REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 1 Fecha: enero-junio de 2019

ISSN: 2395-955X

ANÁLISIS DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO RELACIÓN FUNCIONAL DESDE APOE

César Fabián Romero Félix

cesar.romero@unison.mx

Universidad de Sonora

Para citar este artículo:

Romero, C. (2019). Análisis del concepto de función como relación funcional desde APOE. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 1, pp. 1-16. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 1, enero-junio de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

ANÁLISIS DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO RELACIÓN FUNCIONAL DESDE APOE

César Fabián Romero Félix

cesar.romero@unison.mx

Universidad de Sonora

Palabras clave: Cálculo, Función, Teoría APOE, Representaciones semióticas

Resumen

En el presente trabajo se plantea como concepción ideal la función como *objeto* a la asociada a la definición como *relación funcional* y como ésta podría construirse de manera que incluya a otros significados. A partir de exploraciones apoyadas en ambientes dinámicos, realizadas con estudiantes de ciencias aplicadas en cursos de cálculo diferencial e integral, se presentan descripciones de las *concepciones* y *mecanismos mentales* previstos a partir del análisis del desarrollo del concepto de función. Lo anterior, partiendo de los resultados de investigaciones previas y de la hipótesis de que la articulación de registros de representación implica la coordinación de estructuras mentales correspondientes a cada registro. Es decir que, para lograr construcciones mentales universales, utilizables en diversos contextos semióticos, se requieren mecanismos mentales específicos aplicados sobre construcciones previas dependientes de registros particulares.

Key Words: Calculus, Function, APOS theory, Semiotic representations

Abstract

This paper presents the definition of function as a *relation* associated with the ideal conception of function as an object, and it is proposed to be constructed in a way that it includes other meanings of function. From explorations with students of applied sciences in courses of differential and integral calculus, supported in dynamic environments, descriptions of the conceptions and mechanisms foreseen from the analysis of the development of the concept of function are presented. This, based on the results of previous research and the hypothesis that the articulation of registers of semiotic representation requires the coordination of mental structures corresponding to each record. That is to say, in order to achieve universal constructions, usable in diverse semiotic contexts, specific mental mechanisms applied to previous constructions dependent on particular registers are required.

Introducción

El concepto de función es uno de los más estudiados dentro de la problemática del aprendizaje matemático. Su presencia en prácticamente todas las carreras de ciencias exactas y aplicadas demanda atención prioritaria a las dificultades de su enseñanza y aprendizaje. Aunque, se tienen ya significativos avances en la comprensión del desarrollo cognitivo de este concepto, aún no se tienen resultados contundentes que minimicen las dificultades de aprendizaje.

Las investigaciones sobre el aprendizaje del cálculo desde el punto de vista del desarrollo cognitivo, son guiadas principalmente (Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces & Törner, 2016) por los enfoques de *Concept Image and Concept Definition* (Vinner & Tall, 1981); la teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 1999); la teoría APOE como siglas de las construcciones mentales referidas: *Acción*, *Proceso*, *Objeto* y *Esquema* (Dubinsky,1991) y *The Three Worlds of Mathematics* (Tall, 2002). Ya que este trabajo se apoya principalmente en el marco de la teoría APOE (Arnon *et al*., 2014), resaltamos que el concepto de función es utilizado comúnmente en las descripciones de la teoría como el ejemplo más claro donde se pueden observar las distintas estructuras mentales. Sin embargo, no encontramos una investigación que muestre situaciones de aprendizaje para el desarrollo ideal de este concepto desde dicha teoría. En las publicaciones consultadas, se parte del análisis de la complejidad de la concepción del proceso de función (Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992; Dubinsky & Harel, 1992) para estudiar temas posteriores al de función, como sus límites (Maharaj, 2010); el papel de las representaciones gráficas en el aprendizaje de funciones de dos variables (Trigueros & Martínez-Planell, 2010); o la complejidad de los esquemas asociados a la función (Trigueros, 2005; Cooley, Trigueros & Baker, 2007). Aun así, no se han terminado de aclarar las causas de las dificultades de aprendizaje, ni los requerimientos para una enseñanza que promueva el desarrollo ideal del concepto de función.

Por otro lado, se ha estudiado la misma problemática desde el punto de vista de articulación de representaciones y se siguen generando estudios que muestran deficiencias en cuanto a las habilidades para usar distintas representaciones o para transitar entre ellas (ver por ejemplo, Prada, Hernández & Jaimes, 2017). Las consecuencias negativas previstas en la teoría de Duval (1999) han sido ampliamente confirmadas, sin embargo, no son tan claros ni contundentes los esfuerzos para contrarrestar los efectos de la falta de articulación de registros. En algunos casos, parece reducirse el problema a tal habilidad, pero consideramos que debe mantenerse, como mencionó Duval, como una condición necesaria. Se resalta aquí, que es sólo *una* de las condiciones necesarias que se han encontrado en el campo de la investigación educativa; se plantea entonces la necesidad de articularla con las encontradas desde otros marcos, específicamente con los resultados de APOE.

Teoría APOE

Esta teoría estudia las concepciones logradas a través de la abstracción reflexiva, idea que surge de Piaget, quien la identificaba como:

> El principal mecanismo para las construcciones mentales en el desarrollo del pensamiento y [al mismo tiempo] el mecanismo mental por medio del cual todas las estructuras lógico-matemáticas son desarrolladas en la mente de un individuo (visto en Arnon *et al.*, 2014, p. 6).

Por tal razón, éste es el tipo de abstracción que se debería buscar en el aprendizaje de las matemáticas, pero no es el único posible. Piaget describía también abstracciones empíricas y pseudo-empíricas. Las diferencias entre los tres tipos de abstracción se pueden describir en términos de la actividad de los sujetos: la abstracción empírica genera conocimiento a partir de la observación de objetos externos, como la idea de color o peso que se obtienen después de percibir a través de los sentidos esas características intrínsecas de los objetos; la abstracción pseudo-empírica va un paso más allá, después de actuar sobre los objetos el sujeto les atribuye propiedades que no eran originalmente parte de estos, como la cardinalidad de un conjunto obtenida tras la correspondencia uno a uno con elementos de otro conjunto que el sujeto ha ordenado; por último, la abstracción reflexiva consiste en la coordinación general de acciones, obtener propiedades a partir de acciones mentales o físicas, de manera consciente pudiendo incluir la separación entre la forma y el contenido, obteniendo así, cada vez abstracciones situadas en un plano superior del conocimiento (visto en Dubinsky, 1991, pp. 97-99).

La teoría APOE extiende el análisis de la abstracción reflexiva en el aprendizaje de las matemáticas, describiendo las etapas de conocimiento mencionadas por Piaget mediante las construcciones mentales que le dan nombre a la teoría: *Acción, Proceso, Objeto* y *Esquema*; describiendo además los mecanismos para desarrollar cada una de éstas. Dicha teoría, describe la construcción del conocimiento matemático, en términos generales, como una progresión de estructuras mentales lograda a través de los mecanismos de abstracción reflexiva. Las relaciones entre estas estructuras y mecanismos son representadas con el siguiente diagrama.

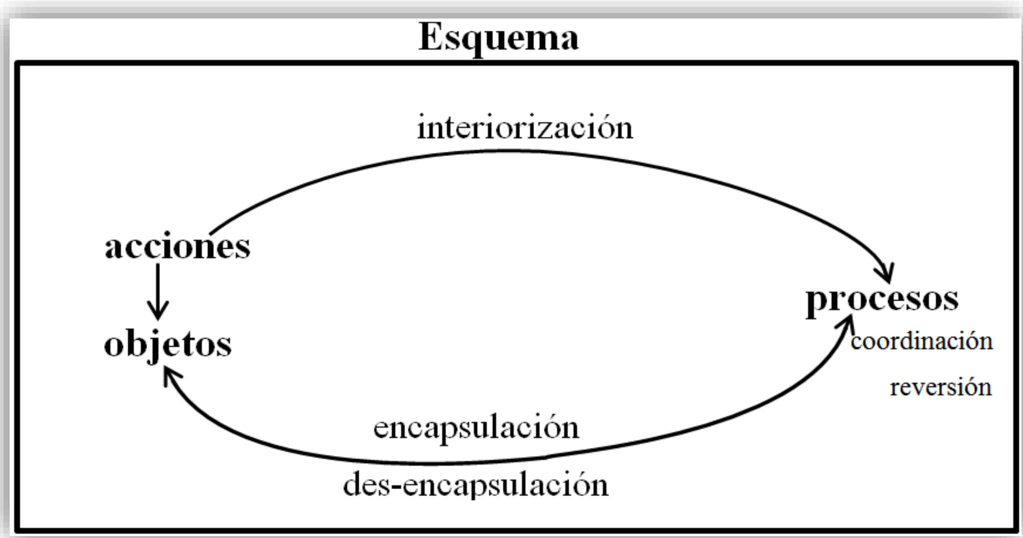

Figura 1. Estructuras mentales y mecanismos para la construcción de conocimiento matemático (Arnon *et al*., 2014, p. 18).

La teoría propone que el desarrollo de las construcciones mentales sigue un ciclo auto-retroalimentado, logrando con cada iteración concepciones de mayor complejidad y generalidad (Arnon et al., 2014. pp. 18-26). Se puede tomar como inicio del ciclo Acciones sobre Objetos ya existentes, éstas son realizadas de manera externa al sujeto manteniendo siempre los mismos pasos y en el mismo orden.

La manera inicial de desarrollar concepciones del Proceso es la interiorización de las Acciones. Teniendo una concepción del Proceso, dejan de ser necesarios los estímulos externos para poder realizar las Acciones y se obtiene también control interno sobre las partes de éstas; se pueden imaginar u omitir pasos y revertir el orden de éstos mentalmente. También, se pueden coordinar concepciones del Proceso para formar nuevos Procesos, por ejemplo, el Proceso de duplicación (multiplicar por dos) se puede coordinar con el Proceso de números naturales para obtener el Proceso de números pares.

Enfrentándose a la necesidad de aplicar Acciones a lo que se percibe como un Proceso, se inicia el mecanismo de *encapsulación*; con éste, los Procesos dejan de ser Acciones interiorizadas y llegan a ser entes por sí mismos: Objetos. Cuando se ve el Proceso como un todo, al cual se le pueden aplicar Acciones, y se construyen estas Acciones para aplicarlas de manera externa o mental, se dice que el Proceso ha sido encapsulado en un Objeto. Por ejemplo, para el caso de transformación lineal, la encapsulación permite realizar composiciones y también poder ver a las transformaciones como elementos de algún conjunto y con ello formar un espacio vectorial de transformaciones lineales entre otros dos espacios (Roa-Fuentes & Oktaç, 2012, p. 227).

Los mecanismos y construcciones mentales mencionados, son utilizados para plantear posibles caminos específicos de la construcción mental de conceptos matemáticos. Tomando como prerrequisito algunas construcciones mentales se propone una progresión de procedimientos de abstracción reflexiva, por ejemplo, una iteración del ciclo de la Figura 1, con los que se podría llegar a la concepción deseada.

Elementos de la teoría de representaciones semióticas

La teoría de Duval (1999) se dirige principalmente a aquellos sistemas de signos que pueden ser clasificados como registros de representación, en palabras del autor:

> Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis.
>
> La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado ... Esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar.
>
> El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada… Naturalmente, existen reglas de tratamiento propias de cada registro.
>
> La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. (Duval 1999, p. 4)

En matemáticas, la diversidad de registros de representación es prácticamente evidente, aunque es en general, considerada por algunos como útil pero finalmente trivial para el aprendizaje de matemáticas ya que la comprensión de algún objeto en una de sus representaciones sería suficiente para su utilización en cualquier contexto. Sin embargo, es muy frecuente el problema del encapsulamiento de los aprendizajes restringidos a los registros en los que estos se llevaron a cabo. El encapsulamiento obstaculiza la comprensión conceptual y “se manifiesta principalmente por el fracaso de la conversión en caso de no -

congruencia y por la ausencia de transferencia de los conocimientos más allá de las situaciones estándar de aprendizaje” (Duval 1999, p. 60). Duval afirma que la diversidad de registros no es sólo una útil casualidad, sino que es necesario utilizarla para el desarrollo de concepciones, en sus palabras: “la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación… [ya que] la comprensión conceptual aparece ligada al descubrimiento de una invarianza entre representaciones semióticas heterogéneas” (1999, p. 60).

La coordinación[1]o articulación de registros consiste en la movilización y utilización conjunta, de los registros de representación semiótica. Ésta supone como condición principal, la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en cada registro y se ve fuertemente afectada por los fenómenos de no congruencia entre representaciones. Con esta definición, se podría suponer que sólo hay articulación de registros cuando se utilizan explícitamente varios de ellos, sin embargo:

> Un sujeto que ha desarrollado suficientemente y de manera adecuada la coordinación de los registros puede atenerse a las representaciones de un sólo registro. Pero en realidad, él dispone potencialmente de representaciones que provienen de otros registros y que de manera latente permanecen asociadas a las que él utiliza. (Duval, 1999, p. 67)

De tal manera que, una persona que decida trabajar externamente con sólo un registro, también, podría estar ejerciendo una buena articulación de registros al considerar este acercamiento como la manera más eficiente de llegar a la solución, tomando en cuenta los datos que tiene, los tratamientos que podría realizar en otros registros disponibles y el tipo de solución a la que desea llegar. La articulación de registros de representación es vista por Duval como primordial para el aprendizaje de las matemáticas debido a que “toda representación es cognitivamente parcial en relación con lo que ella representa” (1999, p. 67). Por lo tanto, un aprendizaje realizado en un sólo registro, o que privilegie alguno en particular, limita la posible comprensión de los contenidos matemáticos estudiados; “incluso si han sido movilizados varios registros, simultánea o sucesivamente, esto no acarrea su articulación” (p. 72), lo que complica aún más la situación.

Uso conjunto de las teorías

La teoría de registros de representación no analiza construcciones y procesos mentales que no involucran directamente la utilización de representaciones externas, por tal razón, nos parecen convenientes los desarrollos teóricos de APOE; principalmente sus resultados al utilizar los conceptos de abstracción reflexiva para analizar el pensamiento matemático avanzado. Además, existe ya un acercamiento para el análisis del aprendizaje matemático que se apoya en ambas teorías: Trigueros y Martínez-Planell (2010) utilizaron un marco compuesto por la teoría APOE y la teoría de representaciones semióticas para analizar el aprendizaje de funciones de dos variables.

---

[1] Debido a que en APOE el término *coordinación* tiene un significado distinto, se utilizará “coordinación” para el mecanismo de APOE y “articulación” para la relación entre registros de representación.

Prevemos que el uso coordinado de las dos teorías como un solo marco permitiría ganar precisión y entendimiento sobre varios aspectos del aprendizaje de las transformaciones lineales: sobre el desarrollo de las estructuras mentales, el papel de la semiosis en el aprendizaje y la naturaleza de varias dificultades de aprendizaje.

Modelo de enseñanza propuesto

En términos de la teoría APOE (Arnon et al., 2014), el conocimiento del cálculo se puede interpretar como un Esquema centrado en el concepto de función. De tal manera, que el aprendizaje de Cálculo Diferencial e Integral se puede interpretar como el desarrollo de tal esquema, construyendo inicialmente el concepto de función, sus propiedades y posteriormente construir otros Objetos, como la Derivada e Integral, que se utilizan para conocer mejor a las funciones. Formando así, una red de conocimientos que se espera poder aplicar a diversos contextos, gracias a la diversidad de conexiones establecidas. Los avances que se tienen en el entendimiento de esta problemática muestran que "la evolución de los esquemas relacionados con el cálculo es un proceso complejo para la mayoría y requiere la exposición a una variedad de situaciones donde la reflexión sobre sus componentes se muestre necesaria" (Cooley, Trigueros & Baker, 2007, p. 388). En particular, los estudiantes tendrían que ser expuestos a la diversidad de representaciones disponibles y, más aún, lograr la articulación de éstas para desarrollar el apropiado esquema de función.

Antes de avanzar en el desarrollo del esquema de función, es necesario que la función por sí misma sea un objeto bien construido, aplicable en distintos contextos. Para tal efecto, se propone aquí el desarrollo de un Proceso general de función proveniente de Procesos gráficos y algebraicos previos. A su vez, los procesos dependientes de los registros provienen de Acciones en los mismos registros. La idea principal es que sería significativamente más complejo construir en primera instancia un solo proceso que actúe sobre cualquier registro, que la construcción de dos procesos *más simples* y su posterior coordinación.

Antes de mostrar las concepciones propuestas, resaltamos las características principales para distinguir las estructuras de APOE en situaciones de aprendizaje en la siguiente tabla.

Tabla 1. *Características principales de las concepciones.*

Concepción (estructura)	Característica	
Acción	Casos particulares	La función *hace algo*
Proceso	Casos generales	
Objeto	Propiedades y operaciones sobre las funciones	*Se le hace algo* a la función

Tomando en cuenta lo anterior, las concepciones propuestas se resumen en la figura 3 (leída de arriba hacia abajo).

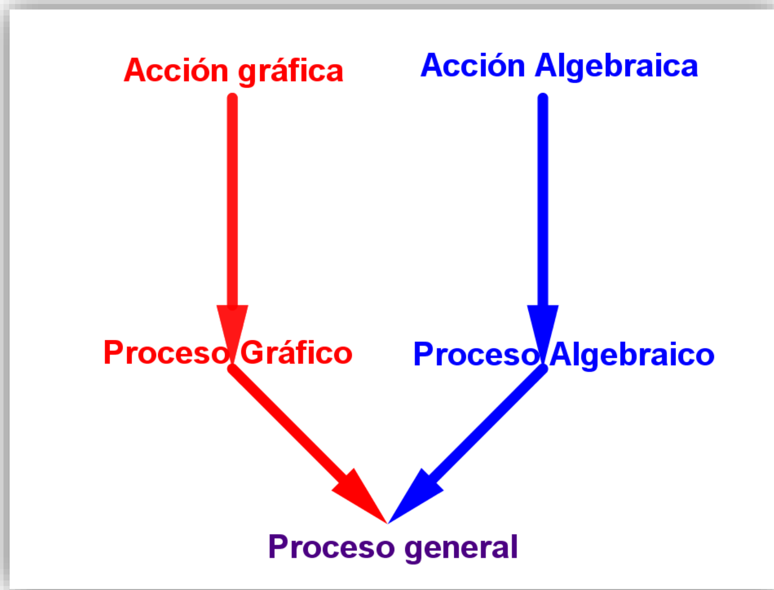

Figura 2. Concepciones para el proceso general de función.

Actividades de enseñanza

Para favorecer el desarrollo de las concepciones buscadas, se plantearon a los estudiantes actividades de resolución de problemas, sobre magnitudes cuantificables. Dentro de las hojas de trabajo, los estudiantes tenían que proponer y evaluar conjeturas y comunicar sus resultados. Para cada actividad se desarrollaron *hojas de trabajo dinámicas*[2] en la plataforma de GeoGebra, mismas que los estudiantes respondían dentro de un grupo virtual en sesiones presenciales y a distancia.

Cada hoja de trabajo, permite la manipulación dinámica de objetos específicos, para generar las concepciones deseadas y la articulación de registros al resolver problemas. Por ejemplo, para favorecer la coordinación de los procesos gráficos y algebraicos, se utilizan applets que permiten la manipulación numérica, algebraica y gráfica para resolver problemas de modelación (Figura 3).

[2] Ejemplos disponibles en https://www.geogebra.org/m/cmV267Yj

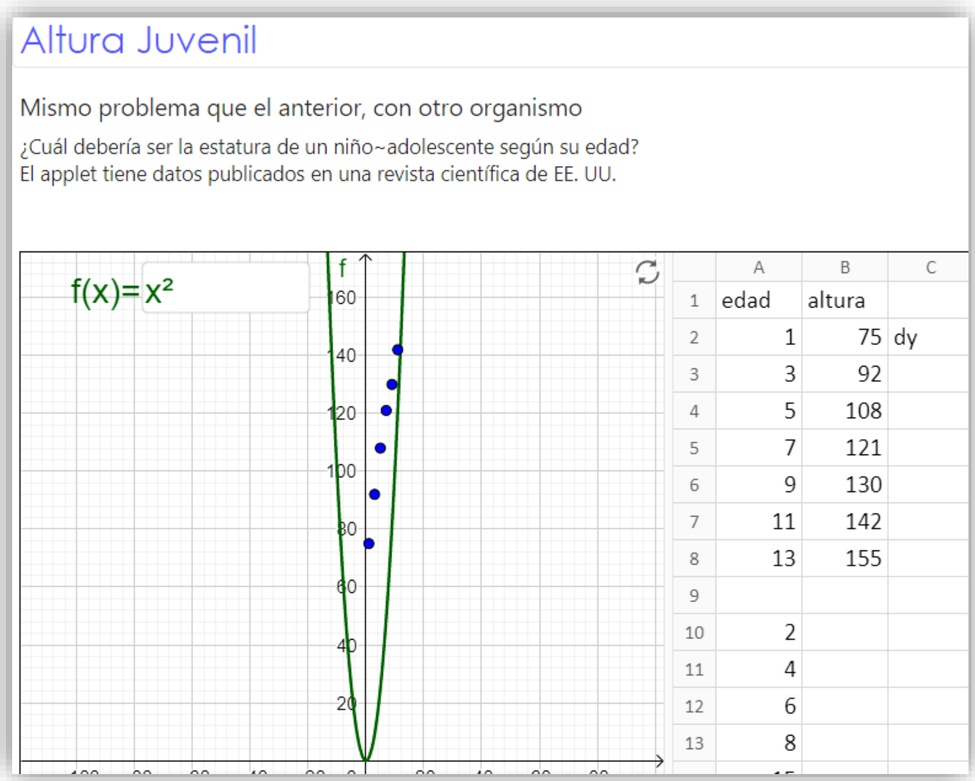

Figura 3. Ejemplo de applet.

A partir de la exploración dentro de los applets, los estudiantes tienen que responder a preguntas específicas, que les ayudan a reunir los elementos necesarios para resolver el problema. Para la hoja de trabajo de la figura anterior, algunas preguntas que se plantean son las siguientes.

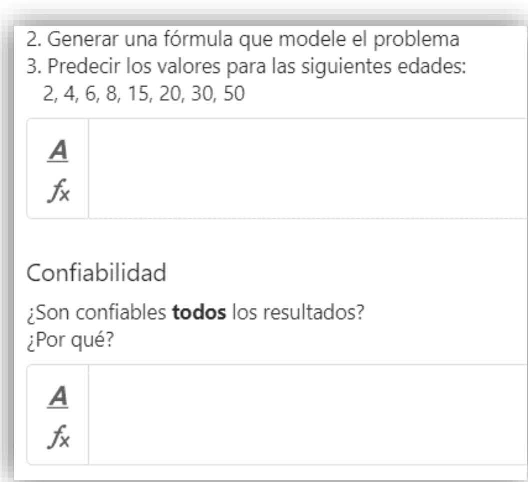

Figura 4. Tipos de preguntas en las hojas de trabajo.

El trabajo de los estudiantes fue registrado automáticamente por la plataforma de grupos de GeoGebra, permitiendo la evaluación individual y grupal de la efectividad de las actividades para los estudiantes. En la Figura 5 se muestra la presentación de esta información para uno de los grupos participantes.

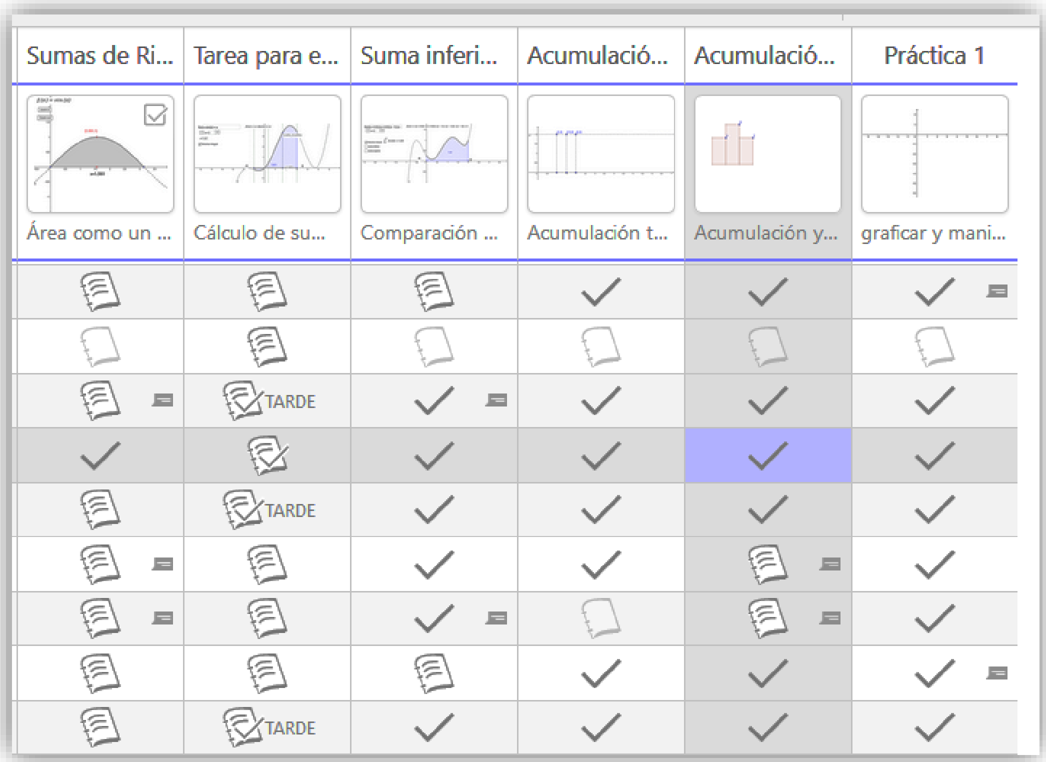

Figura 5. Control de participación de los estudiantes en la plataforma de grupos de GeoGebra.

Acción Gráfica

Para esta concepción, se plantearon actividades de modelación entre dos magnitudes cuantificables. Los estudiantes tenían que validar sus mediciones en una gráfica, hasta llegar a interpretar cada punto de una curva como una medición de una variable con respecto a la otra. En estas actividades se favorece el desarrollo del *criterio de la recta vertical* para gráficas de funciones, como la comprobación de que en los problemas estudiados las mediciones son únicas; también se fomenta la medición de valores no medidos, a partir de la ubicación de puntos en las gráficas.

Acción Algebraica

De manera similar a la concepción gráfica, se presentaron problemas de modelación de relaciones entre magnitudes, con el objetivo de validar mediciones. La característica principal de estas actividades es que la validación de las mediciones lleva al establecimiento de una fórmula, que inicialmente se utiliza para evaluar valores fijos y posteriormente para predecir valores no medidos.

Proceso Gráfico

Para generar un primer Proceso de gráfica de una función, se favoreció la comparación y contrastación de modelos de relaciones similares entre magnitudes, para generar una idea inicial de *familias de gráficas*. De esta manera, se establecieron las familias prototípicas de funciones (lineales, cuadráticas, cúbicas, polinómicas, trigonométricas, etc.) que fueron utilizadas para analizar las variaciones e invariantes gráficos de curvatura, corte con los ejes, posición relativa de crestas y valles, etc. Conviene aclarar que no se busca en este apartado cubrir todo un Esquema de graficación, ya que requeriría conocimientos posteriores a la construcción de función, como el de derivada (Trigueros & Escandón, 2008).

Proceso Algebraico

El proceso algebraico también se genera para comparar modelos de relaciones similares, pero en este caso, generando *familias de fórmulas* para los mismos tipos de funciones. Se analizan las variaciones e invariantes de los coeficientes y tipos de operaciones (lineales, no lineales, trigonométricas, exponenciales, etc) y su relación con las situaciones modeladas.

Proceso general de función

La articulación gráfico-algebraica de las representaciones utilizadas en las actividades previas, favorece a su vez la coordinación de los Procesos asociados a esas representaciones. Con estas relaciones se obtienen *familias de relaciones funcionales* cada una generando prototipos de gráficas acompañadas por fórmulas generales. Se plantea a los estudiantes la necesidad de predicciones universales que combinen elementos gráficos y algebraicos, como “siempre que $a>0$, la curva abre para arriba”.

Siendo esta coordinación, significativamente complicada por la necesidad de la articulación de registros. Se provee a los estudiantes de una diversidad de ejemplos en ambientes dinámicos de exploración para que logren establecer las relaciones correctas entre los significados gráficos y algebraicos. Por ejemplo, en el caso de polinomios cúbicos se plantea primero la articulación de las representaciones, sin una situación de modelación, con applets como el siguiente:

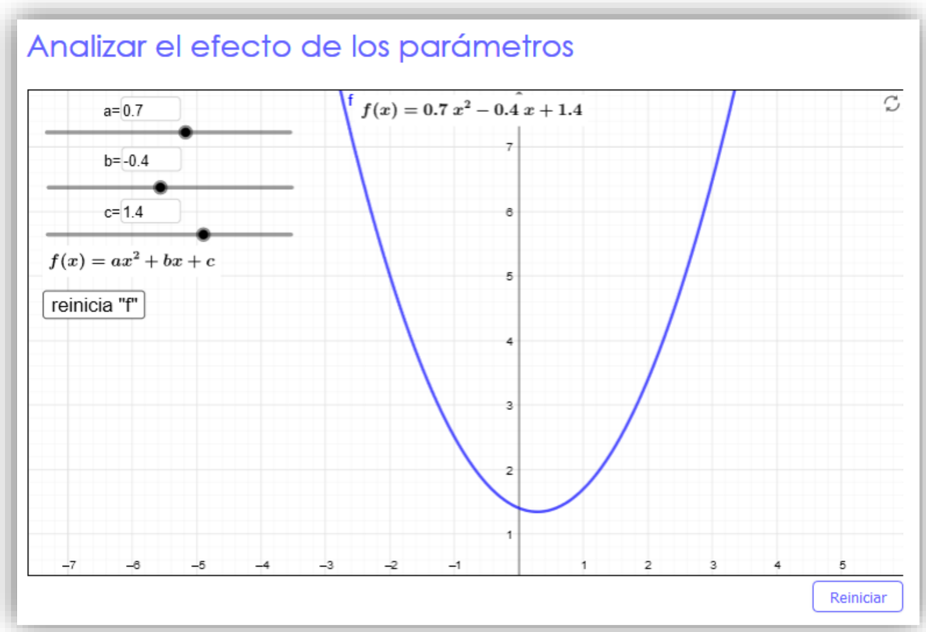

Figura 6. Articulación gráfico-algebraica.

En la hoja de trabajo[3] se presentan preguntas específicas para establecer relaciones entre las unidades significantes (Duval, 1999) gráficas y algebraicas, con preguntas como:

- Con *b=c=0* ¿Qué efecto tiene mover "*a*"?
- Con *a=1*, *c=0* ¿Qué efecto tiene mover "*b*"?
- Con *a=1*, *b=2* ¿Qué efecto tiene mover "*c*"?
- Elige valores distintos de *0* para *a*, *b* y *c*, ¿cómo podrías encontrar los valores de *a*, *b* y *c* a partir de la gráfica?

En actividades posteriores, se añaden elementos al contexto de modelación para generar la necesidad de utilizar las relaciones entre fórmulas y gráficas de funciones y consecuentemente la construcción del Proceso general de función. Por ejemplo, se introduce el concepto de *error* en los modelos, inicialmente como la suma de las diferencias entre las mediciones reales y los valores generados por el modelo, para plantear el problema de elegir una *mejor aproximación* a la situación original.

[3] Disponible en https://ggbm.at/QvpgTxFb

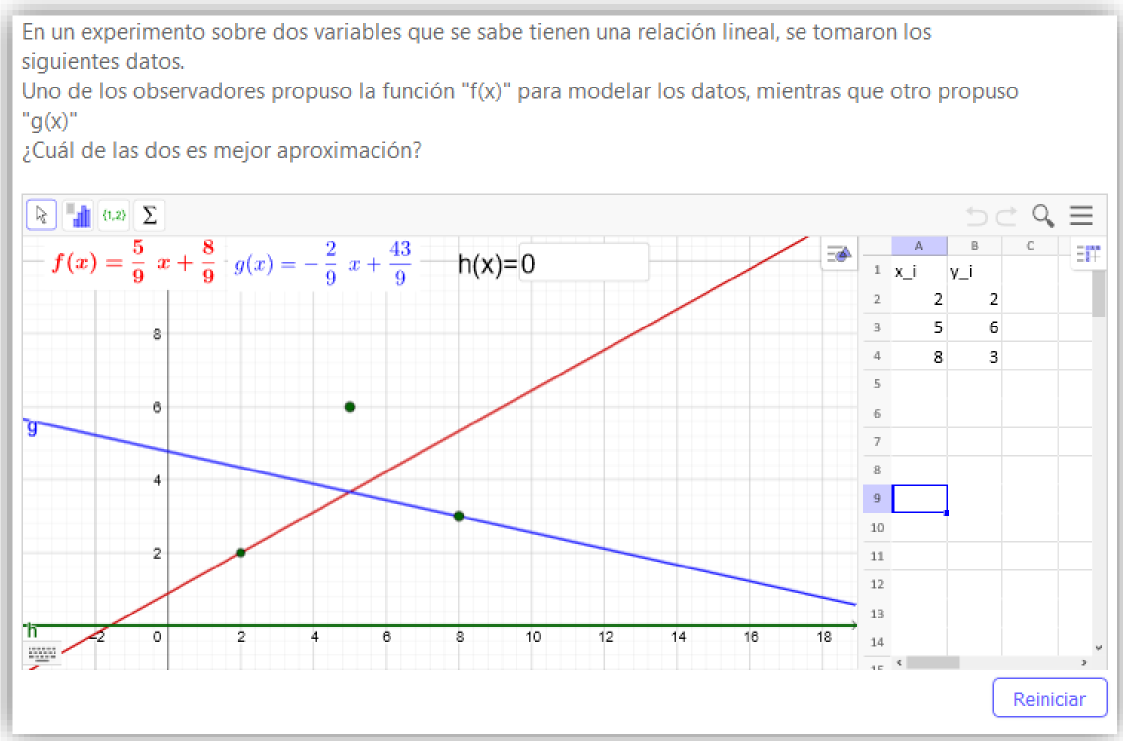

Figura 7. Introducción de "error" para comparar modelos de función.

En esta actividad[4], los estudiantes terminan respondiendo a la pregunta: *¿Qué relación observas entre las gráficas de las funciones, de los datos y el error de cada aproximación?* Para responder, se espera que utilicen propiedades gráficas y algebraicas en sus argumentos, mostrando un uso del Proceso general de función; ya que, en esta hoja de trabajo no se muestra numéricamente el error de los modelos.

Articulación de registros de representación

Cómo se puede observar en las descripciones de las actividades, las articulaciones se promueven hasta la etapa del Proceso general, dado que, en ésta es en dónde la teoría APOE dice que serían más efectivas; puesto que, no se pueden *coordinar* Acciones. En general, se favorecen articulaciones entre representaciones gráficas, algebraicas y tabulares (numéricas), en varios sentidos (Figura 8).

[4] Hoja de trabajo disponible en https://ggbm.at/hnB43pED

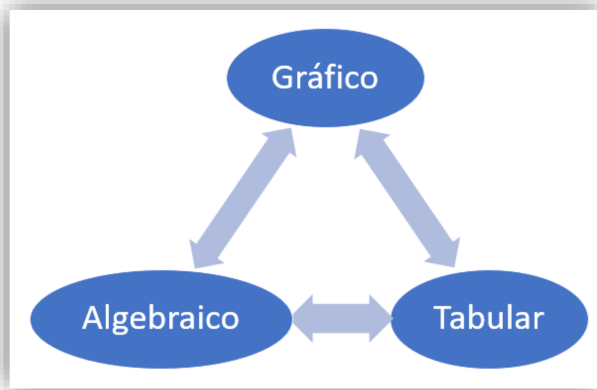

Figura 8. Articulaciones entre registros.

Resultados y Conclusiones

Tras la implementación de este tipo de actividades, se observaron resultados favorables en el desempeño de los estudiantes para interpretar, utilizar, comparar y manipular funciones como modelos de relaciones entre magnitudes variables. Se observó que la habilidad de articulación de registros se puede desarrollar de manera conjunta con el Proceso general de función y, que evitar la articulación de registros genera dificultades para el desarrollo de las concepciones mentales.

La problemática de distinguir entre funciones lineales y no lineales permitió plantear situaciones en las que los estudiantes no podían responder con un uso mecánico en las actividades del proceso general. La exploración de las características específicas de una fórmula que genera gráficas rectas para funciones de una variable, fue especialmente favorable para la articulación de los registros. Posteriormente, se extendió esta problemática para distinguir entre las funciones no lineales: periódicas, monótonas, exponenciales, etc.

Se confirmó que los tipos de funciones se pueden construir originalmente como Procesos distintos y aislados; para posteriormente coordinarlos. Que “la función” en general, puede desarrollarse como la coordinación de todos los tipos de funciones. Utilizando contextos de modelación, mezclados con contextos intra-matemáticos, se conservan las relaciones entre magnitudes en las concepciones posteriores.

Dificultades observadas

En general, cada mecanismo mental requiere un esfuerzo específico y no lograrlo genera dificultades de aprendizaje: generar Acciones, interiorizar Procesos, coordinar Procesos y encapsular Objetos. Si no se da oportunidad de realizar el mecanismo, se limitan las concepciones que pueden alcanzar los estudiantes. Por otro lado, se pueden manipular los símbolos sin referirse a los objetos matemáticos, aprendiendo únicamente las reglas de formación y tratamiento de las representaciones; por lo que se tuvo que poner especial atención en que las actividades para las concepciones Proceso no pudieran ser resueltas de forma mecánica.

En el desarrollo de la Acción gráfica, algunos estudiantes se mantuvieron sólo *dibujando* curvas sin establecer relaciones entre las magnitudes supuestamente representadas. En estos casos, las preguntas de validación de mediciones y predicción de medidas permitieron asociar las curvas dibujadas con relaciones funcionales.

Los problemas que requieren únicamente la articulación de los registros pueden ser rechazados por los estudiantes por percibirse como artificiales o poco útiles, fueron los problemas dónde las relaciones entre las representaciones eran necesarias los que validaron a los primeros.

Finalmente, se encontró que la concepción desarrollada permite abordar varios conceptos posteriores al de función, a partir del significado de relación funcional, como: función pendiente de una curva, función de acumulación y función inversa. Estas últimas funciones se mostraron significativamente más difíciles de construir, de manera acorde a la teoría teoría APOE, ya que son *funciones de funciones*.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Nueva York: Springer.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247–285.

Bressoud D., Ghedamsi I., Martinez-Luaces V., & Törner G. (2016). Teaching and Learning of Calculus. En: *Teaching and Learning of Calculus. ICME-13 Topical Surveys*. Springer, Cham.

Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema thematization: A theoretical framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 370–392.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del valle. (Traducido por Myriam Vega Restrepo).

Kabael, T. U. (2011). Generalizing Single Variable Functions to Two-Variable Functions, Function Machine and APOS. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *11*(1), 484-499.

Maharaj, A. (2010). An APOS Analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *Pythagoras*, *71*, 41-52.

Prada, R., Hernández, C.A., Jaimes L.A. (2017). Representaciones semióticas alrededor del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, *12*(2), 14-31. doi: 10.14483/23464712.10491.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical notions and the quandary of reification -the case of function. En E. Dubinsky & G. Harel (eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (59-84). Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky & G. Harel (eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (25-58). Mathematical Association of America.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5–31.

Trigueros, M., & Escandón, C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación: un análisis a través de la estadística implicativa. *Revista mexicana de investigación educativa*, 13(36), 59-85.

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356–366.

Tall. D. (1997). Functions and Calculus. *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325, Mathematics Education Research Centre. University of Warwick. Recuperado de: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1997a-functions-calculus.pdf

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*. 12, 151–169.

Tall, D. (2002). Three Worlds of Mathematics. *University of Warwick*, UK.