



# REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores  
del Uso de Tecnología en Educación Matemática

## Directorio

Rafael Pantoja R.

Director

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Lourdes Guerrero M.

Sección: Selección de  
artículos de investigación

Elena Nesterova

Alicia López B.

Verónica Vargas Alejo

Sección: Experiencias  
Docentes

Esnel Pérez H.

Armando López Zamudio

Sección: Geogebra

**ISSN: 2395-955X**

Volumen VI    Número 1    Fecha: Enero-Junio de 2018

ISSN: 2395-955X

## PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA HIPÉRBOLA

María José Aceves Sepúlveda, José Francisco Villalpando Becerra

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías,  
Universidad de Guadalajara. México

*marijo\_aceves@hotmail.com, jose.villalpando@red.cucei.udg.mx*

Para citar este artículo:

Aceves, M. J., Villalpando, J. F. (2018). Propuesta didáctica para el aprendizaje de la hipérbola. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VI, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VI, No. 1, Enero-Junio 2018, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: <https://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

## PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA HIPÉRBOLA

María José Aceves Sepúlveda, José Francisco Villalpando Becerra

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara. México

*marijo\_aceves@hotmail.com, jose.villalpando@red.cucei.udg.mx*

**Palabras clave:** cónicas, hipérbola, GeoGebra, representaciones semióticas, niveles de Van-Hiele

### Resumen

El presente trabajo muestra los avances de la investigación que tiene como propósito diseñar, implementar y probar la efectividad de una propuesta didáctica enfocada en el aprendizaje de la hipérbola con el apoyo del software libre GeoGebra, la cual está dirigida a los alumnos de 3er semestre de bachillerato que cursan la materia de Geometría Analítica en el Instituto de Superación Tecnológica Arrazola (I.S.T.A.). Además se tiene que la investigación tiene como objetivo general el determinar los efectos de la propuesta didáctica en el aprendizaje del tema de la hipérbola en los alumnos antes mencionados. Así mismo se mostrarán algunos ejemplos de las actividades que se pretenden aplicar y el método estadístico que se utilizará para analizar los resultados.

### Introducción

En la actualidad el desarrollo de la tecnología ha avanzado considerablemente y esos adelantos deben reflejarse también en la educación, como apoyo tanto de los estudiantes como del profesor.

La asignatura de geometría analítica es la materia donde los alumnos trabajan con el álgebra y la geometría de manera conjunta y no como ramas separadas de las matemáticas, el mismo Descartes lo describe como la búsqueda de un método único como lo menciona De la Torre (2006).

De acuerdo a los resultados de los exámenes parciales, se ha observado que los alumnos del Instituto de Superación Tecnológica Arrazola (I.S.T.A.) que cursan la materia de Geometría Analítica se encuentran con el problema de no relacionar una ecuación (parte analítica) con su gráfica, causando problemas posteriores al necesitar graficar en otras materias.

En el estudio de las cónicas, en especial las hipérbolas, se tiene un problema mayor, ya que en el programa de bachillerato tecnológico de la Secretaría de Educación Pública SEP (SEP, 2013) no aparece en la asignatura de Geometría y Trigonometría, donde se estudia dicha figura y sus partes, si no, hasta el siguiente semestre en Geometría Analítica (Contreras y Contreras, 2005).

Los problemas y ejercicios relacionados con las hipérbolas son de dos tipos, el primero donde dada la descripción geométrica, se pretende encontrar la ecuación que cumpla dichas características; y el segundo es que dada una expresión algebraica, se llegue a una representación gráfica. Dado que las cónicas tienen características similares, para los alumnos es complicado diferenciar una de otra.

En las aulas convencionales es limitada la cantidad de problemas y ejercicios que se pueden realizar, debido al desarrollo algebraico que se debe efectuar. Con el apoyo de las computadoras,

estas exploraciones se hacen ágilmente, permitiendo a los alumnos comparar figuras o ecuaciones e incluso aumentar el nivel de dificultad (Hernández, 2005).

Con los avances de la tecnología, se tiene acceso a herramientas computacionales especializadas y de bajo costo, como es el software libre, que permite experimentar de una forma dinámica y sencilla, problemas gráficos y analíticos.

### **Marco teórico**

Para el desarrollo de la propuesta didáctica se va a contemplar las siguientes teorías del aprendizaje debido a la naturaleza de la materia en cuestión.

El método diseñado por los esposos Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele Geldof iniciaron trabajos con grupos pilotos sustentando lo que entonces era una teoría: El Modelo de Razonamiento de Van Hiele.

El cual abarca un aspecto descriptivo, mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar el progreso que va teniendo, y el aspecto instructivo el que marca las pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en los niveles de razonamiento.

El aprendizaje geométrico se da por determinados niveles de pensamiento y conocimiento, que no va asociado a la edad y que solo alcanzando un nivel se puede pasar al siguiente (Pérez, 2011).

Los niveles de razonamiento planteados en este método son (Mendoza, 2011):

1. Visualización y reconocimiento. En este nivel el alumno comienza a reconocer las figuras sin identificar la relación entre tales formas y sus partes. Las características principales de este nivel son:
  - La descripción de las figuras está basada en la semejanza con otros objetos.
  - No suelen reconocer las partes ni las propiedades matemáticas de las figuras.
  - Reconocen las figuras solamente por su aspecto, comparándolos con un prototipo conocido
2. Análisis. Se identifican las partes o elementos de las figuras así como sus propiedades matemáticas. Este nivel se caracteriza por que el alumno:
  - Puede deducir propiedades por medio de la experimentación.
  - No relacionan entre si las propiedades de una figura.
3. Ordenación y clasificación. Se introduce el razonamiento matemático apoyado en la manipulación de las figuras. El alumno:
  - Describe las figuras de manera formal, dan definiciones, comprenden el papel de las definiciones y sus requisitos
  - Aplican pasos individuales para el razonamiento lógico-formal, pero sin concatenarlos, no se entiende la estructura de la demostración.

4. Deducción formal. Los alumnos adquieren un razonamiento lógico formal, aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas y la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto.
5. Rigor. En el último nivel el alumno puede trabajar en diversos sistemas axiomáticos, estudia diferentes geometrías y puede comparar entre estos sistemas. Se estudia la geometría en abstracto.

Por el grado educativo al que va dirigida esta investigación, nos enfocaremos únicamente en los primeros niveles de razonamiento.

Desde el punto de vista instructivo en el método de Van Hiele se proponen 5 fases del aprendizaje, de tal manera que a medida de su aplicación el estudiante relacione los conceptos aprendidos en un nivel anterior con los que está estudiando en el nivel que se encuentre.

Las fases de aprendizaje se definen de la siguiente manera (Mendoza, 2011):

1. Información: se exploran los conocimientos previos del alumno.
2. Orientación dirigida: se permite a los estudiantes explorar los conceptos a través de actividades progresivas que permitan revelar las estructuras características de cada nivel. Es importante que las cuestiones a plantear del profesor sean concisas y sin ambigüedad.
3. Explicitación: Partiendo de sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus opiniones acerca de las estructuras observadas. El papel del profesor debe ser mínimo y debe cuidar que el lenguaje del alumno sea el apropiado a su nivel (Pérez, 2011).
4. Orientación libre: Se completa la red de relaciones que se comenzó a formar en las fases anteriores y se adquiere el lenguaje propio del siguiente nivel de razonamiento.
5. Integración: el concepto se reorganiza y adquiere un nuevo significado.

Por la naturaleza de la materia de geometría analítica es necesario que el alumno pueda identificar la figura no solo en su forma geométrica, también es importante que sepa distinguir a que expresión algebraica pertenece, es por eso que también se hará uso de la teoría de Duval.

Las representaciones semióticas tienen un papel primordial en el estudio de las matemáticas ya que a diferencia de otras áreas de estudio, los objetos matemáticos no son tangibles y son difíciles de visualizar, haciendo que a través de estas representaciones el concepto se haga accesible. Es importante que el estudiante pueda diferenciar el objeto matemático de sus representaciones, ya que de otra manera no es posible que haya conceptualización.

Las representaciones mentales están conformadas por el conjunto de concepciones que un individuo tiene acerca de un objeto matemático, mientras que las representaciones semióticas son las producciones constituidas por el empleo de signos, son el medio para exteriorizar las representaciones mentales.

Éstas, además de cumplir una función de comunicación, tienen una función de objetivación, son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, del funcionamiento cognitivo del pensamiento, del tratamiento de la información, de la toma de conciencia y de la comprensión.

Las representaciones de un registro semiótico particular deben cumplir con unas reglas de conformidad, por razones de comunicación y de transformación de representaciones llamada formación.

Las transformaciones de la representación dentro del mismo registro donde se ha formado de acuerdo con unas únicas reglas que le son propias al sistema, de modo que a partir de éstas se obtengan otras representaciones que puedan constituirse como una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales se denomina tratamiento de una representación. Debido a esto cada tratamiento requiere el reconocimiento y aplicación de las reglas propias a cada registro.

La habilidad para cambiar de registros de representación semiótica, el poder convertir las representaciones producidas de un sistema de representación a otro sistema, de manera que este otro sistema permita explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado se le denomina conversión (Ospina, 2012).

### **Metodología**

La investigación se dividirá en 6 fases, en la primera se va a hacer una consulta de diversas fuentes relevantes, en su mayoría electrónicas, para el desarrollo de la investigación, con el fin de recolectar la información necesaria para justificar cada una de los criterios a utilizar.

En la segunda fase, se hará el diseño del experimento, se decidirá qué actividades y materiales se van a utilizar para la propuesta didáctica tomando en cuenta la las teorías en las que se va a basar la investigación, se elegirán los instrumentos y el modo de evaluación, así como la planificación sobre el grupo que participará en el proyecto.

En la tercer fase se hará una evaluación de los materiales aplicando una prueba piloto a los alumnos del bachillerato del I.S.T.A., además se presentarán los materiales a expertos en el tema para que evalúen el material desarrollado.

En la cuarta se presentará la propuesta didáctica al grupo asignado con la finalidad de obtener los datos experimentales

En la quinta fase se organizaran y analizaran dichos datos, se presentaran las conclusiones de la investigación.

Por ultimo en la sexta fase se redactará el reporte de investigación.

### **Exposición de la propuesta.**

El objetivo principal de esta investigación es determinar los efectos de la propuesta didáctica en el aprendizaje del tema de la hipérbola en los alumnos de 3er semestre del bachillerato del I.S.T.A.

Para llevar a cabo la experimentación se tomará un grupo de 3er semestre del I.S.T.A. que cursará la materia de tronco común de Geometría Analítica, el cual está conformado por alumnos de las carreras técnicas en Puericultura y Administración.

La población se dividirá de manera aleatoria en un grupo experimental y un grupo de control, actualmente se desconoce la cantidad de alumnos.

Las variables con las que se trabajará a lo largo de la investigación son:

Variable independiente: el empleo o no de la propuesta didáctica para el resultado de aprendizaje del tema de la hipérbola.

Variable dependiente: el aprendizaje por parte de los alumnos en el tema de la hipérbola.

Las hipótesis estadísticas planteadas para la experimentación son:

Hipótesis nula: con el empleo de la propuesta didáctica los resultados de aprendizaje del grupo experimental no son mejores que los resultados de aprendizaje del grupo de control.

$$H_0: \bar{X}_e \leq \bar{X}_c$$

Hipótesis Alternativa: con el empleo de la propuesta didáctica los resultados de aprendizaje del grupo experimental son significativamente mejores que los resultados de aprendizaje del grupo de control.

$$H_a: \bar{X}_e > \bar{X}_c$$

Donde  $\bar{X}_e, \bar{X}_c$ , representan la media muestral de los grupos experimental y de control respectivamente.

Para probar la dicha hipótesis se va a utilizar la prueba t de Fisher para decidir entre la t de Student de muestras diferentes con varianzas iguales o con varianzas desiguales, ya que nos permite comparar dos medias poblacionales de muestras pequeñas.

Se pretende aplicar una post-prueba para la recopilación de los datos cuantitativos al grupo experimental y de control para medir los resultados y poder comparar el aprendizaje de los alumnos, dichos resultados serán analizados a través de hojas de Excel.

Los datos cualitativos del grupo experimental se obtendrán por medio de una encuesta con opciones tipo Likert, los cuales se organizarán y se utilizará estadística descriptiva para analizar los resultados.

El proceso de aprendizaje será apoyado por un cuaderno de trabajo y una carpeta digital con actividades dinámicas.

El cuaderno de trabajo está diseñado de tal manera que cada sesión está enfocada en cubrir un nivel en particular de acuerdo al modelo de Van-Hiele y el tratamiento y conversión de las representaciones semióticas según Duval.

A continuación se describirán los objetivos que se pretenden alcanzar al realizar las actividades en cada una de las sesiones.

Sesión 1.

Tema: Visualización y reconocimiento de la hipérbola.

Objetivos: que el alumno sea capaz de:

1. Identificar la gráfica de las hipérbolas.
2. Diferenciar las expresiones algebraicas de las cónicas.
3. Interpretar el resultado del discriminante en las ecuaciones de segundo grado.

## Sesión 2.

Tema: Análisis de la hipérbola.

Objetivos: que el alumno sea capaz de:

1. Comprender la definición de hipérbola como lugar geométrico.
2. Identificar e interprete correctamente cada uno de los elementos de la hipérbola.

## Sesión 3.

Tema: Hipérbola. Ordenación y clasificación de la hipérbola.

Objetivos: que el alumno sea capaz de:

1. Escribir la ecuación de la hipérbola en sus diferentes formas.
2. Identificar los elementos de la hipérbola dada la ecuación general.
3. Deducir la ecuación general dados diferentes elementos de la hipérbola.

## Sesión 4.

Aplicación de la post-prueba.

En la Tabla 1 se describe el rol del profesor y de los alumnos, además de los materiales a utilizar durante la experimentación.

Tabla 1. *Presenta las actividades del profesor, el alumno y el material que se utilizará.*

Actividades de profesor	Actividades de alumnos	Materiales
1. Da a conocer los objetivos del experimento.	1. Realizaran cada una de las actividades señaladas.	1. Computadoras con GeoGebra instalado.
2. Forma equipos.	2. Presentan al profesor sus trabajos.	2. Cañón de proyección.
3. Da a conocer ejemplos.	3. Los equipos seleccionados por el profesor hacen presentación de sus trabajos a todo el grupo.	3. Carpeta digital.
4. Instruye sobre el trabajo.		4. Cuaderno de actividades.
5. Responde a las preguntas y aclara dudas de los alumnos.		
6. Apoya a los alumnos en sus actividades.		
7. Observa el desempeño de los estudiantes.		
8. Evalúa las actividades de los alumnos y registra los datos de evaluación.		

Las actividades serán complementadas con archivos digitales elaborados con los programas GeoGebra y Ardora, los cuales son software libre.

Elementos.ggb: en éste archivo elaborado en GeoGebra se presentan las partes de la hipérbola y la ecuación en forma general y en forma canónica, con el fin de que el estudiante pueda

identificar gráficamente y analíticamente los elementos en la hipérbola, como se muestra en la Figura 1.

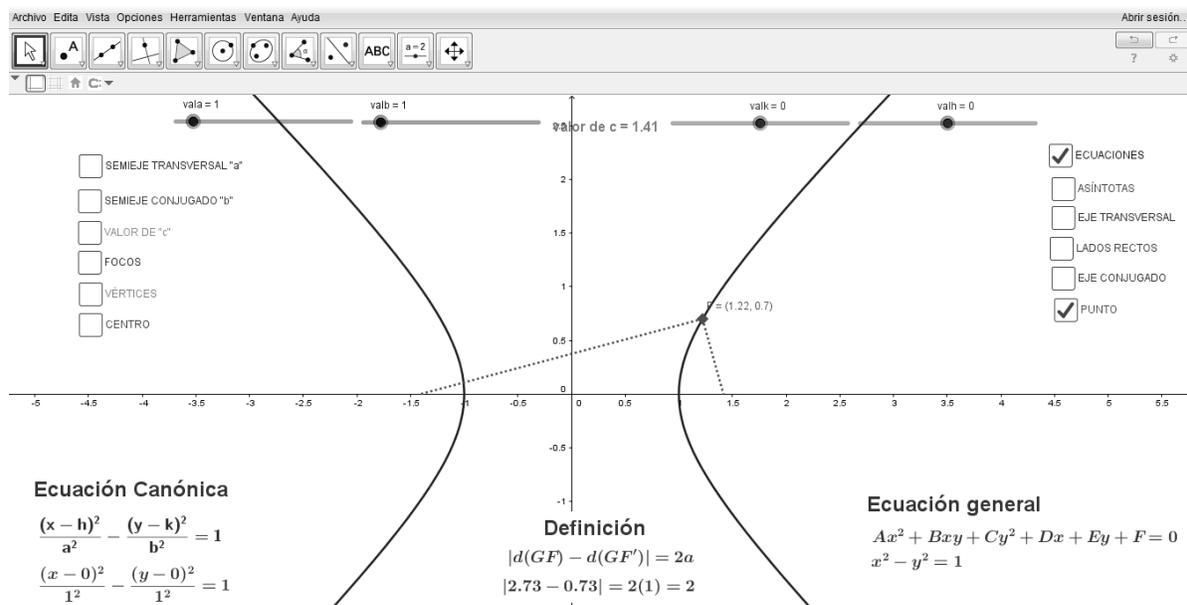


Figura 1. Ventana de la actividad Elementos.ggb.

Barco.ggb: este archivo de GeoGebra fue diseñado con el fin de que el alumno visualice de manera gráfica el problema planteado, como se muestra en la Figura 2.

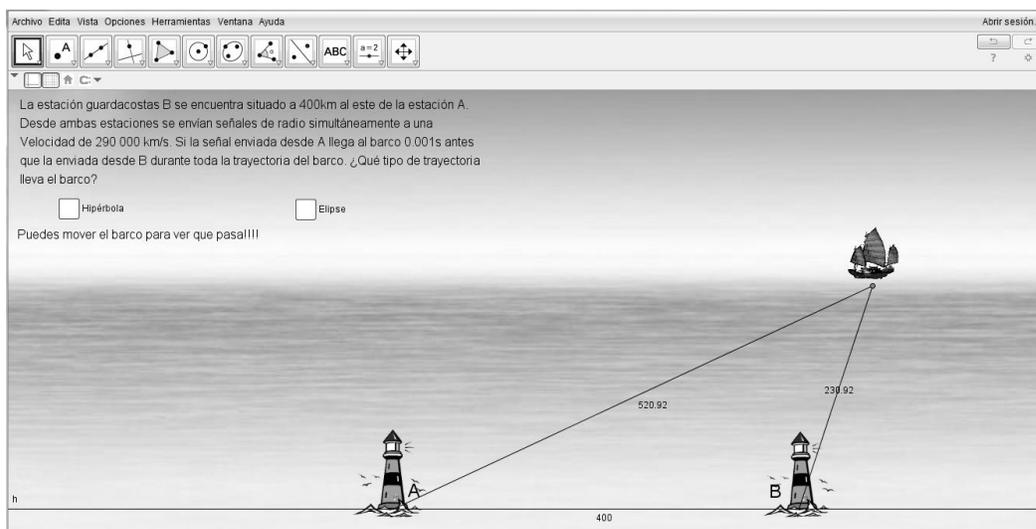


Figura 2. Ventana de la actividad Barco.ggb.

Actividades Ardora: se diseñaron algunas actividades como las que se muestran en la Figura 3, con el fin de que el estudiante repase de manera dinámica los temas de la hipérbola vistos en cada una de las sesiones.

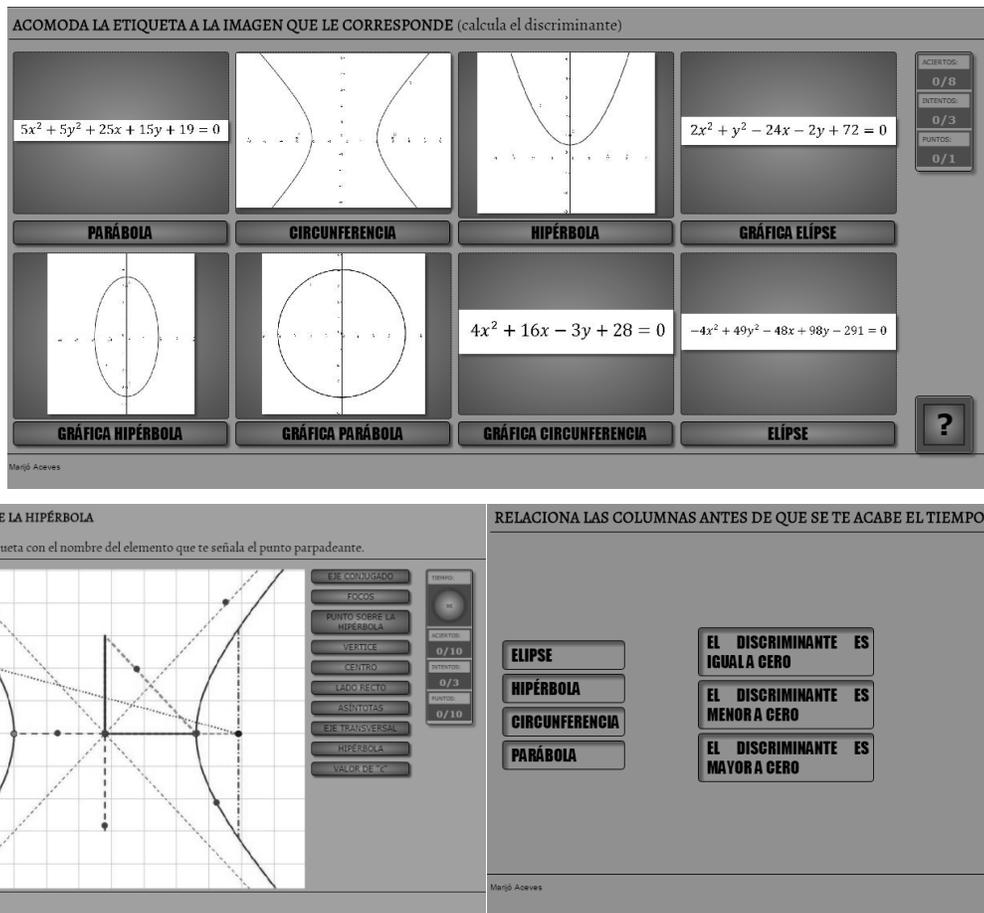


Figura 3. Pantallas de las actividades elaboradas con Ardora.

Los instrumentos que se utilizarán para responder a las preguntas de investigación son la post-prueba que se aplicara al grupo experimental y al grupo de control y una encuesta que se hará a los estudiantes del grupo experimental.

En la tabla 2 se muestra la relación entre las preguntas de investigación y los instrumentos de evaluación.

Tabla 2. Relación entre la pregunta de investigación, instrumento y metas y cambiar las preguntas a las de arriba.

Preguntas de investigación	Instrumento
Pregunta principal	
¿Qué efecto produce el empleo de la propuesta didáctica sobre el aprendizaje de los estudiantes en el tema de la hipérbola en la materia de geometría analítica?	Post-prueba
Preguntas auxiliares	
¿Cómo influye el uso de material didáctico en el aprendizaje de los alumnos en el tema de hipérbola?	Post-prueba
¿Qué efecto produce el uso de GeoGebra sobre el aprendizaje de los alumnos en el tema de hipérbola?	Post-prueba
¿Qué efectos produce el empleo de la propuesta didáctica en la motivación de los alumnos para el aprendizaje en el tema de hipérbola?	Encuesta

¿Cómo contribuye el apoyo del profesor en el aprendizaje de los alumnos en el Encuesta tema de hipérbola?

### Experimentación

Se pretende aplicar la propuesta didáctica a los alumnos de I.S.T.A. que están cursando el tercer semestre en las especialidades de puericultura y administración.

Los alumnos serán divididos al azar en dos grupos, el de control y el experimental. El grupo de control tendrá clases de manera tradicional a lápiz y papel, mientras que el grupo experimental trabajará con la propuesta didáctica, en ambos casos el profesor será el mismo.

La experimentación contará de 4 sesiones, en la Tabla 3 se describen brevemente las actividades del grupo experimental.

Tabla 3. *Sesiones de la fase experimental.*

Sesión	Horas	Descripción
1	1	En esta sesión se entrega a los alumnos el manual de trabajo y se hará una actividad individual para medir sus conocimientos previos.
2	1	Se trabajara en laboratorio de computación para resolver las actividades de manera individual.
3	1	Se trabajara en laboratorio de computación para resolver las actividades de manera cooperativa.
4	1	Se aplicará la post-prueba tanto al grupo de control como al experimental.

Se elaboró la post-prueba para la obtención de los datos cuantitativos la cual se pretende aplicar tanto al grupo experimental como al de control en la última sesión con la finalidad medir los resultados y comparar el aprendizaje de los alumnos. Para los datos cualitativos se diseñó la encuesta con opciones tipo Likert, la cual será aplicada después de la post-prueba al grupo experimental.

Dichos resultados serán recopilados y analizados mediante la prueba t de Student con el uso de hojas de cálculo de Excel.

Los recursos necesarios para llevar a cabo la experimentación son:

- Laboratorio de computación.
- USB por alumno
- Programa instalado de GeoGebra.
- Programa Ardora.
- Proyector.

### Consideraciones finales

Se pretende que con la aplicación de la propuesta didáctica los alumnos tengan un acercamiento al uso de la tecnología en las aulas de clases para motivarlos durante el proceso de aprendizaje del tema de la hipérbola, ya que el uso de estas herramientas permite que se visualice el objeto matemático en sus diferentes representaciones semióticas y facilita las transformaciones de la representación dentro del mismo registro.

El uso de software libre, como el utilizado en la propuesta, es cada vez más frecuente en el ambiente educativo, ya que el costo de las licencias para un software formal sobrepasa, en muchas de las veces, el presupuesto asignado a las instituciones, y permite que el alumno pueda trabajar con esta herramienta dentro y fuera de las escuelas.

### Referencias Bibliográficas

- Contreras, A. y Contreras, M. (julio, 2005). Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa*, vol. 5, núm. 2, pp. 111-132. Recuperado el 21 de mayo del 2014 de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33505201>.
- De la Torre, A. (junio, 2006). El método cartesiano y la geometría analítica. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, vol. XIV, núm. 1, pp.75-87. Recuperado el 21 de mayo del 2014 de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=46814108>.
- Hernández, E. J. (2005). *Software educativo para el aprendizaje experimental de las matemáticas*. Recuperado el 21 de mayo del 2014 de: <http://repositorial.cuaed.unam.mx:8080/jspui/bitstream/123456789/1387/1/2005-03-15127LabsMatematicasGalileo.pdf>.
- Mendoza, A. (2011). Modelo de Van Hiele y el Software GeoGebra para el Estudio y Comprensión de la Geometría Analítica en el Nivel Bachillerato. Tesis de maestría no publicada, Universidad, Centro de Investigación y Desarrollo del Estado de Michoacán, Michoacán, México.
- Ospina, D. (2012). *Las Representaciones Semióticas en el Aprendizaje del Concepto Función Lineal*. Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Manizales, Colombia. Recuperado el día 14 de Noviembre del 2014 de [http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/245/1/Tesis\\_Las%20representaciones%20semi%C3%B3ticas%20en%20el%20aprendizaje%20del%20concepto%20de%20funci%C3%B3n%20lineal.pdf](http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/245/1/Tesis_Las%20representaciones%20semi%C3%B3ticas%20en%20el%20aprendizaje%20del%20concepto%20de%20funci%C3%B3n%20lineal.pdf)
- Secretaria de Educación Pública (SEP). (2013). *Bachillerato tecnológico, programa de estudios, acuerdo secretarial 653*. Recuperado el 21 de mayo del 2014 de: [http://www.dgeti.sep.gob.mx/images/multimediaDGETI/archivosPdf/planesyprogramas/Programas653/Matematicas\\_Acuerdo\\_653\\_2013.pdf](http://www.dgeti.sep.gob.mx/images/multimediaDGETI/archivosPdf/planesyprogramas/Programas653/Matematicas_Acuerdo_653_2013.pdf).
- Pérez, R. (2011). *Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado el 4 de junio de 2014 de [http://www.bdigital.unal.edu.co/4615/1/TRABAJO\\_DE\\_GRADO\\_FINAL\\_UNAL\\_Def.pdf](http://www.bdigital.unal.edu.co/4615/1/TRABAJO_DE_GRADO_FINAL_UNAL_Def.pdf).