



# REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<http://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores  
del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen VII Número 2 Fecha: julio-diciembre de 2019

ISSN: 2395-955X

## Directorio

Rafael Pantoja R.

Director

Sección: Selección de  
artículos de investigación

Eréndira Núñez P.

Lilia López V.

Lourdes Guerrero M.

## SUPERFICIES CUADRÁTICAS Y SU MANIPULACIÓN FÍSICA EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO

### QUADRATIC SURFACES AND THEIR PHYSICAL MANIPULATION IN THE CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL MODEL

Marco Antonio Guzmán Solano, Karla Liliana Puga Nathal, María Eugenia Puga  
Nathal, Leopoldo Castillo Figueroa, Rafael Pantoja González

Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán, TecNM, SEP. Jalisco, México

[guzmansma@yahoo.com.mx](mailto:guzmansma@yahoo.com.mx), [karlalpn4@gmail.com](mailto:karlalpn4@gmail.com), [kenapn@hotmail.com](mailto:kenapn@hotmail.com),  
[polin86@prodigy.net.mx](mailto:polin86@prodigy.net.mx), [rpantoja3@hotmail.com](mailto:rpantoja3@hotmail.com)

Sección: Experiencias

Docentes

Alicia López B.

Elena Nesterova

Verónica Vargas Alejo

Para citar este artículo:

Guzmán, M. A., Puga, K. L., Puga, M. E., Castillo, L., Pantoja, G., R. (2019). Superficies cuadráticas y su manipulación física en la construcción de un modelo matemático. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*. Vol. VII, No. 2, pp. 48-54. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México: Editorial AMIUTEM.

Sección: GeoGebra

Esnel Pérez H.

Armando López Zamudio

Sitio Web

Edgardo Morales O.

REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM, Año VII, No. 2, julio-diciembre de 2019, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: [revista@amiutem.edu.mx](mailto:revista@amiutem.edu.mx). Dirección electrónica: <http://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

## SUPERFICIES CUADRÁTICAS Y SU MANIPULACIÓN FÍSICA EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO

### QUADRATIC SURFACES AND THEIR PHYSICAL MANIPULATION IN THE CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL MODEL

Marco Antonio Guzmán Solano, Karla Liliana Puga Nathal, María Eugenia Puga Nathal, Leopoldo Castillo Figueroa, Rafael Pantoja González

Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán, TecNM, SEP. Jalisco, México

[guzmansma@yahoo.com.mx](mailto:guzmansma@yahoo.com.mx), [karlalpn4@gmail.com](mailto:karlalpn4@gmail.com), [kenapn@hotmail.com](mailto:kenapn@hotmail.com),  
[polin86@prodigy.net.mx](mailto:polin86@prodigy.net.mx), [rpantoja3@hotmail.com](mailto:rpantoja3@hotmail.com)

#### Resumen

Se presentan los resultados de una investigación, que consiste en la implementación de un escenario lúdico en el que se promueven aprendizajes mediante descubrimiento guiado, en donde los actores principales desarrollen actividades que implican manipulaciones virtuales y físicas de objetos matemáticos en  $R^3$ , con el objetivo principal de promover en estudiantes de ingeniería electrónica construcciones conceptuales y habilidades de visualización de superficies cuadráticas. La investigación se fundamenta a partir de la Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas, ya que es necesario estudiar los objetos matemáticos a partir de sus diversos registros de representación y es de interés para la investigación describir cómo los estudiantes transitan de un registro de representación geométrico a un registro algebraico.

**Palabras clave:** Visualización, registros de representación, superficies cuadráticas, cilindros.

#### Abstract

The results of research are presented, consisting of the implementation of a playful scenario in which learnings are promoted through guided discovery, in which the main actors develop activities involving virtual and physical manipulations of mathematical objects in  $R^3$ , with the main objective of promoting in electronic engineering students conceptual constructions and visualization skills of quadratic surfaces. The research is based on the Theory of the Semiotic Representations Register, since it is necessary to study mathematical objects from their various representation records and it is of interest to research to describe how students move from a geometric representation registers to an algebraic register.

**Keywords:** Visualization, Semiotic Representation Registers, Quadratic surfaces, Cylinders.

#### Introducción

En la actualidad, la formación matemática de un individuo dentro de las aulas, debe tener lugar no solo como la adquisición de un conjunto de reglas, procedimientos y conocimientos; las matemáticas en la escuela deben proveer al individuo los elementos necesarios para que

desarrolle su capacidad para analizar, criticar, razonar y comunicar ideas matemáticas de un modo efectivo, al plantear, formular y resolver problemas matemáticos en diferentes situaciones, sean en un terreno personal, educativo, profesional, social o científico, esto es haber desarrollado la *competencia matemática* (OCDE/PISA, 2003).

Cuando se introduce al estudiante de ingeniería por primera vez al estudio de objetos matemáticos representados en  $\mathbb{R}^3$ , sean puntos, vectores, rectas, planos, gráficas de superficies, de cilindros, etc., se ha observado que presenta dificultades en la construcción de conceptos matemáticos y en la interpretación geométrica de tales objetos (Hitt, 1998). Esta situación se torna como un inconveniente en la matematización (Niss, 2002) de situaciones que involucran principalmente superficies y cilindros.

Por lo anterior, surge la pregunta ¿Cómo promover la apropiación de conceptos matemáticos? ¿Cuáles son los efectos que producen estrategias didácticas basadas en la manipulación de objetos físicos y virtuales en la apropiación y aplicación de conceptos matemáticos? Por tal motivo, con la investigación se genera un escenario en donde, a partir de la manipulación de objetos físicos y a través de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) se promueva, primero la comprensión de conceptos matemáticos y segundo, la solución de situaciones problema que le impliquen interpretar, modelar, tomar decisiones acertadas, discernir y explicar el modelo matemático de diversos objetos físicos.

### Marco Teórico

La Teoría de Representaciones Semióticas (Duval, 1993, 1999) que establece que los conceptos matemáticos, a diferencia de otros conceptos, son tratados desde diversos registros de representación, por lo que la semiótica juega un papel fundamental en la enseñanza de las matemáticas, ya que permiten acceder y relacionarlos con los objetos matemáticos. Parte de la Teoría de Duval (1999) plantea como objeto de estudio, un análisis de los procesos cognitivos que tiene lugar cuando un individuo transita de un registro de representación a otro de un mismo concepto.

La investigación toma como punto de partida la manipulación de objetos físicos (impresiones 3D de diversas figuras) y virtuales (mediante el uso de visores) como mediadores para promover la apropiación de conceptos involucrados con cilindros y superficies cuadráticas donde un estudiante podrá visualizar una representación gráfica y algebraica de dichos conceptos. Algunos ejemplos de dichas impresiones se muestran en la figura 1.



a) Cilindros y superficies cuadráticas impresas



b) Visor para RA

Figura 1. Materiales propuestos.

## Metodología

En la investigación fue importante, por un lado, describir los elementos conceptuales que tienen lugar en los procesos de los estudiantes, para la apropiación de conceptos matemáticos y por otro, los efectos que produce el diseño instruccional basado en la manipulación de objetos físicos y virtuales sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos mencionados. Se requiere un estudio cualitativo basado en entrevistas a profundidad y un estudio cuantitativo, cuya hipótesis se perfila a que la propuesta promueve habilidades de visualización y la apropiación de conceptos matemáticos que involucran al espacio tridimensional. Para esto se diseñó un estudio cuasiexperimental, en donde participaron dos grupos de tercer semestre de la carrera de ingeniería electrónica, los cuales fueron considerados como los grupos de control y experimental.

Previo a la aplicación de la propuesta, se realizó un estudio piloto con la intención de evaluar la pertinencia de los materiales, así como la promoción de construcciones mentales que estos conllevan. Este trabajo piloto dio como resultado la creación de la versión preliminar de los materiales, los que fueron sometidos a un estudio para conocer el impacto que tiene como alternativa para promover la apropiación de conceptos matemáticos y desarrollo de habilidades de visualización en estudiantes del tercer semestre de la carrera de Ingeniería Electrónica.

## Resultados

Se aplicó un examen diagnóstico, a ambos grupos con la finalidad de conocer los conocimientos previos de los estudiantes, necesarios para abordar el tema de superficies cuadráticas como son; plano cartesiano, funciones, gráficas, dominio y rango. Posteriormente se proporcionó el material de trabajo para los participantes del curso. En el material se incluyeron una serie de actividades diseñadas con el objetivo que los estudiantes desarrollen habilidades sobre la visualización de objetos matemáticos en 3D, que marca el programa de trabajo de los institutos tecnológicos, referente a los temas de superficies cuadráticas. Estas actividades fueron diseñadas para promover el estudio de los conceptos matemáticos desde dos registros semióticos: el algebraico y el geométrico (visual). Se les explicó detalladamente la metodología de trabajo, la cual estaba impresa en el cuaderno de trabajo que les fue proporcionado con anterioridad. El trabajo en aula fue de aproximadamente 5 horas presenciales y el tiempo necesario extraclase, que se planteó en proporción por cada hora en el aula, correspondían dos de trabajo.

El cuaderno de trabajo presenta una estructura con teoría y actividades que refuerzan el aprendizaje del participante y permite una colaboración entre los alumnos e instructor. Estas actividades incluyen al análisis de las diferentes superficies que relacionan el modelo matemático con la superficie cuadrática y sus diferentes trazas con sus respectivos planos. Estos conocimientos se logran mediante el uso de diferentes estrategias diseñadas con ese firme propósito. Una de ellas involucró el uso del software **GeoGebra**, también se incluyó una aplicación en realidad aumentada que requirió el uso de un Smartphone o una tableta, así como impresiones 3D de las diferentes superficies cuadráticas.

La aplicación para los teléfonos móviles está disponible en la **play store**, (**Cvectorial ITCG**) y fue pensada para complementar el material de trabajo elaborado con el objetivo de ampliar

las posibilidades de los estudiantes en la visualización de las superficies cuadráticas. Esta aplicación permitió al participante observar la superficie desde diferentes ángulos, además de observar las diferentes trazas de la superficie y sus diferentes intersecciones con los ejes coordenados.

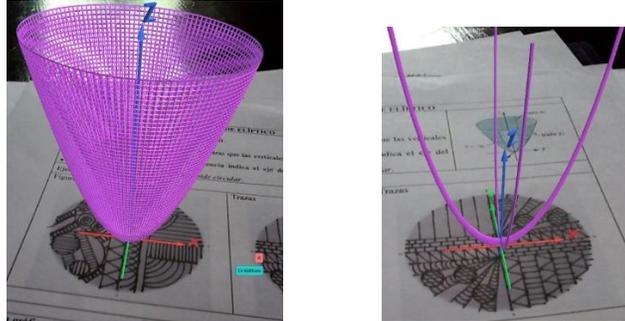


Figura 2. Superficies en ambiente RA.

También se desarrollaron y se imprimieron superficies cuadráticas mediante impresoras 3D, con el objetivo de apoyar el aprendizaje de las diferentes superficies, estas impresiones se mostraron y prestaron a los participantes para el análisis y comparación de las diferentes vistas o trazas respecto a los planos cartesianos.



Figura 3. Ejemplo de impresiones 3D

El otro complemento que se utilizó, fue el software **GeoGebra**, para observar que sucede con los diferentes parámetros involucrados en las diferentes superficies, ya que, con el uso de algunos elementos propios del software como deslizadores, se pueden hacer animaciones que permiten al alumno la modificación de los parámetros y la observación directa en la modificación tanto de la superficie como del modelo matemático involucrado.

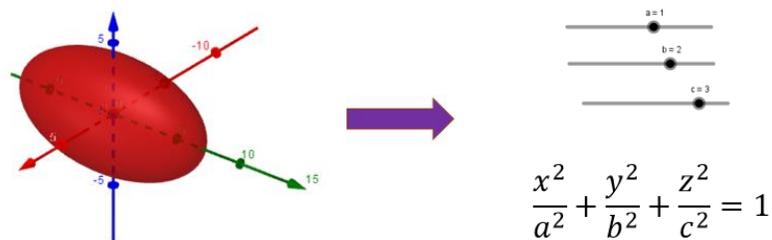


Figura 4. Uso de GeoGebra.

Al término de la actividad, se aplicó un examen postest a ambos grupos, con el objetivo de analizar los avances de los participantes en la visualización de superficies cuadráticas y su relación con su correspondiente modelo matemático. Y de esta manera poder contrastar las medias de ambos grupos mediante una prueba de hipótesis de extremo superior.

Los resultados que arroja el estudio son alentadores para el grupo de investigadores, ya que el análisis estadístico realizado, demuestra que la propuesta favorece a la apropiación y manipulación de los conceptos de superficies cuadráticas. El estudio arroja también información referente a la evaluación de los materiales de trabajo, así como del ambiente virtual creado.

Algo importante que se observó durante la investigación fue el entusiasmo presentado por la mayoría de los estudiantes en el uso de las nuevas tecnologías como es el uso del software Geogebra, la interacción y construcción de los conceptos, ya que resultó accesible para ellos poder analizar las diferentes trazas de las superficies, la superficie en sí y el efecto que tienen en el modelo matemático cuando se varía algunos de sus parámetros.

Sin embargo, la herramienta que más notoriamente motivó los estudiantes fue la aplicación diseñada en Realidad Aumentada para ser empleada mediante tabletas y Smartphone. Esta aplicación permitió a los estudiantes observar las características geométricas de las superficies cuadráticas desde su entorno natural como se observa en la figura 2. Cabe mencionar que incluso estudiantes de otros semestres que no llevaban la materia, descargaron la aplicación y la instalaron en sus smartphones con el objetivo de visualizar las superficies.

Otra de las herramientas incorporadas en la propuesta que hizo impacto de manera positiva fue proporcionar a los estudiantes las superficies cuadráticas impresas en 3D (figura 3), ya que de esta manera no fue necesario únicamente imaginar sus formas en el espacio, sino que pudieron, palparlas, sentirlas y rotarlas, lo que hacía que fuese más significativo el proceso de visualización y la construcción de los correspondientes modelos matemáticos.

### **Conclusiones**

Los resultados que arroja la investigación se analizan en el marco de la planeación didáctica del curso de Cálculo Vectorial de las carreras de Ingeniería que se oferta en el Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán. Además promueven el desarrollo de materiales didácticos mediados por las TIC para el aprendizaje de las matemáticas -punto medular en la investigación- y para el fortalecimiento de la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes. Sin embargo, la principal satisfacción como docentes y como investigadores, es el hecho de haber logrado captar la atención de los estudiantes involucrados directamente y los no involucrados en el análisis del tema de las superficies cuadráticas. Además de darle un sentido didáctico al Smartphone, ya que en la actualidad los estudiantes lo utilizan, en su mayoría para socializar en las redes y no para construir conocimiento.

Por otro lado, la alternativa presentada para ubicar superficies en el espacio, facilitó la apropiación de los conceptos tratados, ya que el estudiante no tuvo que imaginar la superficie ni sus diferentes trazas, ni como analizarla sin estarla observando, modificó parámetros y observó los efectos que esto provoca tanto en la superficie como en los modelos matemáticos de la misma.

Estadísticamente, los resultados observados muestran una mejora en el aprovechamiento del grupo experimental, comparado con los que se obtuvieron en el grupo de control; es necesario mencionar que el rediseño y mejora de los materiales de trabajo se continuará realizando de acuerdo a las sugerencias de los estudiantes, y de los propios investigadores basándose en los resultados obtenidos.

## Bibliografía

- Camarena Gallardo, Patricia (2006). Un enfoque de las Ciencias en contexto desde la didáctica. *Innovación Educativa*, 6(31),21-31.[fecha de Consulta 4 de Junio de 2020]. ISSN: 1665-2673. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=1794/179421073003>
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5, 37-65.
- Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. IUFM de Lille*. Consultado el 25 enero de 2014 de <http://www.didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html>. ISSN 1292-8763.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática*. Vol. 10, No. 2, pp. 23-45.
- Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish kom project* (Proyecto KOM. The national academies: The national academies).
- OCDE. (2003). *The PISA 2003. Assessment Framework Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OCDE.