Ojeda, A. M. (2011). Comprensión de ideas fundamentales de estocásticos. Una experiencia con estudiantes sordos: edades 17-26 años. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 24(1), 303–312.
- López-Mojica, J. M. (2013). *Pensamiento Probabilístico y Esquemas Compensatorios en la Educación Especial*. (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- López-Mojica, J. M., & Ojeda, A. M. (2012). Enfoque frecuencial de probabilidad: una introducción en la secundaria especial. *Memoria de La XV Escuela de Invierno En Matemática Educativa*, 346–354.
- López-Mojica, J. M., & Ojeda, A. M. (2014). Ideas fundamentales de probabilidad y esquema compensatorio visual: experiencia con el síndrome Down. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27(1), 905–913.
- López-Mojica, J. M., & P. Aké, L. (2019). Argumentos intuitivos de futuros profesores: una experiencia con probabilidad. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 3(4), 1-19.
- López-Mojica, J. M., Ojeda, A. M., & Salcedo, J. (2018). Ideas fundamentales de estocásticos en libros de texto de educación primaria: una alternativa de enseñanza TT -

- Fundamental ideas of stochastics in primary education textbooks: Teaching alternative. *IE Revista de Investigación Educativa de La REDIECH*, 9(17), 87–102.
- Megías, A. I., Gea, M. M., & Batanero, C. (2018). Definición y ejemplos de dependencia e independencia de sucesos por estudiantes de bachillerato. *Investigación en Educación Matemática XXI*, 3, 338–347.
- Ojeda, A. M. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-university Levels* (Tesis de doctorado no publicada). King's College, Londres, Reino Unido.
- Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *Revista UNO*, 5, 37–55.
- Ramos, A., & Ojeda, A. M. (2011). La probabilidad y la estadística en la construcción del pensamiento matemático del niño preescolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 24(1), 61–70.
- Sanchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación Matemática*, 21(2), 39-77.
- SEP (2017). *Plan y programas de estudio para la educación básica*. México:SEP.
- Steinbring, H. (2005). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. Estados Unidos: Springer.