



REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores
del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

Directorio

Rafael Pantoja R.

Director

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Lourdes Guerrero M.

Sección: Selección de
artículos de investigación

Elena Nesterova

Alicia López B.

Verónica Vargas Alejo

Sección: Experiencias

Docentes

Esnel Pérez H.

Armando López Zamudio

Sección: Geogebra

ISSN: 2395-955X

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN MODELOS VIBRATORIOS ABORDADOS CON EL USO DE LA CALCULADORA GRAFICADORA TI NSPIRE CX CAS

Ricardo Solórzano Gutiérrez, María Guadalupe Vázquez
Rodríguez, Irma Xóchitl Fuentes Uribe

Universidad de Guadalajara, Centro de Enseñanza Técnica Industrial,
Mexico.

ricardo_sg75@hotmail.com, magpevrs@hotmail.com, xochitl.fuentes@ucea.udg.mx

Para citar este artículo:

Solórzano, R., Gutiérrez, Vázquez, M. G., Fuentes, I. X. (2017). Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en modelos vibratorios abordados con el uso de la calculadora graficadora TI NSPIRE CX CAS. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEL, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: <https://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN MODELOS VIBRATORIOS ABORDADOS CON EL USO DE LA CALCULADORA GRAFICADORA TI NSPIRE CX CAS

Ricardo Solórzano Gutiérrez, María Guadalupe Vázquez Rodríguez, Irma Xóchitl Fuentes Uribe

Universidad de Guadalajara, Centro de Enseñanza Técnica Industrial, Mexico.

ricardo_sg75@hotmail.com, magpevrs@hotmail.com, xochitl.fuentes@cucea.udg.mx

Resumen

En la enseñanza de las matemáticas es fundamental la simulación de problemas cotidianos y para ello, las ecuaciones diferenciales ordinarias permiten modelar problemáticas ingenieriles que hoy en día se requieren resolver con mayor precisión. Uno de los casos a presentarse en este XI Seminario, es el de entender el comportamiento de un sistema vibratorio forzado armónicamente y qué variables están relacionadas con esta clase de movimiento. Para ello, es necesario no solamente resolver las ecuaciones que se pueden generar a través de la metodología tradicional, sino que el utilizar la tecnología, en este caso a través de la calculadora TI Nspire CX Cas se podrá profundizar en la relación que existe entre variables como el amortiguamiento del sistema y la frecuencia de oscilación de la fuerza, además de poder visualizar con el uso de gráficas, la interacción de estas variables y conducir a recomendaciones favorables para el control del propio sistema.

Palabras Claves: Vibración, Función Armónica, Fuerza Excitadora, Amortiguador.

Introducción

En los últimos años, los recursos tecnológicos han sido uno de los principales promotores para el proceso de enseñanza aprendizaje, sobretodo en el área de las ingenierías, ya que a través de software libre, herramientas de cómputo y diversas aplicaciones en los teléfonos celulares, abren la puerta a la posibilidad de complementar la catedra tradicional de clase, apoyando a la solución de los modelos matemáticos que involucran diversos fenómenos físicos, y que para el caso de las vibraciones mecánicas, permite al profesor profundizar en aspectos prácticos del área de interés, dejando de lado los procesos matemáticos tradicionales de resolver una ecuación diferencial de segundo orden con métodos de solución extensos y que no son prioritarios en el curso, por ejemplo la transformada de Laplace, variación de parámetros, etc., dándole mayor importancia a la interpretación de resultados en la respuesta esperada de un modelo vibratorio.

En el entorno laboral, donde la solución de problemas es una constante para el campo ingenieril, el recurso tecnológico permite que se pueda aplicar acciones correctivas en el desarrollo del problema y que la premura de la solución pueda reducir riesgos, disminuir costos y ser eficientes en los procesos productivos. Por tal motivo, el uso de herramientas tecnológicas y en específico, la calculadora graficadora TI Nspire CX Cas, representa una herramienta fundamental para cumplir los objetivos del curso de Vibraciones Mecánicas que actualmente se imparte en el Centro de Enseñanza Técnica Industrial, y que tienen que ver no solamente con la creación de los modelos vibratorios formulados matemáticamente, sino que también se requiere conocer las diversas variables dinámicas que afectan o contribuyen al movimiento y sobretodo, que solución se puede plantear para la reducción de la vibración.

Homogeneizar los métodos de enseñanza, es un reto que se ha propuesto la Academia de Control del propio Centro, ya que uno de los principales objetivos que se tienen es el de propiciar que el alumno tenga un mayor interés por el uso de la tecnología y que la pueda aplicar en aspectos prácticos de profesión.

Objetivo

Este trabajo pretende mostrar, algunos ejercicios en los que a través de utilizar la tecnología, el alumno plantea y resuelve modelos vibratorios y que al relacionar gráficamente las variables dinámicas asociadas al comportamiento del sistema, pueda tener una interpretación adecuada sobre los efectos de estas variables en el movimiento de la masa a través del tiempo.

Marco teorico

En los últimos años, el uso de la tecnología ha tenido diversas aplicaciones, entre ellas destacan la del entorno educativo, esto con la finalidad de ofrecer al estudiante ambientes de trabajo que estimulen su reflexión, lo cual los convierte en un activo responsable de su propio aprendizaje, es decir, al proveer un espacio común entre el maestro y el estudiante, la retroalimentación de información reducirá el miedo del estudiante a expresar algo erróneo y por lo tanto, se aventurará más a explorar (Castillo,2008). Sin embargo, Pomerantz (1997) señala que existen algunos mitos acerca del uso de la calculadora, entre otros, el que los estudiantes pierden habilidades al usarlas porque las calculadoras hacen todo el trabajo por él, volviéndolo dependiente. Al respecto, considera que estos mitos únicamente sirven para hacer más lento, la inevitable implementación de la tecnología en los salones de clase y pone a los estudiantes en desventaja. En un mundo que está siendo cubierto por la tecnología, es necesario que estos mitos sean redimensionados, ya que las calculadoras pueden ser apropiadamente incorporadas como una herramienta para fomentar el aprendizaje.

En el ámbito de la aplicación de las ecuaciones diferenciales, Hernández (1997) señala que el uso de las TIC es importante en procesos donde la memorización y el desarrollo de algoritmos repetitivos no es lo primordial en el proceso de enseñanza, el hecho de que esta herramienta se utilice, es para vincular el efecto que tiene los elementos de rigidez, disipación y fuerza excitadora con la amplitud de oscilación de los sistemas vibratorios, y por lo tanto el resultado esperado es que el alumno pueda asimilar el comportamiento de las variables dinámicas más importantes para vincular sus efectos en la amplitud de oscilación.

Metodología

El Centro de Enseñanza Técnica Industrial, a través de la Academia de Control perteneciente a la carrera de Ingeniería Mecatronica, ha solicitado a sus profesores que los recursos tecnológicos existentes en el mercado sean una prioridad en su utilización, no solamente por la eficiencia que tienen estos en depurar procesos que consumen periodos de tiempo prolongados, sino que permiten al alumno complementar su aprendizaje, utilizándolos mediante un razonamiento lógico-matemático para desarrollar su ingenio y que le permita resolver problemas eficientemente, identificando los problemas que los originan y el cómo resolverlo de la manera más eficiente.

Por lo tanto, la propuesta en este trabajo es mostrar un problema común de vibraciones como un sistema de un grado de libertad, el cual se resolverá a través del modelo

matemático tradicional, y comparar la solución con el uso de una herramienta tecnológica, en este caso el uso de la calculadora graficadora TI Nspire CX Cas, para posteriormente dejar al alumno en un proceso de reflexión, para obtener conclusiones con respecto al efecto que tienen las variables dinámicas inmersas en el modelo y que a través de su representación gráfica, visualice la mejor solución al problema planteado, y defina la forma de como eliminarlas o simplemente reducirlas a un nivel satisfactorio.

Exposición de la propuesta

A continuación se muestra un ejemplo tipo a resolver. En este se toma en cuenta el proceso tradicional de solución y además lo complementa el uso de la calculadora graficadora TI Nspire CX Cas, para comprobar lo ya realizado.

Problema:

Una máquina de 10 Kg está montada en una base la cual esta soportada por 4 resortes equidistantes cuya rigidez es de 1000 N/m cada uno, y se encontrará amortiguado a través de una constante $c = 40$ N-seg/m. Si al accionarse la máquina, induce una vibración con una fuerza excitadora de 100 N y una frecuencia de 1.60 Hz. Determine el Factor de amplificación del sistema. (ver figura 1).

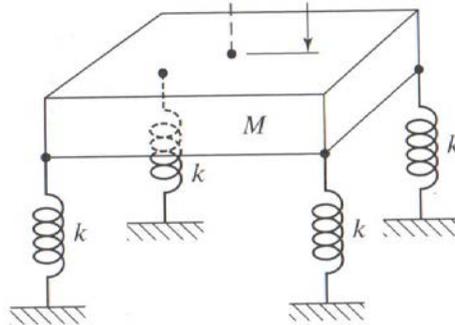


Figura 1. Modelo masa-resorte.

Definición de la solución:

Para plantear la ecuación de movimiento, se requiere verificar el tipo de movimiento que tendrá la masa, en este caso el sistema se encuentra sin amortiguamiento, por lo tanto, la ecuación diferencial será:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

En esta ecuación, las variables están definiendo lo siguiente:

$$m = \text{masa} = \frac{\text{Peso}}{\text{Aceleración Gravitacional}} = 10\text{Kg}$$

$$k = \text{rigidez} = \sum_{i=1}^n K_i = 4(1000\text{N} / \text{m}) = 4000\text{N} / \text{m}$$

$$c = \text{Constante de amortiguamiento} = 40\text{N} - \text{seg} / \text{m}$$

La relación de amortiguamiento que tiene el sistema es:

$$\xi = \frac{\text{Constante de Amortiguamiento}}{\text{Constante de Amortiguamiento Critico}} = \frac{40N - \text{seg} / m}{2mw_n} = \frac{40}{2(10)\left(\sqrt{\frac{4000}{10}}\right)} = 0.10$$

La fuerza excitadora presente en el sistema estará dada por el dispositivo mecánico y por lo tanto, su magnitud y frecuencia están representados por:

$$F_0 = \text{Fuerza} = 100N$$

$$w = \text{Frecuencia circular de la fuerza} = 2\pi f = 2\pi(1.6\text{Hz}) = 10.053 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

Así, los valores obtenidos sustituyéndolos en la ecuación diferencial de movimiento seleccionada estará definida por:

$$10\ddot{x} + 40\dot{x} + 4000x = 100\cos(10.053t)$$

Solución utilizando tecnología:

Esta ecuación diferencial al resolverla, tendrá como función de posición de la masa a través del tiempo, la gráfica mostrada en la figura 2. Esta representación se puede obtener con cualquier graficador, sin embargo, la importancia de mostrarla es el de hacer ver al alumno que la respuesta total del sistema está formada por la suma de dos partes, la respuesta transitoria definida en la parte inicial de la oscilación, y la respuesta estacionaria definida por la fuerza excitadora y que corresponde a la oscilación de amplitud constante.

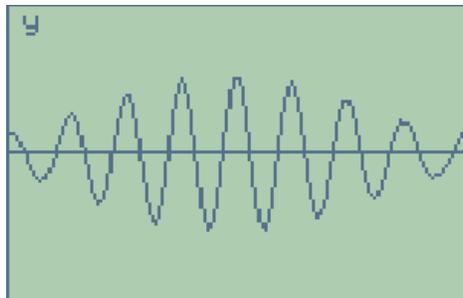


Figura 2. Posición de la masa a través del tiempo.

La máxima ordenada de la gráfica en el estado estacionario, es decir, cuando el sistema está afectado por la fuerza excitadora, debe encontrarse a través de:

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}} = \frac{100N}{\sqrt{(4000 - ((10)(10.053)^2))^2 + ((40)(10.053))^2}} = 0.033m$$

Para el factor de amplificación, es decir la relación entre la respuesta dinámica con respecto a la respuesta estática y que permite visualizar el efecto de la fuerza excitadora sobre el sistema, se podrá utilizar la expresión:

$$\left(\frac{X}{\delta_{ST}} \right) = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

La relación de frecuencias, identificada como r representa una comparativa entre la frecuencia de la fuerza excitadora con respecto la frecuencia de oscilación del propio sistema, y que debe calcularse a través de:

$$r = \frac{w}{w_n} = \frac{10.053 \text{ rad/seg}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad r = \frac{w}{w_n} = \frac{10.053 \text{ rad/seg}}{\sqrt{\frac{4000}{10}}} = 0.502$$

Por lo tanto, el factor de amplificación se determina sustituyendo los valores solicitados en la expresión.

$$\left(\frac{X}{\delta_{ST}}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1 - (0.502)^2)^2 + (2(0.1)(0.502))^2}} \quad \left(\frac{X}{\delta_{ST}}\right) = 1.32$$

El resultado obtenido define que la amplitud de oscilación se incrementa en un 32%, por el efecto de la fuerza excitadora presente en el sistema.

Para comprender el efecto que tiene la influencia de la fuerza excitadora en los desplazamientos del sistema, se pide al alumno que grafique la función anterior, es decir que represente el factor de amplificación en términos de la relación de frecuencias. En la figura 3 se puede observar dicha representación. Esto permite al alumno visualizar como los desplazamientos de la masa no son constantes, existe una relación específica de frecuencias que genera un valor máximo en la gráfica y que a partir de dicho valor, los desplazamientos se reducen considerablemente. Esto no lleva a incorporar conceptos como el de resonancia, ya que este valor máximo se encuentra cerca de la relación de frecuencia de uno.

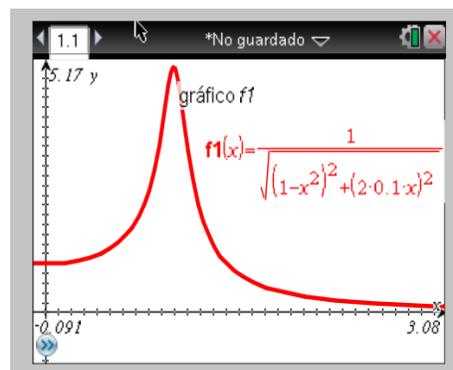


Figura 3. Factor de amplificación del efecto dinámico.

Si además, se solicita al alumno que incorpore el efecto del amortiguamiento en la gráfica del factor de amplificación, esto con la finalidad de observar el comportamiento de los desplazamientos de la masa, en términos de la relación de frecuencias, así la gráfica resultante se muestra en la figura 4.

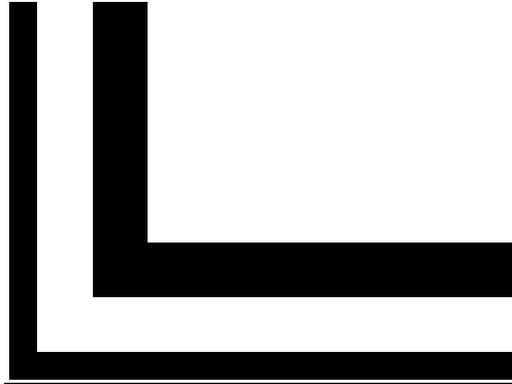


Figura 4. Factores de Amplificación de acuerdo al nivel de amortiguamiento.

En ella es posible visualizar que a medida que se incrementa la variable de amortiguamiento, los desplazamientos de la masa disminuyen significativamente, sin importar la relación de frecuencias que se tenga en el modelo vibratorio. Esto permite concluir al alumno que a medida que el amortiguamiento se incrementa, es posible reducir las amplitudes de oscilación, dado que la energía presente se disipa gradualmente a través del tiempo.

Este problema resuelto con la calculadora graficadora TI Nspire CX Cas, permite visualizar la solución de cualquier ecuación diferencial, a través de la instrucción mostrada en la figura 5. Esto permite que, al tener la función solución se pueda representar la posición de la masa en cualquier instante de tiempo a través de su gráfica. Al tener esta representación, es posible obtener desplazamientos en tiempos específicos, es decir, buscar aquella posición en el tiempo que se requiera o en este caso, se puede localizar el valor máximo de la respuesta estacionaria calculada previamente a través del proceso tradicional mostrado en el problema anterior.

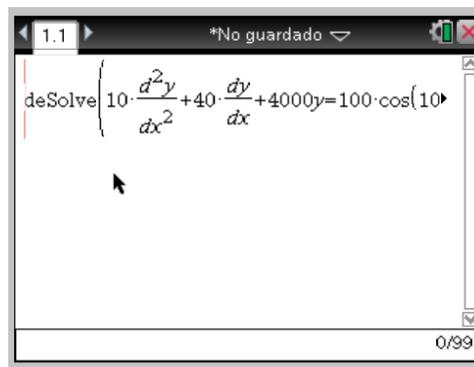


Figura 5. Instrucción de solución en la calculadora graficadora TI Nspire CX-Cas.

Otra de las ventajas que tiene el uso de esta herramienta tecnológica, es de poder parametrizar las soluciones de las variables dinámicas inmersas en los modelos vibratorios. Por ejemplo, una ventaja de realizar lo anterior, es la visualización del cambio en el factor de amplificación en base al cambio en la relación de frecuencias del sistema. La figura 6, muestra dicha relación.

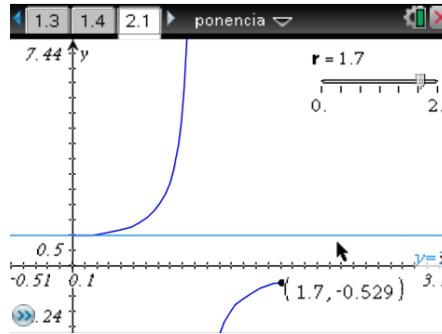


Figura 6. Visualización de la variación del factor de amplificación en relación al cambio de frecuencias.

Experimentación

Este trabajo se planteó con dos grupos de 40 alumnos aproximadamente, cada uno de ellos pertenecen al sexto semestre de la carrera de Ingeniería Mecatrónica. En uno de los grupos piloto, se trabajó de la manera tradicional (Grupo A) dirigido por el profesor Ricardo Solórzano. Mientras que en el segundo grupo (Grupo B), se utilizó la calculadora graficadora TI Nspire CX Cas, el cual estuvo dirigido por la profesora María Guadalupe Vázquez.

Grupo A:

En este grupo, se trabajó de la manera tradicional, es decir de manera expositiva, donde el uso de la tecnología se limitaba a las operaciones básicas para generar las soluciones. El manejo de modelos gráficos se limitó a los esbozos de figuras y graficas que el profesor realizaba en el pizarrón, además las variables dinámicas que se presentaban en los modelos solo se trabajaron en clase, con algunos valores específicos, dado a lo prolongado del proceso de cálculo que implicaba.

Grupo B:

En este grupo se empleo la calculadora graficadora TI Nspire, la cual era utilizada por los alumnos para desarrollar sus soluciones en cada problema propuesto. Los resultados que se buscaron, era medir la efectividad del recurso tecnológico en los exámenes planteados, el alumno no solamente se limitaba a calcular las variables dinámicas inmersas en los problemas, sino que también identificara la raíz que lo ocasionaba y que además, proporcionara una recomendación para mejorar el comportamiento del sistema, es decir, que las oscilaciones disminuyeran significativamente para evitar algún daño en los equipos. Con esto último se podría medir el avance en el aprendizaje de los alumnos. También, se exploró en gran medida el poder gráfico que proporciona la calculadora, además que se enriqueció el aprendizaje ya que se trabajó con gráficas interactivas representadas por variables dinámicas, lo cual permitió al alumno, desarrollar su aprendizaje.

Resultados

Los resultados que se obtuvieron en el semestre fueron los siguientes:

Ambos grupos demostraron que en el cálculo de las variables dinámicas los resultados eran satisfactorios y que los procesos matemáticos se habían comprendido correctamente; sin embargo, en cuanto a la habilidad para entender la relación entre variables y asociar su

comportamiento para dar solución al problema, el grupo de enseñanza tradicional tuvo una calificación de 62 puntos comparado con los 79 puntos del grupo que utilizó la herramienta tecnológica. La razón de lo anterior, es que en el primer caso, los alumnos están limitados a tener que realizar los procesos paso a paso, consumiendo una gran parte de tiempo aunado a los errores de procedimiento que generalmente ocurren. En el segundo, los alumnos al tener el recurso tecnológico pueden utilizarlo para incorporar gráficas de la relación entre las variables dinámicas, lo cual permite visualizar al alumno a entender el efecto que tienen estas en los desplazamientos del sistema. Es indudable que, el hecho de incorporar tecnología, minimiza los errores de cálculo susceptibles de un proceso tradicional y que además, el alumno tenga un aprendizaje más significativo de los resultados obtenidos.

Conclusiones

Los sistemas vibratorios de un grado de libertad modelados matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias permiten utilizar herramientas computacionales y/o calculadoras graficadoras que brindan en forma inmediata resultados de los parámetros dinámicos del sistema, así como el comportamiento de estos a través del tiempo. Esto permite tomar decisiones fundamentales en el proceso de mitigar los efectos nocivos del movimiento vibratorio, como la fatiga de los materiales involucrados, la reducción de ruido y sobretodo, prevenir eventos catastróficos como la resonancia del sistema.

El uso de la calculadora graficadora TI Nspire CX Cas, proporciona al alumno un panorama más amplio en la forma que puede visualizar aspectos técnicos y especializados como los presentados en el problema anterior y que son:

- Un sistema con nulo amortiguamiento no necesariamente puede generar oscilaciones dañinas, ya que a través de conocer la relación entre las frecuencias de la fuerza excitadora con respecto a la frecuencia del sistema y visualizar el comportamiento del factor de amplificación podemos revisar de forma inmediata si el incremento de la amplitud de oscilación es riesgosa o no, de acuerdo a la gráfica mostrada en donde se vinculan ambas variables. Si esta relación llegara a ser cercana a la unidad, tendríamos problemas de resonancia y por lo tanto incrementar la rigidez del sistema o incorporar un elemento amortiguador, será la tarea fundamental para controlar las vibraciones.
- La presencia de una fuerza excitadora hará que el sistema pueda oscilar forzosamente debido al desplazamiento que sufrirá la masa a través del tiempo. Este deberá alcanzar un valor máximo, el cual es necesario predecir para establecer posible daños que podrían ocurrir en la estructura.
- El amortiguamiento en los sistemas vibratorios reducen radicalmente la amplitud de oscilación del sistema, por lo que deben de incorporarse elementos de este tipo para disipar la energía presente en el movimiento de la masa.
- La relación de frecuencias contribuye adicionalmente a la reducción de la amplitud de oscilación ya que a mayores relaciones, se ha visto que el factor de amplificación disminuye gradualmente. Esto debido a que la fuerza excitadora actúa tan rápidamente que no alcanza a contribuir al movimiento de la propia masa del sistema.

Los resultados que se obtuvieron del estudio realizado, demuestran que el uso correcto de la tecnología, además de evitar procesos extensos de cálculo, facilitan la interacción de varias variables, logrando con ello concentrarse en la solución y utilizarla para establecer propuestas de solución las cuales son fácilmente comprobables al crear algoritmos que comprueben su efectividad.

La diferencia de puntaje entre las dos propuestas fue de 17 puntos, lo cual es bastante significativa y pone de manifiesto que el trabajo con tecnología reduce considerablemente los errores producto del propio proceso de solución. Además, se demostró que el alumno tuvo un mejor entendimiento en la interacción de las variables dinámicas que afectan el desplazamiento de la masa, lo cual contribuye al proceso de enseñanza-aprendizaje en el movimiento de un sistema vibratorio.

Referencias bibliográficas

- Balachandran y Magram (2006), *Vibraciones*, Ed. Thomson, Segunda Edición.
- Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), pp. 171-194. Recuperado el 30 de mayo de 2013 de <http://www.clame.org.mx/relime.htm>
- Hernández, J.L., (2005). “*Solución de Ecuaciones diferenciales Simbólicas y numéricas*”, Instituto Tecnológico de Aptizaco. Recuperado el 03 de marzo de 2013 de <http://es.expdf.com/dennis-g-zill-matematicas-2-pdf.html#a2>
- Hernández, A., (1997). “*Nuevas tendencias en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias*”, Memorias del Séptimo Seminario Nacional sobre calculadora y computadora en el aula; Cd Madero Tamaulipas.
- Pomerantz, H. (1997). The Role of Calculators in Mathematics Education. *Document prepared for the Urban Systematic Initiative/Comprehensive Partnership for Mathematics and Science Achievement*, Dallas Texas. Recuperado el 15 de enero, 2013 de <http://education.ti.com/sites/US/downloads/pdf/therole.pdf>
- Rodríguez, R. (2012). *Modelación y Uso de Tecnología TI Nspire CAS CX en la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales*; ITESM Campus Monterrey, Publicaciones Texas Instruments. Recuperado el 15 de enero, 2013 de http://education.ti.com/sites/LATINOAMERICA/downloads/pdf/Modelacion_y_TI-Nspire_CX_CAS.pdf
- Singiresu, S. R. (2012), *Vibraciones Mecánicas* (5^a ed.). México: Pearson.