REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

https://revista.amiutem.edu.mx

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V Número 1 Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO

Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Diana del Carmen Torres Corrales, Evaristo Trujillo Luque, Felipe de Jesús Castro Lugo, Julia Xóchilt Peralta García, Julio César Ansaldo Leyva.

Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON), México

jesuseduardo12@hotmail.com, *d.torres@live.com.mx*, *evaristo.trujillo@itson.edu.mx*, *felipe.castro@itson.edu.mx*, *julia.peralta@itson.edu.mx*, *julio.ansaldo@itson.edu.mx*

Para citar este artículo:

Hinojos, J. E., Torres, D. C., Trujillo, E., Castro, F. J., Peralta, J. X., Ansaldo, J. C. (2017). Resolución de problemas de optimización en un entorno tecnológico. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: revista@amiutem.edu.mx. Dirección electrónica: https:/revista.amiutem.edu.mx/. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO

Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Diana del Carmen Torres Corrales, Evaristo Trujillo Luque, Felipe de Jesús Castro Lugo, Julia Xóchilt Peralta García, Julio César Ansaldo Leyva.

Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON), México

jesuseduardo12@hotmail.com, *d.torres@live.com.mx*, *evaristo.trujillo@itson.edu.mx*, *felipe.castro@itson.edu.mx*, *julia.peralta@itson.edu.mx*, *julio.ansaldo@itson.edu.mx*

Resumen

La diversidad de contextos en los que se lleva a cabo la instrucción y la variada formación de los profesores de matemáticas en el Instituto Tecnológico de Sonora, ha propiciado la creación de un taller con el fin de estandarizar las competencias matemáticas de los docentes que participan con el Departamento de Matemáticas. Con base en el principio de la resignificación progresiva de la Teoría Socioepistemológica, se pretende por medio del taller, desarrollar en los profesores el pensamiento geométrico y variacional a través de la resolución de problemas de optimización, utilizando tecnología, para contextualizar las prácticas matemáticas y configurar los significados que se construyen alrededor del concepto de derivada, considerando que este tipo de actividades permite apreciar a las matemáticas en su carácter instrumental al resolver problemas en situaciones reales.

Palabras clave: Pensamiento geométrico y variacional, optimización, GeoGebra

Introducción

En México existe amplia diversidad en contextos, realidades y sobre todo, en la formación académica de los docentes que imparten clases de Matemáticas en todos los niveles educativos, sin embargo, es en Medio Superior y Superior, en los que la formación del docente varía de forma más marcada, entre matemáticos, ingenieros, químicos, arquitectos, educadores, administradores, entre otros; esta misma situación se presenta en los estudiantes de Maestría en Matemática Educativa (algunos de ellos profesores en servicio), lo que propicia que su formación resulte más compleja (Montiel, 2014).

Esta situación ocurre en las distintas culturas y las condiciones en las que se instruye a los profesores cambian de país a país, por lo tanto, los investigadores en Educación Matemática y los formadores de profesores de Matemáticas se enfrentan a problemas diferentes (Gómez, 2005).

En el Instituto Tecnológico de Sonora, las cosas no son muy distintas a las mencionadas anteriormente, esto ha motivado la creación de talleres con el fin de estandarizar las competencias matemáticas de los profesores; en particular, la competencia que se busca desarrollar mediante este taller es el pensamiento geométrico y variacional a través de la resolución de problemas de optimización en un entorno tecnológico basado en GeoGebra.

La elección de este software para generar un entorno tecnológico es debido a que permite interactuar con los diversos registros de representación de un mismo objeto matemático de manera dinámica y todos los cambios generados en el mismo son observables en tiempo real, además de tratarse de una herramienta gratuita y disponible en múltiples plataformas.

El uso de los diversos registros de representación de los objetos matemáticos da la pauta para acudir a problemas en los que se privilegie el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional, como la forma idónea de arribar a los conceptos del Cálculo de una forma efectiva, significativa y con sentido, puesto que el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional, a diferencia del algebraico, requiere de la formación de conceptos apropiados, del desarrollo de habilidades, la formación de actitudes y hasta una ruptura con la forma de pensamiento algebraico para dar una resolución exitosa a los problemas (Nieto, Chavira y Viramontes, 2011).

Lo anterior es acorde a lo que menciona Cantoral (2013), la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento, pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos, así como una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos.

El taller está proyectado en dos etapas, la primera incluye a profesores que imparten clases de Cálculo en los niveles Medio Superior y Superior y la segunda a estudiantes de licenciatura

Objetivo

Crear un taller para resolución de problemas de optimización en un entorno tecnológico basado en GeoGebra para desarrollar el pensamiento geométrico y variacional, a fin de estandarizar las competencias matemáticas de los docentes a nivel Medio Superior y Superior.

Marco Teórico

El marco teórico en que se sustenta la creación del taller es la Teoría Socioepistemológica, en particular, el principio de la resignificación progresiva o apropiación a través de la actividad (Cantoral, 2011).

Esto se explica porque la vida del individuo está en constante cambio e interacción con diversos contextos, lo cual permite que se resignifiquen los saberes hasta el momento construidos, enriqueciéndolos con nuevos significados (resignificación progresiva) (Reyes, 2011). En ese sentido se asume a la cognición como la capacidad de hacer emerger el significado a partir de realimentaciones sucesivas entre lo humano y su medio ambiente próximo a partir de una interacción dialéctica entre protagonistas (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006). Sin embargo, para establecer una distinción entre los significados asociados a los conceptos matemáticos, con los significados asociados a la actividad humana, se habla de significación para referirse al proceso de construir los últimos (Montiel y Buendía, 2013).

Se considera que un escenario pertinente para resignificar el pensamiento geométrico y variacional de los profesores es un entorno tecnológico, como el programa GeoGebra. Su elección se debe a que es gratuito y libre, además de brindar las bondades que da la tecnología: cambios en tiempo real, reproducibilidad casi instantánea, precisión en las construcciones, dinamismo, entre otros.

Lo anterior, se sustenta en lo que menciona Rojano:

> Los ambientes tecnológicos se conceptualizan como agentes de cambio con capacidad de revolucionar las prácticas en el aula, reformular los contenidos a

> enseñar, la forma de enseñarlos y los roles tanto del docente y el alumno, sin embargo, para lograr convertir los recursos tecnológicos en agentes de cambio, es necesario que tanto docentes y alumnos primeramente estén familiarizados con el uso apropiado de los recursos tecnológicos y por lo tanto es primordial la capacitación en este tipo de escenarios (Rojano, 2003).

Dado lo anterior, se considera que la resolución de problemas de optimización dentro de un entorno tecnológico permite contextualizar las prácticas matemáticas y configurar los significados que se construyen alrededor del concepto de la derivada.

Metodología

El taller se detalla en su versión para estudiantes, el desarrollo del mismo se divide en 2 sesiones de 4 horas cada una.

La primera sesión comienza con el planteamiento de un problema de tiro parabólico, sin proporcionar una función que modele la situación, para resolverlo se organiza a los participantes en equipos y, se les proporcionan rotafolios y marcadores para que elaboren una presentación en la quese muestre el procedimiento utilizado para resolver el problema.

Terminada la actividad anterior, se invita a los equipos a presentar su procedimiento,; debido a las diferentes formas de resolver un problema de aplicación para el que no se proporciona una función, se espera observar procedimientos distintos entre los diferentes equipos.

Posterior a la presentación de los procedimientos de los equipos, se plantea un segundo problema, pero en esta ocasión se proporciona una función que modela al problema, nuevamente se organiza a los participantes en equipos y, se les proporcionan rotafolios y marcadores para que elaboren otra presentación en la que se muestre el procedimiento utilizado para el nuevo problema, para posteriormente invitarlos a mostrarlo, en esta ocasión se espera observar procedimientos parecidos entre los equipos.

Una vez terminada la presentación por parte de los equipos se les enfrenta a un tercer problema, para el que obtener una función a partir de la información proporcionada y derivarla, resulta complicado, por lo que se propone modelar el fenómeno utilizando GeoGebra a fin de resolverlo de manera aproximada, analizando y reflexionando, acerca de la pertinencia del uso del software en la solución de los problemas y las ventajas de observar de forma dinámica los cambios generados en la construcción.

La segunda sesión consiste en profundizar en el uso de GeoGebra como herramienta para acceder a los objetos matemáticos que intervienen en la resolución de problemas de optimización,. Con dicha finalidad se construye un applet de GeoGebra que recibe una función como entrada y por medio de la recta tangente a un punto sobre la función se observa la dimensión geométrica que nos permite obtener la primera y segunda derivada de la misma a partir del comportamiento de la pendiente de la recta tangente.

Además de lo anterior, el applet permite observar y analizar que la primer derivada de la función nos indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento (si es positiva o negativa), y qué valor de la derivada coincide con los máximos y mínimos de la función, así cómo el comportamiento de la segunda derivada de la función indica la concavidad y los puntos de inflexión; en la figura 1 se muestra la pantalla de GeoGebra con el applet terminado.

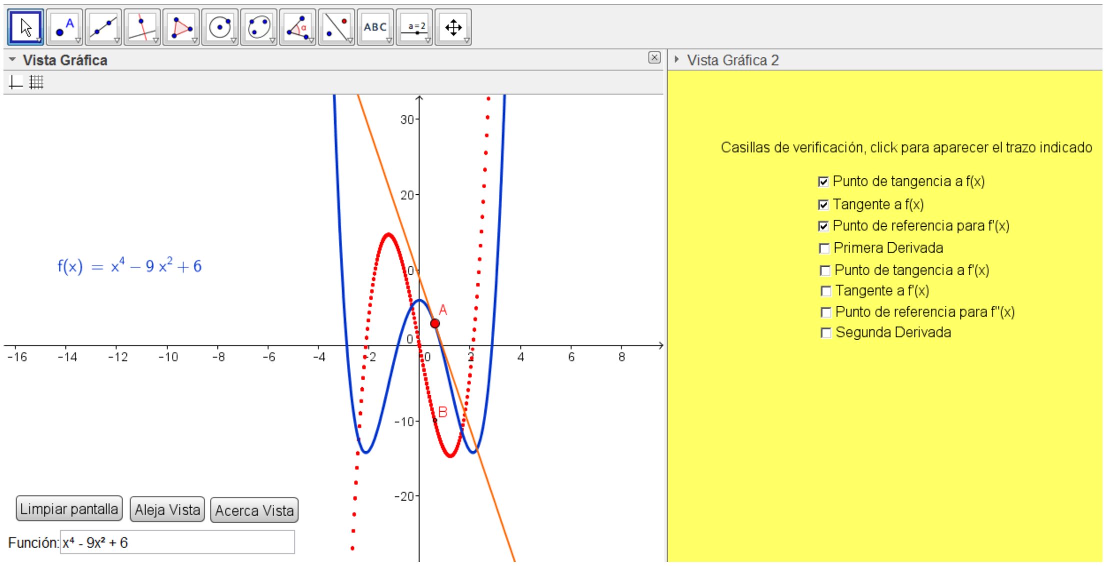


Figura 1. Applet de GeoGebra para los problemas de optimización.

Exposición de la propuesta y resultados

El taller se llevó a cabo con la asistencia de 30 estudiantes de Ingeniería en Gestión Empresarial en el Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán.

Durante la primer sesión se mostraron desconcertados, pues según sus impresiones, el primer problema presentado en el taller corresponde a la materia de física y no a una clase de matemáticas y puesto que no disponían de una fórmula específica para plantear y resolver el problema, no lograron llegar a una solución para el mismo, pero se observó que todos los equipos utilizaron procedimientos diferentes, en la figura 2 se muestra en enunciado del primer problema.

> Un proyectil es lanzado desde el nivel del suelo hacia arriba de manera vertical, la rapidez inicial es de 50 m/s; se considera la gravedad a nivel del mar (9.8 m/s^2) y se desprecia la resistencia del aire.
>
> - ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará el objeto?
> - ¿En qué momento la rapidez del objeto será de 10 m/s?

Figura 2. Problema 1 presentado en el taller.

El segundo problema se ilustra en la figura 3, en esta ocasión se les proporciona la fórmula que modela al problema, los estudiantes no tuvieron dificultad para analizar la situación y lograron resolver el problema mediante el algoritmo de calcular la derivada e igualarla a cero.

La posición en el aire de un delfín que salta fuera del agua está determinada por la siguiente función

$$f(x) = -x^2 + x + 2$$

Determine la altura máxima que alcanzará el delfín en el salto.

Figura 3. Problema 2 presentado en el taller.

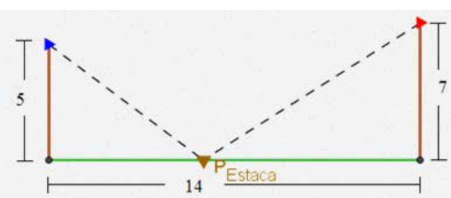
Al terminar los dos problemas anteriores se hizo una pausa para reflexionar acerca de los procedimientos realizados por los estudiantes al intentar resolver los problemas y cómo la centración en los procedimientos algebraicos ha disminuido la conceptualización y el aspecto geométrico que le proporciona la riqueza a los problemas de optimización; concluida la reflexión se presentó el tercer problema que se muestra en la figura 4.

Se tienen dos postes de alturas y= $\mathbf{5}$ ***metros*** y x= $\mathbf{7}$ ***metros***, separados una distancia d= $\mathbf{14}$ ***metros*** entre sí, ambos atados por medio de dos tramos de cable a una estaca en común situada en algún punto de la separación entre ellos; como se muestra en la siguiente figura.

¿En que posición deberá colocarse la estaca con el fin de minimizar la cantidad de cable utilizada (2 decimales de precisión)?

Figura 4. Problema 3 presentado en el taller.

Al intentar responder al problema presentado, los estudiantes primeramente se enfrentaron a encontrar la función que modela al problema, la cual después debía derivarse e igualarse a cero, para posteriormente encontrar el valor de x que proporciona el valor mínimo solicitado,; ningún estudiante fue capaz de resolver el problema completamente, debido principalmente a deficiencias en el tratamiento algebraico, no se presentó la respuesta al problema puesto que sería retomado en la segunda sesión del taller. La función y su derivada se presentan en la figura 5.



$$L(x) = \sqrt{x^2+25} + \sqrt{(14-x)^2+49} \longleftarrow$$ Función que modela el problema

$$L'(x) = \frac{-14\sqrt{x^2+25} + x\sqrt{x^2+25} + x\sqrt{(14-x)^2+49}}{\left(\sqrt{x^2+25}\right)\left(\sqrt{(14-x)^2+49}\right)} \longleftarrow$$ Su derivada

Figura 5. Función y derivada del tercer problema.

Durante la segunda sesión, se retomó el tercer problema, pero en esta ocasión poniendo haciendo énfasis en la resolución del mismo, utilizando GeoGebra, la actividad consistió en guiar a los estudiantes a reproducir la construcción geométrica del problema mediante el uso de segmentos de recta y puntos en el plano en una de las vistas gráficas del programa (ventanas que muestran un eje cartesiano en blanco donde es posible observar la representación gráfica de los objetos matemáticos;, GeoGebra dispone de dos 2 Vistas Gráficas independientes de dos 2 dimensiones y una de tres 3 dimensiones dependiente de la llamada Vista Gráfica 1), mientras que en la segunda vista gráfica se utilizaron puntos, rastros, los ejes y texto para identificar el punto de optimización de forma visual, en la figura 6 se muestra la construcción geométrica del problema.

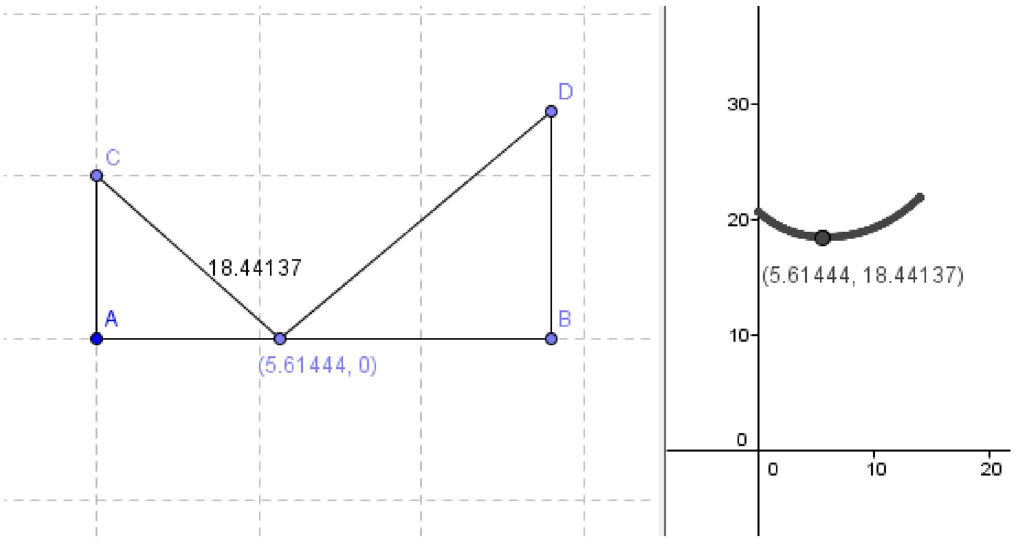


Figura 6. Construcción geométrica del tercer problema en GeoGebra.

Posteriormente se introdujo la función que modela al problema en la barra de Entrada de GeoGebra y utilizando la herramienta de Inspección de funciones se encuentra el punto mínimo de la función completa en el intervalo de 0 a 14 (posibles posiciones de la estaca que separa a las banderas del problema) y se comparó con el resultado aproximado obtenido mediante la construcción geométrica., Mediante esta actividad, los estudiantes fueron capaces de identificar que los problemas de optimización pueden modelarse de forma geométrica, observar sus modificaciones y cambios en tiempo real y obtener resultados aproximados o exactos dependiendo de la cantidad de decimales (resolución) que se solicita, en la figura 7 se muestra la ventana del Inspección de funciones.

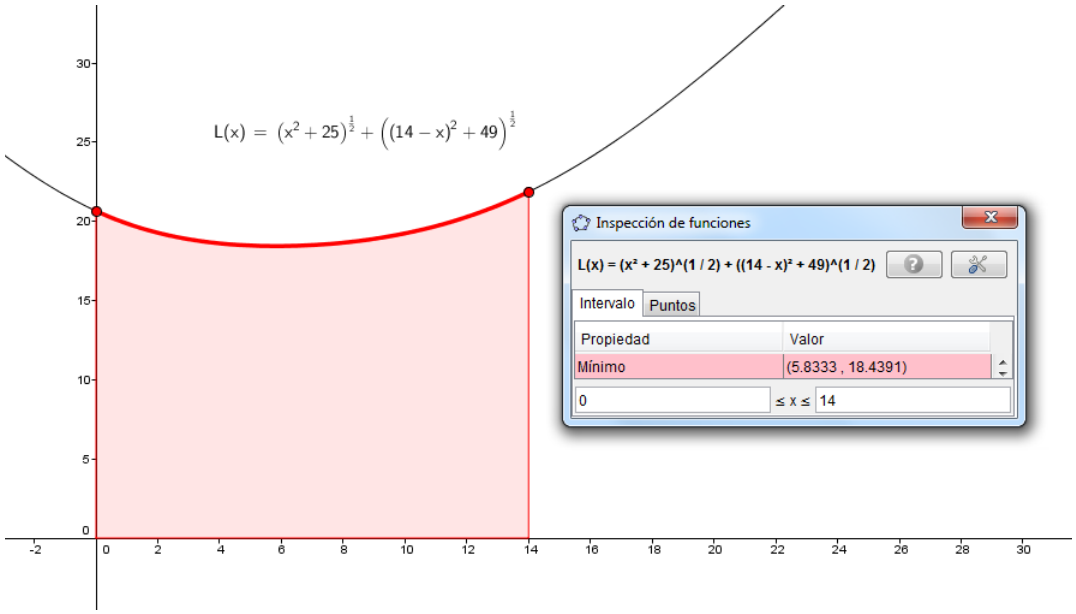


Figura 7. Ventana de Inspección de funciones en GeoGebra.

Terminado el problema y reflexionando sobre las ventajas del uso de GeoGebra para resolver problemas de optimización se orientó a los estudiantes a construir el applet mencionado anteriormente e ilustrado en la figura 1, este applet permite profundizar sobre la dimensión geométrica que existe detrás del algoritmo de derivar e igualar a cero, se puede observar que por medio de la recta tangente a un *punto móvil* en la función gráficay un punto externo a ella con la misma coordenada en *x* que el anteriormente mencionado, y coordenada en *y* igual a la pendiente de la recta tangente, todas las posiciones del punto externo coinciden exactamente con todos los posibles valores en *y* que puede tomar la derivada de la función y que es precisamente donde la derivada cruza al eje de las *x* (su valor en *y* es igual a cero) o bien, la recta tangente a la función es paralela al eje *x* (su pendiente es igual a cero), la función alcanza su punto máximo o mínimo. El mismo procedimiento se realiza sobre la gráfica de la la primer derivada para obtener la segunda derivada y de esta forma, comprobar la concavidad de la función y ubicar sus puntos de inflexión. En la figura 8 puede observarse la construcción de la primera derivada mediante este procedimiento y en la figura 9, la construcción de la segunda derivada.

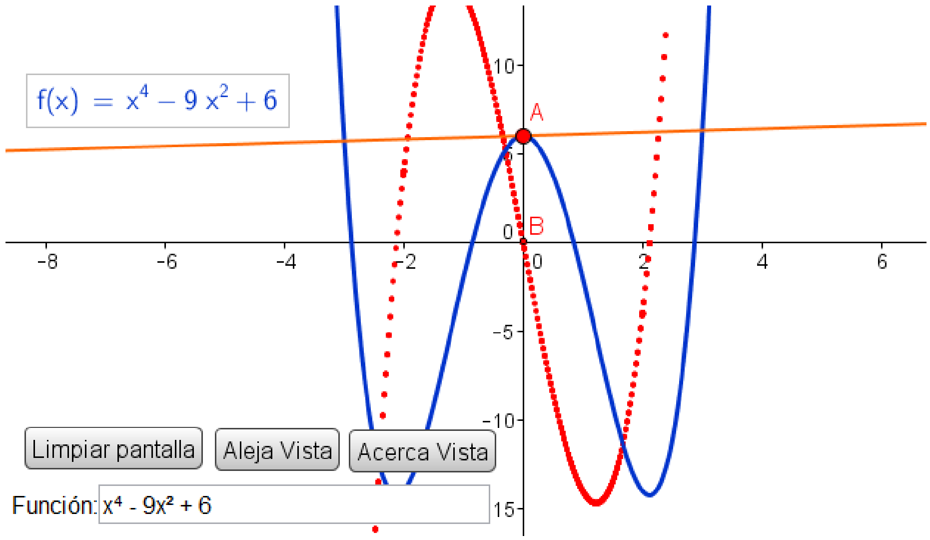


Figura 8. Construcción de la primera derivada con GeoGebra.

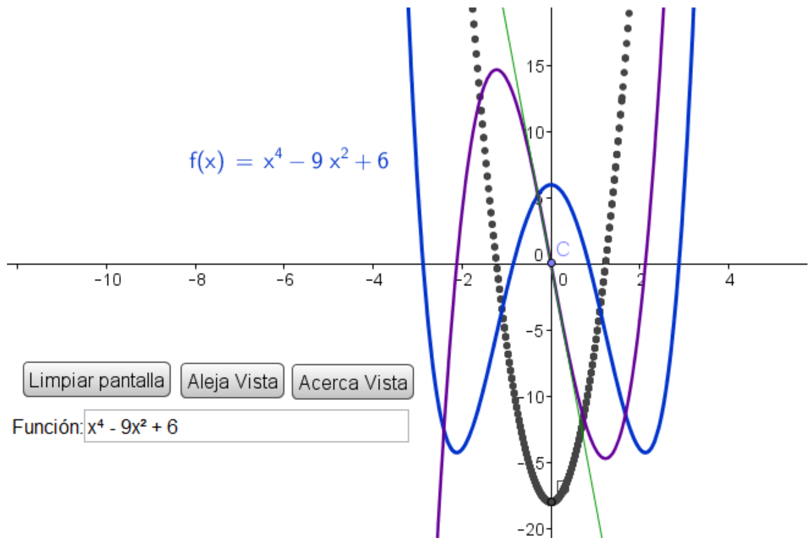


Figura 9. Construcción de la segunda derivada con GeoGebra.

Conclusiones

Con base en las observaciones y los resultados obtenidos en la primera sesión del taller, se puede concluir que al proporcionarles a los estudiantes una función o modelo matemático para encontrar el valor máximo o mínimo de un fenómeno, son capaces de utilizar el algoritmo de derivar e igualar a cero la función para obtener el resultado, sin embargo, al proporcionarles únicamente el texto sin una fórmula establecida de inicio, no son capaces de obtenerla.

Además, fue posible observar que mediante el uso del software GeoGebra y su capacidad de modelar de forma geométrica las situaciones-problema planteadas a los estudiantes, éste les permite profundizar y reflexionar acerca de la dimensión geométrica y variacional del problema, sin necesidad de recurrir al uso del álgebra para el mismo proceso.

Posteriormente, la construcción del applet de las derivadas a partir de la pendiente de la recta tangente permitió a los estudiantes comprender el uso del algoritmo de "derivar e igualar a cero" una función por lo siguiente:

- Fueron capaces de observar en tiempo real cómo cambia la pendiente de la recta tangente y cómo estos cambios son mostrados como un punto que con su movimiento describen el comportamiento de la derivada de la función.
- Mediante las gráficas, identificaron que al cruzar la derivada al eje de las *x*, dicho valor coincide siempre con un máximo o un mínimo de la función.
- Además, apoyados con la gráfica de la segunda derivada, sus signos y sus cruces con el eje de las *x*, les fue posible determinar la concavidad de la función.

Referencias

Cantoral, R. (2011). Fundamentos y Métodos de la Socioepistemología. Simposio en Matemática Educativa. Recuperado el 21 de diciembre de 2013 de http://www.youtube.com/watch?v=byHKKFnAq5Y&feature=youtu.be

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. Distrito Federal, México: Secretaría de Educación Pública.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. L. Radford y D'Amore, B. (Editores invitados), 27-46.

Gómez, P. (2005). Diversidad en la formación de profesores de Matemáticas: en la búsqueda de un núcleo común. *Revista EMA*, *10*, 242-293.

Montiel, G. (2014). Comunicación personal, Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa XXVIII, 31 de Julio 2014.

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del Pensamiento Funcional-Trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari y G. Martínez (Coords.), *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas*, 169 - 205. México: Díaz de Santos.

Nieto, N., Chavira, H. y Viramontes, J. (2011). Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional con el CABRI II PLUS®, *El cálculo y su enseñanza II*. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de Instituto Politécnico Nacional.

Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas.* (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de Instituto Politécnico Nacional, México.

Rojano, T. (2003). *Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México*. Recuperado de http://lets.cinvestav.mx/Portals/0/SiteDocs/MediatecaSS/lets_sur_mediateca_rojano_Incorporaciondeentornos.pdf.