



# REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

## Directorio

Rafael Pantoja R.  
Director

Eréndira Núñez P.  
Lilia López V.  
Lourdes Guerrero M.  
Sección: Selección de  
artículos

Elena Nesterova  
Alicia López B.  
Verónica Vargas A.  
Sección: Experiencias  
Docentes

Esnel Pérez H.  
Armando López Z.  
Sección: Geogebra

ISSN: 2395-955X

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores  
del Uso de Tecnología en Educación Matemática

Volumen V      Número 1      Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

## LA RAZÓN DE CAMBIO A TRAVÉS DE UNA INTERACCIÓN ELECTRÓNICA

Noelia Londoño Millán, Ana Ávila Alvarado, Alibeit Kakes Cruz  
Universidad Autónoma de Coahuila, México  
noelialondono@uadec.edu.mx, an\_le@hotmail.com,  
akakes@uadec.edu.mx

### Para citar este artículo:

Londoño, N., Ávila, A., y Kakes, A. (2017). La razón de cambio a través de una interacción electrónica. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México.

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: [revista@amiutem.edu.mx](mailto:revista@amiutem.edu.mx). Dirección electrónica: <https://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

# LA RAZÓN DE CAMBIO A TRAVÉS DE UNA INTERACCIÓN ELECTRÓNICA

Noelia Londoño Millán, Ana Ávila Alvarado, Alibeit Kakes Cruz

*noelialondono@uadec.edu.mx, an\_le@hotmail.com, akakes@uadec.edu.mx*

Universidad Autónoma de Coahuila, México

**Palabras clave:** Razón de cambio, Representaciones, GeoGebra

## Resumen

En este artículo se presentan dos actividades para enseñar la razón de cambio, en educación básica secundaria. En ambas el propósito central es contribuir a que los estudiantes entiendan el concepto haciendo uso de diferentes registros de representación. Las actividades están construidas usando lápiz, papel, hojas de trabajo y un archivo electrónico construido en GeoGebra, donde se permite explorar, conjeturar y discutir acerca del tema; así como también desarrollar otras habilidades del pensamiento matemático como son estimar, medir, visualizar, encontrar patrones; involucrando como ejemplo la relación que existe entre el arco, el ángulo central y el radio de una misma circunferencia. En el estudio se describen algunas dificultades que tienen los alumnos de secundaria para emplear los registros de representación y extraer información de tablas, gráficas y conjeturar expresiones algebraicas, sin uso de tecnología. El conjunto de dificultades encontrado justifica en gran medida la propuesta de una interacción electrónica en la que alumno pueda visualizar y encontrar algunas bondades que la resolución con lápiz y papel no le permite como son: obtener una representación gráfica de forma continua, tener diferentes ejemplos del mismo objeto matemático; garantizar las escalas correctas en las gráficas, además de identificar la expresión algebraica que modelan las variables que intervienen.

**Key words:** Rate of change, Representations, GeoGebra

## Abstract

In this paper we present two activities used to teach the reason of change in middle school; in the two of them, the main propose was help the students to understand the concept using different representation registers. The activities were constructed using pencil, paper, worksheets and an electronic file created in GeoGebra, where they can explore, conjecture and discuss about the subject; as the same time they can develop other skills of the mathematical thought, like measure, visualize, find patrons; involving as an example the relation between the arch, the central angle and the radius of the same circumference. In this study we describe some difficulties that the students had to use the representation registers, and obtain information from tables, graphics and conjecture algebraic expressions, without technology; all the difficulties found, justifies the need of the electronic interaction, in which the student can visualize and find some benefits that the resolution with only pen and paper does not allow, like: obtain a continuous graphical representation, have different examples from the same mathematical object, guarantee the correct scales in the graphs, as well as identify the algebraic expression that models the variables who play a part.

## Introducción

Bien pudiera decirse que el estudio de la razón de cambio que se propone en la educación básica secundaria se constituye en el prelude del estudio de la derivada de la educación media superior y superior, por ende, debe verse como un concepto relevante. Es tarea tanto del maestro como del alumnos que se entienda el significado y no reducirlo a una simple fórmula donde intervenga una razón. En los programas oficiales de la secundaria se propone discutir acerca de la razón de cambio en el tercer grado, en el eje denominado manejo de la información, (SEP, 2011). Sin embargo creemos pertinente considerarlo también en el eje de pensamiento algebraico, puesto que los modelos matemáticos aparte de su forma gráfica, también pueden representarse tanto en expresiones algebraicas como numéricas.

Por otra parte, incorporar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas tiene diferentes necesidades tanto del docente como del estudiante, la actividad electrónica que aquí se propone pretende mostrar cómo puede verse el mismo objeto matemático (razón de cambio) explorado en tres diferentes registros de representación, además de una forma dinámica.

## Referente teórico

El presente estudio tuvo como referente la teoría de las representaciones semióticas, particularmente en lo que respecta a la *conversión* y el *tratamiento*, (Duval, 1999; Hitt, 1998, 2003) particularmente de los registros tabular y gráfico. Los registros de representación semióticos en matemáticas no son una opción, casi pudiéramos decir que son una obligación, dado que se conocen y entienden las matemáticas gracias a su existencia y su uso.

Para la didáctica de las matemáticas en general, juega un papel crucial el uso de símbolos, signos, gráficas, expresiones algebraicas, figuras geométricas, entre otras. Estos distintos signos y símbolos permiten dos cosas a los actores principales del proceso educativo: para quien enseña tenga elementos o herramientas para explicar un concepto matemático abstracto; y para quien aprende asociar, juntar, convertir, comparar esos elementos para comprender el concepto matemático. (Londoño, Narro, Vera, 2014, p. 91)

Conviene hacer alusión a la siguiente pregunta ¿Qué significa o qué implica representar? Para responderla se tuvo en cuenta la siguiente respuesta, aunque suene un tanto fuerte “Representar es sustituir, dar presencia a un ausente y, por tanto, confirmar su ausencia.” (Rico, L. 2009, p. 6).

En la publicación del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 2000), una representación se define como una serie de acciones que intervienen en el proceso y resultado de un concepto matemático, es decir, durante el desarrollo de algún contenido matemático, el alumno debe analizar la información que se le presenta y procesarla para luego plasmarla mediante alguna simbología que tenga significado personal (signos, letras, graficas, dibujos, etc.); y como producto de este proceso se reflejará otra representación como concepto matemático, afirman también que la representación es primordial en el estudio de las matemáticas, ya que las representaciones que los alumnos elaboran como (objetos físicos, dibujos, tablas, gráficas y símbolos) les ayudan a comunicar lo que piensan, por lo que si se les permite explorar constantemente el uso de representaciones, ellos podrán aprender, reconocer, comparar y usar diferentes tipos de representaciones en

temas como fracciones, decimales, porcentajes y números enteros, así como en notación exponencial y científica.

La actividad se diseñó para ser aplicada con alumnos de tercero de secundaria en donde se propone como contenidos curriculares a desarrollar: la forma de ecuación de la línea recta, representación gráfica, modelos lineales de la forma  $y = mx$ , relación entre pendiente de la recta y ángulo de inclinación. Así mismo se debe considerar como un valor agregado a este experimento el uso de las herramientas de GeoGebra (Llamas y Carrillo de Albornoz, 2010), para recabar datos de un experimento. También la vinculación de un contenido del área de matemáticas con uno de física (línea recta vs movimiento circular uniforme). Como objetivo central se propone permitir al alumno explorar el significado de la razón de cambio desde distintos registros de representación (gráfico, numérico y algebraico) y que pueda asociar el ángulo de inclinación de una recta con la pendiente de la misma y el significado físico de la proporcionalidad.

### Metodología

*Sobre el instrumento:* Se diseñó y aplicó una hoja de trabajo, donde se enlistan los materiales y se da un conjunto de instrucciones a los alumnos de cómo usar esos materiales, recabar la información correspondiente y responder algunas preguntas que los guiaban para obtener una expresión algebraica. Los materiales que se usaron fueron los siguientes: hilo no elástico, regla graduada, calculadora, hoja de trabajo, (Ávila, 2017), además de círculos con ángulos medidos en radianes en hoja de papel, como se muestra en la figura 1.

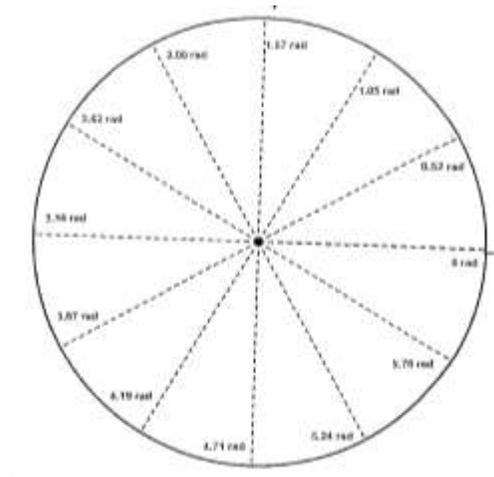


Figura 1. Imagen incluida en la hoja de trabajo para desarrollar la actividad

*Proceso:* Para el desarrollo de esta actividad se entregó a cada equipo una hoja de trabajo además de los materiales necesarios. Los estudiantes sobrepusieron el hilo sobre el arco cuidadosamente, marcaron sobre el hilo y midieron la longitud del arco con la regla, identificaron el ángulo central que corresponde a dicho arco y registraron los datos en las columnas 1 y 2 de la tabla dada.

A continuación debieron obtener las diferencias sucesivas entre los pares de ángulos (columna 3), luego calcularon las diferencias sucesivas de la longitud de arco (columna 4), y por último calcularon el cociente entre la diferencia de las longitudes de los arcos y la diferencia de los valores de los ángulos (columna 5), como se muestra en la figura 2.

1	2	3	4	5
Ángulo radianes	Longitud del arco cm	Diferencia entre pares de ángulos	Diferencia entre pares de longitud de arcos	División de Columna 4/Columna3
0	0	0.58	0.8	5.03
0.52	2.8	0.53	2.8	5.02

Figura 2. Ejemplo de la tabla dada en la hoja de trabajo

Posteriormente los alumnos realizaron una gráfica con las dos variables que intervienen (ángulo central y arco), se les indicó que observarían los datos de la tabla poniendo énfasis en la columna 5, ya que si sus mediciones se realizaron con la mayor exactitud posible, se esperaba que los datos de esta columna reflejaran valores que se aproximaran a una constante.

También se les pidió que estimaran la ubicación del ángulo cuya medida es 2 radianes en el círculo proporcionado, y estimaran la longitud de dicho arco, sin realizar ninguna medición, cabe señalar que este ángulo no aparece en los datos proporcionados en el círculo.

Así mismo los alumnos debían identificar y expresar la relación que existe entre las variables: longitud del arco medida del ángulo central, es decir, que explicaran el comportamiento de ambos valores. Se esperaba que logrando identificar la relación que existe entre dichos valores, también pudieran realizar los cálculos necesarios para obtener la longitud del arco conociendo el valor del ángulo.

Tomando como referencia la gráfica, se les pidió que seleccionaran dos puntos y calcularan el cociente entre la variación de la longitud y la variación de la medida del ángulo. Esto con el propósito que los alumnos pudieran determinar la constante de proporcionalidad que persiste en la gráfica, esto es, que independientemente de la elección de los puntos la pendiente de la recta era misma. Posteriormente se les pidió que midieran la longitud del radio y lo compararan con los datos de la tabla, esperando que observarían que el valor del radio se aproximaba mucho a los valores obtenidos en la columna 5. Y por último debían escribir una expresión algebraica que relacionara la medida del arco y la medida del ángulo central.

*Sobre los participantes:* En esta actividad participaron 85 estudiantes de tercer grado de secundaria, cuyas edades oscilan entre 14 y 15 años, pertenecen a dos escuelas públicas de la zona urbana de la localidad.



Figura 3. Alumno de secundaria desarrollando la actividad con lápiz y papel. (Ávila, 2017)

## Resultados

Una vez recabada la información se procedió a procesarla y se tuvo interés particular en el uso de los diferentes registros de representación que debieron realizar los alumnos, como fueron la tabla, gráfica y expresión algebraica. La primera discusión hace alusión al uso del registro tabular y el respectivo *tratamiento* que era necesario realizar en él, específicamente lo referente a los cálculos de las diferencias y el cociente entre estas. El segundo tiene que ver con los resultados respecto al registro gráfico que se les pidió a los alumnos construir con los datos de la tabla, el registro algebraico, observando aquí que pese a ser el que usan mayormente los maestros, en este estudio fue el menos favorecido, ya que hubo serias dificultades para alcanzarlo.

### *Resultados acerca del uso de las tablas*

Dentro de las indicaciones aparecían un conjunto de operaciones que los alumnos debían realizar con el propósito que desde este registro llegaran a identificar la razón de cambio. Además se eligió una relación de variables bastante sencilla para que ellos pudieran conjeturarla fácilmente. Las indicaciones, el diseño de la hoja de trabajo y el acompañamiento de los estudiantes durante el proceso nos permitió detectar varias dificultades que impidieron que los alumnos llegaran a la constante esperada, (pendiente de la recta) y que están relacionadas con los prerrequisitos de los alumnos, (Ávila, 2017); por ejemplo, dentro de las dificultades se pueden citar que los alumnos: Hacen restas entre variables diferentes, aunque desde la primaria enseñan que “se suman y se restan cosas de la misma especie”, eso no fue tenido en cuenta por algunos alumnos en estos procesos. También, la habilidad de medir tuvo varios conflictos, aunque el hilo proporcionado no era elástico, las medidas obtenidas mediante la experimentación, distan del dato teórico. Por ejemplo, como puede verse en la figura 4: las dificultades aparecen a partir del arco medido, correspondiente al ángulo de 1.57 radianes.

Ángulo radianes	Longitud del arco cm	medida ángulo	medida del arco
0	0	0	0
0.52	2.8	0.52	2.808
1.05	3.6	1.05	5.67
1.57	9.1	1.57	8.478
2.09	11.9	2.09	11.286

*Figura 4.* Comparación de datos experimentales (izquierda) y datos teóricos (derecha)

Estas dificultades contribuyeron en mucho para que los alumnos no pudieran encontrar la constante que se esperaba en la columna 5 de la tabla.

Así mismo podemos enumerar varias dificultades encontradas en los tipos de gráficas realizadas, particularmente lo que respecta a la naturaleza de las variables, aunque las dos variables que intervienen (medida del arco y medida del ángulo) son continuas, el 87% de los alumnos realizó una gráfica discontinua, como se muestran en la figura 5. En las entrevistas pudimos percatarnos que la naturaleza de las variables no es un tema que se contemple en las matemáticas que se enseñen en la secundaria. Este desconocimiento explica el diseño de las gráficas.

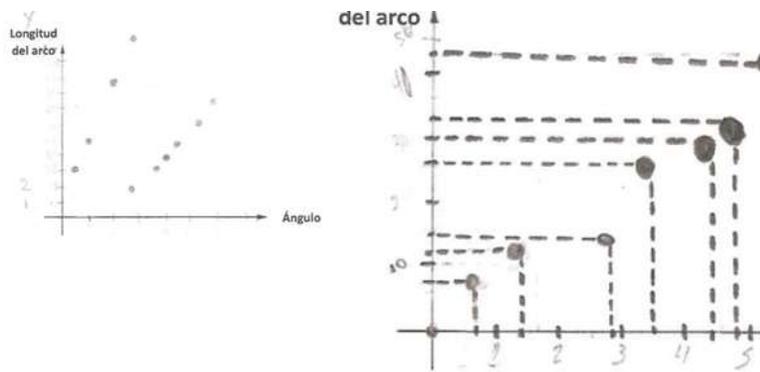


Figura 5. Algunos tipos de representaciones gráficas realizadas por diferentes alumnos

Respecto al proceso de *conversión* Ávila enuncia: “es difícil para los estudiantes transitar del registro tabular al gráfico, debido a dificultades en el dominio de conocimientos relacionados con la ubicación de números en la recta, graficación de puntos en el plano cartesiano, escalas y tipos de gráficos” (Ávila, 2017, p. 41).

Ante la gran cantidad de dificultades que se encontraron para el desarrollo de la actividad con lápiz y papel, optamos por diseñar y proponer la actividad elaborando un archivo electrónico en GeoGebra donde el alumno pueda explorar, visualizar, conjeturar, etc. considerando la postura de Fernando Hitt, quien afirma “La tecnología está presente en nuestra vida diaria, por tanto, es importante reflexionar lo que podríamos realizar en el aula de matemáticas en apoyo a la enseñanza y al aprendizaje de las mismas en ambientes tecnológicos.” (Hitt, 2013, p. 1).

Procedimiento: Con ayuda del software GeoGebra se construyó un archivo electrónico, un dispositivo como el que se presenta en la siguiente figura 1. Para este experimento se requiere que el ángulo esté medido en radianes.

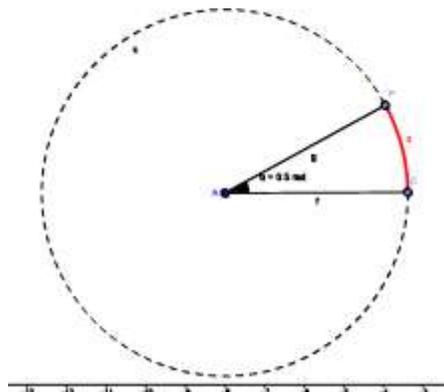


Figura 6. Figura construida en GeoGebra con radio fijo  $r$ , arco  $d$  y ángulo central  $\alpha$  (el ángulo y el arco son variables)

La interacción electrónica permite que cuando se mueve el punto P, debe ir aumentando el valor del arco  $d$ , y debe ir cambiando el valor ángulo  $\alpha$ . Al considerar la variable ángulo como independiente y la variable arco como variable dependiente (eje x, e y respectivamente) y graficar en el plano cartesiano se observa algo similar a lo que se muestra en la figura 2.

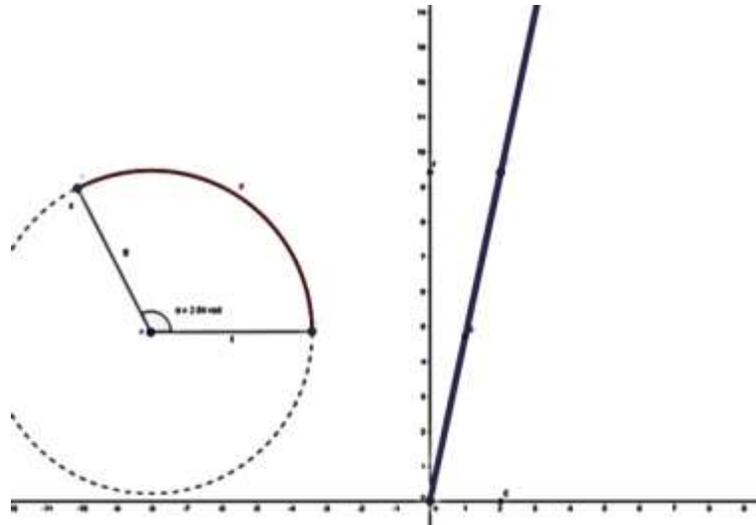


Figura 7. Relación ángulo y arco, fotografía del archivo construido

Al poner dos puntos sobre el lugar geométrico y trazar la recta, el software de forma inmediata proporciona la ecuación que le corresponde a la recta. Esta ecuación puede escribirse de la forma  $y = mx$ , siendo  $m$  la constante de proporcionalidad, que para las variables relacionadas corresponde al radio (fijo) de la circunferencia dado.

De manera simultánea se pueden hacer los cálculos de la razón de cambio de las variables que intervienen, en diferentes momentos del experimento, para ello se usa la hoja de cálculo disponible en el software como aparece en la figura 2,

	N	A	B	C	D	E	F
1	α	arco	diferenci...	diferenci...	razon ar...		
2	0.168 rad	0.873	0.021 rad	0.097	4.62		
3	0.189 rad	0.969	0.021 rad	0.097	4.62		
4	0.21 rad	1.066	0.021 rad	0.097	4.62		
5	0.231 rad	1.163	0.021 rad	0.097	4.62		
6	0.252 rad	1.26	0.021 rad	0.097	4.62		
7	0.273 rad	1.357	0.021 rad	0.097	4.62		
8	0.294 rad	1.453	0.021 rad	0.097	4.62		
9	0.315 rad	1.55	0.021 rad	0.097	4.62		
10	0.335 rad	1.647	0.021 rad	0.097	4.62		
11	0.356 rad	1.744	0.021 rad	0.097	4.62		
12	0.377 rad	1.84	0.021 rad	0.097	4.62		
13	0.398 rad	1.937	0.021 rad	0.097	4.62		
14	0.419 rad	2.034	0.021 rad	0.097	4.62		
15	0.44 rad	2.131	0.021 rad	0.097	4.62		
16	0.461 rad	2.227					
17							

Figura 8. Fotografía de la hoja electrónica, con las variables arco y ángulo en radianes, para un radio fijo de 4.62 cm. extraída del archivo de GeoGebra

Los elementos arriba mencionados (figura, gráfica, ecuación y tabla), se pueden visualizar en el mismo archivo; el dinamismo del software permite darse cuenta de los cambios de las variables, de manera simultánea, además la exactitud de los cálculos realizados con GeoGebra y permitió encontrar la constante buscada como se observa en la columna E, de la figura 8.

## Conclusiones

Consideramos que aunque en el aula no se debe omitir la actividad con lápiz y papel, cada maestro debería permitir además que el alumno interactúe con un archivo como este, en donde se puede visualizar el mismo contenido matemático desde diferentes registros de representación, que hará al estudiante más consciente respecto a idea de continuidad de variables, de la relación de proporcionalidad y desde luego la razón de cambio, con variables medibles que difieren de la  $x$  e y tradicionalmente usadas en el desarrollo de estos temas.

El dinamismo del software permite al estudiante no solo tener un modelo para una circunferencia particular como el mostrado como ejemplo, sino varios ejemplos con solo cambiar el radio.

Recomendamos incluir en los programas de estudio de secundaria la clasificación de las variables en continuas y discretas, el estudio muestra evidencias de la ausencia de este contenido matemático, que es fundamental para aterrizar las matemáticas a un contexto.

## Referencias bibliográficas

- Ávila, A. (2017). Conflictos para abordar el concepto de razón de cambio a través de distintos registros de representación con alumnos de secundaria. Tesis de maestría no publicada. Universidad autónoma de Coahuila.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción Miriam Vega Restrepo. Univalle. Colombia: Artes gráficas.
- GeoGebra. Versión 5.0.268.0-3D. <http://www.geogebra.org>
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. En *Educación Matemática* vol. 10, no. 2 recuperado el 22 de marzo de 2015. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol10/2/03Hitt.pdf>
- Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología en *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* 10, 213-224.
- Hitt, F. (2013). Qué tecnología usar en el aula de matemáticas y porque? *Revista Electrónica AMIUTEN*. 1,1 1-18
- Llamas, I., Carrillo de Albornoz, A., (2010). GeoGebra. *Mucho más que Geometría dinámica*. Andalucía: Ra-Ma.
- Londoño, N. Narro, P. Vera, A. (2014). Indagando sobre el límite de funciones desde diferentes registros de representación. Revista: *El cálculo y su enseñanza*, vol. 7, Departamento de matemática educativa México: CINVESTAV
- Rico, L. (2009). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. PNA, 4(1), 1-14.
- SEP. (2011). *Programas de Estudio 2011, Guía para el maestro educación básica secundaria matemáticas*. México: SEP.

The National Council of Teacher of Mathematics. NCTM. (2000). *Principios y estándares curriculares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.