# REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

**Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática**

**Volumen V Número 2 Fecha: Julio-Diciembre de 2017**

**ISSN: 2395-955X**




# ESTRATEGIA CORRECTIVA PARA ERRORES ALGEBRAICOS DE ALUMNOS EN CÁLCULO DIFERENCIAL


[1]Rebeca Ascencio González, [2]Elena Nesterova, [3]Clara Cristina Catarina Eccius Wellmann

[1]Universidad de Guadalajara, [2]Universidad Panamericana, campus Guadalajara, México.

*rebecaascencio@hotmail.com*, *elena.nesterova@cucei.udg.mx*, *ceccius@up.edu.mx*



Para citar este artículo:

Ascencio, R., Nesterova, E., Eccius, C. C. (2017).Estrategia correctiva para errores algebraicos de alumnos en cálculo diferencial. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. V, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

**REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año V, No. 2, Julio-Diciembre de 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.**

# ESTRATEGIA CORRECTIVA PARA ERRORES ALGEBRAICOS DE ALUMNOS EN CÁLCULO DIFERENCIAL

[1]Rebeca Ascencio González, [2]Elena Nesterova, [3]Clara Cristina Catarina Eccius Wellmann

[1]Universidad de Guadalajara, [2]Universidad Panamericana, campus Guadalajara, México.

rebecaascencio@hotmail.com, elena.nesterova@cucei.udg.mx, ceccius@up.edu.mx

## Resumen

Se presentan los avances de la investigación que se realiza con un programa que realimenta al alumno sobre las posibles causas de los errores algebraicos que comete y le propone estrategias para evitarlos. Se analizan los efectos del mismo en el porcentaje de errores algebraicos cometidos por alumnos de Cálculo Diferencial.

**Palabras clave:** Corrección de errores, Álgebra, Cálculo Diferencial.

## Introducción

En las universidades existe una alta incidencia de reprobación en las materias de Álgebra y de Cálculo Diferencial, lo que lleva a la búsqueda de estrategias y metodologías de enseñanza que ayuden a remediar y corregir aquellos errores que han sido asimilados con un carácter teórico-práctico, es decir, revertir lo que el alumno trae como un conocimiento inmerso, sólido y válido, pero equivocado (Eccius e Ibarra, 2012).

Esta investigación se centra en errores algebraicos cometidos por alumnos de Cálculo Diferencial. El interés del tema radica en que dichos errores algebraicos afectan de manera negativa el desempeño de los alumnos en Cálculo Diferencial: el alumno aprende y usa adecuadamente, por ejemplo, las reglas de derivación, pero sus respuestas finales contienen errores causados por los conocimientos previos erróneos de Álgebra y Aritmética.

Ausubel (1976, citado por Díaz y Hernández, 2010) menciona que debemos partir de lo que el estudiante conoce para poder enseñarle. Si sus conocimientos previos son pobres, su aprendizaje de conocimientos nuevos también lo será. El tiempo que le puede dedicar un profesor de Cálculo a revisar temas algebraicos durante la clase es muy poco, por lo que una actividad extra clase puede resultar útil.

Aunque existen diversos estudios (Díaz, 2009; Eccius e Ibarra, 2012, entre otros) sobre la cantidad y el tipo de errores que cometen los alumnos, varios de ellos centrados en alumnos universitarios, poco se ha investigado sobre el efecto de las estrategias usadas para mejorar el desempeño de los alumnos en temas que aprendieron en grados escolares anteriores a su entrada a la universidad.

## Objetivo

Evaluar los efectos de la estrategia propuesta sobre el porcentaje de errores algebraicos que cometen los alumnos en Cálculo Diferencial.

Con ello se busca una solución a la situación que profesores de Cálculo Diferencial, como refiere Díaz (2009), consideran recurrente: la relación entre las deficiencias algebraicas que un alumno de Cálculo Diferencial presenta al inicio del semestre y un bajo desempeño de dicho alumno en la materia. Se considera que, al encontrar una forma de disminuir dichas deficiencias a lo largo del semestre, el desempeño del alumno en la materia mejorará.

## Fundamentación histórica

En el proceso de construcción de conocimientos matemáticos, es previsible que aparecerán errores de forma sistemática. El profesor debe, por tanto, incluir el diagnóstico, detección, corrección y superación del error dentro de su clase. Lo anterior se puede lograr mediante actividades que susciten el ejercicio de la crítica del propio estudiante sobre sus producciones. Por lo anterior, los errores pueden contribuir en el proceso de aprendizaje de manera positiva. (Rico, 1995),

El mismo autor considera que los errores no aparecen por azar, sino que surgen en un marco conceptual estable, formado por los conocimientos adquiridos con anterioridad. Señala que, en vez de condenar los errores, deben incluirse de manera intencionada en la instrucción.

Brousseau, Davis y Werner (1986, citados por Rico, 1995) consideran que los errores de los alumnos son, frecuentemente, resultado de un procedimiento sistemático e imperfecto, usado de forma consistente. A la vez, los alumnos poseen concepciones inadecuadas de aspectos fundamentales de las matemáticas, que no son identificadas por sus profesores. Por su parte Mullhern (1989, citado por Rico, 1995) señala que los errores suelen sorprender al profesor, son persistentes y sistemáticos.

Socas (1997) menciona que existen dificultades que se constituyen en obstáculos, los cuales pueden manifiestarse como errores. Dichas dificultades se pueden asociar con: los objetos matemáticos, los procesos del pensamiento matemático, los procesos de enseñanza, el desarrollo cognitivo del alumno y las actitudes afectivas y emocionales hacia la materia.

El mismo autor señala que un obstáculo no es una falta de conocimiento, sino un conocimiento adquirido que tiene un dominio de eficacia: produce respuestas adecuadas en un contexto e inadecuadas fuera de ese contexto. El obstáculo es más resistente mientras más firmemente aprendido esté, por haber sido usado eficazmente con anterioridad. Para superarlo, es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo. Agrega que, después que el alumno ha notado su inexactitud, continúa manifestándolo esporádicamente.

Concluye que los errores deben tratarse según su origen: un obstáculo, una ausencia de sentido o una actitud.

Gill y Greenhow (2008) proveen evidencia de que se da aprendizaje real, en este caso en la parte matemática de la materia de Mecánica, cuando los estudiantes interactúan con evaluaciones asistidas por computadora que proveen realimentación.Para el programa que probaron, que era una evaluación con respuestas de opción múltiple, usaron parámetros aleatorios y distractores elegidos entre los errores más comunes que cometen los alumnos, lo cual permitió una realimentación mejor enfocada.

Los mismos autores señalan que, para que la realimentación sea más oportuna, debe darse mientras el alumno está inmerso en la actividad. Además, debe diseñarse para que los alumnos aprendan de sus errores, corrijan sus conceptos incorrectos y puedan demostrar ese aprendizaje en otras situaciones, como un examen escrito, por ejemplo. Se requiere que conecte con los conocimientos que el alumno sí posee y que tenga relación con el resto de sus actividades académicas. También es necesario que el estudiante se comprometa con la actividad para que ésta le beneficie.

Hattie y Timperley (2007) definen la realimentación como información que un agente (en este caso una computadora) da a una persona con respecto a su entendimiento de un concepto o proceso, cuyo propósito es cerrar la brecha entre lo que hizo y lo que debió haber hecho. Ocurre en un segundo momento, cuando un aprendizaje anterior es revisado. Mientras más rápido se dé es mejor. Consideran la realimentación asistida por computadora entre las más efectivas.

Señalan que, para que la realimentación sea más útil, debe cuidarse que el nivel sea adecuado a la capacidad del receptor. Las metas de aprendizaje deben ser conocidas y la realimentación debe estar diseñada para alcanzarlas. No debe limitarse a los exámenes, debe permitir un avance gradual después de alcanzar cada meta. Debe ser clara, concreta, intencionada, significativa y personal.

Estos autores mencionan que existen distintos tipos de realimentación cuyos efectos varían: Cuando la realimentación sólo implica informar si la respuesta es correcta o no, el aprendizaje se enriquece poco. Es más útil cuando se enfoca en el proceso y apoya al estudiante para que rechace las hipótesis erróneas y le permite encontrar estrategias válidas de solución. También se puede dar una realimentación que sirva al alumno para autoevaluarse y autocorregirse, mediante claves sobre lo que debe revisar. Ésta es útil para los estudiantes capaces de autorregularse.

La realimentación que sólo consiste en frases como: “buen trabajo”, “ve por más” no tiene prácticamente ningún efecto en el aprendizaje. Agregan que, para el aprendizaje de procesos poco complejos, es mejor que la realimentación se dé de forma inmediata.

Por otro lado, en su libro sobre el tratamiento didáctico del error, De la Torre (2004) menciona que el error puede ser una distorsión, improcedencia o inadecuación en un proceso. Considera que el error tiene cuatro direcciones semánticas: efecto destructivo, distorsionador, constructivo y creativo. En las dos primeras el error es un resultado, el enfoque es negativo, lo cual lleva a una actitud de condenarlo. En las dos últimas es parte de un proceso, el enfoque es positivo, lo cual lleva a una actitud de aprovecharlo. Propone aprovecharlo, dado que al alumno sí le interesa averiguar por qué se equivocó y corregirse. Esto se logra si el profesor le da un tratamiento didáctico a los errores.

El mismo autor señala que el error provee más información sobre el proceso mental del alumno que el acierto. De hecho, le permite a dicho alumno aprender distintas propiedades de un concepto de las que no era consciente antes. Puede que llegue a un acierto mediante un procedimiento inadecuado que, por coincidencia, terminó en una respuesta correcta. Entonces no se dará cuenta de que su procedimiento era incongruente con el ejercicio. Pero, si la respuesta que obtiene es incorrecta, podrá analizar su proceso y descubrir dónde se equivocó.

De la Torre considera que, desde la perspectiva del profesor, un error denota que el alumno necesita ayuda, pues algo en el proceso que siguió no es correcto. Cuando esto es muy frecuente, se requiere adoptar una estrategia didáctica distinta a laque provocó el proceso incorrecto, para conseguir evitarlo de origen en un curso posterior. En el caso de que el error sea en un conocimiento previo, es necesaria una estrategia didáctica diseñada con el objetivo de corregirlo.

Proponeque se clasifiquen errores para enfocar el esfuerzo en los más trascendentes: aquellos que se presentan repetidamente (los errores sistemáticos), cuya causa se conoce y, por tanto, se puede diseñar una estrategia para corregirlos. Para el alumno, el que a un error le siga unarealimentación le permite un aprendizaje más profundo. En ocasiones preferirá la ayuda de un programa de computadora que no lo juzgue y le permita reflexionar, analizar y practicar lo necesario hasta superar el error.

El mismo autor propone un Modelo de Análisis Didáctico del Error (MADE), el cual clasifica los errores en: entrada, organización y ejecución. A continuación propone un tratamiento didáctico del error, cuyas fases son: localización, descripción y corrección. Considera que el tratamiento didáctico del error implica inocularlo para corregirlo.

Rico, (1995) señala que presentar al alumno ejercicios en los que se sabe que puede cometer errores permite que dicho alumno, si los comete, exprese el carácter incompleto de su conocimiento. Esto permite a los compañeros o al profesor ayudarle a completar el conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal.

Según Pochulu(2005), no es suficiente repetir reiteradamente el proceso correcto, es necesario explicar el porqué del error antes. Cervantes y Martínez (2007) proponen que los procesos en los que se sabe que los errores son frecuentes se presenten siempre dentro de situaciones contrastantes para que el alumno pueda discriminar las estructuras algebraicas donde es pertinente cada uno.

Ejemplos de errores encontrados en la institución sede del estudio y sus posibles causas según los autores arriba mencionados:

1) $-6x = 0 \quad \rightarrow x = 6$

El alumno "pasa sumando" el 6 ya que no identifica correctamente que el -6 está multiplicando a la x.

No distingue que $-6 + x = 0\ implicax = 6$ pero $-6x = 0\ noimplicax = 6$

2) $-\frac{5}{(x-3)^2} = 0 \quad \rightarrow -5 = (x-3)^2$

"Pasa multiplicando" el $(x-3)^2$ pero no identifica que debe multiplicarlo por un cero.

No distingue que $-\frac{5}{(x-3)^2} = 1\ implica\ 5 = (x-3)^2$ pero

$$-\frac{5}{(x-3)^2} = 0\ \ noimplica - 5 = (x-3)^2$$

3) $\frac{e^x - e^{2x}}{e^x} = -e^{2x}$

"Tacha" el $e^x$ del numerador con el del denominador, sin darse cuenta que no es factor de todo el numerador.

No distingue que $\frac{e^x e^{2x}}{e^x} = e^{2x}$pero$\frac{e^x - e^{2x}}{e^x} \neq -e^{2x}$

4) $\frac{1}{3x^2} = 3x^{-2}$

No identifica que el exponente 2 es sólo de la variable $x$, por lo que "sube" también el 3, cambiando el signo sólo al exponente de la $x$.

No distingue que $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ pero $\frac{1}{3x^2} \neq 3x^{-2}$

5) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

Se trata de un error de linealización, que consiste en aplicar una función, en este caso el elevar al cuadrado, a las partes de la misma cuando no es pertinente.

No distingue que $(xy)^2 = x^2y^2$ pero $(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$

**Metodología**

El estudio se realiza en la Universidad Panamericana, campus Guadalajara. La prueba piloto fue un estudio longitudinal con intervención y con esquema de pre-post test y encuesta de opinión, en dos grupos de Cálculo Diferencial de aproximadamente 25 alumnos cada uno. Los grupos experimentales llevaron la materia de Cálculo Diferencial de la manera tradicional y se les asignó como tarea contestar los ejercicios del programa.

La universidad separa sus carreras en tres áreas: humanidades, ingenierías y administrativas. La investigación se hará en las carreras administrativas: Administración y Finanzas, Administración y Mercadotecnia, Administración y Recursos Humanos, Administración y Negocios Internacionales, Administración y Dirección, así como Contaduría. Los estudiantes eligen sus materias a lo largo de su carrera mediante un sistema de currícula flexible, por lo que los grupos se forman dependiendo de la elección del alumno.

Existen materias, como las del área de Matemáticas, que son de tronco común. En un mismo grupo de Cálculo Diferencial hay alumnos de distintas carreras, que provienen de diferentes grupos de Álgebra, materia que cursan todos los estudiantes en el primer semestre, sin excepción.

Se considera, para esta investigación, que un programa de computadora que presente a los alumnos ejercicios con opciones de respuesta entre las que están los errores más comunes y que, en caso de error, los realimente de forma inmediata sobre las posibles causas del mismo, puede funcionar para disminuir el porcentaje de errores algebraicos cometidos por los alumnos de Cálculo Diferencial.

Para concretar los temas y ejercicios algebraicos con los que se realizó este estudio piloto, se llevó a cabo una extensa revisión bibliográfica. Díaz (2009), lista algunos errores algebraicos típicos en los estudiantes de Cálculo Diferencial. Cervantes y Martínez (2007), Palarea y Socas (1994) y Eccius (2008) describen las posibles causas de los errores comunes detectados en sus respectivos estudios. Una de las causas más comunes que refieren es la aplicación de reglas, que son válidas en ciertas estructuras algebraicas, sobre estructuras algebraicas diferentes, en las cuales dichas reglas no son válidas

Se busca que los alumnos de Cálculo Diferencial aprendan (o,más bien,reaprendan) el Álgebra que requieren para dicha materia mediante un programa de computadora basado en internet diseñado para ello, que se usará como actividad extra-clase, para que no reste tiempo de la clase regular. Dicho programa es accesible desde cualquier dispositivo conectado a internet.

Las bases teóricas revisadas soportan el diseño del programa a probar. Éste incluye secuencias estructuradas de ejercicios separados por temas. Cada ejercicio contiene respuestas de opción múltiple. Las opciones incorrectas corresponden a los errores más comunes reportados en investigaciones anteriores y en el pretest realizado al inicio de la prueba. De todos los errores elegidos como opciones de respuesta se conoce al menos una posible causa. También está la opción correcta y una que dice “no encuentro mi respuesta” para quien comete un error no considerado entre las opciones (Figura 1).

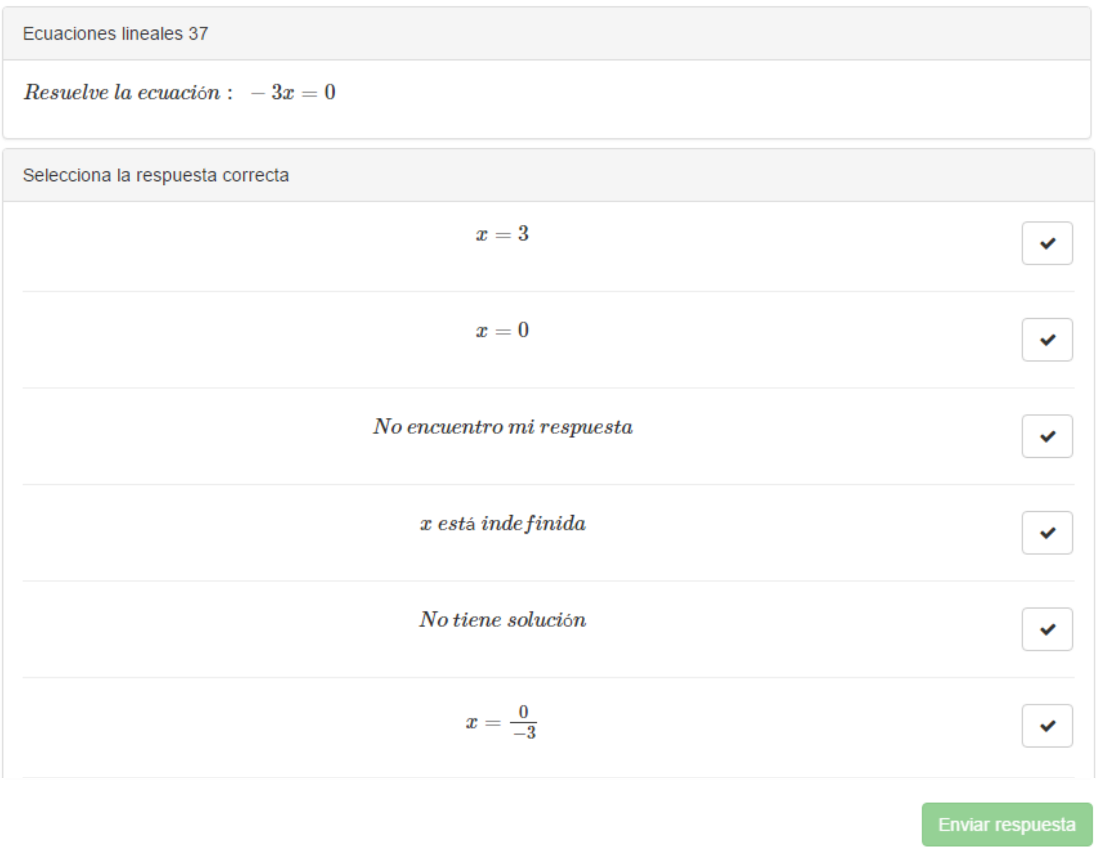


*Figura 1*. Ejemplo de un ejercicio y las opciones de respuestas. Imagen tomada de http://mathup.craiup.org/

Para cada respuesta errónea el programa ofrece realimentación sobre por qué es equivocada y apoyo para distinguir el proceso correcto del incorrecto: se le muestra el proceso correcto comparado con el incorrecto con la intención de que comprenda la diferencia y evite cometer el error posteriormente (Figura 2).

Después de leer la realimentación, el alumno recibe un nuevo ejercicio con la misma estructura algebraica pero números distintos, generados aleatoriamente, para probar si comprendió la explicación.

Si el alumno elige la opción “no encuentro mi respuesta” se le explica el procedimiento a seguir y se le permite que conteste otro ejercicio. Se pasa al siguiente ejercicio de la sección cuando se contesta correctamente el actual.

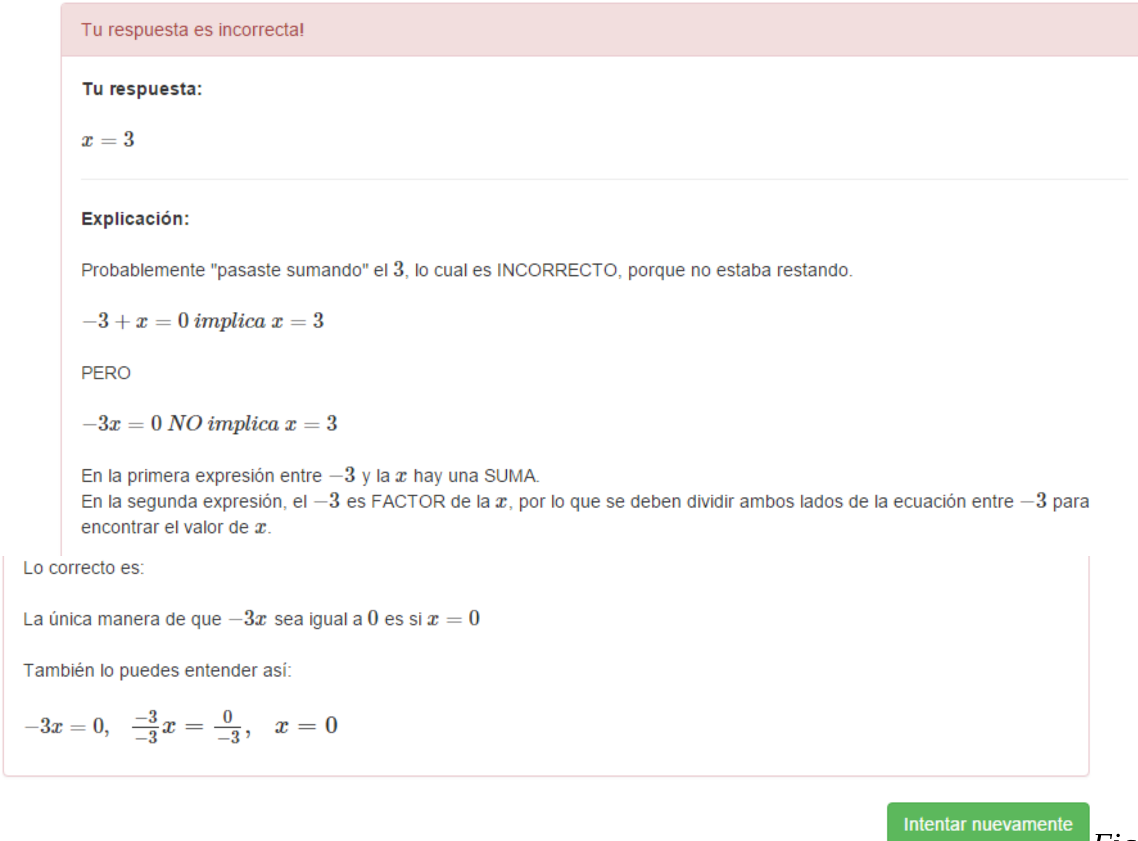


*Figura 2.*
Ejemplo de realimentación ante una respuesta incorrecta. Imagen tomada de http://mathup.craiup.org/

Para las respuestas correctas el programa le proporciona la reafirmación del proceso correcto y un ejemplo de cómo se aplica ese conocimiento algebraico dentro de la materia de Cálculo Diferencial (Figura 3).

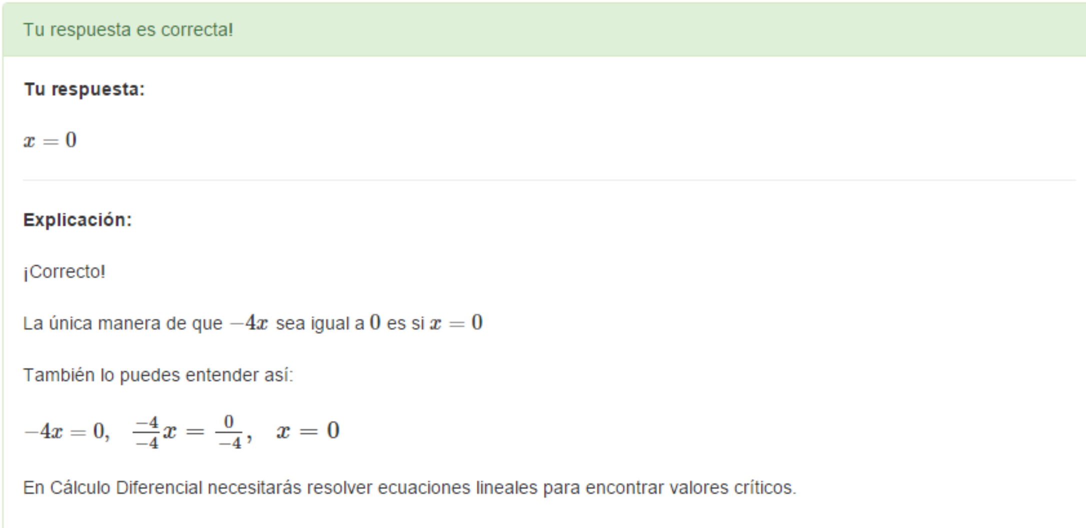


*Figura 3.* Ejemplo de realimentación ante una respuesta correcta. Imagen tomada de http://mathup.craiup.org/

Existe una secuencia estructurada de ejercicios por tema. Se gradúa la dificultad de menor a mayor y se retoma lo previamente revisado en ejercicios posteriores. El programa registra las actividades contestadas por los alumnos para considerarlo al hacer el análisis estadístico.

Mediante esta investigación se busca contestar las siguientes preguntas: ¿Cuáles errores algebraicos cometen con más frecuencia los alumnos de Cálculo Diferencial al principio del curso? ¿Cómo influye la estrategia correctiva en el porcentaje de errores algebraicos de los alumnos? ¿Qué opinan los alumnos sobre el empleo de la estrategia correctiva?

## Resultados preliminares

Los resultados aquí presentados se obtuvieron durante la prueba piloto de la investigación. Se reporta aquí cómo se realizó dicha prueba piloto.

Se eligieron los temas algebraicos que formarían parte de la estrategia entre aquellos que tanto la literatura como los profesores de Cálculo Diferencial en la institución sede del estudio consideran que tienen una incidencia importante de errores: leyes de exponentes, productos notables y factorización, simplificación de fracciones algebraicas y ecuaciones (lineales, cuadráticas y racionales).

Se elaboró un pretest con veinte ejercicios de los cuatro temas, que se aplicó el primer día de clases. Dichos ejercicios eran meramente algebraicos dado que los alumnos aún no habían tomado clases de cálculo. Para el estudio piloto sólo se consideraron los primeros diez ejercicios (Apéndice 1).

El primer postest incluyó los ejercicios de los dos primeros temas, pero las preguntas implicaban conocimientos de cálculo también: era necesario usar productos notables para derivar por medio de límites o realizar transformaciones algebraicas mediante leyes de exponentes para derivar potencias de $x$.

Se asignó al primer grupo tarea con el programa, indicándoles que debían contestar todos los ejercicios una vez y, además, una repetición de los mismos. Al segundo grupo se le asignó la misma tarea, pero se les dejó libertad para hacer la repetición de los ejercicios, misma que pocos hicieron.

Las tareas asignadas en esta primera etapa fueron diez distintas, de aproximadamente diez ejercicios diferentes cada una, los cuales repetían hasta contestar de manera correcta.

Una vez concluido el tiempo asignado para contestar las tareas, se aplicó el primer postest a los dos grupos (Apéndice 2). Posteriormente, se le pidió al segundo grupo que terminara de contestar la primera repetición y, además, querealizara una segunda repetición de las tareas, con carácter de obligatorio. Finalmente, se les aplicó el mismo postest, sólo con la parte numérica modificada.

Se registraron el porcentaje de uso de programa y los resultados de los tres test; y se compararon estadísticamente las calificaciones obtenidas en los mismos. Esto es, más que porcentaje de error, se comparó el porcentaje de acierto, que, a fin de cuentas, es su complemento: más aciertos implica menos errores.

En la Tabla 1 se presenta el concentrado de resultados obtenidos en la prueba piloto, los cuales se describen a continuación:

Tabla 1. *Resultados obtenidos en la prueba piloto. Elaboración propia.*

| Rubro | Primer grupo | Segundo grupo |
|---|---|---|
| Media de aciertos pretest | 5.96 | 5.15 |
| Tareas realizadas (original) | 95% | 90% |
| Tareas realizadas (primera repetición) | 90% | 37.5% |
| Media de aciertos postest 1 (primera vez) | 8.17 | 6.35 |
| Incremento en la media de aciertos respecto al pretest | 37.1% | 23.3% |
| Valor p (prueba t a una cola) | $3.198x10^{-6}$ | 0.138 |
| Tareas realizadas (original) | | 95% |
| Tareas realizadas (primera repetición) | | 90% |
| Tareas realizadas (segunda repetición) | | 86% |
| Media de aciertos postest 1 (segunda vez) | | 8.26 |
| Incremento en la media de aciertos respecto al pretest | | **60.4%** |
| Valor p (prueba t a una cola) | | $6.305x10^{-5}$ |

En el **primer grupo**: El 95% de los alumnos resolvió la primeras 10 tareas y el 90% la repetición completa de las mismas. La media de aciertos algebraicos varió de $\mu_{pre} = 5.96$ a $\mu_{post} = 8.17$, un **37.1%**, con una $p = 3.1983\text{x}10^{-6}$ a una cola, en la comparación de medias de muestras emparejadas.

En el **segundo grupo,** para la primera aplicación del postest: El 90% de los alumnos resolvió la primeras 10 tareas, pero sólo el 37.5% hizo una repetición completa. La media de aciertos algebraicos varió de $\mu_{pre} = 5.15$ a $\mu_{post} = 6.35$, un **23.3%,** con una $p = 0.0138$ a una cola, en la comparación de medias de muestras emparejadas.

En el **segundo grupo,** para la segunda aplicación del postest: El 95% de los alumnos completó la primeras 10 tareas, el 90% hizo una repetición completa y el 86% hizo una segunda repetición. La media de aciertos algebraicos varió de $\mu_{pre} = 5.15$ a $\mu_{post} = 8.26$, un **60.4%,** con una $p = 6.305x10^{-5}$ a una cola, en la comparación de medias de muestras emparejadas.

Además, se recogieron algunas opiniones expresadas por los alumnos al usar el programa:

- Es sencillo de usar.
- Sí necesito pensar antes de contestar.
- Las explicaciones son concisas, claras y útiles.
- Sí me sirve saber cómo se aplica en Cálculo.
- Amplíenlo a más temas (por ejemplo límites).
- Me encantaría que mi hermano pudiera usarlo.
- Es una ventaja que pueda contestarse en cualquier horario y lugar.

**Conclusiones**

En los resultados delos postest aplicados en esta prueba piloto se observa un aumento en la media de los porcentajes de aciertos. Es notorio que, a mayor cantidad de práctica con el programa, se obtiene un incremento mayor en el porcentaje de aciertos. También se observó que es necesario que la actividad sea obligatoria (tenga peso en la calificación) para que los alumnos la realicen.

Algunas realimentaciones fueron menos efectivas que otras, quizá por ser errores más arraigados. Se considera adecuado rediseñar dichas realimentaciones e incrementar el número de ejercicios que se relacionan con dichos errores para que los resultados en la siguiente fase del estudio.

No se observó una diferencia importante en el tipo de errores encontrados en los test con respecto a lo investigado en la bibliografía.

Se realizará nuevamente el estudio, previoperfeccionamiento de los detalles observados en este piloto como mejorables y con la inclusión de los cuatro temas algebraicos, para ampliar las conclusiones.

## Referencias bibliográficas


Cervantes, G. y Martínez, R. (2007). Sobre algunos errores comunes en desarrollos algebraicos. *Zona Próxima. Revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación Universidad del Norte, N8*, 34-41. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/853/85300804.pdf

De la Torre, S. (2004). *Aprender de los errores. El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación*, Argentina: Magisterio del Rio de la Plata.

Díaz, F. y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México: Mc Graw Hill.

Díaz, J. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. *El Cálculo y su Enseñanza*, México DF: Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/GZe5a1110t9.pdf

Eccius, C. (2008). *Mathematikdidaktische Fehleranalysen zur Schulalgebra: Schülerwissen und Lehrerprofessionswissen*, Alemania: VDM Verlag Dr. Müller.

Eccius, C. & Ibarra, K. (2012). Temas y errores que han provocado baja en el desempeño matemático de los alumnos de primer ingreso a la Universidad, *Premio FIMPES 2012*. Recuperado de http://www.fimpes.org.mx/index.php/premio-fimpes?showall=&start=2

Gill, M. & Greenhow, M. (2008). How effective is feedback in Computer-Aided Assessments? *Learning, Media & Technology*, *33*(3), 207-220. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1080/17439880802324145

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research,77*(1), 81–112. Recuperado de http://education.qld.gov.au/staff/development/performance/resources/readings/power-feedback.pdf

Palarea, M., Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. SUMA. Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, N16, 91-98. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/091-098.pdf

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, P. Gómez (Eds.), Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia, pp. 69-108. Bogotá: una empresa docente. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria en Rico, L. (Coord). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, pp 125-154. España: Horsori. Recuperado de: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/SocasM97-2532.PDF


### *Apéndice 1*

Pretest:

I. Expande la expresión:

1) $(x+h)^2 =$

2) $-3(x+h) =$
3) $3-4(x+h)+5(x+h)^2 =$

II. Simplifica la expresión. Deja todas las variables en el numerador y expresa las raíces como exponentes fraccionarios:

4) $\sqrt{16x} =$
5) $4x(x^2-x^{-1}) =$
6) $\frac{1}{3x^2} =$
7) $\frac{2x^3}{x^{-3}} =$
8) $-(3x^4)^2 =$
9) $\sqrt[3]{x}\left(x^{\frac{4}{3}}\right) =$
10) $x^{\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right) =$

***Apéndice 2***

Postest:

I. Deriva mediante el uso del concepto de derivada como límite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

1) $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$
2) $\mathrm{y} = -3\mathrm{x}$
3) $\mathrm{y} = 3-4\mathrm{x}+5\mathrm{x}^2$

II. Deriva (simplifica algebraicamente la expresión primero)

OJO: UNICAMENTE PUEDES USAR LA FÓRMULA $y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$

4) $y = \sqrt{16x}$
5) $y = 4x(x^2-x^{-1})$
6) $y = \frac{1}{3x^2}$
7) $y = \frac{2x^3}{x^{-3}}$
8) $y = -(3x^4)^2$
9) $y = \sqrt[3]{x}\left(x^{\frac{4}{3}}\right)$
10) $y = x^{\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)$