REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

http://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 1 Fecha: enero-junio de 2019

ISSN: 2395-955X

UN ACERCAMIENTO DINÁMICO A LA INTEGRAL DESDE UN PUNTO DE VISTA VARIACIONAL: FUNCIONES APROXIMADAS DE ACUMULACIÓN

José Ramón Jiménez Rodríguez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

Para citar este artículo:

Jiménez, J. R. (2019). Un acercamiento dinámico a la integral desde un punto de vista variacional: funciones aproximadas de acumulación. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 1, pp. 44-65. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 1, enero-junio de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: http:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

UN ACERCAMIENTO DINÁMICO A LA INTEGRAL DESDE UN PUNTO DE VISTA VARIACIONAL: FUNCIONES APROXIMADAS DE ACUMULACIÓN

José Ramón Jiménez Rodríguez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

jimenez@mat.uson.mx

Palabras clave: función integral, pensamiento variacional, razón de cambio, acumulación.

Resumen

Se presenta un acercamiento dinámico a la integral (la integral como función del límite superior) desde un punto de vista variacional (matematización de las magnitudes variables). Desde este punto de vista, el significado de la integral es el de acumulación, misma que tiene lugar como efecto de cierta razón instantánea de cambio, y el desarrollo de dicho significado se apoya en las intuiciones de los estudiantes. El principal mérito de este acercamiento consiste en poner de manifiesto la relación estrecha entre razón de cambio (derivada) y acumulación (integral). Se detalla la primera parte de este enfoque, consistente en la construcción de funciones aproximadas de acumulación, a partir de funciones exactas de razón de cambio.

Key Word: integral function, variational thinking, rate of change, accumulation.

Abstract

We present a dynamic approach to the integral (the integral as a function of the upper limit) from a variational point of view (mathematization of variable quantities). From this point of view, the meaning of the integral is that of accumulation, which takes place as the effect of a certain instantaneous rate for change, and the development of that meaning is based on the intuitions of the students. The main merit of this approach is to show the close relationship between rate of change (derivative) and accumulation (integral). The first part of this approach is detailed, consisting of the construction of approximate accumulation functions, based on exact rate of change functions.

Algunas deficiencias del acercamiento tradicional a la integral

Como lo han señalado varios autores (Orton, 1993; Thompson, 1994; Thompson y Silverman, 2007; Kouropatov, 2008), el enfoque habitual para la enseñanza de la integral, uno de los conceptos fundamentales del Cálculo, no es el que resulta más apropiado ni para entender sus aplicaciones a múltiples problemas de la ciencia y la tecnología, ni tampoco para favorecer el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante. Bajo este enfoque primeramente se introduce la integral indefinida como una operación inversa a la derivación (antiderivada), y luego se presenta una versión estática del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) en el que aparece la integral definida: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Enseguida se procede a desarrollar el significado o interpretación geométrica de ésta, como área debajo de una curva. Luego se pasa a estudiar el cálculo de volúmenes, longitudes de arco, masas, etcétera, es decir, las aplicaciones de la integral definida.

Este enfoque adolece de serias deficiencias, tanto desde el punto de vista didáctico como del lógico. En primer lugar, si la integral es una “antiderivada”, resulta paradójico constatar que en muchas de las aplicaciones prácticas de la integral es necesario recurrir a diversas técnicas numéricas para calcularla, ya que la antiderivada en cuestión no se puede expresar algebraicamente. En Estadística, por ejemplo, es frecuente el cálculo de distintos valores numéricos de la integral $\int e^{-x^2} dx$, para la cual no existe una expresión algebraica explicita para la antiderivada, que pueda ser sustituida en el TFC.

En segundo lugar, si la integral es una fórmula para calcular un “área”, a muchos estudiantes les resulta raro que esa misma fórmula también se emplee para calcular volúmenes y longitudes, y aún mucho más raro que sea la herramienta apropiada para calcular el valor numérico de magnitudes que claramente no son de naturaleza geométrica, como el trabajo mecánico, la distancia recorrida, la carga eléctrica, etcétera. En consecuencia, difícilmente llegan a discernir por si mismos en qué contextos resulta apropiado recurrir al cálculo de integrales definidas.

En tercer lugar, el acercamiento a la integral como límite de las sumas “superiores” e “inferiores” de Riemann, como está suficientemente documentado en la investigación educativa relacionada con el Cálculo y el Pensamiento Matemático Avanzado, es cognitivamente problemático (Wagner, 2016).

En cuarto lugar, el hecho de privilegiar el estudio de la integral definida, con límites fijos, ($\int_a^b f(x)dx$) no solamente obstaculiza la comprensión de la integral como función ($\int_a^x f(t)dt$), sino que favorece la formación y permanencia en la mente de los alumnos de una imagen estática de este importante concepto. Este problema es análogo al que se presenta con el estudio de la derivada en un punto, previo al estudio de la derivada como función.

Un enfoque variacional basado en la noción de acumulación

Thompson (1994), así como Thompson y Silverman (2007) y Kouropatov (2008) han propuesto un acercamiento a la noción de integral que pretende superar estas deficiencias, y a la vez contribuir al entendimiento más profundo de su significado y aplicaciones: *considerar a la integral como una función de acumulación en un sentido simple, como una suma que consta de un gran número de términos muy pequeños*. Este enfoque se basa en el hecho de que el concepto de acumulación está en el centro de muchas de las aplicaciones prácticas del Cálculo Integral, y es dinámico porque se enfoca en las ***funciones de acumulación*** $\int_a^x f(t)dt$, y no en los valores concretos de cierta cantidad acumulada $\int_a^b f(x)dx$. Además, permite establecer una clara conexión entre diferentes conceptos fundamentales: acumulación, integral definida e indefinida, así como sus relaciones con el significado de la derivada como razón instantánea de cambio. De este modo, se trata de un enfoque eminentemente variacional.

Una idea variacional fundamental

Una manera de pensar variacional que es fundamental en el estudio del Cálculo es la idea intuitiva de que, por más rápido o mucho que cambie una magnitud variable, si procedemos a analizarla en pequeños intervalos no tendrá oportunidad de cambiar de manera significativa. Esta idea intuitiva yace en el corazón del Cálculo. Por ello, algunos autores consideran que el Cálculo es una especie de "cámara fotográfica instantánea" para analizar las magnitudes variables. Esta alegoría con una cámara fotográfica de alta velocidad es útil. Tratemos de ilustrarla considerando dos procesos que, en relación con nuestra experiencia cotidiana, transcurren "muy rápido".

El movimiento de una bala es un buen ejemplo. Las balas de pistola y revólver habitualmente se mueven a una velocidad ligeramente inferior a la del sonido, que es de aproximadamente 340 m/seg. En cambio, las balas de fusil y ametralladora se mueven a velocidades superiores a ésta, en dos o tres veces (hasta 1000 m/seg). Sin embargo, con las tecnologías actuales es posible fotografiar balas de modo que parezcan inmóviles.

El aletear de un colibrí es otro buen ejemplo, muy bello, además. El colibrí bate sus alas unas sesenta veces por segundo. En un sesentavo de segundo mueve sus alas hacia adelante y de regreso hacia atrás una vez. De modo que, si fotografiamos al colibrí con una exposición de 1/60 de segundo, sus alas aparecerán borrosas en la fotografía. Para obtener una imagen nítida de las alas del colibrí es necesario tomar la foto con una exposición de al menos una milésima de segundo.

Estos dos ejemplos nos ilustran de manera elocuente la idea básica del Cálculo para analizar el comportamiento de las magnitudes variables: por más rápido que una magnitud variable cambie, si la observamos en pequeños intervalos no tendrá oportunidad de cambiar mucho, casi no cambiará, y para fines prácticos en ocasiones podremos considerar que no cambia, es decir, que se mantiene constante. Las razones de cambio también son magnitudes variables, y quedan comprendidas en esta visión. Una razón de cambio variable puede ser considerada como una razón de cambio que va cambiando por instantes, por pequeños intervalos, manteniéndose constante (o cambiando muy poco, casi sin cambiar) en el transcurso de cada uno de dichos intervalos.

El problema práctico que genera esta interpretación del comportamiento de las magnitudes variables, y que debemos resolver de manera igualmente intuitiva, es el siguiente: ¿cómo podemos determinar o calcular el valor constante (o casi constante) de una magnitud variable en cierto intervalo?

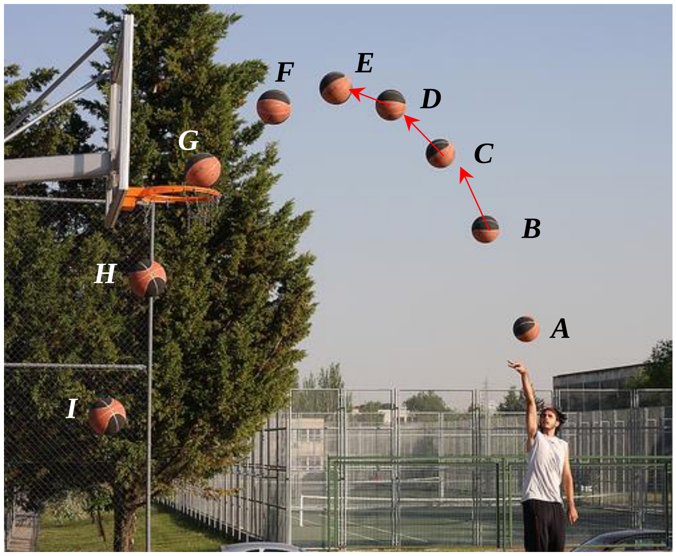


Figura 1. Superposición de fotografías de alta velocidad del movimiento de un balón de basquetbol al ser lanzado a la canasta. En todo momento, la velocidad del balón cambia.

Para acercarnos a una posible respuesta a esta pregunta, consideremos el caso del movimiento de un balón de basquetbol al ser lanzado hacia la canasta (Figura 1; es una composición de varias fotografías). Es bien sabido que, en todo momento, la velocidad del balón cambia. Sin embargo, de acuerdo con la interpretación del comportamiento de las magnitudes variables que formulamos más arriba, podemos considerar que dicha velocidad casi no cambia (se mantiene constante) por intervalos. Tomemos como ejemplo los intervalos temporales a los que fueron tomadas cada una de las fotografías superpuestas. En cada uno de esos instantes, el balón de basquetbol tiene cierta velocidad exacta, que cambia de un instante a otro. Supongamos que, por alguna razón, conocemos los valores exactos de la velocidad del balón de basquetbol en cada uno de dichos instantes. ¿Cómo podemos, a partir de esa información, determinar un valor constante para la velocidad del balón durante todo un intervalo, por ejemplo, el comprendido entre las posiciones B y D del balón? ¿O para cualquier otro intervalo? En otras palabras: si conocemos las velocidades exactas $v(B)$ y $v(D)$ del balón de basquetbol en las posiciones B y D respectivamente (o en cualesquier otras dos posiciones), ¿cómo podemos determinar una velocidad constante del balón para todo el intervalo entre dichas posiciones (aunque ya sabemos que en realidad la velocidad del balón siempre cambia)?

No resulta difícil entender que una decisión o hipótesis racional consiste en tomar la velocidad exacta $v(B)$ del balón al inicio del intervalo (la velocidad ***inicial***, es decir, la velocidad en la posición B) como la velocidad constante para todo el intervalo (entre las posiciones B y D). Esto es equivalente a “congelar” la velocidad del balón en todo el intervalo, manteniéndola igual a la velocidad $v(B)$. En este caso estaremos suponiendo que la velocidad $v(B)$ con la que el balón parte de B es también la misma velocidad con la que llega a D. Dado que en su trayectoria ascendente, como es bien sabido, el balón va disminuyendo su velocidad, tenemos que en realidad la velocidad exacta del balón en la posición B es mayor que su velocidad exacta en la posición D. Esta diferencia entre los valores exactos de la velocidad deberá ser menor cuanto menor sea el intervalo. Por ello esta decisión es racional, a pesar del hecho de que, siendo mayor $v(B)$ que $v(D)$, si el balón continuara moviéndose a partir de la posición B con la misma velocidad que tiene allí, llegará un poco más alto que la posición D.

De aquí resulta que otra decisión o hipótesis (también racional) que podemos asumir es tomar la velocidad exacta $v(D)$ al final del intervalo (la velocidad ***final***, es decir, la velocidad en la posición D) como la velocidad constante del balón durante todo el intervalo (entre las posiciones B y D). En este caso estaríamos suponiendo que la velocidad $v(D)$ con la que llega el balón a D es también la misma velocidad con la que parte de B. Dado que en la realidad la velocidad exacta del balón en la posición D es menor que su velocidad exacta en la posición B, resulta obvio que si el balón parte de B con velocidad igual a $v(D)$ y la mantiene constante durante todo el intervalo, llegará un poco más abajo de la posición D.

Al entender y comparar las dos situaciones hipotéticas que hemos descrito, la idea que de inmediato se viene a la mente es tratar de compensar de algún modo el hecho de en el primer caso tomamos una velocidad mayor que la real como velocidad constante en todo el intervalo, mientras que en el segundo caso tomamos una velocidad menor que la real. Así pues, promediar estas dos velocidades (velocidad *inicial* y velocidad *final*) parece una buena idea. En otras palabras, una decisión o hipótesis que parece aún más racional que las dos anteriores consiste en tomar el ***promedio*** de las velocidades exactas $v(B)$ al inicio del intervalo y $v(D)$ al final del mismo, como la velocidad constante para todo el intervalo. En este caso esperaríamos que, al partir el balón de basquetbol de la posición B con velocidad igual a $\frac{v(B)+v(D)}{2}$ (el promedio de las velocidades inicial y final) y mantener dicha velocidad durante todo el intervalo, llegará exactamente a la posición D, o al menos a una posición mucho más cercana a D que en los dos casos anteriores.

Por último, consignemos que también es posible una cuarta decisión racional respecto a cómo determinar una velocidad constante para todo el intervalo, desde la posición B hasta la posición D. Parece razonable suponer que, si la velocidad del balón en todo momento está cambiando (en este caso, está disminuyendo mientras el balón avanza hacia su posición más alta), la velocidad exacta del balón en el ***medio*** del intervalo podría servir como velocidad constante para todo el intervalo. En este caso, se trata obviamente de la velocidad del balón en la posición C, es decir, $v(C)$. También parece razonable suponer que esta velocidad es igual al promedio de las velocidades inicial y final, esto es, suponer que $v(C) = \frac{v(B)+v(C)}{2}$. Como sabemos, en este caso la hipótesis es verdadera, pero se trata de una coincidencia; en general *no se cumple*. De modo que efectivamente tenemos una cuarta posibilidad: tomar como velocidad constante para todo el intervalo el valor exacto de la velocidad a la mitad del intervalo.

Modelando una razón de cambio variable mediante una razón de cambio constante por intervalos.

Las ideas que acabamos de discutir también son aplicables a las razones de cambio, ya que éstas también son magnitudes variables. En otras palabras, una cierta razón de cambio variable $r(x)$ puede ser reemplazada, en un intervalo dado de valores de x que van desde cierto valor inicial x_i hasta cierto valor final x_f, de cualquiera de las siguientes cuatro maneras:

- en todo el intervalo desde x_i hasta x_f, se toma el valor exacto de la razón de cambio variable en el inicio del intervalo, esto es, $r(x_i)$, como el valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo;
- en todo el intervalo desde x_i hasta x_f, se toma el valor exacto de la razón de cambio variable al final del intervalo, esto es, $r(x_f)$, como el valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo;
- en todo el intervalo desde x_i hasta x_f, se toma el promedio de los valores exactos de la razón de cambio variable al inicio y al final del intervalo, esto es, $\frac{r(x_i)+r(x_f)}{2}$, como el valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo;
- por último, en todo el intervalo desde x_i hasta x_f, se toma el valor exacto de la razón de cambio variable en el punto medio del intervalo, esto es, $r\left(\frac{x_i+x_f}{2}\right)$, como el valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo.

Enfatizamos el hecho de que esta sustitución es racional si el intervalo en cuestión es relativamente pequeño. Cuando analizamos el comportamiento de una razón de cambio en un intervalo de tamaño considerable, podemos aplicar esta misma idea dividiendo dicho intervalo en un conjunto de subintervalos pequeños, y aplicando en cada uno de ellos cualquiera de las cuatro maneras de sustitución ya descritas, o bien todas. De este modo tendremos que una razón de cambio variable en un intervalo relativamente grande puede ser sustituida por una razón de cambio que es constante por pequeños intervalos.

Un acercamiento dinámico y variacional al concepto de integral

Desde el punto de vista didáctico, la puesta en escena del enfoque propuesto por Thompson y Silverman (2007) y Kouropatov (2008) para el estudio del concepto de integral requiere poner atención a varios detalles cruciales. Esta estrategia se desarrolla en dos fases o etapas. En la primera de ellas, a partir de funciones exactas de razón de cambio se construyen funciones aproximadas de acumulación, mientras que en la segunda se obtienen funciones exactas de acumulación a partir de funciones aproximadas de acumulación. En este trabajo se aborda sólo la primera fase.

Supongamos que es conocida la expresión algebraica explícita $r(x)$ para la razón instantánea de cambio de cierta magnitud variable R, que depende de otra magnitud variable independiente x, misma que puede tomar valores numéricos en cierto dominio $a \leq x \leq b$. En otras palabras, son conocidas dos cosas:

a) la expresión algebraica explícita $r(x)$ para cierta razón instantánea de cambio, y

b) el hecho de que $r(x) = \frac{dR}{dx}$, donde $a \leq x \leq b$.

En estas condiciones, la tarea consiste en encontrar la expresión algebraica explícita $R(x)$ de la magnitud variable R en términos de x, para cualquier valor permisible de ésta en el dominio dado, $a \leq x \leq b$.

Como señalamos anteriormente, la estrategia para implementar este enfoque variacional deberá ser *dinámica*, lo que significa que deberemos considerar a x como una auténtica variable, es decir, asumir el hecho de que x toma consecutivamente distintos valores numéricos en distintos momentos, comenzando con su *valor inicial* $x_0 = a$, pasando por su *valor actual* x, y llegando hasta su *valor final* $x_f = b$. En concreto, ahora será necesario proceder como sigue.

Primera fase: funciones aproximadas de acumulación.

Primer paso. Elegir un valor arbitrario (sujeto a las restricciones para la variable independiente) para x, y también un valor arbitrario positivo para Δx. Dividir el intervalo de valores permisibles de la magnitud variable independiente x, que va de su *valor inicial* $x_0 = a$ hasta su *valor actual* x (esto es, el intervalo $a \leq x$), en “pequeños” intervalos de un mismo tamaño Δx, que con objeto de mejorar nuestra aproximación a la solución podremos cambiar haciéndolo aún más pequeño. Está claro que tal división solo por coincidencia arrojará un número exacto de “pequeños” intervalos. Entonces también habrá que determinar la cantidad n de subintervalos completos de tamaño Δx, y la longitud δx del segmento incompleto.

Segundo paso. Expresar analíticamente y graficar la función de razón de cambio constante por intervalos $f(x)$, con la que sustituiremos a la razón de cambio siempre variable $r(x)$, en el dominio $a \leq x$. Como hemos visto anteriormente, existen cuatro maneras de realizar esta sustitución, por lo que habrá cuatro funciones de razón de cambio constante por intervalos. Éstas son las funciones aproximadas de razón de cambio.

Tercer paso. Expresar analíticamente y graficar la función aproximada de acumulación $F(x)$ de la magnitud variable de interés, para cualquier valor numérico permisible de x en el dominio $a \leq x \leq b$. En concordancia con las cuatro posibilidades consignadas en el paso anterior, también habrá cuatro funciones aproximadas de acumulación, para el mismo problema.

Cuarto paso. Analizar en conjunto esas cuatro soluciones aproximadas, y extraer conclusiones válidas sobre el comportamiento de la magnitud variable acumulada.

Aunque en su enunciado estos cuatro pasos parecen de fácil ejecución, en la práctica y sobre todo en los primeros intentos no lo son, ya que cada uno de ellos requiere de varias acciones. Por esta razón, para aplicar esta estrategia dinámica tomaremos como ejemplo ilustrativo el movimiento oscilatorio de una masa atada al extremo de un resorte, observado durante un periodo de 10 segundos, y en el que la razón de cambio instantánea que en él figura es la velocidad instantánea de la masa, dada por $v(t) = 5\cos t$. Se trata de encontrar la posición $y(t)$ de la masa, medida con respecto al punto de equilibrio $y_0 = y(0) = 0$.

De este modo, el problema de acumulación que queremos resolver se puede plantear algebraicamente como sigue:

El problema del resorte.

Dados $v(t) = \frac{dy}{dt} = 5\cos t$, $a \leq t \leq 10$ y $0 \leq a$, encontrar una expresión algebraica explícita para $y(t)$.

Aplicando la estrategia dinámica a la resolución de un problema.

Analicemos con detalle la aplicación de esta estrategia al problema que acabamos de enunciar.

Primer paso. Dividir el intervalo de valores permisibles de la magnitud variable independiente t, que va desde su *valor inicial* $t_0 = a$ hasta su *valor actual* t (esto es, el intervalo $a \leq t$), en "pequeños" intervalos de un mismo tamaño Δt.

Está claro que, para poder llevar a cabo este primer paso, es necesario realizar al menos las siguientes dos acciones:

A1. Escoger el valor inicial $t_0 = a$ de la magnitud variable independiente.

A2. Escoger el tamaño Δt de los "pequeños" intervalos en que se dividirá al intervalo de valores numéricos de t, desde su valor inicial $t_0 = a$ hasta su valor actual t.

Una vez ejecutadas estas dos acciones, resulta posible realizar la tercera:

A3. Dividir el intervalo dado $a \leq t$ en "pequeños" intervalos de tamaño Δt.

La Figura 2 ilustra dos de las muchas formas en que esto puede hacerse, dado que tanto los valores numéricos de a como los de Δt pueden hacerse variar.

$a = 2.35$, $t = 7.35$, $\Delta t = 0.4$. $a = 3.6$, $t = 8.5$, $\Delta t = 0.65$.

Figura 2. El primer paso de la estrategia dinámica: División del intervalo.

Segundo paso. Expresar analíticamente y graficar la función de razón de cambio constante por intervalos $f(t)$, con la que procederemos a sustituir la razón de cambio siempre variable $v(t)$, en el dominio $a \leq t$.

Este segundo paso exige definir, para todo valor actual de t en cada uno de los "pequeños" intervalos considerados en el paso anterior, un cierto valor numérico para la velocidad constante del móvil en cada uno de dichos intervalos. Tenemos entonces que la ejecución del segundo paso requiere, a su vez, de la ejecución de al menos las siguientes tres acciones:

A4. Determinar la abcisa del punto inicial del intervalo de tamaño Δt en el que actualmente se ubica el valor de t, independientemente del hecho de que se haya completado o no dicho intervalo. Representemos tal abcisa mediante t_{ini} .

A5. Determinar la abcisa del punto final de este mismo intervalo. Representemos tal abcisa mediante t_{fin} .

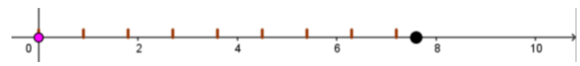
A6. Determinar la abcisa del punto medio del mismo intervalo. Representemos tal abcisa mediante t_{med}.

Sólo cuando hayamos ejecutado estas tres acciones podremos determinar las respectivas velocidades instantáneas (al inicio, al final o a la mitad de cada intervalo, o bien promediar las velocidades inicial y final en el intervalo), que serán tomadas como la velocidad constante en todo el intervalo.

Determinando el número n de intervalos. A su vez, para determinar correctamente las abcisas, tanto de los puntos extremos como del punto medio de cada uno de los "pequeños" intervalos de tamaño Δt, necesitamos previamente determinar el número de tales intervalos que quedan comprendidos entre el valor inicial $t_0 = a$ y el valor actual t. La Fig. 3 muestra dos situaciones para el caso más simple en el que $a = 0$.

$a = 0$, $t = 2.55$, $\Delta t = 0.85$.

$n = 3$, $\delta t = 0$.



$a = 0$, $t = 7.6$, $\Delta t = 0.9$.

$n = 8$, $\delta t = 0.4$.

Figura 3. Determinando el número n de subintervalos de tamaño Δt que quedan contenidos en el intervalo de 0 a t.

No resulta difícil entender que en este caso son posibles dos situaciones, precisamente las que se ilustran en la Figura 3. En la primera de ellas ocurre que, en el intervalo de 0 a t, el segmento "pequeño" de tamaño Δt queda contenido exactamente un número entero de veces, como en la ilustración de la izquierda de la Figura 3, en donde se pueden observar tres segmentos completos de tamaño $\Delta t = 0.85$, lo que es fácil comprobar dado que $3 \times 0.85 = 2.55$. En otras palabras, tenemos que $\frac{2.55}{0.85} = 3$, o más en general, $\frac{t}{\Delta t} = n$, donde n es un entero positivo (en este caso específico, igual a 3).

En la segunda de las posibilidades, ilustrada en la imagen de la derecha de la Figura 3, el "pequeño" segmento de tamaño Δt queda contenido (en el intervalo de 0 a t) un cierto número entero de veces, pero además queda otro segmento o intervalo "incompleto", es decir, de tamaño menor a Δt. En el caso particular que se ilustra en dicho recuadro se pueden contar 8 intervalos completos de tamaño $\Delta t = 0.9$, y claramente se observa un intervalo "incompleto". Esto lo podemos constatar considerando que $8 \times 0.9 = 7.2$, de modo que el intervalo "incompleto" tiene un tamaño igual a 0.4 unidades. En este caso, $\frac{7.6}{0.9} = 8.44444$, un número fraccionario.

A fin de calcular el número n de subintervalos de tamaño Δt que quedan contenidos en el intervalo de 0 a t (o bien de a a t), debemos tomar en consideración los siguientes hechos:

- El valor numérico concreto de t puede ser interpretado geométricamente como la longitud del segmento que une al origen del eje horizontal con el punto que representa al valor actual de t;
- El valor numérico concreto de a puede ser interpretado geométricamente como la longitud del segmento que une al origen del eje horizontal con el punto que representa al valor de a;

- El valor específico de Δt representa la distancia constante entre los puntos de división o, lo que es lo mismo, la longitud de cada subintervalo; y
- El cociente $\frac{t}{\Delta t}$ (o bien el cociente $\frac{t-a}{\Delta t}$) nos da un número fraccionario, cuya *parte entera* representa el número de subintervalos que preceden al (quedan a la izquierda del) subintervalo que contiene a t, mientras que la parte decimal de este cociente corresponde a la *porción fraccionaria* del subintervalo en que se ubica el valor actual de t.

Podemos entonces concluir que el número n de intervalos completos de tamaño Δt, comprendidos en el intervalo de *0* a t, estará dado por la expresión

$$n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \ . \qquad (1)$$

En esta expresión algebraica, el símbolo [ ] se usa para representar la *parte entera* de un número, en este caso particular, del cociente $\frac{t}{\Delta t}$.

Cuando el cociente $\frac{t}{\Delta t}$ no sea un entero positivo, eso significará que además de un cierto número n (determinado mediante (1)) de intervalos completos de tamaño Δt, en el intervalo de *0* a t habrá además un intervalo "incompleto" (es decir, menor que Δt), cuyo tamaño δt está dado por la expresión $\delta t = \text{frac}\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \cdot \Delta t$, donde el símbolo frac() se usa para representar la *parte fraccionaria* de un número. Guiándonos por consideraciones de carácter geométrico, no es difícil entender que el tamaño δt del intervalo "incompleto" también se puede determinar mediante la expresión

$$\delta t = t - n\Delta t = t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ . \qquad (2)$$

Determinando las abcisas de los puntos de división del intervalo de 0 a t . Conociendo el número n de intervalos completos de tamaño Δt que quedan contenidos en el intervalo de valores de *0* a t, no resulta difícil determinar las abcisas de cada uno de los respectivos puntos de división de dicho intervalo de valores numéricos (Figura 4).

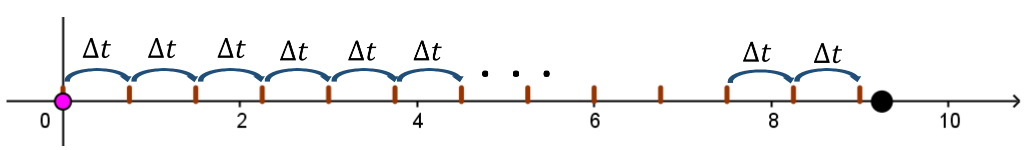


Figura 4. Determinando las abcisas de los puntos de división del intervalo de valores numéricos de *0* a t.

De la Fig. 4 resulta obvio que las abcisas de los puntos de división del intervalo comprendido entre *0* y t son las siguientes:

$\boldsymbol{a = 0}$	$\boldsymbol{a \neq 0}$
$t_{\mathbf{0}} = \mathbf{0} \cdot \Delta t = 0$,	$t_{\mathbf{0}} = a + \mathbf{0} \cdot \Delta t = a$,

$$t_{\mathbf{1}} = \mathbf{1} \cdot \Delta t = \Delta t \ , \qquad t_{\mathbf{1}} = a + \mathbf{1} \cdot \Delta t = a + \Delta t \ ,$$

$$t_{\mathbf{2}} = \mathbf{2}\Delta t \ , \qquad t_{\mathbf{2}} = a + \mathbf{2}\Delta t \ ,$$

$$t_{\mathbf{3}} = \mathbf{3}\Delta t \ , \qquad t_{\mathbf{3}} = a + \mathbf{3}\Delta t \ ,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$t_{\boldsymbol{n-1}} = (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})\Delta t = \left(\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor - 1\right)\Delta t \ , \qquad t_{\boldsymbol{n-1}} = a + (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})\Delta t = \left(\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor - 1\right)\Delta t \ ,$$

$$t_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}\Delta t = \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta t \ . \qquad t_{\boldsymbol{n}} = a + \boldsymbol{n}\Delta t = a + \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta t \ .$$

Determinando las abcisas de los puntos inicial, final y medio del intervalo en el que actualmente se ubica el valor numérico de $\boldsymbol{t}$. Considerando todo lo anterior, podemos ahora escribir las expresiones algebraicas correspondientes a las abcisas de los puntos inicial, final y medio del intervalo en el que actualmente se ubica el valor numérico de t. Representemos estas abcisas mediante t_{ini}, t_{fin} y t_{med} respectivamente. Entonces tenemos que

$$\boldsymbol{a = 0} \qquad \boldsymbol{a \neq 0}$$

$$t_{\text{ini}} = n\Delta t = \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta t \ , \qquad t_{\text{ini}} = a + n\Delta t = a + \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta t \ ,$$

$$t_{\text{fin}} = \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta t + \Delta t \ , \qquad t_{\text{fin}} = a + \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta t + \Delta t \ ,$$

$$t_{\text{med}} = \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta t + \frac{\Delta t}{2} \ . \qquad t_{\text{med}} = a + \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta t + \frac{\Delta t}{2} \ .$$

Las abcisas de los puntos inicial, final y medio del intervalo "incompleto" son respectivamente:

$$\boldsymbol{a = 0} \qquad \boldsymbol{a \neq 0}$$

$$t_{\text{ini}} = n\Delta t = \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta t \ , \qquad t_{\text{ini}} = a + n\Delta t = a + \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta t \ ,$$

$$t_{\text{fin}} = t \ , \qquad t_{\text{fin}} = t \ ,$$

$$t_{\text{med}} = \frac{\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta t + t}{2} \ . \qquad t_{\text{med}} = \frac{a + \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \Delta t + t}{2} \ .$$

Determinando el valor constante de la razón de cambio para cada uno de los subintervalos. Ahora que hemos determinado las abcisas de los puntos extremos y del punto medio del intervalo en el que actualmente se ubica el valor actual de t, podemos continuar la ejecución del segundo paso. Recordemos que en este segundo paso, el objetivo consiste en determinar el valor constante para la velocidad del móvil en cada intervalo de tamaño Δt, y que esto se pue hacer de cuatro maneras. Así pues, en este segundo paso nos queda pendiente ejecutar las siguientes acciones:

A7. Determinar el valor exacto de la velocidad del móvil en el inicio de cada intervalo.

A8. Determinar el valor exacto de la velocidad del móvil en el final de cada intervalo.

A9. Determinar el valor exacto de la velocidad del móvil en el punto medio de cada intervalo.

A10. Determinar el promedio de los valores exactos de la velocidad del móvil al inicio y al final de cada intervalo.

A7) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al inicio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo:

$$v_{\text{const}}(t) = v(t_{\text{ini}}) = v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t\right) \ . \tag{3}$$

En el caso del ejemplo que nos servirá de ilustración tenemos

$$v(t_{\text{ini}}) = 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \ . \tag{3.1}$$

A8) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo:

$$v_{\text{const}}(t) = v(t_{\text{fin}}) = v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t + \Delta t\right) . \tag{4}$$

En el caso del resorte tenemos

$$v(t_{\text{fin}}) = 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t\right) . \tag{4.1}$$

A9) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea en el punto medio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo:

$$v_{\text{const}}(t) = v(t_{\text{med}}) = v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right) \ . \tag{5}$$

Para el caso del resorte tenemos

$$v(t_{\text{med}}) = 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right) . \tag{5.1}$$

A10) En cada intervalo de tamaño Δt, el promedio de los valores exactos de la velocidad instantánea al inicio y al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo:

$$v_{\text{const}}(t) = \frac{v(t_{\text{ini}}) + v(t_{\text{fin}})}{2}$$
$$= \frac{v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t\right) + v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t + \Delta t\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right]\cdot \Delta t\right) + v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right]\cdot \Delta t + \Delta t\right)\right\}. \qquad (6)$$

En el caso del ejemplo que nos servirá de ilustración tenemos

$$v_{\text{prom}}(t) = \frac{1}{2}\left(5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) + 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t\right)\right) \quad . \qquad (6.1)$$

Para el subintervalo "incompleto" de tamaño δt tenemos:

$$v(t_{\text{ini}}) = 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \quad ,$$

$$v(t_{\text{fin}}) = 5\cos t \quad ,$$

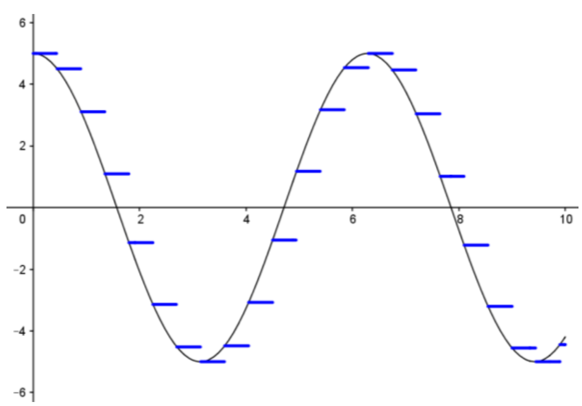
$$v(t_{\text{med}}) = 5\cos\left(\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + t}{2}\right) \quad , \qquad (7)$$

$$v_{\text{prom}}(t) = \frac{5}{2}\left(\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) + \cos t\right) \quad .$$

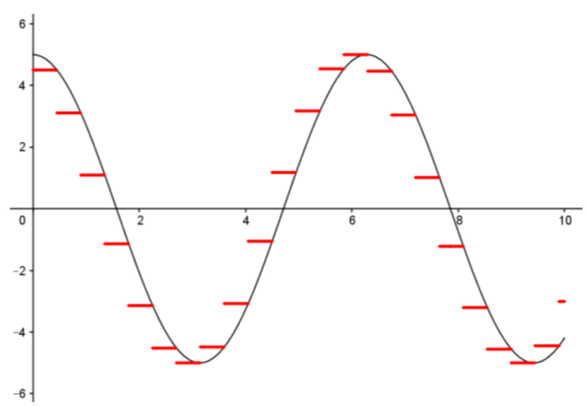
Ahora que tenemos estas expresiones algebraicas (3.1)–(6.1) y (7) para las funciones de razón de cambio constante por intervalos, nos resta en este segundo paso ejecutar la siguiente acción:

A11. Graficar cada una de las cuatro funciones aproximadas de razón de cambio constante por intervalos, obtenidas en las acciones A7–A10.

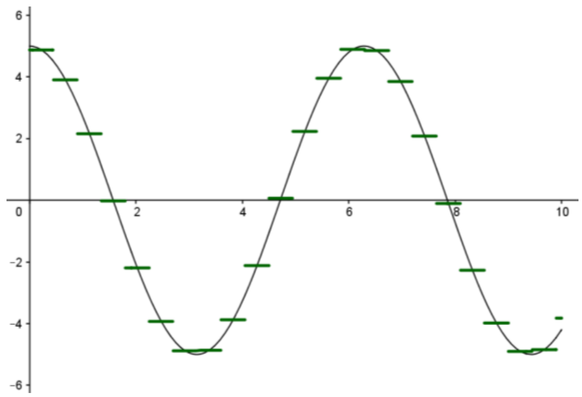
Las gráficas respectivas de velocidad constante por intervalos del movimiento de la masa en el resorte, para $a = 0$ y $\Delta t = 0.45$, se muestran enseguida en las Figs. 5a–5d. Como se puede apreciar y es congruente con lo que se esperaba, se trata de ***funciones escalonadas***.



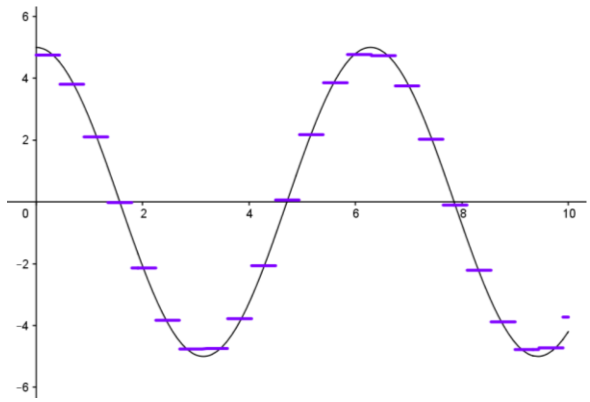
a) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al inicio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.



b) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.



c) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea en el punto medio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.



d) En cada intervalo de tamaño Δt, el promedio de los valores exactos de la velocidad instantánea al inicio y al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.

Figura 5 Gráficas de las funciones aproximadas de velocidad constante por intervalos, para el caso $v(t) = 5\cos t$, donde $0 \leq t \leq 10$.

Obteniendo funciones aproximadas de acumulación, a partir de funciones de razón de cambio constantes por intervalos.

Tercer paso. Usamos estos valores constantes de la velocidad en cada subintervalo, para aproximar el valor acumulativo de la magnitud de interés en dicho subintervalo (la contribución de dicho subintervalo a la acumulación total de la magnitud de interés). En el caso del problema que nos ocupa, dicha magnitud es la posición de la pesa en cada momento, medida con respecto al punto de equilibrio, a la que representamos mediante $y(t)$. Para calcular la aportación de cada subintervalo a la acumulación total, es importante tener presente el hecho de que en cada subintervalo la razón de cambio es constante, por lo que basta con multiplicar dicho valor constante de la razón de cambio por la duración del subintervalo, para obtener la acumulación "parcial". Posteriormente habrá que sumar las aportaciones parciales de todos los subintervalos. Veamos esto con más detalle, para la primera de las funciones aproximadas de razón de cambio.

Velocidad constante por intervalos, igual a la velocidad exacta al inicio de cada intervalo.

a) El valor actual de t cae dentro del *primer intervalo*, es decir, $0 \leq t < \Delta t$ o, lo que es lo mismo, $0 \cdot \Delta t \leq t < 1 \cdot \Delta t$, y el número de intervalos completos es $n = 0$. De acuerdo con (3.1), la velocidad constante en este intervalo es $v(0) = 5\cos 0 = 5$, mientras que el tiempo transcurrido es igual al valor de t, por lo que la posición de la pesa está dada por

$$y(t) = 5t \ .$$

b) Pasemos ahora a considerar el caso en que el valor actual de t cae dentro del *segundo intervalo*, lo que quiere decir que $1 \cdot \Delta t \leq t < 2\Delta t$. En estas condiciones se tiene que $1 \leq \frac{t}{\Delta t} < 2$, y en consecuencia $n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right] = 1$. De acuerdo con (3.1), la velocidad constante de la pesa en todo este intervalo es igual a $v(\Delta t) = 5\cos\Delta t$.

Ahora está claro que, para encontrar la posición $y(t)$ de la pesa, para cualquier valor de t comprendido entre Δt y $2\Delta t$, deberemos calcular la posición a la que llegó durante el primer intervalo, que ya quedó atrás, y a ésta agregarle la distancia adicional recorrida durante el segundo intervalo. La posición de la pesa al finalizar el primer intervalo es $y_1 = 5\Delta t$.

La distancia adicional recorrida por la pesa en el segundo intervalo se calcula multiplicando la velocidad constante en este intervalo, que según la expresión (3.1) es igual a $5\cos\Delta t$, por el tiempo durante el cual la pesa se desplaza con esta velocidad constante, que es igual a $t - \Delta t$. Entonces $y_{\text{adic}} = (5\cos\Delta t)(t - \Delta t)$, y la posición de la pesa en cualquier instante en este segundo intervalo está dada por

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)(t - \Delta t) .$$

c) Continuemos ahora con el caso en que el valor actual de t cae dentro del *tercer intervalo*; lo que quiere decir que $2\Delta t \leq t < 3\Delta t$ y $n = 3$. De acuerdo con (3.1), la velocidad constante de la pesa en todo este intervalo es igual a $v(2\Delta t) = 5\cos 2\Delta t$. La posición que alcanza la pesa al finalizar el segundo intervalo es $y_2 = 5\Delta t + (5\cos\Delta t) \cdot \Delta t$. La distancia adicional recorrida por la pesa en este tercer intervalo se calcula multiplicando la velocidad constante en este intervalo, por el tiempo durante el cual la pesa se desplaza con esta velocidad constante, que es igual a $t - 2\Delta t$. Entonces $y_{\text{adic}} = (5\cos 2\Delta t)(t - 2\Delta t)$, y la posición de la pesa en cualquier instante en este tercer intervalo está dada por

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t) \cdot \Delta t + (5\cos 2\Delta t)(t - 2\Delta t) .$$

d) Veamos ahora el caso en que el valor actual de t cae dentro del *cuarto intervalo*; lo que quiere decir que $3\Delta t \leq t < 4\Delta t$ y $n = 4$. En este caso, la velocidad constante de la pesa es igual a $v(3\Delta t) = 5\cos 3\Delta t$. La distancia adicional recorrida por la pesa en este cuarto intervalo se calcula multiplicando la velocidad constante en este intervalo, por el tiempo durante el cual la pesa se desplaza con esta velocidad constante, que es igual a $t - 3\Delta t$. Entonces $y_{\text{adic}} = (5\cos 3\Delta t)(t - 3\Delta t)$, y la distancia acumulada en los tres intervalos completos anteriores es igual a $y_3 = 5\Delta t + (5\cos\Delta t) \cdot \Delta t + (5\cos 2\Delta t) \cdot \Delta t$. La posición de la pesa en cualquier instante en este cuarto intervalo está dada por

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t) \cdot \Delta t + (5\cos 2\Delta t) \cdot \Delta t + (5\cos 3\Delta t)(t - 3\Delta t) .$$

d) Por último, veamos el caso en que el valor actual de t cae dentro del *quinto intervalo*; lo que quiere decir que $4\Delta t \leq t < 5\Delta t$ y $n = 5$. En este caso, la velocidad constante de la pesa es igual a $v(4\Delta t) = 5\cos 4\Delta t$. La distancia acumulada en los cuatro intervalos completos anteriores es igual a $y_4 = 5\Delta t + (5\cos\Delta t) \cdot \Delta t + (5\cos 2\Delta t) \cdot \Delta t + (5\cos 3\Delta t) \cdot \Delta t$. La distancia adicional recorrida por la pesa en este cuarto intervalo es $y_{\text{adic}} = (5\cos 4\Delta t)(t - 4\Delta t)$, y La posición de la pesa en cualquier instante en este quinto intervalo está dada por

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\Delta t + (5\cos 3\Delta t)\Delta t + (5\cos 4\Delta t)(t - 4\Delta t) .$$

Podríamos continuar esta línea de razonamiento hasta concluir con todos los intervalos, pero no es ése nuestro propósito. Nuestro objetivo consiste en encontrar una *fórmula general* para obtener los cinco resultados que ya tenemos, y *todos los resultados posibles*. Por ello, detengámonos por un momento a escudriñar estos resultados particulares en busca de una regularidad, lo que nos ayudará sobremanera para establecer la expresión algebraica general de nuestra función de acumulación.

La *primera* característica importante que tienen en común todos estos resultados, y que no es difícil percibir, es que *dependen del número* $\boldsymbol{n}$ *de intervalos completos* de tamaño Δt comprendidos entre *0* y el valor actual de t. Analicemos más a fondo esta dependencia.

$n = \mathbf{0}$

$y(t) = 5t$,

$n = \mathbf{1}$

$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)(t - \Delta t)$,

$n = \mathbf{2}$

$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos\mathbf{2}\Delta t)(t - \mathbf{2}\Delta t)$,

$n = \mathbf{3}$

$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos\mathbf{2}\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos\mathbf{3}\Delta t)(t - \mathbf{3}\Delta t)$,

$n = \mathbf{4}$

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\Delta t + (5\cos\mathbf{2}\Delta t)\Delta t + (5\cos\mathbf{3}\Delta t)\Delta t + (5\cos\mathbf{4}\Delta t)(t - \mathbf{4}\Delta t) .$$

La *segunda característica* en común que podemos advertir en estos resultados es que todos ellos *contienen* $n + 1$ *sumandos*.

La *tercera característica* en común consiste en que, de éstos, los primeros n sumandos no dependen de t; *solamente dependen de* Δt. El último de esos sumandos depende tanto del valor actual de t como del valor de Δt.

La *cuarta característica* que podemos advertir en común en estos resultados es que el último de los sumandos que en ellos figura tiene una *misma estructura* que también depende del valor de n: es siempre igual a

$$(5\cos(\boldsymbol{n}\Delta t))(t - \boldsymbol{n}\Delta t) \ .$$

Para convencernos de que esto último es válido para ***todos*** los casos, sólo basta reescribir los primeros dos resultados de manera equivalente como sigue:

$n = \mathbf{0}$

$y(t) = 5\cos(\mathbf{0}\Delta t)(t - \mathbf{0}\Delta t)$,

$n = \mathbf{1}$

$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\mathbf{1}\Delta t)(t - \mathbf{1}\Delta t)$.

Con esto, hemos encontrado la fórmula general para el último de los sumandos. Resta por encontrar una fórmula general para los primeros n sumandos. Analicémoslos entonces con más detenimiento.

La *quinta característica* que podemos encontrar en común en todos los resultados anteriores, en concreto para los n primeros sumandos, es que en cada uno de ellos *aparecen de manera consecutiva los números* $0, 1, 2, \cdots, n$. Esto lo podemos apreciar con más claridad si reescribimos el segundo de estos resultados de manera equivalente como sigue:

$$n = \mathbf{1}$$

$$y(t) = 5\cos(\mathbf{0}\Delta t)\,\Delta t + (5\cos\mathbf{1}\Delta t)(t - \mathbf{1}\Delta t)\ .$$

La *sexta característica* en común que comparten los primeros n sumandos consiste en que todos ellos tienen *una misma estructura*, a saber, el producto de dos factores, el primero de los cuales siempre es $5\Delta t$, mientras que en el segundo figuran de manera consecutiva los cosenos de los números $0, 1, 2, \cdots, n-1$ multiplicando a Δt, y que se puede expresar de manera general como sigue:

$$5\cos(\mathbf{0}\Delta t)\,\Delta t + (5\cos\mathbf{1}\Delta t)\Delta t + (5\cos\mathbf{2}\Delta t)\Delta t + (5\cos\mathbf{3}\Delta t)\Delta t$$
$$+ \cdots + (5\cos(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\Delta t)\Delta t \quad .$$

Hasta aquí hemos hecho un gran avance, ya que hemos podido formular en términos generales la expresión algebraica para la posición $y(t)$ en la que se encuentra la pesa, y esto para cualquier valor permisible de t. Si ahora recordamos que, para cualquier valor actual de t, el número n de intervalos completos de tamaño Δt que quedan comprendidos entre 0 y dicho valor actual está dado por $n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]$, no será difícil reexpresar nuestros dos resultados generales en términos únicamente de t y Δt. El primero de estos resultados, a saber, la suma de los n primeros términos, se puede reescribir como

$$5\cos(\mathbf{0}\Delta t)\,\Delta t + (5\cos\mathbf{1}\Delta t)\Delta t + (5\cos\mathbf{2}\Delta t)\Delta t + (5\cos\mathbf{3}\Delta t)\Delta t$$
$$+ \cdots + \left(5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right] - \mathbf{1}\right)\Delta t\right)\Delta t \quad .$$

El $(n+1)$-ésimo termino también se puede rescribir como

$$\left(5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\Delta t\right)\right)\left(t - \left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\Delta t\right)\ .$$

Resumiendo, nuestro análisis detallado de algunos casos particulares (los suficientes) nos ha permitido establecer la ***fórmula general para nuestra función aproximada de acumulación***, en este caso, la distancia $y(t)$ a la que se encuentra la pesa con respecto a la posición de equilibrio, en cualquier instante t entre los 0 y los 10 segundos:

$$y(t) = 5\cos(\mathbf{0}\Delta t)\,\Delta t + (5\cos\mathbf{1}\Delta t)\Delta t + (5\cos\mathbf{2}\Delta t)\Delta t + (5\cos\mathbf{3}\Delta t)\Delta t$$
$$+ \cdots + \left(5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right] - \mathbf{1}\right)\Delta t\right)\Delta t + \left(5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\Delta t\right)\right)\left(t - \left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\Delta t\right)\ . \qquad (8)$$

Velocidad constante por intervalos, igual a la velocidad exacta al fin de cada intervalo.

Un análisis detallado de suficientes casos particulares, similar al que ya hemos realizado en el apartado anterior y que por razones de espacio no consignaremos aquí, nos permite establecer la ***fórmula general*** correspondiente a este caso ***para nuestra función aproximada de acumulación***, es decir, la distancia $y(t)$ a la que se encuentra la masa atada al resorte con respecto a la posición de equilibrio, en cualquier instante t comprendido entre los *0* y los *10* segundos:

$$y(t) = (5\cos \mathbf{1}\Delta t)\Delta t + (5\cos \mathbf{2}\Delta t)\Delta t + (5\cos \mathbf{3}\Delta t)\Delta t + \cdots + 5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\Delta t\right)\Delta t + (5\cos(t))\left(t - \left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\Delta t\right) \;. \tag{9}$$

Velocidad constante por intervalos, igual a la velocidad exacta a la mitad de cada intervalo.

En este caso, la distancia $y(t)$ a la que se encuentra la pesa con respecto al origen, en cualquier instante t comprendido entre los *0* y los *10* segundos, está dada por

$$y(t) = 5\cos\left(\mathbf{0}\cdot\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t + 5\cos\left(\mathbf{1}\cdot\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t + 5\cos\left(\mathbf{2}\cdot\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t + 5\cos\left(\mathbf{3}\cdot\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t + \cdots + 5\cos\left(\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right] - \mathbf{1}\right)\cdot\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t + 5\cos\left(\frac{\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\cdot\Delta t + t}{2}\right)\left(t - \left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\cdot\Delta t\right). \tag{10}$$

Velocidad constante por intervalos, igual al promedio de las velocidades exactas al inicio y al final de cada intervalo.

$$y(t) = \frac{5\cos(\mathbf{0}\Delta t) + 5\cos(\mathbf{1}\Delta t)}{2}\Delta t + \frac{5\cos(\mathbf{1}\Delta t) + 5\cos(\mathbf{2}\Delta t)}{2}\Delta t + \frac{5\cos(\mathbf{2}\Delta t) + 5\cos(\mathbf{3}\Delta t)}{2}\Delta t + \cdots + \frac{5\cos\left(\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right] - \mathbf{1}\right)\Delta t\right) + 5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\Delta t\right)}{2}\Delta t + \frac{5\cos\left(\left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\Delta t\right) + 5\cos(t)}{2}\left(t - \left[\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]\cdot\Delta t\right). \tag{11}$$

Es sabido que las expresiones algebraicas (8)–(11) se pueden escribir de manera compacta utilizando la notación sigma. Las correspondientes expresiones compactas son:

$$y(t,\Delta t) = \sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} 5\cos\big((i-1)\Delta t\big)\cdot\Delta t + 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\cdot\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \;, \tag{8a}$$

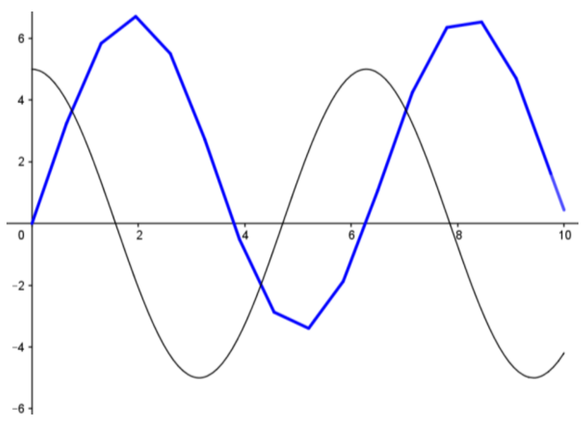
$$y(t,\Delta t)=\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor}5\cos(i\Delta t)\cdot\Delta t+5\cos(t)\cdot\left(t-\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t\right)\ , \qquad (9a)$$

$$y(t,\Delta t)=\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor}5\cos\left((2i-1)\frac{\Delta t}{2}\right)\cdot\Delta t+5\cos\left(\frac{\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t+t}{2}\right)\cdot\left(t-\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t\right), \qquad (10a)$$

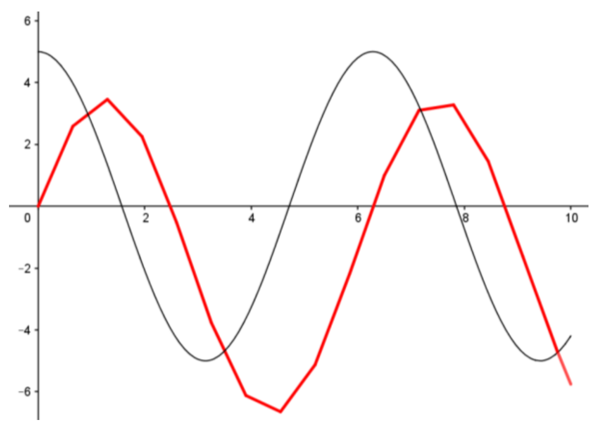
$$y(t,\Delta t)=\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor}\frac{5\cos\big((i-1)\Delta t\big)+5\cos(i\Delta t)}{2}\Delta t+\frac{5\cos\left(\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t\right)+5\cos(t)}{2}\cdot\left(t-\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t\right)\ . \qquad (11a)$$

Representación gráfica de las funciones aproximadas de acumulación

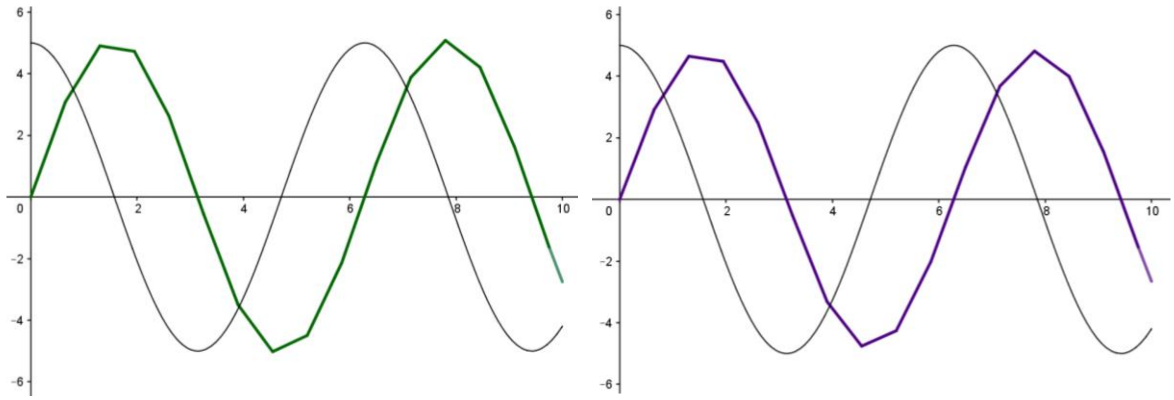
A partir de las expresiones algebraicas (8a)–(11a) es posible obtener la representación gráfica de nuestras funciones aproximadas de acumulación, como se muestra en la Figura 6, para el caso en que $a=0$ y $\Delta t=0.65$. Se trata de ***funciones lineales por pedazos*** (poligonales).



a) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al inicio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.



b) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.



c) En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea en el punto medio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.

d) En cada intervalo de tamaño Δt, el promedio de los valores exactos de la velocidad instantánea al inicio y al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo.

Figura 6. Gráficas de las funciones aproximadas de acumulación $y(t)$, dadas por las expresiones algebraicas (8a)–(11a), para el caso $v(t) = 5\cos t$, donde $0 \leq t \leq 10$.

Conclusión. Algunas dificultades del enfoque dinámico

Con todo y el atractivo didáctico y cognitivo que posee este enfoque para el concepto de integral, su enseñanza y aprendizaje no están exentos de dificultades. Como los mismos Thompson y Silverman (2007) han señalado, una de las mayores dificultades que muestran los estudiantes para comprender la idea de acumulación consiste en entender cuáles son los "pedacitos" que se están acumulando. La segunda dificultad importante consiste en trascender una comprensión coloquial de la acumulación para pasar a su comprensión matemática (variacional). La tercera dificultad importante, documentada por los mismos autores Thompson y Silverman (2007), consiste en la falta de familiaridad del estudiante con la forma algebraica abierta de representación de las funciones de acumulación.

La puesta en escena del enfoque dinámico requiere de la máxima atención y concentración del profesor, quien debe sistemáticamente dirigir la atención de los estudiantes hacia ciertos detalles fundamentales. En primer lugar, es más importante hacer que x cambie, en vez de concentrar la atención en Δx, que también debe cambiar haciéndose cada vez más pequeño, pero "en segunda instancia"; la visión privilegiada debe centrarse en x. En otras palabras, a diferencia del enfoque tradicional, se deberá hacer que x cambie en el primer plano, dejando "constante" el valor de Δx, en lugar de "dejar fijo" el valor de x y permitir que Δx cambie haciéndose cada vez más pequeño.

En segundo lugar, se deberá enfatizar el hecho de que $f(x)$ es una razón instantánea de cambio de cierta magnitud variable $F(x)$, y que esta razón instantánea siempre cambia. Entonces, para obtener un valor aproximado de la acumulación que esta razón de cambio produce, deberemos tomarla como si fuera constante en “pequeños intervalos” de tamaño Δx. La cuestión de cómo determinar ese valor “constante” en cada “pequeño intervalo”, como hemos visto, puede ser resuelta recurriendo a las ricas intuiciones de los estudiantes, quienes habitualmente proponen tomar el valor al inicio de cada intervalo, al final del mismo, a la mitad de cada intervalo, promediar los valores inicial y final, o alguna otra variante. Posteriormente estas intuiciones pueden servir de base para la formalización del concepto.

En tercer lugar, es importante enfatizar el hecho de que las funciones de acumulación, como tales, se pueden graficar, y que en la versión “en grueso” (con Δx relativamente “grande”) sus gráficas son líneas poligonales (quebradas), mientras que en la versión “en fino” (con Δx suficientemente “pequeño”) son más parecidas a curvas. Esto contribuye a la formación de una imagen geométrica dinámica de las funciones de acumulación (integrales), como poligonales que gradualmente se van aproximando o tienen como límite a cierta curva suave.

Y por último, también es importante enfatizar que las funciones de acumulación tienen una razón de cambio: cuando algo se acumula, lo hace con cierta intensidad. Este último punto nos remite al significado variacional del Teorema Fundamental del Cálculo, que tiene que ver con las funciones de acumulación y su razón de cambio, y no tanto con los valores de la integral y los valores de la antiderivada de la función integrando, como habitualmente se resalta en el enfoque tradicional, predominantemente calculístico.

Referencias bibliográficas

Kouropatov, A. (2008). Approaches to the integral concept. The case of high school calculus. Consultado en línea en Junio de 2016 en http://www.yess4.ktu.edu.tr/YermePappers/Anatoli Kouropatov.pdf.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275-298.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 117-131). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Wagner, J. F. (2017). Students' obstacles to using Riemann sum interpretations of the definite integral. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. Disponible en línea en http://link.springer.com/article/10.1007/s40753-017-0060-7.