REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

TRAZO DE TANGENTES MEDIANTE GEOGEBRA: UN EJEMPLO CON EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Cesar Martínez Hernández[1], Ricardo Ulloa Azpeitia[2]

[1]Universidad de Colima (México), [2]Universidad de Guadalajara (México)

cesar.martinez@cucei.udg.mx, *ricardo.ulloa@cucei.udg.mx*

Para citar este artículo:

Martínez, C., Ulloa, A. (2017). Trazo de tangentes mediante geogebra: un ejemplo con el teorema del valor medio. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

TRAZO DE TANGENTES MEDIANTE GEOGEBRA: UN EJEMPLO CON EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Cesar Martínez Hernández[1], Ricardo Ulloa Azpeitia[2]

[1]Universidad de Colima (México), [2]Universidad de Guadalajara (México)

cesar.martinez@cucei.udg.mx , ricardo.ulloa@cucei.udg.mx

Resumen

El presente documento da cuenta de una investigación sobre la influencia del uso de Geometría Dinámica para el aprendizaje de conceptos del Cálculo Diferencial. En particular, se reportan primeros resultados acerca del trazo de tangentes a la curva de una función cuadrática en el ambiente Geogebra a partir de las condiciones establecidas en el Teorema del Valor Medio de Lagrange. Dichos resultados muestran las dificultades de estudiantes de la Maestría en enseñanza de las Matemáticas para utilizar Técnicas propias de la Geometría dinámica que permiten dar solución al problema planteado en el contexto de este tipo de ambiente tecnológico.

Palabras clave: Teorema del valor medio, Geogebra, Técnica, Teoría

Introducción

Existen publicaciones en las que se describen investigaciones realizadas con el uso de tecnología para el Cálculo. En Ferrara, Pratt y Robutti (2006) se incluye una compilación de estudios sobre los conceptos de límite, derivada e integral. El tema particular sobre el que enfoca el trabajo que se reporta incide sobre el aprendizaje del Teorema del Valor Medio de Lagrange (TVM). Se considera, con base en la literatura revisada, que utilizar un ambiente de geometría dinámica, en este caso, Geogebra, facilita a los estudiantes su comprensión sobre conceptos del cálculo diferencial, dado el potencial para construir modelos dinámicos (Reyes & Santos, 2009).

En Guven (2008) y Reyes & Santos (2009) se describen las posibilidades de emplear geometría dinámica para examinar relaciones matemáticas. En estos estudios se muestra cómo el lugar geométrico; que surge en las exploraciones potencializa el desarrollo de conjeturas sobre las relaciones matemáticas de los objetos involucrados en el modelo dinámico. Es decir, desde el punto de vista del marco teórico considerado, con el uso de Geogebra se propicia el desarrollo de nuevas Técnicas; las cuales, pueden posibilitar resolver la Tarea planteada y promover la construcción de Teoría en torno al TVM.

Objetivo

Identificar las dificultades que enfrentan los alumnos al utilizar Geogebra para desarrollar nuevas *Técnicas instrumentadas* como el uso del “lugar geométrico” para resolver la *Tarea* planteada.

Marco Teórico

El marco teórico en el que se apoya la investigación es la *aproximación instrumental* del uso de herramientas tecnológicas. De acuerdo con Artigue (2002) esta perspectiva teórica tiene dos influencias: una es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), la otra es la ergonomía cognitiva (Vérillon & Rabardel, 1995). La investigación aquí reportada se basa, principalmente en el enfoque antropológico conocido como *Tarea-Técnica-Teoría* (Artigue, 2002; Lagrange, 2003). Sin embargo, también se considera el enfoque ergonómico, respecto al concepto de *instrumento*; sin ahondar en el proceso de la *génesis instrumental*.

En el primer enfoque, el énfasis es en el desarrollo de *Técnicas* y de *Teoría* por los estudiantes (en torno a cierta *Tarea* planteada) cuando usan tecnología para resolverla. El término *Tarea* se refiera al problema o la situación problemática (expresada mediante un verbo) plasmada en una Actividad; en la cual está involucrado el objeto u objetos matemáticos que interesan estudiar. La *Técnica* es un método o una manera de resolver la *Tarea*; es una combinación compleja de razonamiento y trabajo rutinario que tiene tanto valor pragmático, como epistémico (Artigue, 2002, p. 48). Esta función epistémica de la *Técnica* ha sido el foco de atención en varias investigaciones (e.g., Kieran & Drijvers, 2006) respecto del incremento de la *Teoría* que los estudiantes desarrollan cuando hacen uso de artefactos tecnológicos.

En el segundo enfoque, el ergonómico, se hace una distinción entre dos términos, *artefacto* e *instrumento*. El *artefacto* es una herramienta (física o simbólica), en nuestro caso Geogebra, que no tiene sentido para resolver la tarea; en cambio, el *instrumento* es una construcción psicológica que involucra al artefacto (su uso) y el desarrollo de esquemas debido a dicho uso. El proceso mediante el cual un artefacto se convierte en un instrumento (por el usuario) se llama génesis instrumental; el cual, involucra dos procesos dialécticos llamados instrumentación e instrumentalización. De esta manera, el énfasis de este segundo enfoque es el estudio de la génesis instrumental; en particular, los esquemas desarrollados por el usuario del artefacto (i.e., el uso como instrumento).

Debido a la naturaleza de los esquemas, esta investigación se centra en estudiar las Técnicas y la Teoría que emergen en la resolución de la Tarea propuesta a los estudiantes, mediante el uso de Geogebra. Además, se utiliza el término *Técnica instrumentada* (Kieran & Drijvers, 2006) que combina los dos enfoques; en el cuál la idea es estudiar las Técnicas y la Teoría asociada a éstas bajo la idea del uso del artefacto como un instrumento. Es decir, más que estudiar los esquemas desarrollados por el usuario del artefacto tecnológico, interesa estudiar las Técnicas como la parte "visible" de dichos esquemas.

Esta aproximación teórica ha sido explotada con éxito en investigaciones relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza, principalmente del álgebra en ambientes de cálculo simbólico. Sin embargo, también se ha mostrado ser pertinente para el estudio en ambientes de geometría dinámica (Leung, Chan, & Lopez-Real, 2006).

Metodología

Una vez revisada la literatura que da sustento a la problemática de la investigación, fue diseñada una secuencia de Actividades; en la cual la Tarea consiste en Trazar y determinar la ecuación de la recta tangente a la curva de una función cuadrática a partir de las condiciones establecidas en el Teorema del Valor Medio de Lagrange. La Actividad consiste en dos fases. La primera, involucra sólo trabajo con papel-y-lápiz; en donde los estudiantes recurren a sus conocimientos (Técnicas y Teoría) algebraicos, de geometría analítica y de cálculo diferencial, principalmente para resolver la Tarea propuesta.

La segunda fase es similar a la primera salvo que permite trabajar con Geogebra; con la restricción de no utilizar Técnicas del cálculo diferencial ni los comandos relativos a este con que cuenta Geogebra. Así, los instrumentos para el acopio de datos consisten en las hojas de trabajo (Actividades diseñadas). También se recurrió a la videograbación de las sesiones de la toma de datos y al software SCREEN2EXE que captura la pantalla de la computadora; para con ello, visualizar la secuencia del trabajo de los estudiantes con Geogebra. Estos instrumentos de acopio de datos permitieron llevar a cabo la triangulación en el análisis de los mismos.

La población participante en la investigación fueron 16 estudiantes de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas; que en ese momento cursaban el cuarto semestre de su posgrado. Todos los participantes conocían Geogebra y tenían, al menos, año y medio de experiencia en el uso de este software. Por ello, no fue necesario un entrenamiento previo sobre cómo usar este tipo de tecnología para que se pudieran implementar las Actividades diseñadas. De los participantes, excepto uno, los demás contaban, al momento de la toma de datos, con experiencia docente, algunos en el nivel universitario, otros a nivel medio superior y algunos en el nivel de secundaria. La preparación profesional de la población es de licenciados en matemáticas, ingenieros en diversas áreas y un economista.

Las sesiones de implementación de las actividades fueron incluidas como parte de uno de los cursos de la maestría que llevaban los estudiantes y que estaba a cargo de uno de los investigadores. Es decir, el investigador fungía en ese momento como profesor de los estudiantes participantes. El desarrollo de las Actividades se llevó a cabo durante tres sesiones con una duración de aproximadamente 2 horas cada una. Los estudiantes trabajaron en equipos de dos integrantes, formados por ellos mismos con la finalidad de promover el diálogo entre ellos y de esta manera registrar en audio las reflexiones provocadas por el uso de Geogebra respecto a la Tarea planteada.

El análisis de los datos se llevó a cabo con un enfoque cualitativo; en éste, como lo indican Miles y Huberman (1994), una actividad central es explicar las formas como las personas en acomodos o situaciones particulares comprenden, dan razones de, actúan y manejan situaciones. En este sentido, el análisis se enfocó en cómo los estudiantes resuelven la Tarea planteada, primero con sus Técnicas y Teoría de papel-y-lápiz; es decir, mediante sus conocimientos previos de álgebra, geometría y cálculo diferencial. Segundo mediante el uso de Geogebra; donde pueden utilizar sólo Técnicas algebraicas y de geometría, así como los comandos para trazos y propios de la Geometría dinámica (e.g., deslizadores, lugar geométrico, etc.) para así investigar el potencial de este software con base en el modelo dinámico (en el sentido de Reyes & Santos, 2009) de la situación problemática propuesta que es posible construir con Geogebra.

Análisis de datos y discusión de resultados

A continuación es presentado parte del análisis llevado a cabo hasta este momento; el cuál se ejemplifica con el trabajo de tres Equipos. Consideramos que el trabajo de estos estudiantes da muestra del tipo de actividad matemática llevado a cabo por los participantes, tanto en papel-y-lápiz como con Geogebra y permite observar las dificultades que enfrentaron al momento de trabajar en el ambiente de Geometría dinámica. El análisis en este reporte se enfoca sólo en las Técnicas utilizadas por los estudiantes y no en la

Teoría que las sustenta. Sin embargo, de acuerdo con la aproximación instrumental, la Técnica no está disociada de la Teoría y viceversa.

Sobre las Técnicas de papel y lápiz

De acuerdo con los datos recabados, los ocho Equipos recurrieron a sus conocimientos tanto de geometría analítica como de cálculo diferencial para encontrar las ecuaciones las rectas secante y tangente a la curva de la función dada. Las Figuras 1 y 2 muestran el trabajo de uno de los Equipos (Equipo I en adelante).

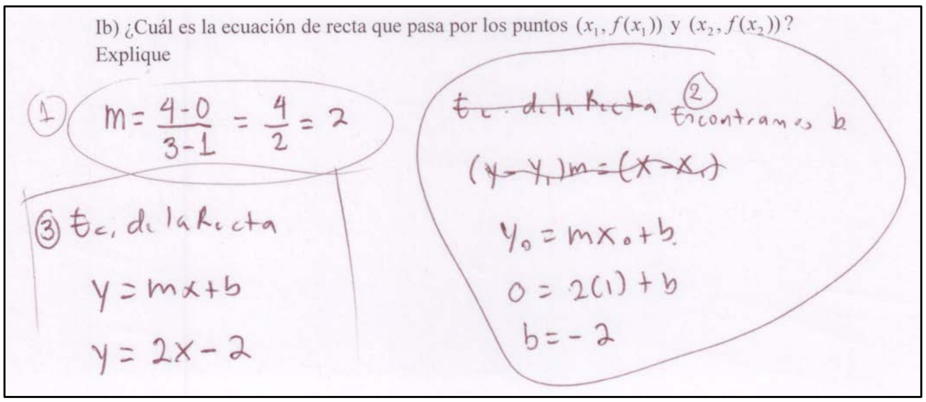


Figura 1. Técnica de papel-y-lápiz del Equipo I para determinar la ecuación de la recta secante.

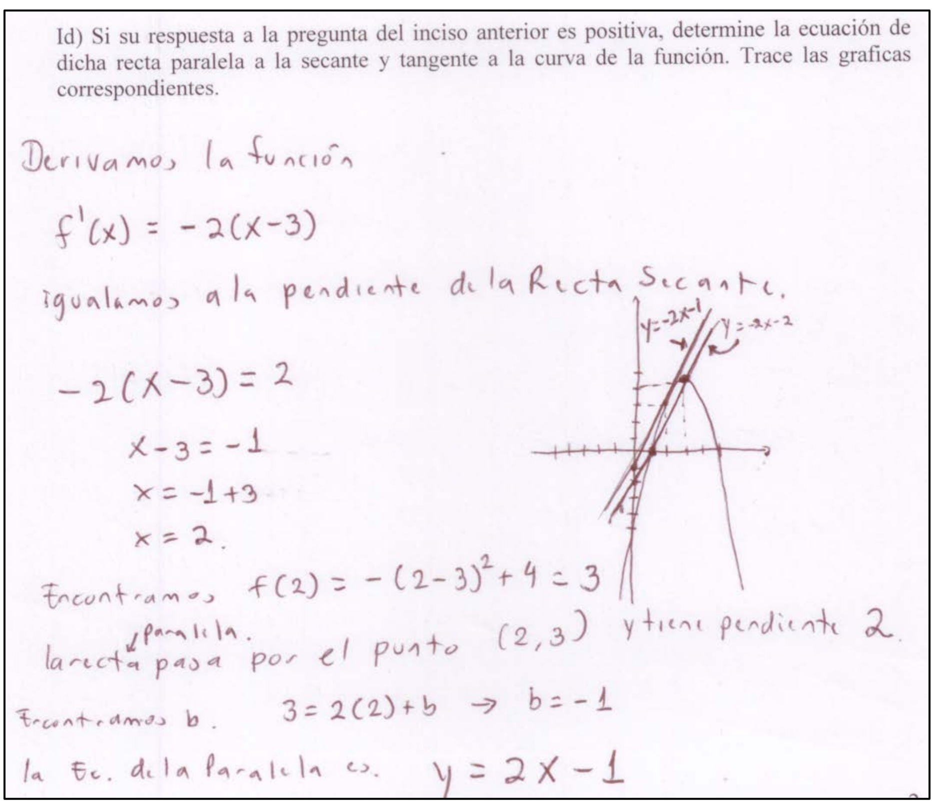


Figura 2. Técnica de papel-y-lápiz del Equipo I para trazar la recta tangente a la función.

Como se observa en las Figuras 1 y 2, el Equipo I traza la secante a la curva de la función planteada en la Actividad mediante el cálculo de los parámetros *m* (pendiente) y *b* (ordenada al origen); es decir, recurren a la ecuación explícita de la recta. Otros Equipos sustituyen en la ecuación de la recta dados dos puntos por donde ésta pasa. Todos los Equipos plantearon correctamente la ecuación de la recta secante a la función propuesta, lo cual era previsible dadas las características de la población

Para trazar la recta tangente a la función dada y paralela a la recta secante propuesta por cada Equipo, prevaleció la Técnica de derivación (Figura 2), lo que se esperaba sucediera dados los conocimientos previos de cálculo diferencial de la población participante. Es decir, la Técnica consistió en el procedimiento de derivar la función (con lo que obtienen la expresión general de la pendiente de las rectas tangentes) y calcular las coordenadas del punto de tangencia tales que satisfagan la condición de paralelismo con la recta secante.

La Técnica de derivación (Figura 2) fue la más utilizada por los otros Equipos. Quienes no procedieron de esta manera debido a la configuración de su construcción (la elección de los puntos de intersección entre la función dada y la recta secante), es decir, debido a las coordenadas de los puntos elegidos para trazar dicha recta secante. En este sentido, la configuración inicial de su construcción (la forma de visualizar el trazo de la recta secante) influyó en la Técnica para determinar la tangente a la curva y a la vez paralela a la secante. La Figura 3 muestra el registro escrito de este tipo de trabajo.

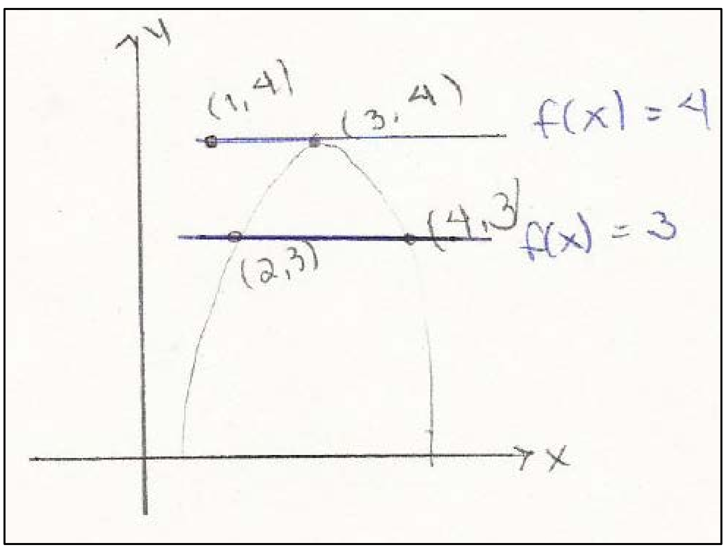
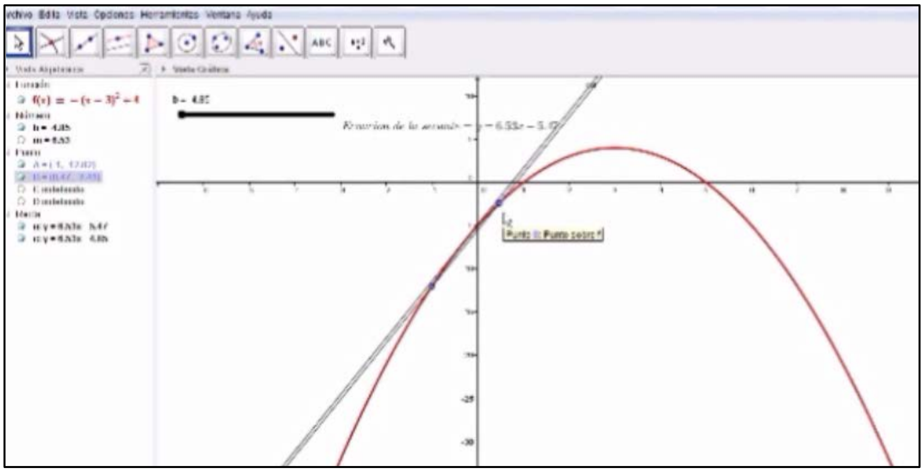


Figura 3. Trazo de las rectas secante (paralela al eje x) y tangente (y paralela a la secante) a la curva de la función dada del Equipo II.

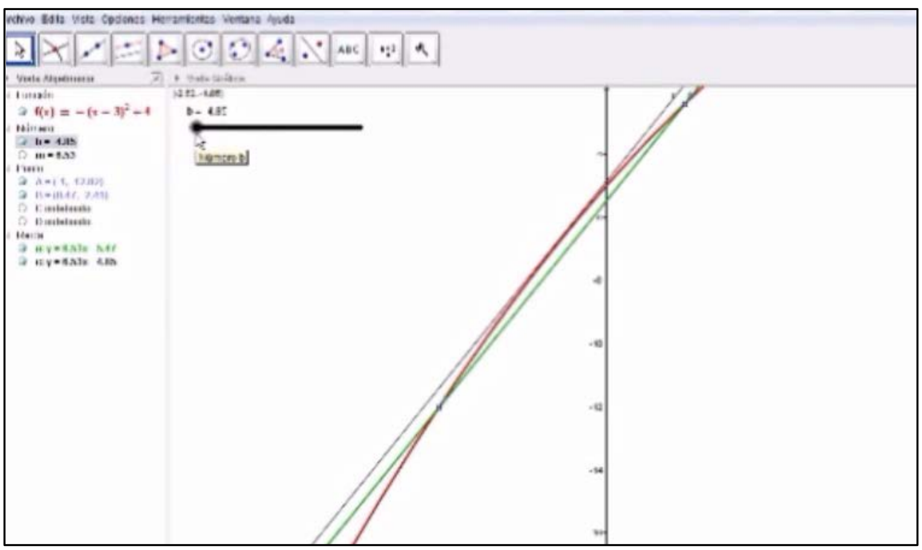
Sobre las Técnicas con Geogebra

Una vez que los estudiantes usan el software Geogebra para intentar resolver la Tarea (trazar y determinar la ecuación de la recta tangente a la curva de la función cuadrática y paralela a una secante de la misma) se identifican dos Técnicas: ensayo y error por arrastre, y una “extrapolación” de cálculos algebraicos al ambiente Geogebra. En cuanto al arrastre, se identifican dos tipos: arrastre directo de los objetos involucrados en la construcción geométrica y el uso de deslizadores. Discutiremos este último caso.

La Figura 4 es parte de la construcción llevada a cabo por dos de los participantes (Equipo III en adelante), en donde se observa que utilizan el arrastre auxiliados mediante un deslizador para trazar la recta solicitada. Sin embargo, esta construcción es por ensayo y error, ya que en realidad no permite un trazo exacto.



A)



B)

Figura 4. Construcción del Equipo III para el trazo de la recta tangente a la curva de la función dada mediante la Técnica del deslizador.

Los intentos previos del Equipo III, consisten en utilizar, directamente, los comandos de Geogebra para el trazo de rectas. Sin embargo, se dan cuenta que éstos no son suficientes para completar la Tarea pedida y a partir de ello optan por utilizar un deslizador. El siguiente extracto de la conversación entre los integrantes de este Equipo da cuenta de las reflexiones que emergen en ellos.

Estudiante A: Yo creo que es mejor colocar un deslizador […] Ya *m* [Se refiere a la pendiente de la recta tangente] ya la definimos como el valor de la pendiente de la recta secante.

Estudiante B: Y *b* [se refiere a la ordenada al origen de la recta tangente] ya también está definida.

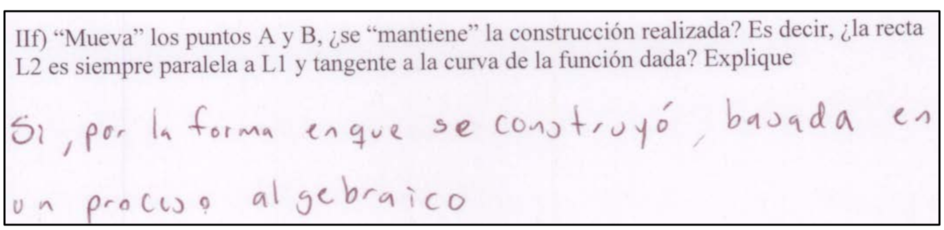
Estudiante A: Y b está definida por el deslizador. Entonces, ahora sí […] Voy a marcar la intersección de la recta paralela [a la secante] a la recta que pasa por A y B [se refiere a las intersecciones de la secante con la curva de la función], marco la intersección y lo que voy a hacer es variar el valor de b [se refiere al deslizador] para modificar el cruce con el eje de las y's.

Investigador: La ordenada al origen.

Estudiante A: Exactamente. Cuando se vuelva un solo punto [Refiriéndose a las intersecciones] [..] Entonces ya lo único que hay que preocuparnos es por modificar *b* [el valor del deslizador asociado a la ordenada al origen] de tal manera que cuando se acerquen sólo marquen un solo punto [Se refiere a que la intersección sea en sólo un punto].

La construcción propuesta por el Equipo III es una aproximación a la solución de la Tarea ya que no es posible determinar si en efecto la recta paralela es tangente a la curva, por ejemplo, si se utiliza el comando "zoom" se observa que la tangencia no se cumple. De esta manera, sólo se cumple con la condición de paralelismo. Así, sólo se trata de una aproximación; en todo caso, dentro del ambiente Geogebra puede considerarse, la solución, como un caso particular, desde el punto de vista del modelo dinámico construido.

El otro tipo de solución propuesta consistió en hacer los cálculos algebraicos que demanda la situación planteada e "introducirlos" en el ambiente Geogebra. Es decir, en estos casos, no se utilizó Geogebra para dar solución a la Tarea, sino las Técnicas de papel-y-lápiz. La siguiente Figura muestra el registro escrito del Equipo I en donde se observa lo comentado.


IIf) "Mueva" los puntos A y B, ¿se "mantiene" la construcción realizada? Es decir, ¿la recta L2 es siempre paralela a L1 y tangente a la curva de la función dada? Explique

Si, por la forma enque se construyó, basada en un proceso algebraico

Figura 5. Explicación de la solución planteada por el Equipo I mediante Geogebra

Conclusiones

Con base en las respuestas dadas por los participantes, las Técnicas de papel-y-lápiz (sus conocimientos algebraicos, de geometría y de cálculo) les permitieron dar solución a la Tarea en un medio estático; no así en el dinámico. Es decir, si bien uno de los Equipos logró trazar en el ambiente Geogebra la recta tangente solicitada, su respuesta estuvo apoyada en sus cálculos algebraicos (Figura 5), en este sentido, su respuesta no está basada en las Técnicas que provee la Geometría dinámica. Por su parte, los Equipos que hicieron uso de las características de Geogebra, utilizaron sólo el arrastre sin explorar las posibles relaciones matemáticas de la configuración del modelo dinámico.

De acuerdo con lo anterior, se observan, de análisis de los datos, dos dificultades principales. Por un lado, la dificultad ya reconocida en la literatura (e.g., Trouche & Guin, 1999) sobre la complejidad del proceso de la génesis instrumental. Es decir, de la dificultad intrínseca de que un artefacto se convierta en un instrumento (para el usuario). En este sentido se observa una tendencia, en la población objeto de estudio, a sólo usar la técnica de arrastre, la cual es necesaria pero no suficiente para dar respuesta al problema planteado en la actividad diseñada.

Por otro lado, la configuración inicial (en papel-y-lápiz) y sus conocimientos algebraicos y geométricos también influyeron en la forma en que utilizaron Geogebra, en el sentido de que sólo "trasladaron" sus resultados de papel-y-lápiz a la construcción planteada con Geogebra. La influencia fue a tal grado que en realidad sólo utilizaron el software como un graficador de sus resultados de papel-y-lápiz. Es decir, sus Técnicas institucionalizadas de papel-y-lápiz fue otra de las dificultades que los alumnos enfrentaron al utilizar Geogebra.

Agradecimientos

La investigación reportada fue auspiciada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología como parte de la Estancia Posdoctoral vinculada al fortalecimiento del Posgrado Nacional (Convenio N° 290807_UDG/2013-3). Agradecemos también las facilidades otorgadas por las autoridades del Posgrado Receptor de la Universidad de Guadalajara para llevar a cabo la investigación.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245-274.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*, 221-266.

Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of researchon the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 237-274). The Netherlands: Sense Publishers.

Guven, B. (2008). Using dynamic geometry software to gain insight into a proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13(3)*, 251–262

Kieran, C. & Drijvers P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*, 205-263.

Lagrange, J-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J.T. Fey (Ed.), *Computer algebra systems in secondary school mathematics education* (pp. 269–283). Reston, VA: NCTM.

Leung, A., Chan, Y. & Lopez-Real, F. (2006). Instrumental genesis in dynamic geometry environments. En C. Hoyles, J-B. Lagrange, L.H. Son & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction*, pp. 346-353. Hanoi, Vietnam: ICMI.

Reyes, A. & Santos, L. M. (2009). Teachers' construction of dynamic mathematical models based on the use of computational tools. En S. L. Swars, D. W. Stinson & L-S. Shonda (Eds.), *Proceedings of 31st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 5, pp. 218-225. Atlanta, GA: PME-NA.

Trouche, L. & Guin, D. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*, 195-227.

Vérillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*, 77-103.