REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 2 Fecha: Julio-Diciembre de 2017

ISSN: 2395-955X

ASPECTOS NECESARIOS A CONSIDERAR EN LA DEFINICIÓN DE DERIVADA

Graciela Eréndira Núñez Palenius, José Carlos Cortés Zavala

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México

erendira.palenius@gmail.com y jcortes@umich.mx

Para citar este artículo:

Nuñez, E., Cortés, J. C. (2017). Aspectos necesarios a considerar en la definición de derivada. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. V, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año V, No. 2, Julio-Diciembre de 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

ASPECTOS NECESARIOS A CONSIDERAR EN LA DEFINICIÓN DE DERIVADA

Graciela Eréndira Núñez Palenius y José Carlos Cortés Zavala

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México

erendira.palenius@gmail.com y jcortes@umich.mx

Palabras clave: Cálculo Diferencial, Mediación por Tecnología, CAS.

Resumen

En este trabajo se presenta el diseño de actividades de aprendizaje con un enfoque constructivista, con las que se pretende conceptualizar la definición de Derivada con el uso de una calculadora TI-Nspire CX CAS. En estas actividades se aprovechan las diferentes formas de representación de una función, poniendo énfasis en el significado de varios conceptos básicos que existen en la definición de la Derivada.

Key Word: Diferential Calculus, Mediation by technology, CAS.

Abstract

In this paper we present the design of learning activities with a constructivist approach, with which we intend to conceptualize the definition of Derivative with the use of a TI-Nspire CX CAS calculator. These activities take advantage of the different forms of representation of a function, emphasizing the meaning of several basic concepts that exist in the definition of the Derivative.

Introducción

El entendimiento de la definición de Derivada implica conocer cada uno de los aspectos que intervienen, además de conocer las diferentes notaciones para su representación.

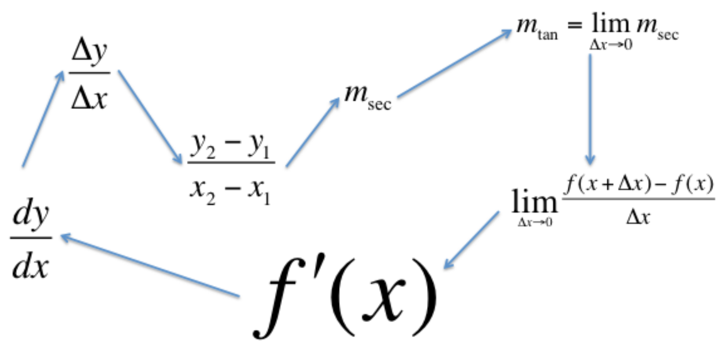


Figura 1. Diferentes aspectos y representaciones de la derivada

Por otro lado, la confusión entre Derivada (aspecto puntual) y Función Derivada es grande. Al observar la figura 1, en el centro se encuentra una de las formas más convencionales de representar una derivada, con la notación $f'(x)$. Siguiendo las flechas se puede apreciar la relación que existe entre las diferentes representaciones. De tal manera, que se obtienen los siguientes aspectos importantes que conforman la definición.

1. Diferencias
2. Pendientes
3. Pendiente como función
4. Límites
5. Líneas secantes y tangentes
6. Función derivada
7. Aplicaciones

El último tema no aparece dentro de la figura 1, pero se considera crucial dentro de la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial.

El contenido de las actividades en términos generales, es la aplicación de las técnicas de la educación matemática realística (RME). La estrategia empleada es la siguiente:

1. Introducción de un concepto dentro de la vida cotidiana o una situación "real".
2. Libertad de construir o llegar al concepto a través de observaciones (expresión creada).
3. Reinvención del concepto o la expresión creada, a través de discusiones con integrantes del equipo, el grupo y el profesor.

La estrategia anterior, encapsula lo fundamental de la RME. Además de la mediación por el profesor en el paso tres, se lleva a cabo la mediación por la calculadora simbólica TI-Nspire CX CAS como apoyo para la construcción de conocimientos. Aprovechando la versatilidad de la calculadora simbólica, se presenta la oportunidad de manipular las diferentes representaciones y además, observar el mismo fenómeno en diferentes perspectivas con el fin de lograr la matematización. Para complementar la estructura didáctica de las actividades diseñadas, además de las secciones del trabajo tradicional (lápiz y papel) y la tecnológica (con CAS), en esta propuesta se implementó una sección de gran importancia como es la ***simbolización.***

Para el aprendizaje y la enseñanza de cálculo diferencial es crucial construir los conceptos y conocimientos a través de métodos activos. Dichos métodos incluyen actividades de descubrimiento guiado por discusiones de reinvención (Ibarra, 2015). En este trabajo, las actividades propuestas juegan el rol del método activo. Se empieza con bloques fundamentales como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, a través del descubrimiento y conceptualización de otros fenómenos se llega al significado de la derivada. Dicho desarrollo encapsula el tema de cálculo diferencial.

Asimismo, las actividades de aprendizaje se generaron de tal manera que el alumno conceptualiza fenómenos fundamentales dentro del cálculo diferencial empleando la estrategia de "abajo hacia arriba", en donde se juntan las piezas claves del concepto para construir el conocimiento.

Por otro lado, de acuerdo con Cortés, C., Núñez, E. y Morales, C. (2015) se debe considerar que, el usar la calculadora no implica que efectivamente se esté utilizando adecuadamente la tecnología, es claro que si se concibe mal una representación o no se tiene claro algún concepto, este mismo puede ser reproducido en la herramienta tecnológica. Sin embargo, apoyados de una actividad de aprendizaje con una estructura didáctica en la que se plasmen las evidencias y posteriormente se discutan de manera colaborativa, el estudiante puede lograr un apropiamiento de los conceptos.

Desde su desarrollo en los 1970s y su introducción a la enseñanza en los 1980s, CAS se vio como una herramienta altamente valiosa para hacer matemáticas y como potencialmente viable para la enseñanza y aprendizaje de matemáticas. Estudios implementados en clases de matemáticas en el nivel medio superior y superior (Heid, 1988; Atkins, Creegan y Soan, 1995; Pierce, 1999; Lagrange 2000) han apoyado el argumento de que la manipulación simbólica dentro del CAS puede evitar los errores de manipulación de los alumnos y por lo tanto permitirles generar resultados exactos y aproximados de manera rápida. Heid (1988) demostró que CAS, puede facilitar el desarrollo de conceptos matemáticos y sugirió que el uso de CAS puede provocar una re-secuencia de conceptos y habilidades en cursos de matemáticas. De acuerdo a Kutzler (1994) la habilidad de "construir" bases conceptuales en CAS permite que los alumnos puedan manejar problemas más complicados que la mayoría de alumnos que trabajan de maneras tradicionales (lápiz y papel). Además, tendiendo las facilidades de manipulación simbólica, capacidades numéricas y representaciones graficas puede promover el hábito de utilizar las tres representaciones para aumentar su conocimiento (Pierce, 1999).

Marco Teórico

Enfoque Semiótico de Duval

Los procesos cognitivos matemáticos son procesos intrínsecamente semióticos que involucran una red compleja de símbolos y señales (Duval, 2006). De acuerdo a Duval (2006), hay un sistema de símbolos, el cual se conoce como sistema semiótico. Lo anterior es caracterizado por un conjunto de símbolos básicos, un conjunto de reglas para la producción y transformación de símbolos y una estructura de significado derivado de la relación entre los símbolos dentro del sistema. Dentro de los sistemas semióticos, existen registros de representación (Duval, 1995). No todos los sistemas semióticos son registros, sólo los que permiten una transformación de representaciones.

El enfoque semiótico de Duval, relaciona el pensamiento y el aprendizaje matemático con la coordinación de representaciones semióticas seguidas por los siguientes procesos cognitivos (Duval, 1993, 1995, 2006):

- *Representación:* en donde se describen las características distintivas, por ejemplo una gráfica que representa una función.
- *Tratamiento:* consiste en la transformación de una representación a otra dentro del mismo sistema semiótico, por ejemplo la manipulación de una expresión algebraica.
- *Conversión:* la cual consiste en la transformación de una representación a otra en otro sistema semiótico, por ejemplo el cambio de la representación simbólica $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ a su gráfica Cartesiana.

La adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en dos de sus características "fuertes" (Duval, 1993):

1. El uso de más registros de representación semiótica.

2. La creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos, símbolo de progreso del conocimiento.

Estas consideraciones muestran la interdependencia estrecha entre noética (aprensión conceptual del objeto matemático) y semiótica (aprensión conceptual de la representación del objeto matemático), cómo se pasa de una a otra: por lo que no sólo no existe noética sin semiótica, sino que la semiótica se adopta como característica necesaria para garantizar el primer paso hacia la noética. Con lo anterior, se concluye que no puede haber una sin la otra; es decir, no puede haber aprensión conceptual de un objeto sin algún representante de éste (Duval, 1993).

Constructivismo

La educación involucra la interacción entre estudiantes, maestros, y ambientes de aprendizaje. Hoy en día el estudiante puede decidir qué y cómo va aprender, debe tomar la iniciativa y hacerse responsable por su aprendizaje con el fin de ser un aprendiz eficaz (Kuhn, 2007). Una visión del aprendizaje es el constructivismo, en donde el alumno es el agente activo en el proceso de la adquisición de conocimientos (Phillips, 1998). El Constructivismo es un término general que abarca varias perspectivas del aprendizaje (Gijbels *et al.* 2006). La manera en que las personas entienden situaciones y cómo crean significado es el interés principal de las teorías del constructivismo.

Dentro del gran número de teorías del constructivismo, hay algunas ideas generales predominantes. De acuerdo al análisis de Taber (2006), algunos conceptos fundamentales son:

1. Los conocimientos son activamente construidos por el aprendiz, no pasivamente recibidos del entorno. El aprendizaje es algo hecho por el alumno, no algo que es impuesto sobre él.
2. Los aprendices llegan al aprendizaje con ideas existentes sobre muchos fenómenos. Algunas de las cuales son ad hoc e inestables, mientras que otras son profundamente fundamentadas y bien desarrolladas.
3. Los aprendices tienen sus propias ideas sobre el mundo, pero hay muchas similitudes y patrones comunes dentro de sus ideas. Algunas ideas son aceptadas y compartidas socialmente, culturalmente, y frecuentemente parte del idioma es soportado por metáforas. Muchas veces lo anterior funciona como herramientas para entender los fenómenos.
4. Unas ideas van en contra de conceptos científicos aceptados, y algunas de ellas pueden ser persistentes y difíciles de cambiar.
5. El conocimiento es representado en el cerebro como estructuras conceptuales, es posible modelar y describirlas en detalle.
6. La enseñanza debe contemplar las ideas existentes del aprendiz si quiere cambiar o poner en duda dichas ideas.

Aunque en un sentido el conocimiento es personal e individual, el aprendiz construye su conocimiento a través de su interacción con el mundo físico, colaborativamente en ambientes sociales y, en un ambiente cultural y lingüístico.

Mediación por tecnología

El aprendizaje mediado representa la interacción, marcada por una serie de necesidades culturales, entre el alumno y su medio ambiente. Tiene como objetivo ofrecer al alumno las herramientas adecuadas para enriquecerse de los estímulos; que el alumno sea consciente de su desarrollo; la formación de una concepción del mundo propia en la solución de problemas relacionados con la vida práctica; desarrollar una actitud autónoma, activa y autodidacta, la cual garantice a los alumnos la adquisición de conocimientos y hábitos que pueda aplicar no sólo en un contexto escolar, sino también en su vida diaria.

Así mismo, el constructivismo ofrece un nuevo paradigma para esta nueva era de información motivado por las nuevas tecnologías que han surgido en los últimos años. Con la llegada de estas tecnologías, los estudiantes no sólo tienen a su alcance el acceso a un mundo de información ilimitada de manera instantánea, sino que también se les ofrece la posibilidad de controlar ellos mismos la dirección de su propio aprendizaje. Cambiar el esquema tradicional del aula, donde el papel y el lápiz tienen el protagonismo principal, y establecer un nuevo estilo en el que se encuentren presentes las mismas herramientas pero añadiéndoles las aplicaciones de las nuevas tecnologías, aporta una nueva manera de aprender, que crea en los estudiantes una experiencia única para la construcción de su conocimiento (Hernández, 2010).

Génisis instrumental

Cuando se introdujeron las calculadoras graficadoras en la educación, fue evidente que los alumnos tenían dificultades en la interpretación de las representaciones graficas que aparecían en la pantalla de la calculadora (Goldenberg*,* 1987; Hillel *et al.,* 1992). Guin y Trouche (1999), observaron que la confusión de los alumnos, se debe al no poder distinguir entre el objeto matemático y su representación en la calculadora.

Para entender el uso de dichas herramientas conceptuales, debemos enfocarnos en el concepto de “instrumento” (Artigue, 2002). El instrumento es diferente al objeto (material), el cual se conoce como “artefacto”. Por lo tanto el instrumento es una entidad mixta, parte artefacto y parte esquemas cognitivos que lo hacen un instrumento. Inicialmente para un individuo el artefacto no tiene valor instrumental. La transformación de artefacto a instrumento se lleva a cabo por un proceso conocido como *Génisis instrumental*, lo cual involucra la apropiación de esquemas sociales pre-existentes.

La Génisis instrumental puede funcionar de dos maneras. La primera es dirigida hacia el instrumento, en donde progresivamente se carga con potencialidades y eventualmente tiene un uso específico; conocido como la instrumentalización del artefacto. Por otra parte la Génisis instrumental está dirigida hacia el sujeto, lo cual resulta en la apropiación de esquemas de acción instrumentado que se convierten en técnicas que permiten una respuesta eficaz a tareas dadas. Lo anterior se conoce como *instrumentación.*

Por lo tanto la Génisis instrumental es el proceso de construir esquemas, técnicas y conceptos que le da significado a las técnicas. La teoría de instrumentación está en línea con las opiniones sobre el rol de símbolos en la educación matemática (Gravemeijer *et al.,* 2000). El valor de la teoría de la Instrumentación es que proporciona una forma específica para ver la interacción entre alumnos y la herramienta tecnológica, y en particular demuestra cómo obstáculos técnicos pueden ser relacionados a dificultades conceptuales. El enfoque instrumental es una herramienta que ha sido reconocida para el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en un ambiente CAS (Artigue, 2002; Lagrange, 2003). De acuerdo a Monaghan (2007) este enfoque abarca elementos de ergonomía cognitiva (Vérillon y Rabardel, 1995) y la teoría antropológica de didáctica (Chevallard, 1999).

Metodología

En este trabajo se presenta el diseño y la experimentación de actividades de Aprendizaje, bajo el esquema de Tarea–Técnica–Tecnología (TTT) dentro de un ambiente CAS. Es importante observar, que la tarea se refiere a una pregunta dentro de una actividad. De acuerdo a Kieran y Saldanha (2008), la actividad es un conjunto de preguntas relacionadas con una tarea central. Las actividades son diseñadas de tal manera que las preguntas teóricas y técnicas son centrales, tal que, el alumno tiene la oportunidad de reflexionar sobre los aspectos técnicos y teóricos en un ambiente tradicional (lápiz y papel) y en un ambiente CAS.

La primera versión de las actividades de aprendizaje, se desarrollaron con los temas de cálculo diferencial de acuerdo al programa del primer módulo de la carrera de Ingeniería Química; así como, de diferentes libros de texto: Anton H., Bivens, I. y Davis, S. (2009), Tan (2011), Stewart (2008), Larson y Edwards (2010), y Hass, J., Weir, M. B. y Thomas, G. B. (2009). Para el diseño de esta versión, fue importante la formulación de preguntas asociadas con los conceptos; además se analizaron las diferentes técnicas de enseñanza de los autores mencionados anteriormente, en conjunto con experiencias previas de los investigadores.

Se realizó una primera experimentación piloto, con alumnos de primer ingreso de la licenciatura de Ingeniería Química para revisar la estructura conceptual de las actividades diseñadas. Dentro de ésta, se llevaron a cabo discusiones extensivas entre el investigador y los estudiantes sobre las preguntas, su significado y cómo adaptar las mismas con respecto a su claridad. Este proceso concluyó hasta que las actividades se consideraron adecuadas.

Posteriormente, se realizó una experimentación formal aplicando las actividades ya modificadas a los alumnos del segundo año de la misma licenciatura que tenían noción de los conceptos involucrados. Lo anterior, para revisar la estructura didáctica de las mismas.

El trabajo de los estudiantes se realizó en equipos de tres integrantes, intercambiando el rol de cada uno de ellos que era el de líder, manejo de calculadora y manejo de la actividad; para favorecer el Aprendizaje colaborativo.

Se videograbaron cada una de las sesiones de las experimentaciones realizadas con tres cámaras, una fija y dos móviles; para tener evidencia de las interacciones y razonamientos de los estudiantes; además de la evidencia escrita, como las actividades y las hojas que se les entregaron para hacer anotaciones extras.

Exposición de la propuesta

En el diseño de actividades educativas, la pregunta clave es ¿cuáles problemas significativos fomentan el desarrollo cognitivo de acuerdo a la trayectoria de aprendizaje hipotético? Tres principios de diseño guían el proceso: reinvención guiada, fenomenología didáctica y modelos de mediación (Drijvers, 2003). El antes citado, también sugirió que se debe poner más atención al rol de la parte tradicional (lápiz y papel) y las discusiones de clase.

Andreu y Riestra (2005), proponen una alternativa para la enseñanza del concepto de Derivada desde una perspectiva histórico-epistemológica. Se enfocaron en casos de maximización, haciendo la observación de que los ceros de la derivada pueden indicar máximos o mínimos. Proponen la función *P(h)=f(x+h)-f(x),* aplicando el teorema del factor se obtiene *P(h)=hQ(h),* en donde *Q(h)* representa la derivada cuando se toma el límite y *h* tiende a cero. Implícitamente se consideran tres conceptos importantes en su enfoque:

1. Comportamiento cuando *h* tiende a cero.
2. *f(x+h).*
3. *f(x+h)-f(x).*

Por otro lado, se propone la conceptualización del Cálculo Diferencial, en donde el punto de partida es la derivada como función y sus diferentes representaciones.

Experimentación

En la experimentación piloto participaron nueve alumnos, que trabajaron en equipos de tres personas; en donde cada integrante tuvo un rol específico (líder, majeo de calculadora y manejo de la actividad) que cambió en cada actividad. Se les proporcionó: una calculadora TI-Nspire CX CAS, la actividad respectiva, un lápiz y hojas en blanco para cualquier anotación. Las interacciones y discusiones entre ellos, y los investigadores, fueron grabadas con una cámara de video para ser analizadas posteriormente.

Con las evidencias de la experimentación piloto, se prestó atención especial en las discusiones entre el investigador y los alumnos. De tal manera, que se introdujo una sección de discusiones grupales en las actividades y se formuló una guía para el maestro que las aplicará. Dentro de ésta, se consideran las discusiones grupales que se llevarán a cabo en cada actividad, además se proporcionan los puntos claves de cada discusión y algunas sugerencias de cómo realizarlas.

Los alumnos no realizaron en su totalidad las actividades contempladas en la primera versión, por lo cual su aplicación se considera como una experimentación informal. Dentro de ésta se llevaron a cabo discusiones entre el investigador y los estudiantes.

Cabe mencionar que en una sesión extra, se trabajó el manejo de la calculadora TI-Nspire CX CAS; por medio de una actividad diseñada de tal forma que los estudiantes pudieran identificar los botones y las funciones asociadas a los mismos, los comandos básicos y el manejo de las diferentes representaciones que tiene esta calculadora.

Dentro de la experimentación formal, se llevaron a cabo dos fases:

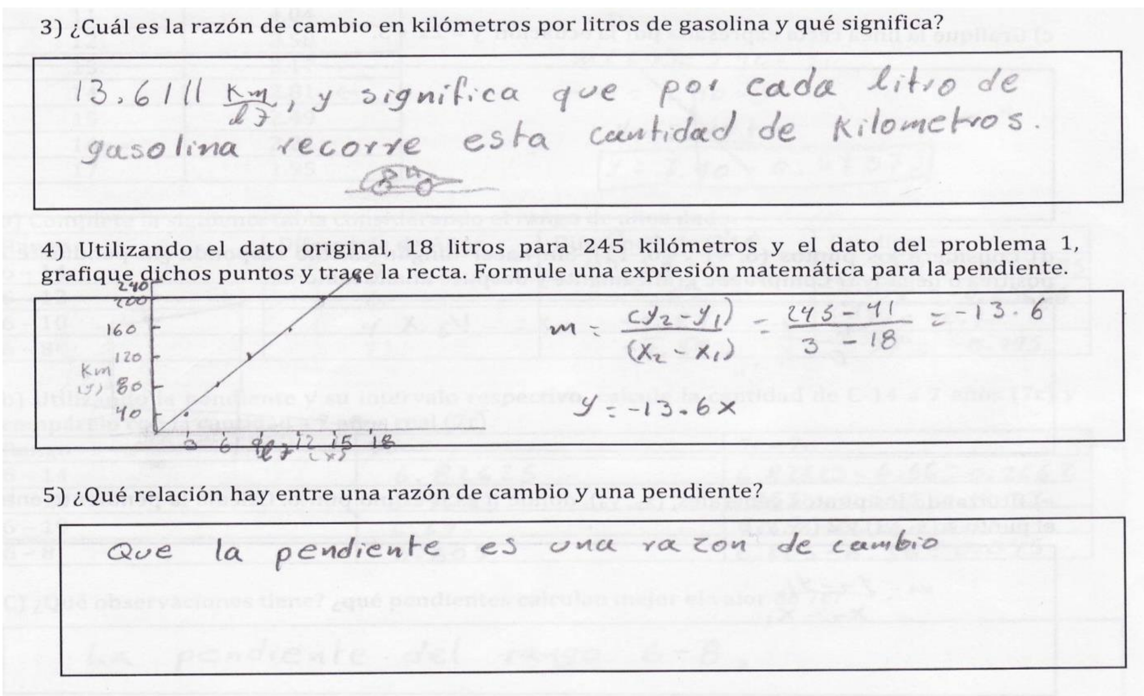
1. En la primera fase, las actividades propuestas se aplicaron a dos alumnos los cuales trabajaron en equipo y fueron elegidos porque se consideraron con conocimientos avanzados de Cálculo Diferencial. Se les proporcionó una calculadora TI-Nspire CX CAS, la actividad diseñada y un lápiz; para trabajar sin límite de tiempo. Esta fase tuvo como propósito, revisar la estructura conceptual de las mismas; posteriormente se hicieron modificaciones.
2. En la segunda fase se aplicaron las actividades modificadas, a cuatro alumnos que tenían noción de los conceptos involucrados, pero no los dominaban completamente. Lo

anterior, para revisar la estructura didáctica de las mismas. Dichos alumnos se encuentran cursando Matemáticas II. Esta fase se llevó a cabo, bajo las mismas condiciones de la primera.

Resultados

Las actividades tienen una estructura conceptual progresiva, se diseñaron de tal manera, que se presentan problemas de aplicación y el alumno deduce el concepto involucrado. Por ejemplo, en la Actividad 2 se aborda el tema de Pendiente y está estructurada por dos partes: en la primera el estudiante trabaja con lápiz y papel; y en la segunda se trabaja con el sistema CAS de la calculadora. En ambas, se proponen problemas que abordan el concepto antes citado.

La parte I con lápiz y papel, se trabaja con los conceptos de pendiente y recta, en la cual se presenta la siguiente secuencia de preguntas:


3) ¿Cuál es la razón de cambio en kilómetros por litros de gasolina y qué significa?

13.6111 Km/Lt, y significa que por cada litro de gasolina recorre esta cantidad de kilometros.

4) Utilizando el dato original, 18 litros para 245 kilómetros y el dato del problema 1, grafique dichos puntos y trace la recta. Formule una expresión matemática para la pendiente.

$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{245 - 41}{3 - 18} = -13.6$

$y = -13.6x$

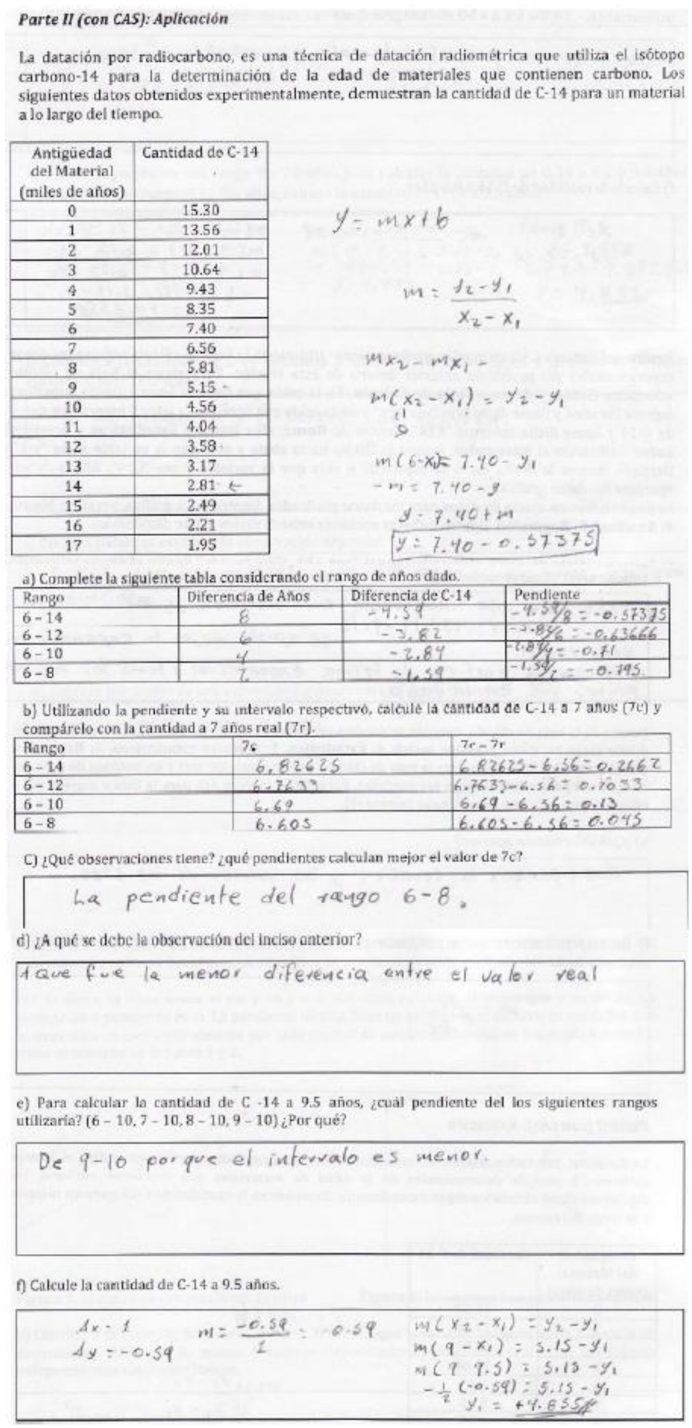
5) ¿Qué relación hay entre una razón de cambio y una pendiente?

Que la pendiente es una razon de cambio

Figura 2. Secuencia típica empleada, Actividad 2 realizada por el equipo 1

Aquí se observa, que a través de preguntas de deducción y observación se llega a los conceptos claves dentro del Cálculo Diferencial.

En la parte II del uso de CAS con la calculadora, se presenta un problema de la datación por radiocarbono en forma numérica (tabla), el cual se muestra en la Figura 3. Como se puede observar en la misma, los estudiantes hacen el planteamiento algebraico para calcular la pendiente en diferentes rangos. Ya que posteriormente se les pide calcular la cantidad de C-14 a siete años y que lo comparen con el valor real de la tabla. Los siguientes cuestionamientos son con el fin de que los alumnos reflexionen acerca del rango que más se acerca al valor real (el más pequeño), para que después apliquen este conocimiento al cálculo de otro valor, lo cual lo hacen correctamente.



Parte II (con CAS): Aplicación

La datación por radiocarbono, es una técnica de datación radiométrica que utiliza el isótopo carbono-14 para la determinación de la edad de materiales que contienen carbono. Los siguientes datos obtenidos experimentalmente, demuestran la cantidad de C-14 para un material a lo largo del tiempo.

Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14
0	15.30
1	13.56
2	12.01
3	10.64
4	9.43
5	8.35
6	7.40
7	6.56
8	5.81
9	5.15
10	4.56
11	4.04
12	3.58
13	3.17
14	2.81 ←
15	2.49
16	2.21
17	1.95

$y = mx + b$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$mx_2 - mx_1 =$

$m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$

$m(6 - x_1) = 7.40 - y_1$

$-m = 7.40 - y$

$y = 7.40 + m$

$\boxed{y = 7.40 - 0.57375}$

a) Complete la siguiente tabla considerando el rango de años dado.

Rango	Diferencia de Años	Diferencia de C-14	Pendiente
6 - 14	8	-4.59	$-4.59/8 = -0.57375$
6 - 12	6	-3.82	$-3.82/6 = -0.63666$
6 - 10	4	-2.84	$-2.84/4 = -0.71$
6 - 8	2	-1.59	$-1.59/2 = -0.795$

b) Utilizando la pendiente y su intervalo respectivo, calcule la cantidad de C-14 a 7 años (7c) y compárelo con la cantidad a 7 años real (7r).

Rango	7c	7c – 7r
6 - 14	6.82625	6.82625 - 6.56 = 0.2662
6 - 12	6.7633	6.7633 - 6.56 = 0.7033
6 - 10	6.69	6.69 - 6.56 = 0.13
6 - 8	6.605	6.605 - 6.56 = 0.045

C) ¿Qué observaciones tiene? ¿qué pendientes calculan mejor el valor de 7c?

La pendiente del rango 6-8.

d) ¿A qué se debe la observación del inciso anterior?

A que fue la menor diferencia entre el valor real

e) Para calcular la cantidad de C -14 a 9.5 años, ¿cuál pendiente del los siguientes rangos utilizaría? (6 – 10, 7 – 10, 8 – 10, 9 – 10) ¿Por qué?

De 9-10 porque el intervalo es menor.

f) Calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

$\Delta x = 1$ $m = \frac{-0.59}{1} = -0.59$

$\Delta y = -0.59$

$m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$

$m(9 - x_1) = 5.15 - y_1$

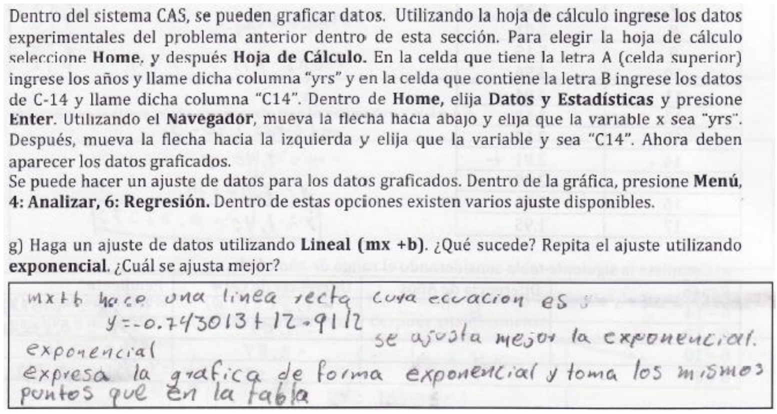
$m(9 - 9.5) = 5.15 - y_1$

$-\frac{1}{2}(-0.59) = 5.15 - y_1$

$y_1 = +4.855$

Figura 3. Problema de aplicación

Otra parte del uso de CAS, es que los estudiantes hagan la gráfica de los valores tabulados y realicen el mejor ajuste de éstos. Como se puede observar en la Figura 4 los estudiantes del equipo 1, después de hacer diferentes ajustes concluyen que el exponencial es el mejor, ya que toma los mismos valores que tiene la tabla.

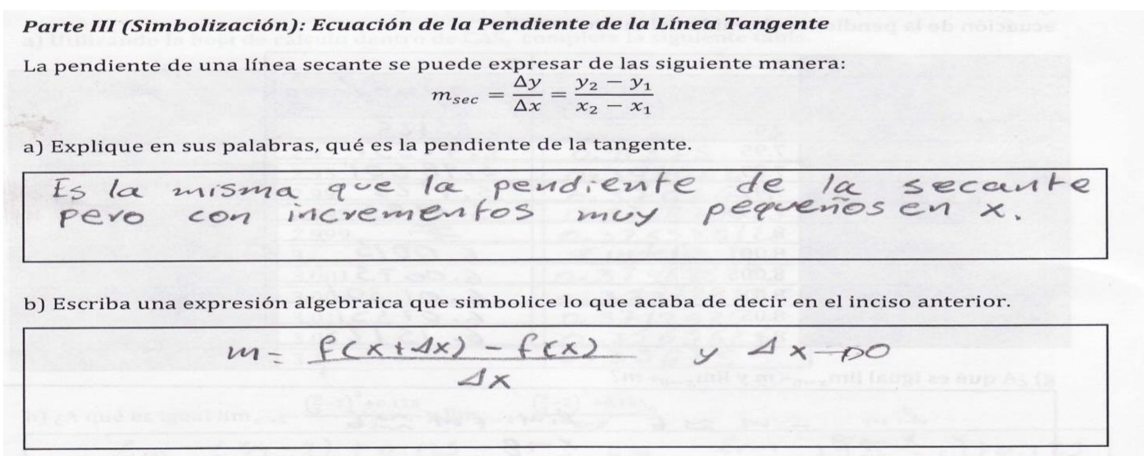

Dentro del sistema CAS, se pueden graficar datos. Utilizando la hoja de cálculo ingrese los datos experimentales del problema anterior dentro de esta sección. Para elegir la hoja de cálculo seleccione **Home**, y después **Hoja de Cálculo.** En la celda que tiene la letra A (celda superior) ingrese los años y llame dicha columna "yrs" y en la celda que contiene la letra B ingrese los datos de C-14 y llame dicha columna "C14". Dentro de **Home,** elija **Datos y Estadísticas** y presione **Enter**. Utilizando el **Navegador**, mueva la flecha hacia abajo y elija que la variable x sea "yrs". Después, mueva la flecha hacia la izquierda y elija que la variable y sea "C14". Ahora deben aparecer los datos graficados.
Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione **Menú, 4: Analizar, 6: Regresión.** Dentro de estas opciones existen varios ajuste disponibles.

g) Haga un ajuste de datos utilizando **Lineal (mx +b)**. ¿Qué sucede? Repita el ajuste utilizando **exponencial**. ¿Cuál se ajusta mejor?

mx+b hace una linea recta cuya ecuacion es:
y=-0.743013+12.9112
exponencial
se ajusta mejor la exponencial.
expresa la grafica de forma exponencial y toma los mismos puntos que en la tabla

Figura 4. Ajuste de datos del equipo 1

Dentro del Cálculo y de cualquier tópico matemático de nivel superior, se pone énfasis en la simbología utilizada. Lo anterior, en la mayoría de los casos se ve como el manejo de otro idioma. En las actividades diseñadas, se incorpora una sección dedicada a la formulación de la simbología. Lo anterior, se lleva a cabo en dos partes. En la primera el alumno genera su propia expresión, mientras que en la segunda se compara con la forma convencional. En las Figuras 5 y 6 se observan las simbolizaciones de lo que es la pendiente de la tangente, realizadas por los estudiantes en la experimentación piloto.


Parte III (Simbolización): Ecuación de la Pendiente de la Línea Tangente

La pendiente de una línea secante se puede expresar de las siguiente manera:

$$m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

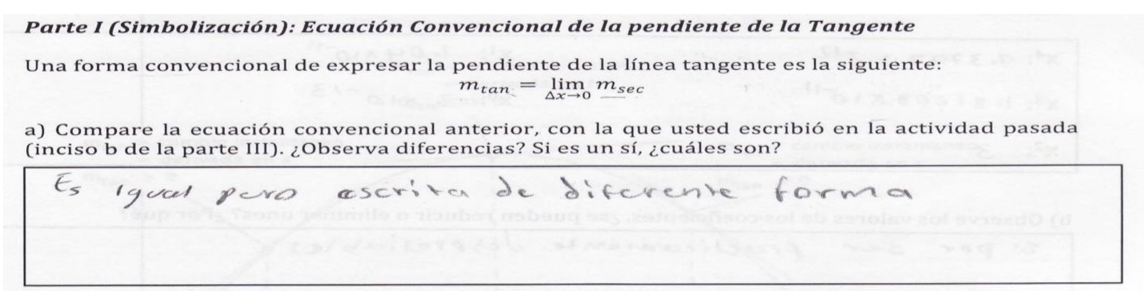
a) Explique en sus palabras, qué es la pendiente de la tangente.

Es la misma que la pendiente de la secante pero con incrementos muy pequeños en x.

b) Escriba una expresión algebraica que simbolice lo que acaba de decir en el inciso anterior.

$$m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad y \quad \Delta x \to 0$$

Figura 5. Primera parte de la simbolización en Actividad 5 realizada por el equipo 1


Parte I (Simbolización): Ecuación Convencional de la pendiente de la Tangente

Una forma convencional de expresar la pendiente de la línea tangente es la siguiente:

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{sec}$$

a) Compare la ecuación convencional anterior, con la que usted escribió en la actividad pasada (inciso b de la parte III). ¿Observa diferencias? Si es un sí, ¿cuáles son?

Es igual pero escrita de diferente forma

Figura 6. Segunda parte de la simbolización en Actividad 5 realizada por el equipo 1

Conclusiones

Tradicionalmente, la enseñanza de las matemáticas se lleva acabo utilizando métodos pasivos, es decir, el alumno solamente recibe información sobre el tema; se presenta primero la teoría y después se hacen algunos ejercicios de la misma. Por ejemplo, en una clase para abordar el tema de derivada se puede ver de la siguiente manera:

1. Para encontrar la derivada de cualquier función se utiliza la expresión:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2. Entonces la derivada para x^2 sería:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

Después de esa introducción al tema, el profesor pone a trabajar a los estudiantes en la clase con problemas similares, y probablemente también se deje una tarea.

Innumerables estudios han demostrado, que estas técnicas de enseñanza pasivas no son adecuadas para un aprendizaje significativo. En este trabajo de investigación el alumno construye su propio conocimiento a través de métodos activos, es decir, que ellos están involucrados y son responsables de su aprendizaje por medio del "descubrimiento". Diferentes investigaciones (Heid, 1988; Atkins, Creegan y Soan, 1995; Pierce, 1999; Lagrange 2000) sugieren, que el descubrimiento guiado o mediado es más eficaz. La mediación se lleva a cabo, por las actividades de aprendizaje diseñadas y el investigador que las aplica, a través de discusiones individuales y grupales. Las actividades están diseñadas de tal manera, que el conocimiento lo construye el alumno cuando une conceptos e ideas implícitos en las mismas.

Las actividades propuestas se sometieron a experimentaciones formales y piloto, y de acuerdo a las observaciones realizadas por el grupo de investigadores se modificaron hasta llegar a las actividades finales que conceptualizaron el Cálculo Diferencial. El esquema empleado, es que a través de preguntas tales como: ¿qué pasa bajo esas condiciones?, ¿a qué se debe?, ¿cómo formularías lo antes dicho?, etc., se van construyendo los conocimientos, los cuales representan la conceptualización del objeto matemático.

De la experimentación piloto se observó, que gran parte de las dificultades detectadas se atribuyen a los integrantes de los equipos y no al diseño de las actividades. Por ejemplo, algunos errores se deben a que no leen con cuidado las preguntas, responden de forma equivocada, o bien no discuten adecuadamente sobre los cuestionamientos. Con respecto al diseño de las actividades, la única modificación resultante después de la experimentación piloto fue la inserción de discusiones. Las cuales tienen el objetivo de resumir lo más importante de los temas tratados y de reforzar la construcción de los conceptos involucrados. Debido a que las actividades son acumulativas, es importante asegurar que los alumnos obtengan cada uno de los conceptos involucrados en las mismas.

Bibliografía

Anton, H., Bivens, I. y Davis, S., (2009). *Calculus Early Transcendentals* (9e ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, INC.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Enviroment: The Genesis of a Reflection About Instrumentation and The Dialectics Between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.

Atkins, N., Creegan, A. y Soan, P. (1995). You can lead students to DERIVE, but can you make them think? *International DERIVE Journal*, 2(1), 63-82.

Cortés, C. y Núñez, E. (en evaluación). Aprendizaje de conceptos de cálculo diferencial a través de actividades. *Revista Unión*, España 2016.

Cortés, C., Núñez, E. y Morales, C. (2015). Actividades de aprendizaje algebraicas, usando la calculadora TI-Nspire™ CX CAS en un ambiente de aprendizaje. *Revista de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática, vol III No. 2*. Pág. 1-10. Recuperado de http://revista.amiutem.edu.mx

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactiqu. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19, 221-266.

Duval, R. (1993). Registres de Représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Gijbels, D., van de Watering, G., Dochy, F., y van den Bossche, P. (2006). New learning enviroments and constructivism: *The students' perspective. Instructional Science*, 34, 213-226.

Goldenberg, E. (1987). Believing is seeing: How preconceptions influence the preceptions of graphs. *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*, Vol 1. Montreal, pp. 197-204.

Guin, D., y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.

Gravemeijer, K. P. E., Cobb, P., Bowers, J., y Whitenack, J. (2000). Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. En P. Cobb, E. Yackel, K. McClain (eds.), Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: *Perspectives on discourse, tools, and instructional design*, p. 225-273. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hass, J., Weir, M. B. y Thomas, G. B. (2009). *University Calculus:Early Transcendentals* (2e ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 3-25.

Hernández, S. (2008). El modelo constructivista con las nuevas tecnologías: aplicado en el proceso de aprendizaje. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento, 5 (2),* 26-35. doi: http://dx.doi.org/10.7238/rusc.v5i2.335

Hillel, J., Lee, L., Laborde, C. y Linchevski, L. (1992). Base functions through the lens of computer alegbra systems. *Journal of Mathematical Behaviour*, 11, 119-158.

Kieran, C., y Saldanha, L. (2008). Designing tasks for the codevelopment of conceptual and technical knowledge in CAS activity: An example from factoring. En G. W. Blume y M. K. Heid (eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*: Vol. 2 cases, and perspectives (pp. 393-414). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kuhn, D. (2007). Is direct instruction an answer to the right questions? *Educational Psychologist*, 42, 109-113.

Kutzler, B. (1994). DERIVE – the future of teaching mathematics. *International DERIVE Journal*, 1(1), 37-48.

Lagrange, J. B. (2000). L'Intégration d'Instruments Informatiques dans l'Enseignement: une Approche par les Techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43(1), 1-30.

Lagrange, J. B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J. T. Fey (ed.), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (pp. 269-283). Reston, VA: Nationa Council of Teachers of Mathematics.

Larson, R. Y Edwards, B. H. (2010). *Calculus* (9e ed.). Belmont, CA: Brooks/Cole.

Monaghan, J. (2007). Computer algebra, instrumentation and the anthropological approach. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 14(2), 63-72.

Phillips, D.C. (1998). How, why, what, when, and where*: Prespectives on constructivism in psychology and education*. Issues in Educaction, 3, 151-194.

Pierce, R. (1999). Using CAS as a scaffolding for calculus: Some observations. En W. Spunde, P. Cretchley y R. Hubbard (eds.), The Challenge of Diversity: Proceedings of the Delta-99 *Symposium on Undergraduate Mathematics* (pp. 172-176). Brisbane: Delta 99 Committee.

Stewart, J., (2008). *Calculus Early Transcendentals* (6e ed.). Belmont, CA: Thomson Higher Education.

Taber, K. S. (2006). Beyond Constructivism: the Progressive Research Programme into Learning Science. *Studies in Science Education*, 42, 125-184.

Tan, S. T., (2011). Calculus: Early Transcendentals. Belmont, CA: Brooks/Cole.

Vérillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77-101.